

Cours Magistraux

olivier.gallot-lavallee@grenoble.cnrs.fr

Electronique d'Instrumentation I

+Electronique d'Instrumentation II (Module Complémentaire)

(SP3 08-09)

Sommaire

Sommaire	2
Chapitre 1. Amplificateurs Opérationnels et montages usuels (3h)	4
1.1. Historique de l'amplificateur opérationnel	4
1.2. Présentation de l'ampli-op (Rappels)	4
1.2.1. Technologie du LM 741	4
1.2.2. Représentations symboliques	5
1.2.3. Caractéristique entrée-sortie	6
1.2.4. Modèle équivalent de l'ampli-op	6
1.3. L'approximation de l'ampli-op idéal (Rappel)	7
1.3.1. Modèle équivalent de l'ampli-op idéal	7
1.3.2. L'ampli-op idéal en contre-réaction: montages fondamentaux	8
1.3.2.1. Montages non inverseurs (Noninverting amplifieur)	9
1.3.2.2. Montage suiveur (unity gain follower)	9
1.3.2.3. Montage inverseur (inverting amplifieur)	10
1.3.2.4. Montage additionneur (adder)	10
1.4. L'ampli-op réel	11
1.4.1. Imperfections statiques	12
1.4.1.1. Tension de décalage d'entrée	12
1.4.1.2. Courant de polarisation d'entrée	12
1.4.1.3. Impédances d'entrée et de sortie	13
1.4.2. Imperfections dynamiques	13
1.4.2.1. Gain en boucle ouverte	13
1.4.2.2. Gain en boucle fermée (effet du gain en boucle ouverte)	14
1.4.2.3. Taux de réjection en mode commun	16
1.4.2.4. Vitesse de montée $V/\mu s$ (Slew Rate)	17
1.5. Données techniques de l'ampli-op	18
Chapitre 2. De l'amplificateur différentiel à l'amplificateur d'instrumentation (4h)	23
2.1. L'ampli-diff en mesures physiques	23
2.2. Exemples d'applications de l'ampli-diff	23
2.2.1. Le pont de Wheatstone	23
2.2.2. Applications biomédicales: électrocardiogramme (ECG) et électro-encéphalogramme (EEG)	24
2.3. Généralités sur les ampli-diff: réjection en mode commun d'un ampli-diff	25
2.4. Montage d'ampli-diff	25
2.4.1. Influence de la précision des résistances	27
2.4.2. Influence des résistances des sources e_1 et e_2 : amélioration du montage précédent	28
2.5. Montage d'ampli-diff élaboré (ampli-d' instrumentation)	28
2.5.1. L'ampli-d' instrumentation intégré	30
Chapitre 3. Le filtre actif (3h)	31
3.1. Notion de filtrage (Rappel)	31
3.2. Classification des filtres	31
3.3. Filtres actifs à base d'ampli-op idéaux	33
3.3.1. Filtre passe-bas du 1 ^{er} ordre (ou filtre à 20 dB/déc = 6 dB/octave)	33
3.3.2. Filtre passe-haut du 1 ^{er} ordre (ou filtre à 20 dB/déc = 6 dB/octave)	33
3.3.3. Filtre passe-bas du 2 ^{ième} ordre (ou filtre en -40 dB/décade)	34
3.3.4. Filtre passe-haut du 2 ^{ième} ordre (ou filtre en 40 dB/décade)	36
3.3.5. Filtre passe-bande (filtre réjecteur)	37

3.3.6. Filtre coupe-bande (filtre réjecteur) 38

Chapitre 4. Traitement génération et conversion de signaux (6h) EI II MC..... 39

4.1. Comparateurs de signaux (Rappel) 39

4.1.1. Comparateur à zéro 39

4.1.2. Comparateur à référence non nulle 39

4.1.3. Comparateurs à hystérésis: Trigger de Schmitt..... 40

4.1.4. Comparateurs à fenêtre..... 42

4.2. Convertisseurs de signaux 42

4.3. Générateurs de signaux astables et monostables 44

4.3.1. Oscillateurs à relaxation 44

4.3.2. Le temporisateur 555 (Timer 555) 45

4.3.2.1. Fonctionnement en bistable (astable)..... 46

4.3.2.2. Fonctionnement en monostable..... 47

4.4. Modulation 47

4.4.1. Modulation d'amplitude (AM) 48

4.4.2. Modulation de fréquence (FM) 48

4.4.2.1. Exemple de modulateur FM: l'oscillateur commandé en tension (OCT)..... 48

4.4.3. Modulation en largeur d'impulsions (MLI) 49

4.4.3.1. Exemple de modulateur MLI: l'oscillateur 555 en mode monostable..... 49

Annexe: Lexique Français / Anglais 51

Annexe: Théorème de Millman..... 52

Annexe: De l'équation différentielle à la fonction de transfert 53

Résumé 59

Bibliographie..... 59

Chapitre 1. Amplificateurs Opérationnels et montages usuels (3h)

1.1. Historique de l'amplificateur opérationnel

Les essais esquissés de réalisation d'ampli-op remontent au début du 20^{ème} siècle. Le développement de ces dispositifs, basés initialement sur l'utilisation de tubes à vide, connût une révolution suite à l'invention majeure de la contre-réaction dont la théorie et les principes de base furent élaborés en 1927 par Harlod Black (jeune ingénieur chez Bell Labs). D'autres avancées dans ce domaine commencèrent avant la deuxième guerre mondiale et se poursuivirent pendant et après celle-ci.

L'amplificateur opérationnel (operational amplifier) appelé ainsi pour la première fois en 1947, doit son nom au fait qu'il peut être utilisé pour effectuer des opérations mathématiques. Il fut d'ailleurs à la base des calculateurs analogiques et des ordinateurs de la première génération.

Après l'invention du transistor en 1947 par John Bardeen, Walter Brattain et William Schockley (Nobel de Physique 1956) travaillant pour le compte de Bell Labs, les ampli-op de la 1ère génération cédèrent place à la 2ième génération basée sur l'utilisation de transistors.

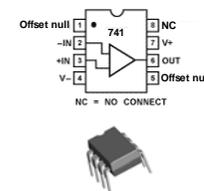
Deux ans plus tard, l'invention du circuit intégré (CI) en 1958 par Jack Kilby travaillant pour le compte de Texas Instruments (Prix Nobel de Physique 2000) marqua un tournant dans l'histoire du développement de l'ampli-op.

En 1965, Fairchild Semiconductor présenta sur le marché le μ A709, le premier ampli-op en CI largement répandu. Malgré son succès, cet ampli-op présentait de nombreux défauts. Vint ensuite le μ A741. Son prix relativement faible et son utilisation facile lui valurent un énorme succès. Les fabricants de semi-conducteurs se lancèrent alors dans la course pour produire des ampli-op de performances comparables au μ A741 : Motorola fabriqua le MC1741, National Semiconductor le LM741 et Texas Instruments le SN72741. Tous ces ampli-op sont équivalents et possèdent donc les mêmes spécifications techniques. Par soucis de simplification, la plupart des électroniciens laissent tomber les préfixes et appellent tous ces ampli-op, des «741».

1.2. Présentation de l'ampli-op (Rappels)

1.2.1. Technologie du LM 741

La plupart des ampli-op se présentent sous la forme d'un circuit intégré (CI) à 8 broches (Figure 1)



- (+IN) ou (u): Entrée non inverseuse
- (-IN) ou (v): Entrée inverseuse
- (OUT) ou (s): Sortie
- (V+) ou (+Vcc) : Alimentation symétrique positive
- (V-) ou (-Vcc) : Alimentation symétrique négative
- (Offset null) : Annulation de la tension de décalage d'entrée
- (NC) : Non connectée

Figure 1: Schéma de câblage du LM741 de National Semiconductor

Le circuit interne du LM741 (Figure 2) comporte une vingtaine de transistors bipolaires, une dizaine de résistances et une capacité (30pF) dite de compensation.

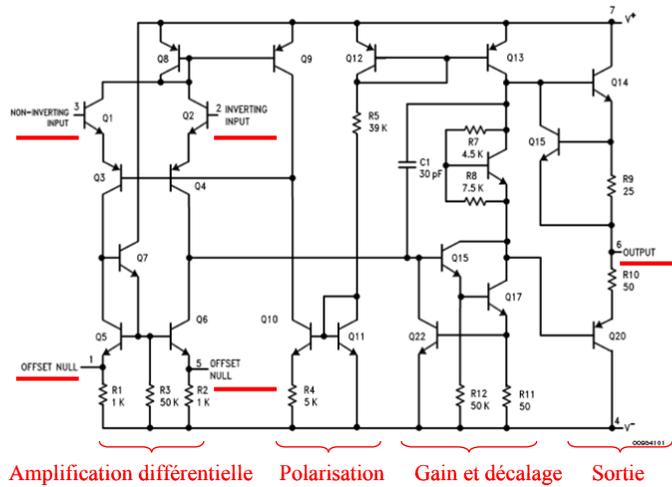


Figure 2: Circuit interne du LM741

Quelque soit la complexité du circuit interne de l'ampli-op, le premier étage est un amplificateur différentiel (effectuant la différence entre les deux tensions d'entrée), suivi ensuite d'autres étages permettant d'accroître les performances du système (gain, impédances, linéarité, etc...).

Le 741 est un standard d'ampli-op à usage général et à faible coût (quelques dizaines de centimes d'euro/pièce). La majorité des montages à base ampli-op peut être réalisée avec un 741. Le concepteur fait appel à d'autres ampli-op seulement lorsqu'il s'agit d'accroître certaines performances.

1.2.2. Représentations symboliques

Dans tous les schémas électroniques, on représente l'ampli-op par un symbole graphique. On peut utiliser indifféremment l'un des ces schémas de la Figure 3.

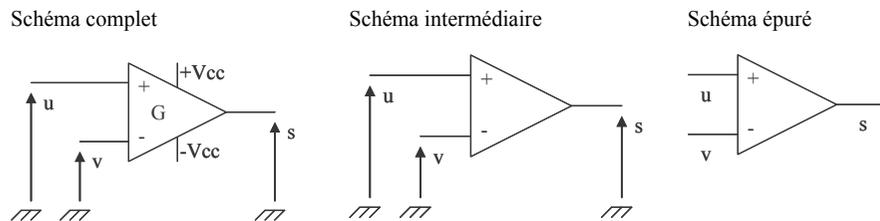


Figure 3: Exemples de représentations symboliques de l'ampli-op

1.2.3. Caractéristique entrée-sortie

L'ampli-op en régime linéaire est caractérisé par l'Éq. 1.

Éq. 1: Equation fondamentale de l'ampli-op (régime linéaire)

$$s = G_0(u - v) \quad \forall |u - v| < V_{sat} / G_0$$

G_0 : Gain en boucle ouverte de l'ordre 10^5 (ou open-loop gain); V_{sat} : Tension de saturation déterminée par V_{cc} ;

L'ampli-op en régime saturé est caractérisé par l'Éq. 2.

Éq. 2: Equation fondamentale de l'ampli-op (régime saturé)

$$s = +V_{sat} \cong +V_{cc} - 1 \quad \forall u - v > V_{sat} / G_0 \quad \text{et} \quad s = -V_{sat} \cong -V_{cc} + 1 \quad \forall u - v < -V_{sat} / G_0$$

Mais on caractérise généralement l'ampli-op par la représentation graphique suivante (Figure 4) qui a le mérite de synthétiser les deux relations.

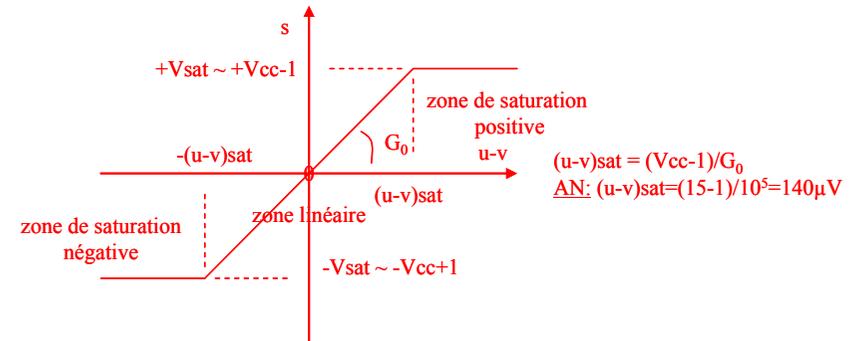


Figure 4: Caractéristique de l'ampli-op

L'ampli-op en boucle ouverte (sans contre-réaction) n'est jamais utilisé comme amplificateur linéaire. En effet le gain étant élevé, il suffit d'une très faible tension différentielle (u-v) (du bruit par exemple) pour causer la saturation de la sortie. Ce même gain est très mal défini et varie avec la température et les tensions d'alimentation. Ceci rend ainsi la sortie peu stable ... nous allons voir plus loin comment l'ampli-op est exploité.

1.2.4. Modèle équivalent de l'ampli-op

Vue de l'entrée, l'ampli-op est équivalent à une impédance d'entrée Z_e . Vu de sa sortie, il peut être représenté par un générateur équivalent de Thévenin. Ce dernier est donc une source réelle de tension de force électromotrice $G_0(u-v)$ et d'impédance interne (impédance de sortie dans ce cas) Z_s (Figure 5).

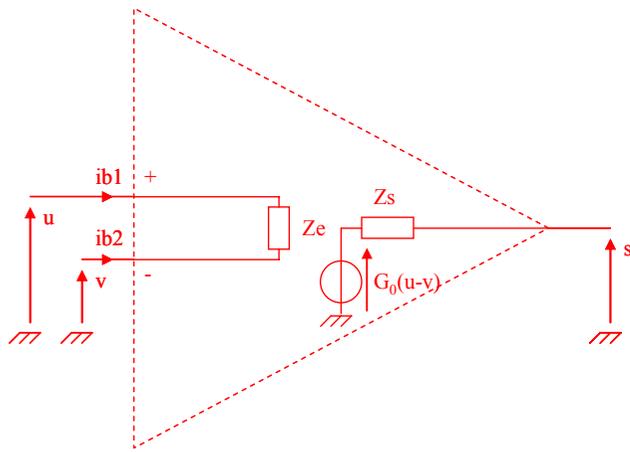


Figure 5: 1er Modèle équivalent de l'ampl. $ib1$ et $ib2$: Courants d'entrée (input current). Z_e : Impédance d'entrée (input impedance). Z_s : Impédance de sortie (output impedance). G_0 : Gain en boucle ouverte (Open-loop gain)

1.3. L'approximation de l'ampli-op idéal (Rappel)

L'ampli-op actuel est tellement proche de la perfection que l'approximation de l'ampli-op idéal reste valable dans de nombreuses applications.

1.3.1. Modèle équivalent de l'ampli-op idéal

Le modèle équivalent de l'ampli-op idéal (Figure 6, Figure 7) montre qu'il est toujours saturé car le gain en boucle ouverte est infini (excepté pour $(u-v)=0$ mais alors il n'y a rien à amplifier). L'ampli-op idéal en boucle ouverte ne peut, bien évidemment, pas être utilisé comme amplificateur.

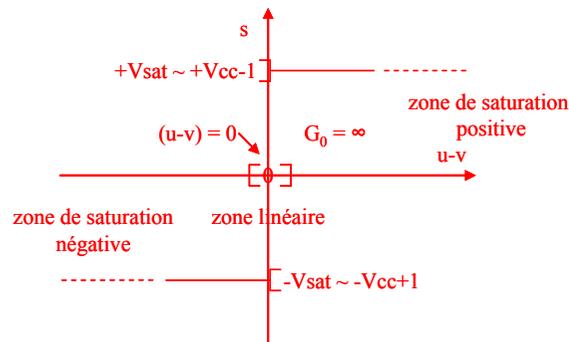


Figure 6: Caractéristiques du modèle équivalent de l'ampli-op idéal

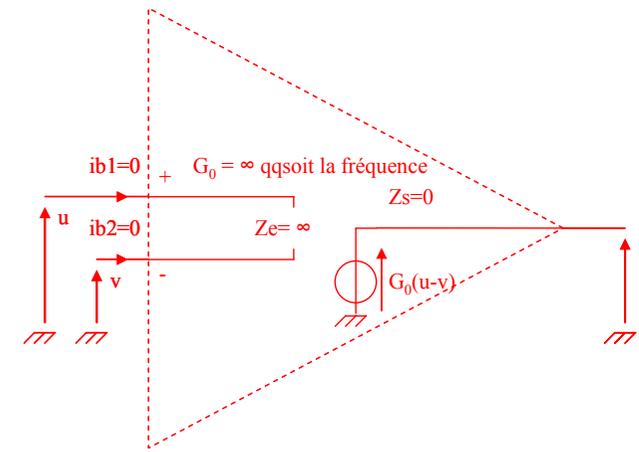


Figure 7: Modèle équivalent de l'ampli-op idéal. $ib1$ et $ib2=0$: Courants d'entrée (input current). $Z_e = \infty$: Impédance d'entrée (input impedance). $Z_s = 0$: Impédance de sortie (output impedance). $G_0 = \infty$: Gain en boucle ouverte (Open-loop gain)

On fait donc appel à la contre-réaction pour diminuer le gain du montage...

1.3.2. L'ampli-op idéal en contre-réaction: montages fondamentaux

En 1927, Harold Black se rend au travail dans son laboratoire de Bell Labs. Relaxé dans son transbordeur, il note quelques équations au sujet d'une nouvelle conception. Ce jeune ingénieur électronique avait un problème à résoudre; les lignes téléphoniques ne cessant de s'étendre sur des distances très longues, nécessitaient l'utilisation d'amplificateurs pour compenser l'atténuation du signal de parole dans les câbles de transmission. Le déficit était de concevoir des amplificateurs avec un gain très élevé et très stable. En effet, pour des applications telles que la téléphonie, la tolérance sur la valeur souhaitée du gain doit être très faible. Beaucoup de tentatives furent ébauchées pour développer des ampli-op stables en terme de gain d'amplification. Cependant, même avec un ajustement minutieux du gain en usine, les variations et les dérives de celui ci devenaient incontrôlables dans les conditions réelles d'utilisation. L'instabilité du gain était essentiellement due aux variations de la température et des alimentations des lignes téléphoniques. Imaginons donc une communication téléphonique où la voix de votre interlocuteur change incessamment: voix peu audible lorsque le gain diminue et déformée lorsque le gain est trop grand à cause de la saturation de l'ampli! C'est une situation, selon toute évidence, très peu agréable.

Dans sa nouvelle conception, Harold Black part de l'idée que les dérives des composants passifs (résistances par exemple) sont beaucoup moins importantes que celles des composants actifs et que le problème serait résolu si l'on pouvait rendre le gain de l'amplificateur dépendant seulement des composants passifs extérieurs.

La solution proposée par H. Black est de construire un amplificateur avec un gain beaucoup plus élevé que ne le nécessite l'application. Ensuite, un taux ou une "partie" de la tension de sortie est "prélevée" (à l'aide d'un diviseur de tension par exemple) et réinjectée à l'entrée inverseuse de l'ampli de telle sorte que le gain du montage (ampli et composants passifs externes) soit largement dépendant de éléments externes et très peu dépendant du gain

de l'ampli lui même. On parle donc de contre-réaction ou réaction négative. Le gain ainsi réalisé est défini avec précision et il est beaucoup moins sensible aux variations de la température ou des alimentations.

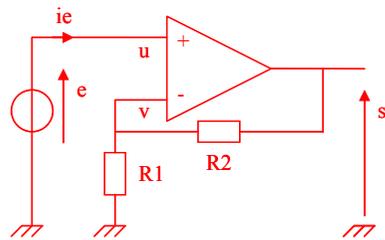
Black affine son idée de contre-réaction et dépose une demande de brevet. L'office de brevets rejette sa demande en qualifiant son concept de "nouvelle absurdité sur le mouvement perpétuel"...

Actuellement, tous les ampli-op dans leur fonction d'amplification sont conçus pour être utilisés en contre-réaction. Outre, son gain stable, on verra qu'un ampli-op "contre-réactionné" possède une bande passante plus large et une moindre distorsion.

1.3.2.1. Montages non inverseurs (Noninverting amplifier)

Dans un montage non inverseur (Figure 8) à base d'ampli-op, le signal d'entrée (signal à amplifier) attaque l'entrée non inverseur. On réinjecte à l'entrée inverseuse une fraction de la tension de sortie grâce au pont diviseur constitué par les résistances R1 et R2.

On cherche à établir l'expression du gain (en tension) statique noté $A_0=s/e$ et de l'impédance d'entrée du montage notée $Z_{e'}=e/i_e$.



Éq. 3: Gain statique et Impédance d'entrée du montage non-inverseur

$$A_0 = s/e = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

$$Z_{e'} = e/i_e = Z_e = \infty$$

Figure 8: Montage non inverseur "haute impédance d'entrée"

Éq. 4: Démo (non-inverseur)

Hypothèse : $|u - v| < V_{sat} / G_0$ (ie.régimelinaire) $\Rightarrow (u - v) = s/G_0 = s/\infty = 0 \Rightarrow u = v = e$ (1)

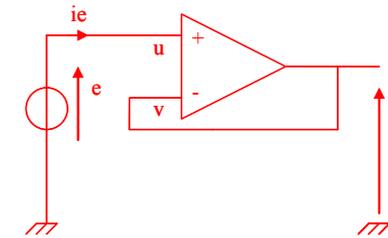
Millman : $v = \frac{\frac{0}{R_1} + \frac{s}{R_2}}{1/R_1 + 1/R_2} \Rightarrow v = \frac{s/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} = \frac{s.R_1.R_2}{(R_1 + R_2).R_2} = \frac{s.R_1}{(R_1 + R_2)}$ (2)

(1)et(2) $\Rightarrow s/e = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

$i_e = 0$ car $Z_e = \infty \Rightarrow Z_{e'} = e/i_e = \infty$

1.3.2.2. Montage suiveur (unity gain follower)

On peut astucieusement déduire ses caractéristiques à partir de celles du montage inverseur en imposant $R_1 = \infty$ et $R_2 = 0$ (Figure 9).



Éq. 5: Gain statique et Impédance d'entrée du montage suiveur

$$A_0 = s/e = 1$$

$$Z_{e'} = e/i_e = Z_e = \infty$$

Figure 9: Montage suiveur "haute impédance d'entrée"

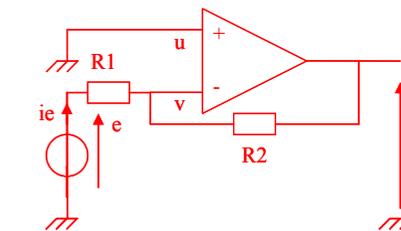
Éq. 6: Démo (suiveur)

Hypothèse : $|u - v| < V_{sat} / G_0$ (ie.régimelinaire) $\Rightarrow (u - v) = s/G_0 = s/\infty = 0 \Rightarrow u = v = e$ (1)

$s = v = e \Rightarrow s/e = 1$

$i_e = 0$ car $Z_e = \infty \Rightarrow Z_{e'} = e/i_e = \infty$

1.3.2.3. Montage inverseur (inverting amplifier)



Éq. 7: Gain statique et Impédance d'entrée du montage inverseur

$$A_0 = s/e = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$Z_{e'} = R_1$$

Figure 10: Montage inverseur "impédance d'entrée réglable"

Éq. 8: Démo (inverseur)

Hypothèse : $|u - v| < V_{sat} / G_0$ (ie.régimelinaire) $\Rightarrow (u - v) = s/G_0 = s/\infty = 0 \Rightarrow u = v = 0$ (1)

Millman : $v = \frac{\frac{e}{R_1} + \frac{s}{R_2}}{1/R_1 + 1/R_2}$ (2)

(1)et(2) $\Rightarrow 0 = \frac{e}{R_1} + \frac{s}{R_2} \Rightarrow s/e = -\frac{R_2}{R_1}$

$i_e = e/R_1 \Rightarrow Z_{e'} = e/i_e = e.R_1/e = R_1$

1.3.2.4. Montage additionneur (adder)

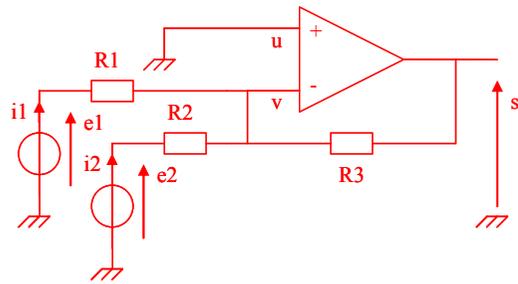


Figure 11: Montage additionneur "opération fondamentale"

Éq. 9: Gain statique et Impédance d'entrée du montage additionneur

$$s = -R3 \left(\frac{e1}{R1} + \frac{e2}{R2} \right)$$

si $R1 = R2$ alors

$$Ao = s / (e1 + e2) = -\frac{R3}{R1}$$

$$Ze1' = R1 \text{ et } Ze2' = R2$$

Éq. 10: Démo (additionneur)

Hypothèse : $|u - v| < V_{sat} / G_0$ (ie régime linéaire) $\Rightarrow (u - v) = s / G_0 = s / \infty = 0 \Rightarrow u = v = 0$ (1)

$$\text{Millman : } v = \frac{\frac{e1}{R1} + \frac{e2}{R2} + \frac{s}{R3}}{1/R1 + 1/R2 + 1/R3} \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow 0 = \frac{e1}{R1} + \frac{e2}{R2} + \frac{s}{R3} \Rightarrow s = -R3 \left(\frac{e1}{R1} + \frac{e2}{R2} \right) \text{ si } R2 = R1 \text{ alors } s/e = -\frac{R3}{R1} (e1 + e2)$$

$$i1 = e1 / R1 \Rightarrow Ze1' = e1 / i1 = e1.R1 / e1 = R1 \text{ et } i2 = e2 / R2 \Rightarrow Ze2' = e2 / i2 = e2.R2 / e2 = R2$$

1.4. L'ampli-op réel

Dans de nombreuses applications de la "mesure physique", l'approximation de l'ampli-op idéal n'est plus suffisante, il faut alors tenir compte des principales imperfections de l'ampli-op (Figure 12), que nous allons détailler dans les paragraphes suivants.

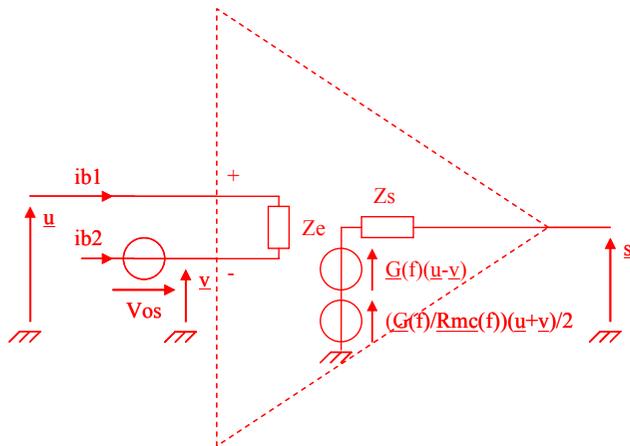


Figure 12: 2^{ème} Modèle équivalent de l'ampli-op. $ib1$ et $ib2$: Courants d'entrée (input current). Vos : Tension de décalage d'entrée (input offset voltage). Ze : Impédance d'entrée (input impedance). Zs : Impédance de sortie (output impedance). $G(f)$: Gain en boucle ouverte (Open-loop gain). $Rmc(f)$: Taux de rejection en mode commun (Common mode rejection ratio).

1.4.1. Imperfections statiques

1.4.1.1. Tension de décalage d'entrée

Cette imperfection de l'ampli-op est due à une dissymétrie inévitable de construction. Dans le cas d'ampli-op basés sur des transistors bipolaires (Figure 2), la tension de décalage d'entrée a pour origine la différence entre les tensions V_{be} (environ 0,6V) des deux transistors de l'étage différentiel d'entrée. On montre (TD) que la tension de décalage en sortie notée Δs (due à la tension de décalage d'entrée Vos) est égale au produit de la tension Vos par le gain du montage (Éq. 11).

Éq. 11: Tension de décalage d'entrée

$$|\Delta s| = |Vos.Ao|$$

Le LM 741 présente typiquement une tension de décalage d'entrée de l'ordre de 1 mV à 24°C alors que celle-ci peut être aussi faible que 25µV à 24°C pour des ampli-op de précision (eg. OP177F).

Dans le cadre d'une mesure physique, la tension d'offset doit être prise en compte ne serait-ce que pour établir un calcul d'erreur. Quand le cas l'exige, il est aussi possible de procéder à sa compensation. Pour ce faire, la plupart des constructeurs proposent, dans leur fiche technique (Data Sheet) une compensation interne qui fait appel à un potentiomètre et à une des deux tensions d'alimentation symétrique (Figure 13). Si l'ampli-op ne possède pas de broche de compensation de décalage, une solution simple consiste à rajouter sur l'entrée une faible tension permettant d'annuler la tension de sortie.

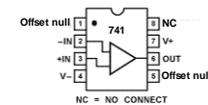
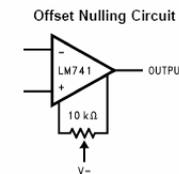


Figure 13: Câblage d'un 741 permettant d'annuler la tension de décalage en sortie Δs

1.4.1.2. Courant de polarisation d'entrée

En pratique, les transistors qui composent l'étage d'entrée de l'ampli-op (étage différentiel Figure 2) sont parcourus par des courants faibles, mais non nuls: il s'agit du courant de base (techno Bipo) ou courant de grille (techno FET). On montre que ces courants d'entrée notés $ib1$ et $ib2$, peuvent créer une tension de décalage Δs sur la sortie (Éq. 12).

Éq. 12: Tension de décalage dû au courant de polarisation d'entrée

$$\Delta s = \infty ib1 - ib2 + \infty (ib1 + ib2) / 2 = \infty In os + \infty In bias$$

Où $In os$ est le courant de décalage d'entrée (Input offset current) et $In bias$ est le courant de polarisation d'entrée (Input bias current).

Les courants de polarisation des ampli-op peuvent aller du pA (FET) au µA (Bipo) (eg. LM741 $I_{n\ bias}=80\ nA$ à 24°C). Les courants de décalages sont arithmétiquement bien plus faibles (eg. LM741 $I_{n\ os}=20\ nA$ à 24°C).

Dans le cadre d'une mesure physique, ces courants doivent être pris en compte ne serait-ce que pour établir un calcul d'erreur. On montre que l'équilibrage des résistances sur les entrées permet d'annuler $\Delta s = \infty (ib1 + ib2)/2 = \infty I_{n\ bias}$ (Figure 13). Par contre, l'annulation de $\Delta s = \infty ib1 - ib2 = \infty I_{n\ os}$ est impossible, cette inégalité de courants est inhérente à la diversité physique des transistors qui structurent l'ampli-op.

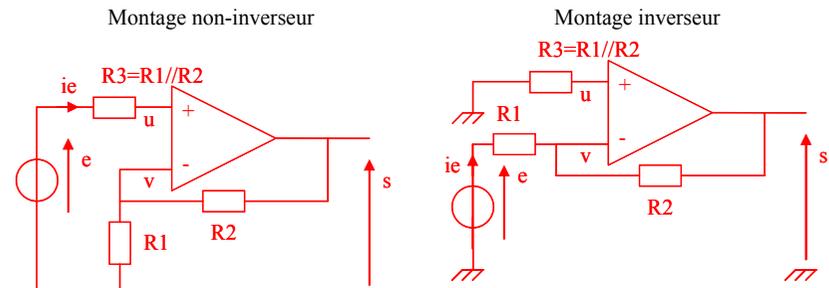


Figure 14: Equilibrage des résistances d'entrée permettant d'annuler la tension de décalage en sortie due au courant de polarisation d'entrée

Démo: Pour évaluer l'effet du courant d'entrée sur la tension de sortie, il suffit d'annuler toutes les sources de tension. Exprimons dans le même temps les courants d'entrée en fonction des courants de polarisation et des courants de décalage tels que $ib2 = I_{n\ bias} - I_{n\ os}/2$ et $ib1 = I_{n\ bias} + I_{n\ os}/2$. Dès lors, il apparaît que la ddp créée par $ib2$ égale $Re_{q1}.I_{n\ bias} - Re_{q1}.I_{n\ os}/2$ et par $ib1$ égale $Re_{q2}.I_{n\ bias} + Re_{q2}.I_{n\ os}/2$ (Re_{q} : résistance équivalente vue de chaque entrée de l'ampli-op). Ainsi, le courant moyen $I_{n\ bias} = (ib1 + ib2)/2$ crée une ddp identique en chaque branche lorsque $Re_{q1}=Re_{q2}$ et donc sans incidence sur la sortie.

1.4.1.3. Impédances d'entrée et de sortie

En pratique, l'impédance d'entrée est finie (car les courants d'entrée sont non nuls) et l'impédance de sortie est non nulle.

L'impédance d'entrée est supérieure au MΩ (eg. LM741 $Z_e=2M\Omega$). L'impédance de sortie est généralement de l'ordre de la dizaine d'Ω.

1.4.2. Imperfections dynamiques

1.4.2.1. Gain en boucle ouverte

En pratique, le gain de l'ampli-op en boucle ouverte est fini et il dépend de la fréquence. Il est alors plus approprié de définir le gain à partir d'une fonction de transfert notée $\underline{G}(f)$ (Figure 15) (Éq. 13). La fonction de l'ampli-op est du 1er ordre, car la plupart des ampli-op intègrent une capacité C de compensation (eg LM741 $C=30pF$ Figure 2) associée généralement à une résistance R. Son rôle est d'éliminer les oscillations en sortie pouvant

apparaître sous certaines conditions. Ce circuit RC (passe-bas) est donc à l'origine de l'imperfection dynamique de l'ampli-op.

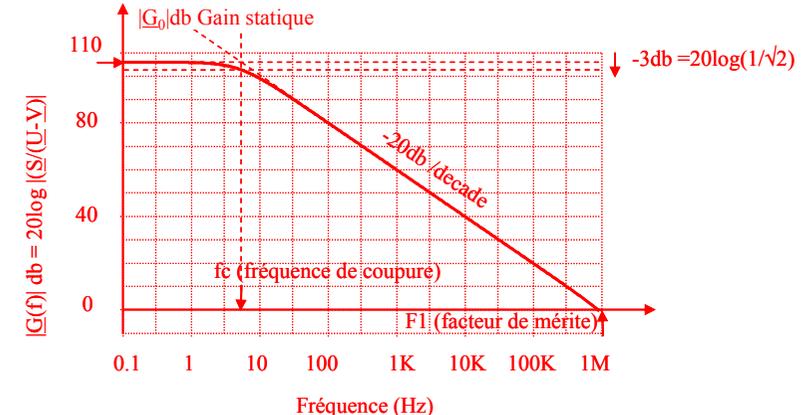


Figure 15: Gain typique d'une fonction de transfert en boucle ouverte d'ampli-op

Éq. 13: Fonction de transfert en boucle ouverte

$$\underline{G}(f) = G(p)_{p=j2\pi.f} = G_0 \frac{1}{1 + \tau.p}$$

Éq. 14: Gain statique

$$\underline{G}(f \rightarrow 0) = G(p \rightarrow 0) = G_0 \frac{1}{1 + \tau.p \rightarrow 0} = G_0$$

Éq. 15: Association fréquence de coupure / bande passante

$$|\underline{G}(f_c)| = |G(p_c)| = G_0 \left| \frac{1}{1 + \tau.p_c} \right| = G_0 \frac{1}{1+1} = G_0/\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow |\underline{G}(f_c)|_{db} = 20\log(G_0/\sqrt{2}) = G_{0,db} - 3_{db}$$

Éq. 16: Facteur de mérite ou produit gain bande défini à 0db

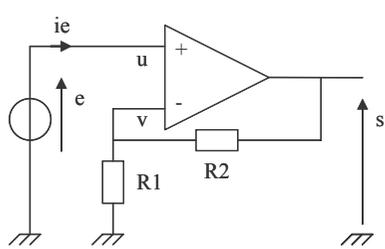
$$F_1 = G_0.f_c = |\underline{G}(f)|_{f=f_c} = |\underline{G}(f)|_{f=1}.f$$

La fréquence de coupure f_c des ampli-op est généralement de l'ordre du Hz. Au-delà de cette fréquence, le gain en tension diminue à raison de 20dB par décade. En deçà, le gain peut être assimilé au gain statique G_0 (eg LM741 $G_0=10^5$). Le facteur de mérite du LM741 est de l'ordre du MHz.

1.4.2.2. Gain en boucle fermée (effet du gain en boucle ouverte)

Etude de cas sur les montages non inverseur:

On cherche à établir l'expression du gain en tension $\underline{A}(f)=\underline{S}/\underline{E}$ et de l'impédance d'entrée du montage notée $\underline{Z}e'(f)=\underline{E}/\underline{I}e$.



Éq. 17: Gain dynamique et impédance d'entrée du montage non inverseur

$$A(p) = \frac{K}{1 + \theta \cdot p} \begin{cases} \theta = 1/2\pi \cdot fc' \\ \theta = \tau \cdot A_0 / (A_0 + G_0) \\ K = A_0 G_0 / (A_0 + G_0) \end{cases}$$

$$Ze'(p) = \frac{G(p) \cdot Ze}{A(p)}$$

Nb: $K \cdot fc' = fc \cdot G_0 = F1$

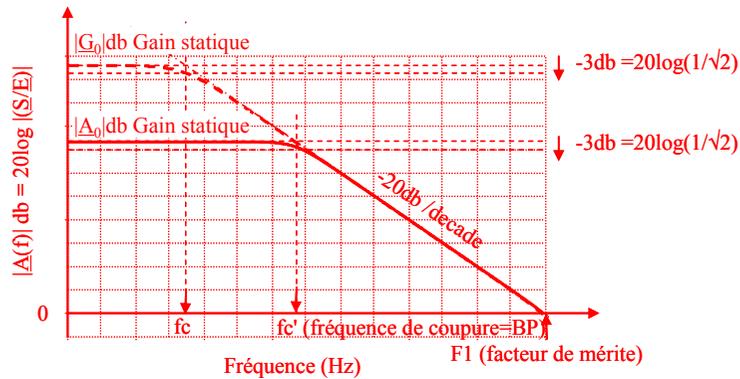
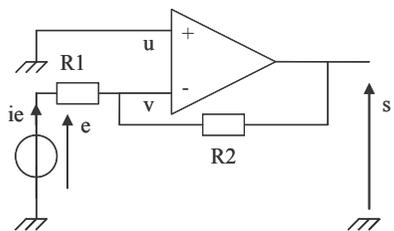


Figure 16: Synthèse dynamique du montage non inverseur

Démo: écrire l'équation de l'ampli-op, exprimer v, exprimer u et combiner ces trois équations (TD).

On remarque que, plus le gain A_0 est petit, plus la fréquence de coupure fc' est grande (= Bande Passante). On remarque aussi que qqsoit $f < fc'$, le Gain $\underline{A}(p)$ et l'impédance $\underline{Z}e'(p)$ sont ceux du montage à base d'ampli-op idéal.

Etude de cas sur le montage inverseur



Éq. 18: Gain dynamique et impédance d'entrée du montage inverseur

$$A(p) = \frac{K}{1 + \theta \cdot p} \begin{cases} \theta = 1/2\pi \cdot fc' \\ \theta = \tau \cdot (1 + A_0) / (1 + A_0 + G_0) \\ K = A_0 G_0 / (1 + A_0 + G_0) \end{cases}$$

$$Ze'(p) = \frac{R1}{1 + A(p)/G(p)}$$

Nb: $K \cdot fc' = fc \cdot G_0 \cdot A_0 / (1 + A_0) = F1 \cdot A_0 / (1 + A_0)$

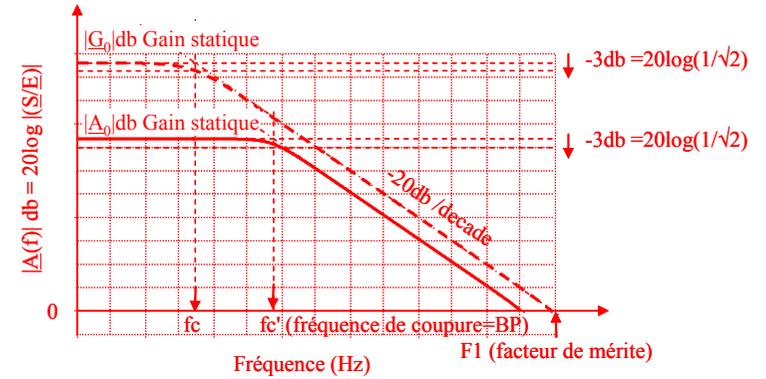


Figure 17: Synthèse dynamique du montage inverseur

Démo: écrire l'équation de l'ampli-op, exprimer v, exprimer u et combiner ces trois équations (TD).

1.4.2.3. Taux de réjection en mode commun

L'étage différentiel (Figure 2) comporte une imperfection dépendante de la fréquence. On parle alors de réjection en mode commun (Common mode rejection). Cette imperfection se traduit par une erreur sur la sortie de l'ampli-op (Éq. 19).

Éq. 19: Equation fondamentale de l'ampli-op (régime linéaire). $Rmc(f)$: Taux de réjection en mode commun. $Amc(f)$: Gain en mode commun. $\varepsilon(f)$: Tension d'erreur (à ne pas confondre avec Vos)

$$\underline{S} = \underline{G}(f) \left[\underline{U} - \underline{V} + \frac{1}{Rmc(f)} \cdot \frac{\underline{U} + \underline{V}}{2} \right]$$

$$\text{ou } \underline{S} = \underline{G}(f)(\underline{U} - \underline{V}) + \underline{A}mc(f) \cdot \frac{\underline{U} + \underline{V}}{2} = \underline{G}(f)(\underline{U} - \underline{V}) + \varepsilon(f)$$

Le taux de réjection en mode commun, noté $Rmc(f)$, est une fonction de la fréquence de type passe bas (Figure 18). La qualité d'un ampli-op dépend notamment du taux de réjection en mode commun que l'on souhaite le plus grand possible (eg. LM741 $Rmc_{db}=90dB$). La fréquence de coupure de $Rmc(f)$ est généralement située autour de 100Hz.

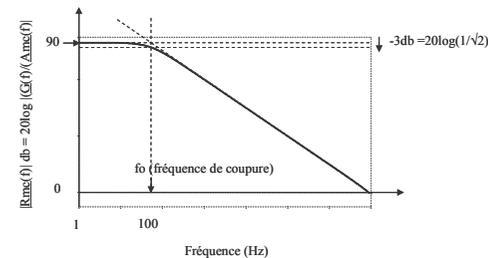


Figure 18: Taux de réjection typique d'un LM741

1.4.2.4. Vitesse de montée V/μs (Slew Rate)

Cette grandeur indique la vitesse maximum de variation du signal de sortie (Éq. 20). Elle découle notamment de la fréquence de coupure f_c comme de la constante de temps θ de la fonction de transfert du gain en boucle fermée de l'ampli-op.

Éq. 20: "Slew rate" (vitesse de montée) souvent exprimé en V/μs

$$Sr = \infty A_0 \cdot f_c \propto A_0 / \theta$$

En pratique Sr peut être identifié en augmentant l'échelon de tension d'entrée du montage jusqu'à ce que la réponse en sortie ne soit plus de type exponentiel (tende vers un signal de type rampe). On peut aussi identifier cette pente en augmentant la fréquence du signal sinusoïdal d'entrée du montage jusqu'à ce que la réponse en sortie ne soit plus de type sinusoïdale. La sortie tend alors vers un signal de type triangulaire, dont la pente est Sr (eg 741 monté en inverseur $Sr = 0.5V/\mu s$, TL081 $Sr = 13$, AD 847 JN $Sr = 300$, Figure 19).

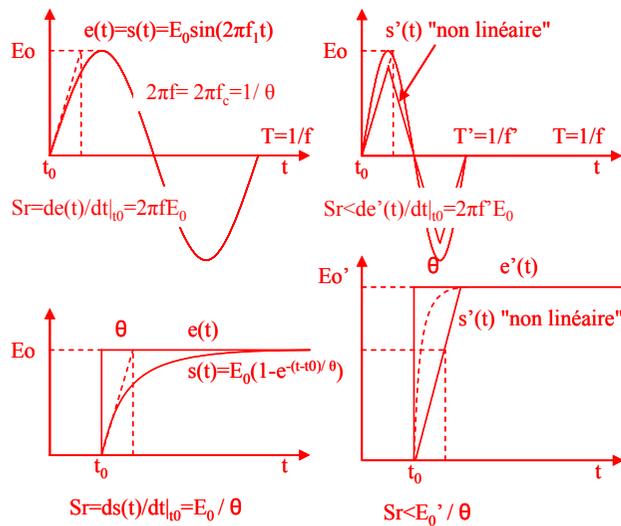


Figure 19: Mise en valeur du Slew Rate sur un ampli-op monté en suiveur (gain unit.)

1.5. Données techniques de l'ampli-op

Grandeurs	Symboles	Ampli-op idéals	Ampli-op réels	
			LM741 (à base de transistors bipolaire)	LF157 (à base de transistors FET)
Gain en tension boucle ouverte (gain statique) (Open-loop gain)	G_0	Infini	200 000	200 000
Facteur de mérite ou fréquence du gain unitaire ou produit gain-bande passante (unit-gain frequency)	F1	Infini	1 MHz	20 MHz
Impédance d'entrée (Input resistance)	Z_e	Infinie	2 MΩ	1000 GΩ
Impédance de sortie (Output resistance)	Z_s	Nulle	75 Ω	100 Ω
Courant de polarisation d'entrée (Input Bias Current)	$I_{in}(bias)$	Nul	80 nA	30 pA
Courant de décalage d'entrée (Input Offset Current)	$I_{in}(off)$	Nul	20nA	3pA
Tension de décalage d'entrée (Input Offset Voltage)	V_{os}	Nulle	2 mV	1 mV
Taux de réjection mode commun (Common mode rejection ratio)	CMRR	infini	90dB	100dB

Tableau 1: Ordres de grandeurs caractéristiques de l'ampli-op



August 2000

LM741

Operational Amplifier

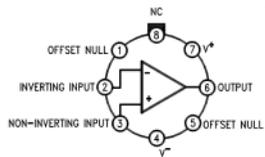
General Description

The LM741 series are general purpose operational amplifiers which feature improved performance over industry standards like the LM709. They are direct, plug-in replacements for the 709C, LM201, MC1439 and 748 in most applications. The amplifiers offer many features which make their application nearly foolproof: overload protection on the input and

output, no latch-up when the common mode range is exceeded, as well as freedom from oscillations. The LM741C is identical to the LM741/LM741A except that the LM741C has its performance guaranteed over a 0°C to +70°C temperature range, instead of -55°C to +125°C.

Features

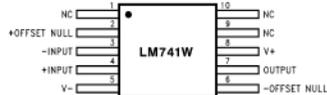
Connection Diagrams

Metal Can Package


00924102

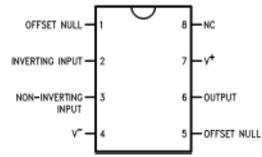
Note 1: LM741H is available per JM38510/10101

Order Number LM741H, LM741H/883 (Note 1), LM741AH/883 or LM741CH
See NS Package Number H08C

Ceramic Flatpak


00924106

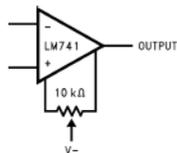
Order Number LM741W/883
See NS Package Number W10A

Dual-In-Line or S.O. Package


00924109

Order Number LM741J, LM741J/883, LM741CN
See NS Package Number J08A, M08A or N08E

Typical Application

Offset Nulling Circuit


00924107

Absolute Maximum Ratings (Note 2)

If Military/Aerospace specified devices are required, please contact the National Semiconductor Sales Office/Distributors for availability and specifications. (Note 7)

	LM741A	LM741	LM741C
Supply Voltage	±22V	±22V	±18V
Power Dissipation (Note 3)	500 mW	500 mW	500 mW
Differential Input Voltage	±30V	±30V	±30V
Input Voltage (Note 4)	±15V	±15V	±15V
Output Short Circuit Duration	Continuous	Continuous	Continuous
Operating Temperature Range	-55°C to +125°C	-55°C to +125°C	0°C to +70°C
Storage Temperature Range	-65°C to +150°C	-65°C to +150°C	-65°C to +150°C
Junction Temperature	150°C	150°C	100°C
Soldering Information			
N-Package (10 seconds)	260°C	260°C	260°C
J- or H-Package (10 seconds)	300°C	300°C	300°C
M-Package			
Vapor Phase (60 seconds)	215°C	215°C	215°C
Infrared (15 seconds)	215°C	215°C	215°C
ESD Tolerance (Note 8)	400V	400V	400V

See AN-450 "Surface Mounting Methods and Their Effect on Product Reliability" for other methods of soldering surface mount devices.

Electrical Characteristics (Note 5)

Parameter	Conditions	LM741A			LM741			LM741C			Units
		Min	Typ	Max	Min	Typ	Max	Min	Typ	Max	
Input Offset Voltage	$T_A = 25^\circ\text{C}$										mV
	$R_S \leq 10\text{ k}\Omega$		0.8	3.0		1.0	5.0		2.0	6.0	
	$T_{\text{AMIN}} \leq T_A \leq T_{\text{AMAX}}$										mV
	$R_S \leq 50\Omega$			4.0			6.0			7.5	
Average Input Offset Voltage Drift				15							$\mu\text{V}/^\circ\text{C}$
Input Offset Voltage Adjustment Range	$T_A = 25^\circ\text{C}, V_S = \pm 20\text{V}$	±10			±15			±15			mV
Input Offset Current	$T_A = 25^\circ\text{C}$		3.0	30		20	200		20	200	nA
	$T_{\text{AMIN}} \leq T_A \leq T_{\text{AMAX}}$			70		85	500			300	nA
Average Input Offset Current Drift				0.5							$\text{nA}/^\circ\text{C}$
Input Bias Current	$T_A = 25^\circ\text{C}$		30	80		80	500		80	500	nA
	$T_{\text{AMIN}} \leq T_A \leq T_{\text{AMAX}}$			0.210			1.5			0.8	μA
	$V_S = \pm 20\text{V}$										μA
Input Resistance	$T_A = 25^\circ\text{C}, V_S = \pm 20\text{V}$	1.0	6.0		0.3	2.0		0.3	2.0		$\text{M}\Omega$
	$T_{\text{AMIN}} \leq T_A \leq T_{\text{AMAX}}$		0.5								$\text{M}\Omega$
Input Voltage Range	$T_A = 25^\circ\text{C}$							±12	±13		V
	$T_{\text{AMIN}} \leq T_A \leq T_{\text{AMAX}}$										V

Electrical Characteristics (Note 5) (Continued)											
Parameter	Conditions	LM741A			LM741			LM741C			Units
		Min	Typ	Max	Min	Typ	Max	Min	Typ	Max	
Large Signal Voltage Gain	$T_A = 25^\circ\text{C}$, $R_L \geq 2\text{ k}\Omega$ $V_S = \pm 20\text{V}$, $V_O = \pm 15\text{V}$ $V_S = \pm 15\text{V}$, $V_O = \pm 10\text{V}$	50			50	200		20	200		V/mV V/mV
	$T_{AMIN} \leq T_A \leq T_{AMAX}$, $R_L \geq 2\text{ k}\Omega$, $V_S = \pm 20\text{V}$, $V_O = \pm 15\text{V}$ $V_S = \pm 15\text{V}$, $V_O = \pm 10\text{V}$	32			25			15			V/mV V/mV
	$V_S = \pm 5\text{V}$, $V_O = \pm 2\text{V}$	10									V/mV
Output Voltage Swing	$V_S = \pm 20\text{V}$ $R_L \geq 10\text{ k}\Omega$ $R_L \geq 2\text{ k}\Omega$	± 16									V V
	$V_S = \pm 15\text{V}$ $R_L \geq 10\text{ k}\Omega$ $R_L \geq 2\text{ k}\Omega$				± 12 ± 10	± 14 ± 13		± 12 ± 10	± 14 ± 13		V V
Output Short Circuit Current	$T_A = 25^\circ\text{C}$	10	25	35		25			25		mA mA
	$T_{AMIN} \leq T_A \leq T_{AMAX}$	10		40							
Common-Mode Rejection Ratio	$T_{AMIN} \leq T_A \leq T_{AMAX}$ $R_S \leq 10\text{ k}\Omega$, $V_{CM} = \pm 12\text{V}$ $R_S \leq 50\Omega$, $V_{CM} = \pm 12\text{V}$	80	95		70	90		70	90		dB dB
Supply Voltage Rejection Ratio	$T_{AMIN} \leq T_A \leq T_{AMAX}$, $V_S = \pm 20\text{V}$ to $V_S = \pm 5\text{V}$ $R_S \leq 50\Omega$ $R_S \leq 10\text{ k}\Omega$	86	96								dB dB
Transient Response	$T_A = 25^\circ\text{C}$, Unity Gain	Rise Time	0.25	0.8		0.3			0.3		μs
		Overshoot	6.0	20		5			5		%
Bandwidth (Note 6)	$T_A = 25^\circ\text{C}$	0.437	1.5								MHz
Slew Rate	$T_A = 25^\circ\text{C}$, Unity Gain	0.3	0.7			0.5			0.5		V/ μs
Supply Current	$T_A = 25^\circ\text{C}$					1.7	2.8		1.7	2.8	mA
Power Consumption	$T_A = 25^\circ\text{C}$										mW
	$V_S = \pm 20\text{V}$ $V_S = \pm 15\text{V}$		80	150		50	85		50	85	mW mW
LM741A	$T_A = T_{AMIN}$ $T_A = T_{AMAX}$										mW mW
LM741	$V_S = \pm 15\text{V}$ $T_A = T_{AMIN}$ $T_A = T_{AMAX}$					60	100				mW mW

Note 2: "Absolute Maximum Ratings" indicate limits beyond which damage to the device may occur. Operating Ratings indicate conditions for which the device is functional, but do not guarantee specific performance limits.

Electrical Characteristics (Note 5) (Continued)

Note 3: For operation at elevated temperatures, these devices must be derated based on thermal resistance, and T_J max. (listed under "Absolute Maximum Ratings"). $T_J = T_A + (\theta_{JA} P_D)$.

Thermal Resistance	Cerdip (J)	DIP (N)	HO8 (H)	SO-8 (M)
θ_{JA} (Junction to Ambient)	100°C/W	100°C/W	170°C/W	195°C/W
θ_{JC} (Junction to Case)	N/A	N/A	25°C/W	N/A

Note 4: For supply voltages less than $\pm 15\text{V}$, the absolute maximum input voltage is equal to the supply voltage.

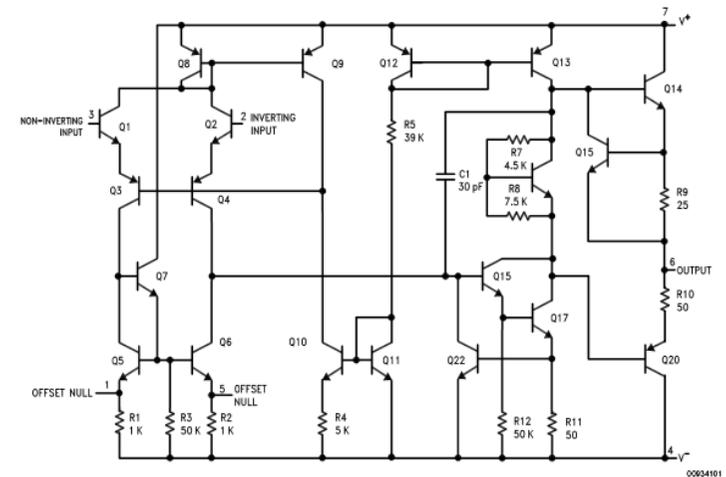
Note 5: Unless otherwise specified, these specifications apply for $V_S = \pm 15\text{V}$, $-55^\circ\text{C} \leq T_A \leq +125^\circ\text{C}$ (LM741/LM741A). For the LM741C/LM741E, these specifications are limited to $0^\circ\text{C} \leq T_A \leq +70^\circ\text{C}$.

Note 6: Calculated value from: BW (MHz) = 0.35/Slew Rate (μs).

Note 7: For military specifications see RETS741X for LM741 and RETS741AX for LM741A.

Note 8: Human body model, 1.5 k Ω in series with 100 pF.

Schematic Diagram



Chapitre 2. De l'amplificateur différentiel à l'amplificateur d'instrumentation (4h)

2.1. L'ampli-diff en mesures physiques

Dans un grand nombre d'applications de la mesure physique, la masse commune peut être ni significative, ni accessible, ni souhaitable. L'opération consiste alors à mesurer une tension différentielle (Figure 21).

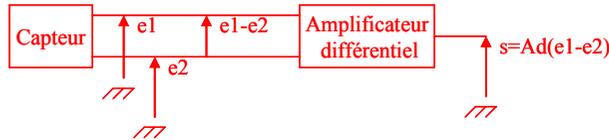


Figure 21: L'ampli-diff en mesures physiques. (e1-e2): Tension différentielle. Ad: Gain différentiel.

2.2. Exemples d'applications de l'ampli-diff

2.2.1. Le pont de Wheatstone

Un grand nombre de capteurs repose sur un principe résistif. Ce principe implique que la mesure est faite au travers d'une résistance électrique image de la grandeur physique que l'on veut connaître: température, pression, contrainte, humidité, flux lumineux...etc. Par exemple, les capteurs de températures sont souvent des thermistances: l'objet n'est ni plus ni moins qu'une résistance dont la valeur dépend de la température.

Dans ce cas, le problème de mesure se ramène à la mesure de la variation d'une résistance. Pour ce faire, un moyen simple consiste à imposer une tension constante aux bornes de la résistance et à mesurer ensuite la variation du courant la traversant (ou bien imposer un courant constant et mesurer la variation de la tension). Cependant, cette méthode présente des limites, surtout lorsqu'il s'agit de mesurer de faibles variations de résistance, car cela implique une grande précision sur la tension imposée et sur la mesure de courant associé. Par conséquent, cette simple méthode est très peu utilisée et remplacée généralement par une solution plus attractive et plus précise: c'est le pont de Wheatstone (Figure 22).

En première approximation, la tension différentielle e1-e2 (tension de Wheatstone) est proportionnelle à la variation ΔR de la résistance. Cette tension peut être très faible (quelques microvolts dans certains cas). Sa mesure nécessite par conséquent l'emploi d'un amplificateur différentiel.

Éq. 21: Calcul de la fonction caractéristique d'un pont de Wheatstone

$$e1-e2 = u \left[\frac{R10}{R10 + R01} - \frac{R20}{R20 + R02} \right]$$

Posons $R20 = x + \Delta x$ (eg Thermist.)

et $R10 = R01 = R02 = x$ et $\Delta x \ll x$

Il vient $e1-e2 \approx -K \Delta x$ avec $K = u \cdot \frac{1}{2x}$

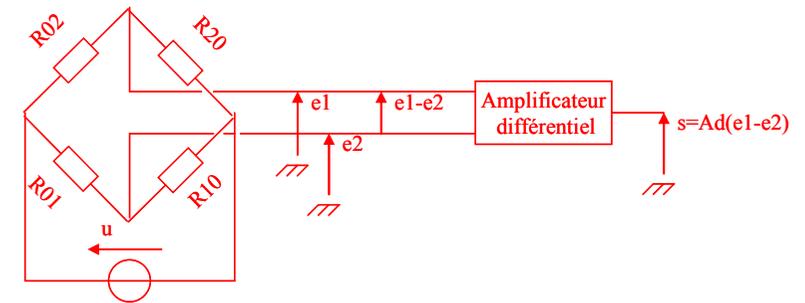


Figure 22: L'ampli-diff appliqué au pont de Wheatstone

2.2.2. Applications biomédicales: électrocardiogramme (ECG) et électro-encéphalogramme (EEG)

Les signaux électriques de l'activité cardiaque (quelques microvolts) sont collectés par des capteurs appelés électrodes (dans le contexte biomédical). Les signaux que l'on visualise sont généralement mesurés par rapport à une électrode dite de référence (Figure 23). Celle-ci est placée à un endroit précis du corps. Il s'agit donc de mesurer le potentiel de chaque électrode par rapport à celui de l'électrode de référence (celle-ci ne constituant pas une masse). Une mesure différentielle s'impose donc et l'utilisation d'un amplificateur différentiel est nécessaire.

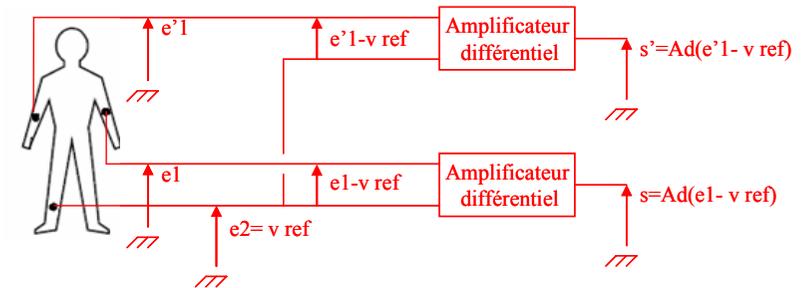


Figure 23: L'ampli-diff appliqué à l'électrocardiogramme (ECG)

C'est le même principe que l'on utilise pour visualiser l'activité électrique (quelques microvolts) du cerveau où plusieurs électrodes (jusqu'à 64 électrodes actuellement) sont placées sur la tête. Les informations utiles sont contenues dans la différence de signaux entre deux électrodes (Figure 24).

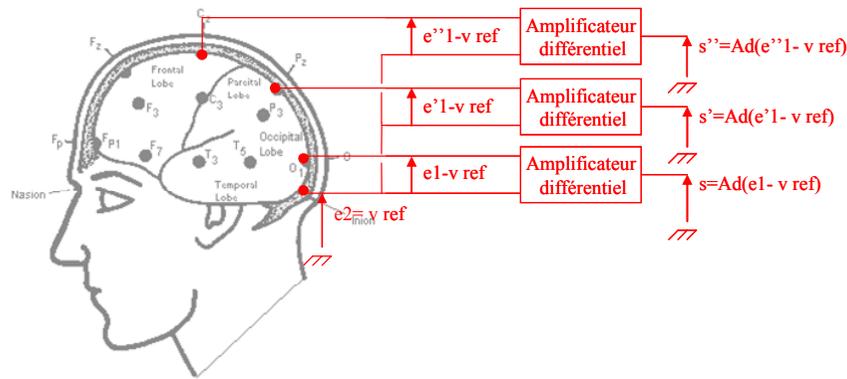


Figure 24: L'ampli-diff appliqué à l'encéphalogramme (EEG)

2.3. Généralités sur les ampli-diff: réjection en mode commun d'un ampli-diff

On montre de manière générale que quelque soit la structure interne d'un amplificateur différentiel, celui-ci ne donne pas à sa sortie la tension attendue (tension proportionnelle à la différence des deux tensions d'entrée) mais une tension donnée par les **Éq. 22**.

Éq. 22: Equations fondamentale de l'amplificateur différentiel. R'mc: Taux de réjection en mode commun **du montage**. $(e1+e2)/2$: Tension en mode commun. A'mc: Gain en mode commun **du montage**. ϵ' : Tension d'erreur **du montage**.

$$s = Ad \left[e1 - e2 + \frac{1}{R'mc} \cdot \frac{e1 + e2}{2} \right]$$

$$\text{ou } s = Ad(e1 - e2) + A'mc \cdot \frac{e1 + e2}{2} = Ad(e1 - e2) + \epsilon'$$

La qualité d'un ampli-diff dépend notamment du taux de réjection en mode commun que l'on souhaite le plus grand possible ($Ad(e1 - e2) \gg A'mc \cdot (e1 + e2)/2$). **Nous avons vu dans le Chapitre 1** que l'ampli-op constitue un ampli-diff. Cependant, dans la pratique, il n'est jamais utilisé en l'état pour remplir cette fonction, on effectue au moins une rétroaction...

2.4. Montage d'ampli-diff

Cherchons à établir les expressions du gain différentiel Ad et de la réjection en mode commun R'mc **du montage** (Figure 25) en supposant que le gain Amc et le taux de réjection en mode commun Rmc de l'ampli-op sont infinis. Pour ce faire, nous commencerons par exprimer s en fonction de $(e1 - e2)$ et de $(e1 + e2)/2$...

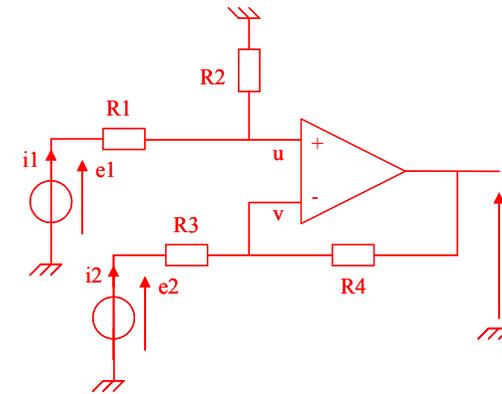


Figure 25: Montage différentiel ou soustracteur "opération fondamentale"

Éq. 23: Expression de la sortie s de l'amplificateur différentiel de la Figure 25

$$s = a.e1 - b.e2 \text{ avec } a = \frac{R2(R4 + R3)}{R3(R2 + R1)} \text{ et } b = \frac{R4}{R3}$$

$$\Leftrightarrow s = Ad \left[e1 - e2 + \frac{1}{R'mc} \cdot \frac{e1 + e2}{2} \right] \text{ avec } Ad = \frac{a+b}{2} \text{ et } R'mc = \frac{a-b}{2(a-b)}$$

Éq. 24: Démo

Hypothèse: $|u - v| < V_{sat} / G_0$ (ie.régimelinaire) $\Rightarrow (u - v) = s/G_0 = s/\infty = 0 \Rightarrow u = v$ (1)

$$\underline{\text{qd } e1 = 0} \Rightarrow \text{Millman: } v = \frac{\frac{e2}{R3} + \frac{s_{e1=0}}{R4}}{1/R3 + 1/R4} \text{ or } v = 0 \Rightarrow 0 = \frac{e2}{R3} + \frac{s_{e1=0}}{R4} \Rightarrow s_{e1=0} / e2 = -\frac{R4}{R3} \quad (2)$$

$$\underline{\text{qd } e2 = 0} \Rightarrow \text{Millman: } u = \frac{\frac{e1}{R1} + \frac{0}{R2}}{1/R1 + 1/R2} = \frac{R2 \cdot e1}{R2 + R1} \text{ et Millman: } v = \frac{\frac{0}{R3} + \frac{s_{e2=0}}{R4}}{1/R3 + 1/R4} = \frac{R3 \cdot s_{e2=0}}{R4 + R3} \quad (3)$$

$$(1) \text{ et } (3) \Rightarrow \frac{R2 \cdot e1}{R2 + R1} = \frac{R3 \cdot s_{e2=0}}{R4 + R3} \Rightarrow s_{e2=0} / e1 = \frac{R2(R4 + R3)}{R3(R2 + R1)} \quad (4)$$

Par application du théorème de superposition on trouve:

$$(2) \text{ et } (4) \Rightarrow s = s_{e1=0} + s_{e2=0} = \frac{R2(R4 + R3)}{R3(R2 + R1)} e1 - \frac{R4}{R3} e2$$

On remarque ainsi que le taux de réjection en mode commun devient infini lorsque $a=b$, ce qui revient à écrire l'**Éq. 25**.

Éq. 25: Conditions d'un taux de rejection idéal

$$R'_{mc} = \infty \text{ssi } a = b \Rightarrow \frac{R2}{R1} = \frac{R4}{R3}$$

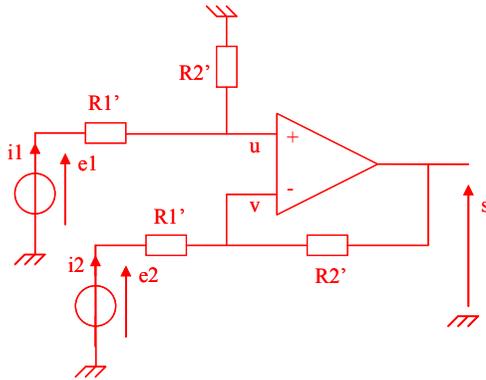
Dans ce cas idéal, la sortie s de l'ampli-diff répond à l'Éq. 26

Éq. 26: Expression de la sortie s de l'amplificateur différentiel simplifiée de la Figure 26

$$s = b(e1 - e2) \text{ avec } b = \frac{R2}{R1} = \frac{R4}{R3}$$

2.4.1. Influence de la précision des résistances

Si l'on retient la structure d'ampli-diff suivante (Figure 26) alors le gain différentiel de ce montage est $R2/R1'$ et la réjection mode commun est infini. Ceci est vrai si les deux résistances $R1'$ sont parfaitement égales et les deux résistances $R2'$ le sont aussi.


Figure 26: Montage différentiel simplifié

Dans la pratique, il est impossible d'avoir une égalité parfaite entre les résistances. Les résistances discrètes courantes possèdent une tolérance T de 1% par rapport à leur valeur nominale et 0.1% pour les moins courantes (résistances à couches métalliques). (eg Si $R=100 \Omega$ et $T=\pm 1\% \Rightarrow 99 \Omega < R < 101 \Omega$).

L'imprécision des résistances a une influence considérable sur la réjection en mode commun. Supposons que l'on utilise 4 résistances discrètes de même tolérance T et donnons leur les valeurs extrêmes qui nous éloignent le plus de l'égalité: $R4/R3=R2/R1$ (eg $R1=R1'(1+T)$, $R2=R2'(1-T)$, $R3=R1'(1-T)$, $R4=R2'(1+T)$). On montre dans ce cas que le taux de rejection R'_{mc} , le gain différentiel et le gain en mode commun répondent à l'Éq. 27.

Éq. 27: Expression du taux de rejection en fonction de l'imprécision des composants passifs du montage

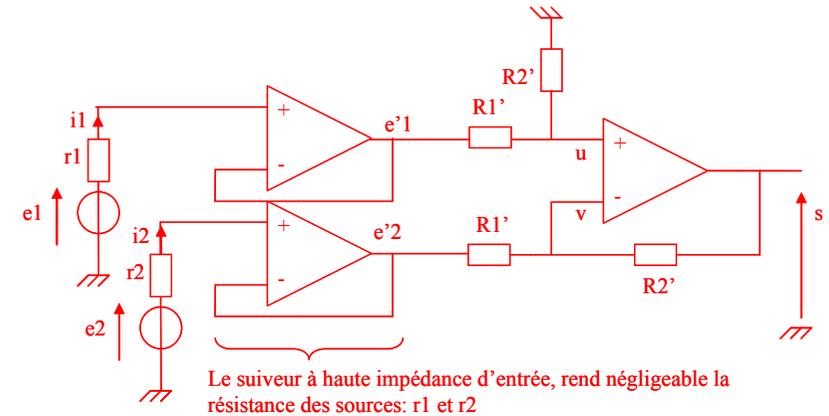
$$R'_{mc} \approx \frac{1 + R2'/R1'}{4T} \text{ et } Ad \approx \frac{R2'}{R1'} \text{ et } A'_{mc} \approx 4T \cdot \frac{R2'/R1'}{1 + R2'/R1'}$$

AN : avec $R2'/R1' = 10$ et $T = 0,01$ (1%) $R'_{mc} = 11/4 \cdot 0,01 \approx 275$ et $Ad = 10$ et $A_{mc} = 0,036$

Une étude de limite montre que $2T < A'_{mc} < 4T$ ($R1'=R2' \Rightarrow A'_{mc}=2T$ et $R1' \ll R2' \Rightarrow A'_{mc}=4T$). En conclusion Ad et T tendent à augmenter l'erreur de mesure

2.4.2. Influence des résistances des sources e_1 et e_2 : amélioration du montage précédent

Les signaux d'entrée $e1$ et $e2$ (dont on cherche à mesurer la différence) sont issus de sources imparfaites. Chaque source est équivalente à un générateur de Thévenin dont la résistance peut être différente, ce qui influence le gain du montage et diminue son taux de rejection en mode commun. C'est un sérieux problème dont la solution consiste à accroître l'impédance d'entrée du montage sur les deux voies. Le montage de la Figure 27 permet de résoudre ce problème.


Figure 27: Montage différentiel avec adaptation d'impédance d'entrée (vers une structure d'ampli-d'instrumentation)
2.5. Montage d'ampli-diff élaboré (ampli-d'instrumentation)

Le montage de la Figure 28 est un ampli-d'instrumentation classique. Il est constitué d'un premier étage permettant d'amplifier la tension différentielle $e1-e2$ et de rendre négligeables les résistances des sources de signaux grâce à une forte impédance d'entrée. L'étage de sortie est un amplificateur différentiel de gain différentiel unitaire minimisant son propre gain de rejection en mode commun A'_{mc} mais il reste en partie conditionné par la précision des résistances $R1'$.

Hypothèse étant faite que les ampli-op qui composent ce montage ont un gain G_0 infini et un taux de rejection en mode commun R_{mc} infini, cette structure d'amplification différentielle, qualifiée d'ampli-d'instrumentation, répond à l'Éq. 28.

Éq. 28: Expression de la sortie s de l'amplificateur différentiel élaboré de la Figure 28

$$s = A'_{d} \left[e1 - e2 + \frac{1}{R'_{mc}} \frac{e1 + e2}{2} \right] \text{ avec } A'_{d} = A_0 \text{ et } R'_{mc} = R'_{mc} \cdot A'_{d}$$

$$\text{et } R'_{mc} \approx \frac{1 + R1'/R1'}{4T} = 1/2T \text{ et } A_0 = 1 + \frac{R2}{R1}$$

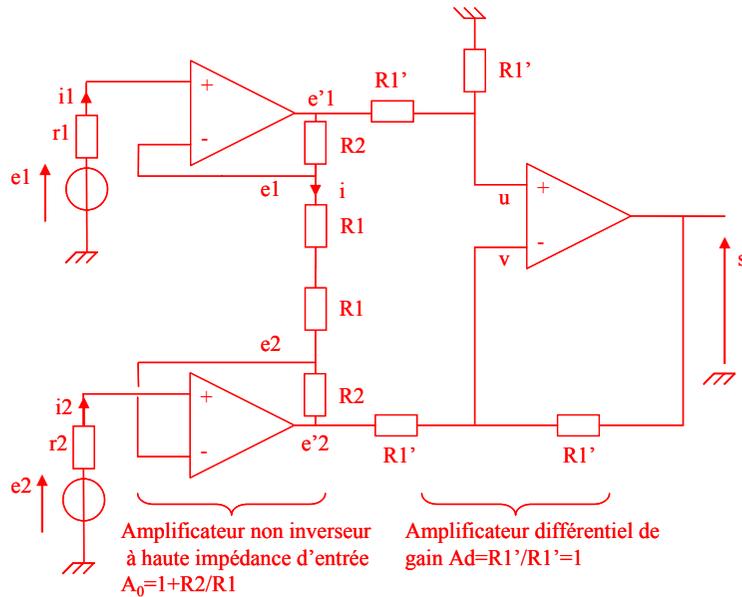


Figure 28: Montage différentiel élaboré: structure d'ampli-d'instrumentation

Éq. 29: Démo

Ampli – non – inverseur haute impédance :

$$e1 - e2 = (1 + R2 / R1)(e1 - e2) = A_0.(e1 - e2) \text{ par application du pont diviseur de tension (1)}$$

$$(e1 - e1) / R2 = (e2 - e2) / R2 \Rightarrow e1 + e2 = e1 + e2 \text{ par application de la loi des noeuds (2)}$$

Ampli – diff :

$$s = 1 \left[e1 - e2 + \frac{1}{R''mc} \frac{e1 + e2}{2} \right] \text{ gain unitaire (3)}$$

Association des montages (1), (2) et (3) :

$$s = \left[A_0.(e1 - e2) + \frac{1}{R''mc} \frac{e1 + e2}{2} \right]$$

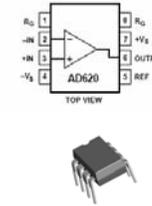
$$s = A'd \left[e1 - e2 + \frac{1}{R''mc} \frac{e1 + e2}{2} \right] \text{ avec } A'd = A_0 \text{ et } R''mc = R''mc.A'd$$

$$\text{où } R''mc \approx \frac{1 + R1' / R1}{4.T} = 1 / 2T \text{ et } A_0 = 1 + \frac{R2}{R1}$$

Ce type de structure peut être réalisé au sein d'un circuit intégré (CI) bâti parfois même, sur un capteur (eg microcapteur silicium)...

2.5.1. L'ampli-d'instrumentation intégré

Le montage précédent (à trois ampli-op) est ici intégré avec tous ses composants, exceptée la résistance $R_g (=2.R1)$. Celle-ci permet de régler le gain à la valeur souhaitée par l'utilisateur (Éq. 30). La Figure 29 montre le brochage de l'amplificateur d'instrumentation AD620 fabriqué par Analog Devices.



- (+IN) ou (e1): Entrée non inverseuse
- (-IN) ou (e2): Entrée inverseuse
- (OUTPUT) ou (s): Sortie référencée
- (+Vs) ou (+Vcc) : Alimentation symétrique positive
- (-Vs) ou (-Vcc) : Alimentation symétrique négative
- (Rg) : Réglage du gain via la résistance R1 connectée sur Rg
- (Ref) : Référence de la sortie (out)

Figure 29: Schéma de câblage du AD620 de Analog Devices

Éq. 30:

$$s = A'd \left[e1 - e2 + \frac{1}{R''mc} \frac{e1 + e2}{2} \right] \text{ avec } A'd = 1 + 2.R2 / Rg, R''mc = \frac{1 + 2.R2 / Rg}{2T}$$

DateSheet : $2.R2 = 49.4k\Omega$

Il est très important de ne pas confondre ces circuits intégrés avec des ampli-op (l'apparence est trompeuse!). Par exemple, un amplificateur d'instrumentation n'est pas destiné à fonctionner avec une contre-réaction. Outre le fonctionnement fondamentalement différent, un ampli-op de base coûte environ 1€, alors que le AD620 peut coûter, selon la version, entre 15 et 18€!

Voici, comme exemple, un EEG réalisé à l'aide d'un AD620 (Figure 30). Anecdote: le fond du signal représente l'activité EEG normale de l'encéphale et les pics représentent une activité correspondante à une crise d'épilepsie... le sujet épileptique est un rat !

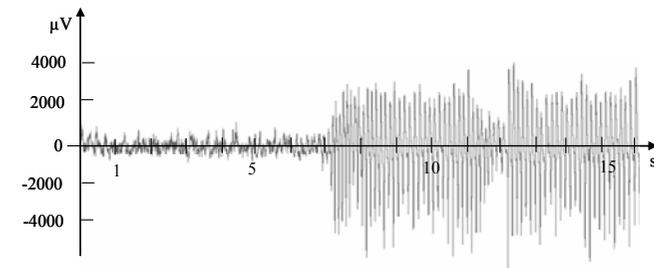


Figure 30: Signal d'EEG chez un rat épileptique réalisé avec un AD620

Chapitre 3. Le filtre actif (3h)

3.1. Notion de filtrage (Rappel)

Un filtre est un quadripôle qui modifie (ou filtre) certaines parties d'un signal d'entrée dans le domaine temps et dans le domaine fréquence (**Figure 31**). D'après la théorie de Fourier, tout signal réel peut être considéré comme composé d'une somme de signaux sinusoïdaux (en nombre infini si nécessaire) à des fréquences différentes ; le rôle du filtre est de modifier la phase et l'amplitude de ces composantes (eg **Figure 32**). Un filtre est caractérisé par sa fonction de transfert. On parle aussi de réponse fréquentielle ou encore de transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle.

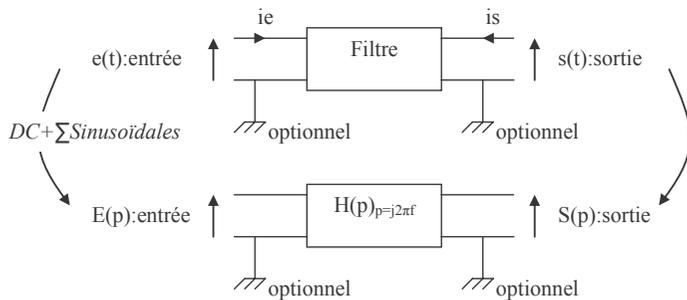


Figure 31: Représentation d'un filtre dans l'espace des fréquences

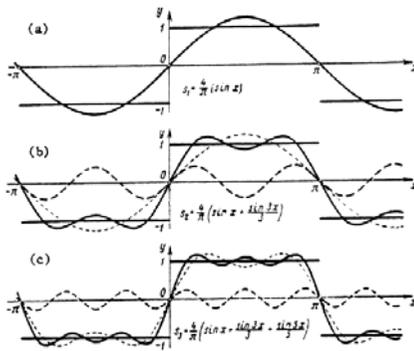
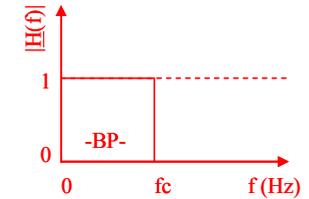


Figure 32: Décomposition en série de fourrier d'un signal carré

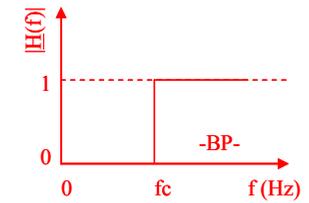
3.2. Classification des filtres

On peut classer les filtres à partir de la représentation de leur gain en fonction de la fréquence. Les filtres les plus courants sont de l'un des cinq types suivants : **passé-bas**, **passé-haut**, **passé-bande**, **réjecteur de bande** et enfin **passé-tout**.

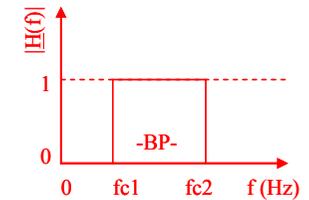
Un **filtre passe-bas** laisse passer toutes les fréquences entre la fréquence nulle et la fréquence de coupure f_c et atténue toutes les fréquences supérieures à celle-ci. Avec un filtre passe-bas, les fréquences comprises entre la fréquence nulle et f_c forment la bande passante du filtre (BP). Il est très utilisé en audio, pour atténuer les aigues.



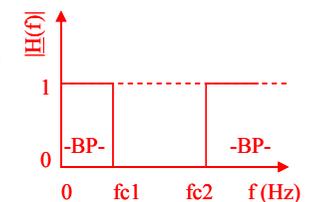
Un **filtre passe-haut** atténue toutes les fréquences entre la fréquence nulle et la fréquence de coupure f_c et laisse passer toutes les fréquences supérieures à celle-ci. Avec un filtre passe-haut, les fréquences comprises entre la fréquence de coupure f_c et la fréquence infinie forment la bande passante du filtre. Il est très utilisé en audio, pour atténuer les graves.



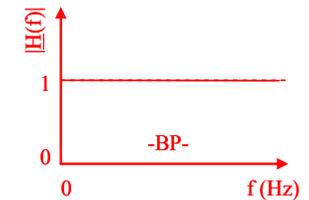
Un **filtre passe-bande** laisse passer les fréquences comprises entre la fréquence de coupure inférieure f_{c1} et la fréquence de coupure supérieure f_{c2} . La bande passante (appelée encore ici largeur de bande) comporte toutes les fréquences comprises entre f_{c1} et f_{c2} . Il est très utilisé dans les récepteurs radio pour isoler le signal que l'on désire capter.



Un **filtre réjecteur de bande**, aussi appelé filtre trappe, cloche ou coupe-bande, laisse passer les fréquences entre la fréquence nulle et la fréquence de coupure inférieure f_{c1} ainsi que les fréquences entre la fréquence de coupure supérieure f_{c2} et la fréquence infinie. La bande de fréquences atténuées ou "coupées" se situe donc entre f_{c1} et f_{c2} . Il est très utilisé pour supprimer le signal parasite du secteur (50 Hz).



Un **filtre passe-tout** laisse passer toutes les fréquences entre 0 et l'infini. Il n'y a aucune atténuation pour aucune fréquence, mais il provoque un déphasage par rapport au signal d'entrée.



Techniquement, un filtre peut être réalisé de différentes manières : passive, active ou numérique...

Les filtres passifs sont réalisés avec des résistances, des inductances et des condensateurs. Ils sont généralement utilisés au-dessus de 1 MHz, leur gain maximum est égal à 1 (on dit qu'ils n'ont pas de gain en puissance).

Les filtres actifs sont réalisés avec des résistances, des condensateurs et des ampli-op. Contrairement à leurs homologues passifs, les filtres actifs possèdent un gain. Ils remplissent donc deux fonctions: filtrage et amplification des signaux dans la bande passante. Les filtres actifs sont généralement utilisés à des fréquences inférieures au MHz.

3.3. Filtres actifs à base d'ampli-op idéaux

3.3.1. Filtre passe-bas du 1^{er} ordre (ou filtre à 20 dB/déc = 6 dB/octave)

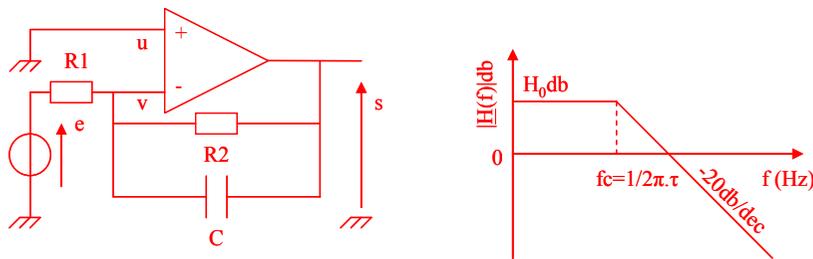


Figure 33: Montage passe bas et représentation asymptotique du gain

Éq. 31: Fonction de transfert du montage (passe-bas du 1^{er} ordre)

$$H(p) = H_0 \frac{1}{1 + \tau \cdot p} \text{ avec } H_0 = -R2 / R1, \tau = R2 \cdot C \text{ et } fc = 1 / 2\pi \cdot \tau$$

Éq. 32: Démonstration

Hypothèse : $|u - v| < V_{sat} / G_0$ (ie régime linéaire) $\Rightarrow (u - v) = s / G_0 = s / \infty = 0 \Rightarrow u = v = 0$ (1)

Millman : $v = \frac{\frac{e}{R1} + \frac{s}{Zeq}}{1/R1 + 1/Zeq}$ (2) avec $Zeq = \frac{R2 \cdot 1/jC\omega}{R2 + 1/jC\omega} = \frac{R2}{jC\omega \cdot R2 + 1}$

(1) et (2) $\Rightarrow 0 = \frac{e}{R1} + \frac{s}{Zeq} \Rightarrow s/e = -\frac{Zeq}{R1} = -\frac{R2}{R1} \frac{1}{jC\omega \cdot R2 + 1}$

3.3.2. Filtre passe-haut du 1^{er} ordre (ou filtre à 20 dB/déc = 6 dB/octave)

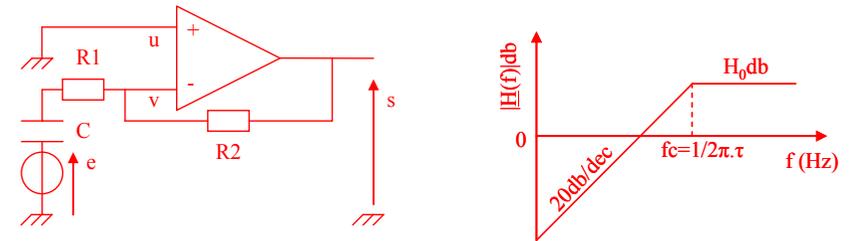


Figure 34: Montage passe bas et représentation asymptotique du gain

Éq. 33: Fonction de transfert du montage (passe-haut du 1^{er} ordre)

$$H(p) = H_0 \frac{\tau \cdot p}{1 + \tau \cdot p} \text{ avec } H_0 = -R2 / R1, \tau = R1 \cdot C \text{ et } fc = 1 / 2\pi \cdot \tau$$

Éq. 34: Démonstration

Hypothèse : $|u - v| < V_{sat} / G_0$ (ie régime linéaire) $\Rightarrow (u - v) = s / G_0 = s / \infty = 0 \Rightarrow u = v = 0$ (1)

Millman : $v = \frac{\frac{e}{Zeq} + \frac{s}{R2}}{1/Zeq + 1/R2}$ (2) avec $Zeq = R1 + 1/jC\omega = \frac{jC\omega \cdot R1 + 1}{jC\omega}$

(1) et (2) $\Rightarrow 0 = \frac{e}{Zeq} + \frac{s}{R2} \Rightarrow s/e = -\frac{R2}{Zeq} = -\frac{R2}{R1} \frac{jC\omega \cdot R1}{jC\omega \cdot R1 + 1}$

Les filtres du 1^{er} ordre atténuent les fréquences situées en dehors de la bande passante par 20 dB/déc mais dans beaucoup d'applications, ces performances peuvent être considérées comme insuffisantes. On fait donc appel à des filtres d'ordres plus élevés qui atténuent d'avantage les signaux dont les fréquences n'appartiennent pas à la bande passante. L'objectif est d'essayer de se rapprocher au maximum de la réponse idéale d'un filtre.

3.3.3. Filtre passe-bas du 2^{ème} ordre (ou filtre en -40 dB/décade)

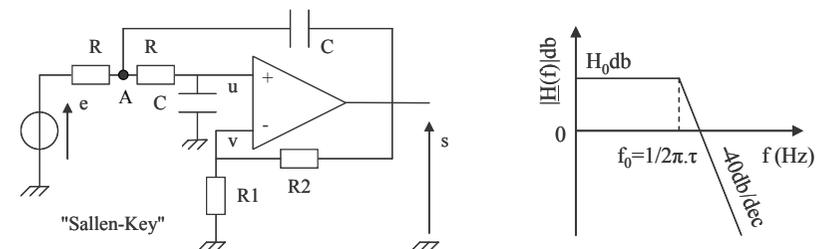


Figure 35: Montage passe bas et représentation asymptotique du gain (2 < Q facteur de qualité < 20)

Éq. 35: Fonction de transfert du montage (passe-bas du 2^{ème} ordre)

$$H(p) = H_0 \frac{1}{1 + 2z\tau \cdot p + \tau^2 \cdot p^2} \text{ avec } H_0 = 1 + R2 / R1, \tau = R.C \text{ et } z = (3 - H_0) / 2$$

Éq. 36: Démo

Hypothèse: $|\underline{u} - \underline{v}| < V_{sat} / G_0$ (ie.régimelinaire) $\Rightarrow (\underline{u} - \underline{v}) = s / G_0 = s / \infty = 0 \Rightarrow \underline{u} = \underline{v}$ (1)

$$\text{Millman: } \underline{v} = \frac{\frac{0}{R1} + \frac{s}{R2}}{1/R1 + 1/R2} = \frac{s}{R2/R1 + 1} \quad (2)$$

$$\text{Millman: } \underline{u} = \frac{\frac{0}{Zc} + \frac{A}{R}}{1/Zc + 1/R} = \frac{A}{R/Zc + 1} \quad (3)$$

$$\text{Millman: } \underline{A} = \frac{\frac{e}{R} + \frac{s}{Zc} + \frac{0}{Zc + R}}{1/R + 1/Zc + 1/(Zc + R)} = \frac{\frac{e}{R} + \frac{s}{Zc}}{1/R + 1/Zc + 1/(Zc + R)} \quad (4)$$

$$(1),(2) \text{ et } (3) \Rightarrow \frac{s}{R2/R1 + 1} = \frac{A}{R/Zc + 1}$$

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= R2 / R1 + 1 \\ Zc &= 1 / Cp \\ \tau &= R.C \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{s}{H_0} = \frac{A}{\tau \cdot p + 1} \quad (5)$$

$$(5) \text{ et } (4) \Rightarrow \frac{s \cdot (\tau \cdot p + 1)}{H_0} = \frac{\frac{e}{R} + s \cdot Cp}{1/R + Cp + Cp/(1 + \tau \cdot p)}$$

$$\Rightarrow s \left(\frac{\tau \cdot p + 1}{H_0} - \frac{\tau \cdot p}{1 + \tau \cdot p + \tau \cdot p / (1 + \tau \cdot p)} \right) = e \left(\frac{1}{1 + \tau \cdot p + \tau \cdot p / (1 + \tau \cdot p)} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{s}{e} = \frac{1 + \tau \cdot p + \tau \cdot p / (1 + \tau \cdot p)}{\frac{\tau \cdot p + 1}{H_0} - \frac{\tau \cdot p}{1 + \tau \cdot p + \tau \cdot p / (1 + \tau \cdot p)}}$$

$$\Rightarrow \frac{s}{e} = \frac{1}{(1 + \tau \cdot p + \tau \cdot p / (1 + \tau \cdot p)) \cdot \frac{\tau \cdot p + 1}{H_0} - \tau \cdot p}$$

$$\Rightarrow \frac{s}{e} = \frac{H_0}{\tau \cdot p + 1 + \tau^2 \cdot p^2 + \tau \cdot p + \tau \cdot p - \tau \cdot p \cdot H_0}$$

$$\Rightarrow \frac{s}{e} = \frac{H_0}{1 + \tau \cdot p(3 - H_0) + \tau^2 \cdot p^2}$$

La courbe réelle se rapproche du diagramme asymptotique autour de 0 et de l'infini, par contre elle peut fortement s'en éloigner autour de $f_0 = 1/2\pi\tau$, on montre que cela dépend du coefficient d'amortissement z (Éq. 37).

Éq. 37: Calcul du gain au point f_0

$$H(j2\pi f_0) = H_0 \frac{1}{1 + 2z\tau \cdot \frac{j}{\tau} + \tau^2 \cdot \frac{j^2}{\tau^2}} = \frac{H_0}{j2z} \Rightarrow |H(j2\pi f_0)| = \frac{H_0}{2z}$$

On en déduit les identités remarquables suivantes:

$z = 0 \Rightarrow |H(j2\pi f_0)| = \infty$: système instable

$0 < z < 0.707 \Rightarrow |H(j2\pi f_0)| > H_0/\sqrt{2}$: système résonant

$z = 0.707 \Rightarrow |H(j2\pi f_0)| \approx H_0/\sqrt{2}$: système proche des asymptotes

$0.707 < z < 1 \Rightarrow |H(j2\pi f_0)| < H_0/\sqrt{2}$: système amortie

$z > 1 \Rightarrow |H(j2\pi f_0)| \ll H_0/\sqrt{2}$: système produit de deux 1er ordre

3.3.4. Filtre passe-haut du 2^{ème} ordre (ou filtre en 40 dB/décade)

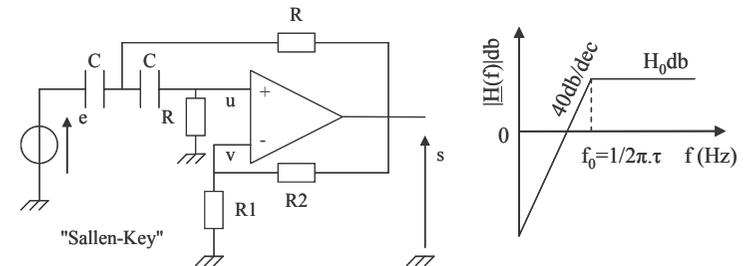


Figure 36: Montage passe haut et représentation asymptotique du gain (2<Q facteur de qualité<20)

Éq. 38: Fonction de transfert du montage (passe-haut du 2^{ème} ordre)

$$H(p) = H_0 \frac{\tau^2 \cdot p^2}{1 + 2z\tau \cdot p + \tau^2 \cdot p^2} \text{ avec } H_0 = 1 + R2 / R1, \tau = R.C \text{ et } z = (3 - H_0) / 2$$

La courbe réelle se rapproche du diagramme asymptotique autour de 0 et de l'infini, par contre elle peut fortement s'en éloigner autour de $f_0 = 1/2\pi\tau$, on montre que cela dépend du coefficient d'amortissement z (Éq. 39).

Éq. 39: Calcul du gain au point fc

$$H(j2\pi f_0) = H_0 \frac{\tau^2 \cdot \frac{j^2}{\tau^2}}{1 + 2z\tau \cdot \frac{j}{\tau} + \tau^2 \cdot \frac{j^2}{\tau^2}} = \frac{-H_0}{j2z} \Rightarrow |H(j2\pi f_0)| = \frac{H_0}{2z}$$

On en déduit donc les mêmes identités remarquables que pour l'Éq. 37.

3.3.5. Filtre passe-bande (filtre réjecteur)

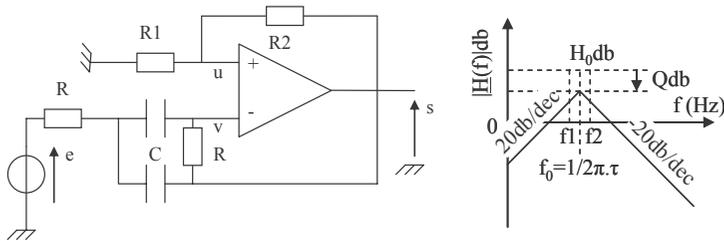


Figure 37: Montage passe bande et représentation asymptotique du gain

Éq. 40: Fonction de transfert du montage (passe bande du 2ième ordre)

$$H(p) = H_0 \frac{\tau \cdot p \cdot 2z}{1 + 2z\tau \cdot p + \tau^2 \cdot p^2} \text{ avec } H_0 = -\frac{1 + R1/R2}{2 - R1/R2}, \tau = RC \text{ et } z = \frac{1 + R1/R2}{2 \cdot H_0}$$

La courbe réelle se rapproche du diagramme asymptotique autour de 0 et de l'infini, par contre elle peut s'en éloigner autour de $f_0 = 1/2\pi\tau$ ($20\log(Q)$) et l'on montre qu'elle tend vers H_0 (Éq. 41).

Éq. 41: Calcul du gain au point fc

$$H(j2\pi f_0) = H_0 \frac{(\tau \cdot \frac{j}{\tau}) \cdot 2z}{1 + 2z\tau \cdot \frac{j}{\tau} + \tau^2 \cdot \frac{j^2}{\tau^2}} = H_0 \Rightarrow |H(j2\pi f_0)| = |H_0|$$

La largeur de bande notée Δf ou BP est définie comme étant la différences de $f_0/2$ et $f_0 \cdot 2$. Ces fréquences sont telles que $|H(f_0/2)| = |H(f_0 \cdot 2)| = |H_{max}|/\sqrt{2}$ et l'on montre que Δf répond à l'Éq. 42.

Éq. 42: Relation bande passante / facteur de qualité

$$\Delta f = f_0 \cdot 2 - f_0 \cdot 1 \approx (2z/\tau) / 2\pi \text{ ou encore } \Delta f = 1/2\pi \cdot Q \cdot \tau \text{ avec } Q = 1/2z$$

On définit généralement le caractère sélectif du filtre par le facteur de qualité noté Q (ie plus petit est l'amortissement z, plus grand est la facteur Q et donc la sélectivité du filtre).

3.3.6. Filtre coupe-bande (filtre réjecteur)

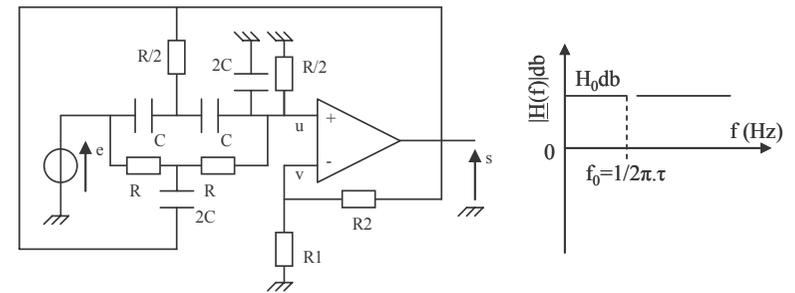


Figure 38: Montage coupe bande et représentation asymptotique du gain

Éq. 43: Fonction de transfert du montage (coupe bande du 2ième ordre)

$$H(p) = H_0 \frac{1 + \tau^2 \cdot p^2}{1 + 2z\tau \cdot p + \tau^2 \cdot p^2} \text{ avec } H_0 = \frac{1 + R2/R1}{5}, \tau = RC \text{ et } z = \frac{4R1 - 10R2\sqrt{3}}{50 \cdot R1}$$

La courbe réelle se rapproche du diagramme asymptotique autour de f_0 , par contre elle peut fortement s'en éloigner autour 0 et l'infini, on montre que le gain vaut 0 autour de f_0 (Éq. 44).

Éq. 44: Calcul du gain au point fc

$$H(j2\pi f_0) = H_0 \frac{1 + \tau^2 \cdot \frac{j^2}{\tau^2}}{1 + 2z\tau \cdot \frac{j}{\tau} + \tau^2 \cdot \frac{j^2}{\tau^2}} = 0 \Rightarrow |H(j2\pi f_0)| = 0$$

Éq. 45: Relation bande passante / facteur de qualité

$$\Delta f = f_0 \cdot 2 - f_0 \cdot 1 \approx (2z/\tau) / 2\pi \text{ ou encore } \Delta f = 1/2\pi \cdot Q \cdot \tau \text{ avec } Q = 1/2z$$

Chapitre 4. Traitement génération et conversion de signaux (6h) EHM MC

4.1. Comparateurs de signaux (Rappel)

Dans une chaîne de mesure, les comparateurs de signaux peuvent être utilisés pour comparer un signal analogique à un autre. Selon le résultat de la comparaison, la sortie peut prendre deux états différents. Cette opération a donc pour effet de simplifier l'information issue par exemple d'un capteur de luminosité en une information binaire (nuit/jour), il s'agit d'une opération TOR (Tout Ou Rien).

4.1.1. Comparateur à zéro

On considère le montage de la **Figure 39** où l'on suppose que le gain d'ampli-op est infini, alors la sortie s est déterminée par l'**Éq. 46**.

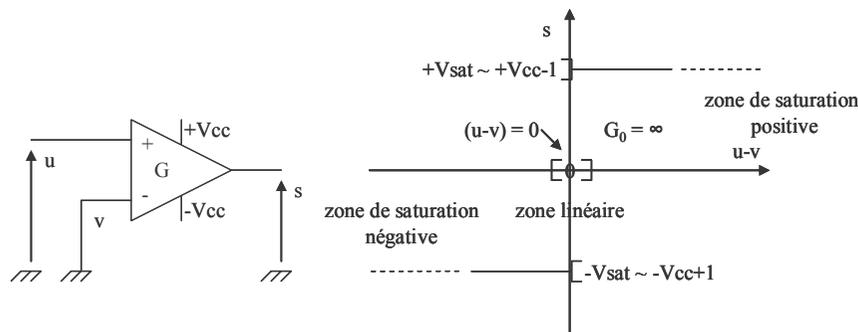


Figure 39: Comparateur à zéro et représentation idéale de la sortie

Éq. 46: Equations du comparateur à zéro

$$\begin{aligned} \text{si } u - v > 0 &\Rightarrow u > 0 \Rightarrow s = +V_{\text{sat}} \cong +V_{\text{cc}} - 1 \\ \text{si } u - v < 0 &\Rightarrow u < 0 \Rightarrow s = -V_{\text{sat}} \cong -V_{\text{cc}} + 1 \end{aligned}$$

Dans le cas du comparateur à zéro, le point de déclenchement (appelé aussi seuil ou référence) est le zéro. La tension fixée en v (en l'occurrence zéro volt) constitue donc la valeur de référence qui détermine le basculement de la sortie d'un état à l'autre.

4.1.2. Comparateur à référence non nulle

L'idée est la suivante: on fixe une tension de référence V_{ref} sur une entrée de l'ampli-op que l'on compare avec le signal présenté sur l'autre entrée (dont on ne connaît pas, a priori, la tension). De deux choses l'une: la tension du signal est supérieure ou inférieure à V_{ref} . Selon la configuration du montage, on aura en sortie de l'ampli-op un état haut ou un état bas (**Éq. 47**). Si le signal est présenté sur l'entrée u (la référence étant fixée sur v), on dit que le comparateur est non inverseur (**Figure 40**, **Figure 41**). Si le signal est présenté sur l'entrée v (la référence étant fixée sur u), on dit que le comparateur est inverseur.

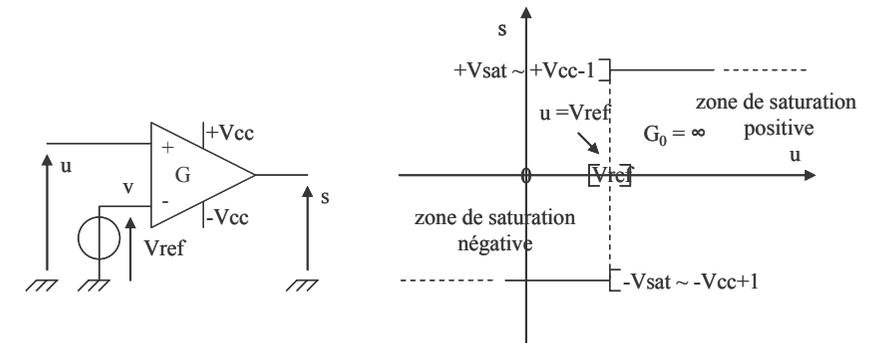


Figure 40: Comparateur à V_{ref} et représentation idéale de la sortie

Éq. 47: Equation du comparateur à V_{ref}

$$\begin{aligned} \text{si } u - V_{\text{ref}} > 0 &\Rightarrow u > V_{\text{ref}} \Rightarrow s = +V_{\text{sat}} \cong +V_{\text{cc}} - 1 \\ \text{si } u - V_{\text{ref}} < 0 &\Rightarrow u < V_{\text{ref}} \Rightarrow s = -V_{\text{sat}} \cong -V_{\text{cc}} + 1 \end{aligned}$$

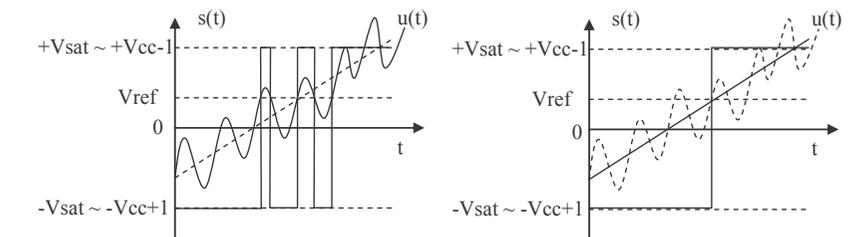


Figure 41: Mise en évidence de l'instabilité de la sortie $s(t)$ dû au bruitage sur $u(t)$

4.1.3. Comparateurs à hystérésis: Trigger de Schmitt

Les comparateurs décrits précédemment sont particulièrement instables dans le cas où le signal d'entrée est parasité par du bruit. Ce bruit peut provoquer des basculements indésirables de la sortie lorsque l'entrée est proche du point de déclenchement (**Figure 41**).

La solution standard du problème lié au bruit consiste à utiliser un comparateur à hystérésis. Le trigger de Schmitt (appelé aussi bascule de Schmitt) est un comparateur à hystérésis où une réaction positive est appliquée sur l'entrée non-inverseuse de l'ampli-op (**Figure 42**, **Figure 43**). Le signal d'entrée quant à lui est appliqué sur l'entrée inverseuse. Dans ce cas, le Trigger de Schmitt est un comparateur inverseur à deux seuils $+a.V_{\text{sat}}$ et $-a.V_{\text{sat}}$ dont le comportement est résumé par l'**Éq. 48**. Il existe un équivalent non-inverseur du Trigger de Schmitt où le signal d'entrée est appliqué sur l'entrée non-inverseuse (**Figure 44**, **Éq. 49**).

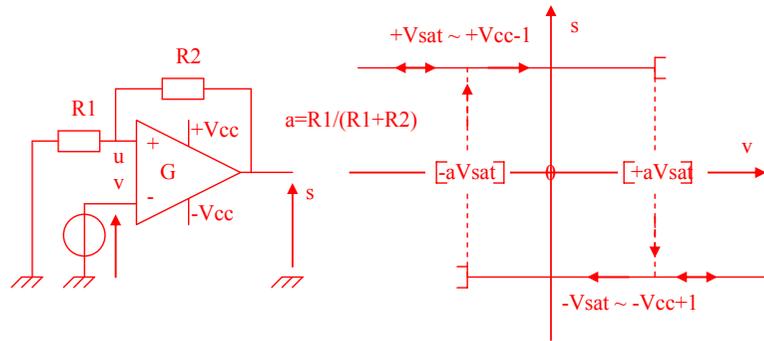


Figure 42: Comparateur à hystérésis inverseurs et représentation idéale de la sortie
 Éq. 48: Equations du comparateur à hystérésis

$$\text{Millman : } u = \frac{0}{\frac{R1}{1} + \frac{R2}{1}} + \frac{s}{R2} = s \cdot \frac{R1}{R1 + R2} = s \cdot a \text{ avec } a = \frac{R1}{R1 + R2}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } s = +Vsatsat \cong +Vcc - 1 \Rightarrow u - v > 0 \Rightarrow v < +a \cdot Vsatsat \\ \text{Si } s = -Vsatsat \cong -Vcc + 1 \Rightarrow u - v < 0 \Rightarrow v > -a \cdot Vsatsat \end{aligned}$$

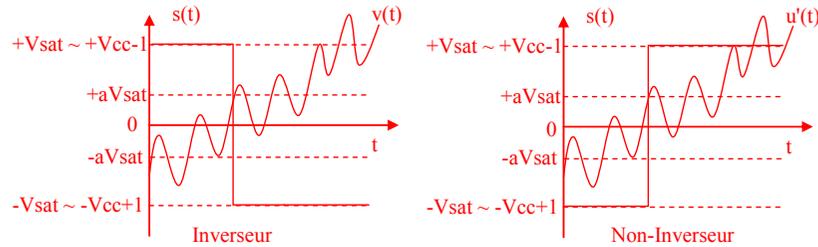


Figure 43: Mise en évidence de la stabilisation de la sortie s(t) malgré le bruitage sur u(t)

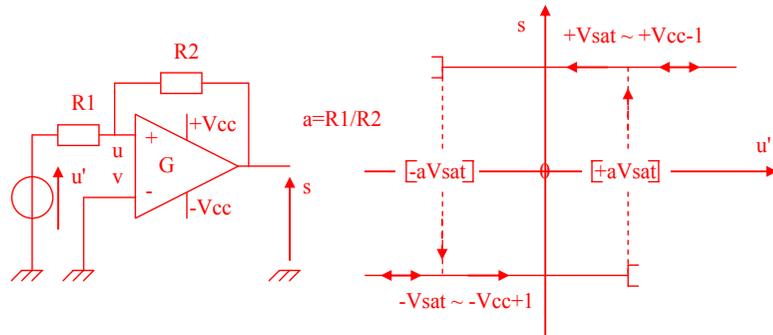


Figure 44: Comparateur à hystérésis non-inverseur et représentation idéale de la sortie

Éq. 49: Equations du comparateur à hystérésis non-inverseur

$$\text{Millman : } u = \frac{u' + s}{\frac{R1}{1} + \frac{R2}{1}} = (u' \cdot R2 + s \cdot R1) / (R1 + R2)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } s = +Vsatsat \cong +Vcc - 1 \Rightarrow u - v > 0 \Rightarrow u > 0 \Rightarrow u' > -a \cdot Vsatsat \text{ avec } a = \frac{R1}{R2} \\ \text{Si } s = -Vsatsat \cong -Vcc + 1 \Rightarrow u - v < 0 \Rightarrow u < 0 \Rightarrow u' < +a \cdot Vsatsat \text{ avec } a = \frac{R1}{R2} \end{aligned}$$

4.1.4. Comparateurs à fenêtre

Les comparateurs étudiés jusqu'à présent indiquent quand la tension d'entrée franchit un certain seuil. Un comparateur à fenêtre (appelé aussi détecteur entre deux seuils) repère quand la tension d'entrée se situe entre deux seuils.

Le schéma **Figure 45** présente un comparateur à fenêtre ayant la sortie au niveau bas lorsque la tension d'entrée se situe entre deux seuils (inférieur et supérieur). La sortie est au niveau haut dans le cas contraire. Ce comportement est décrit par l'**Éq. 50**.

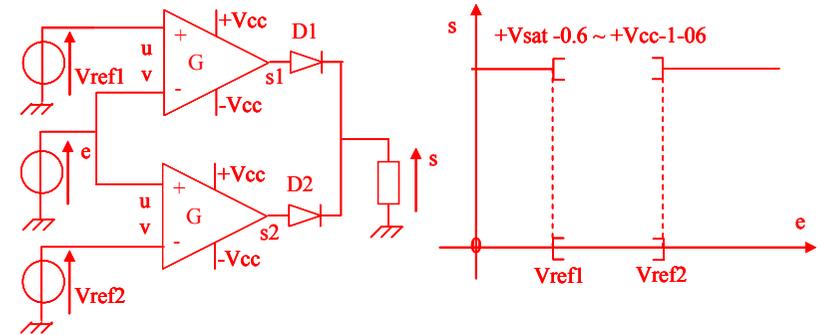


Figure 45: Comparateur à fenêtre (à niveau bas)

Éq. 50: Equations du comparateur à fenêtre (à niveau bas)

$$\begin{aligned} \text{Supposons } Vref2 > Vref1 \\ \text{Si } Vref1 < e < Vref2 \Rightarrow s1 = s2 = -Vsatsat \Rightarrow D1 \text{ et } D2 \text{ bloquées} \Rightarrow s = 0 \\ \text{Si } Vref1 > e \Rightarrow s1 = +Vsatsat \text{ et } s2 = -Vsatsat \Rightarrow D1 \text{ conduit et } D2 \text{ bloquées} \Rightarrow s = +Vsatsat - 0,6 \\ \text{Si } Vref2 < e \Rightarrow s1 = -Vsatsat \text{ et } s2 = +Vsatsat \Rightarrow D1 \text{ bloquées et } D2 \text{ conduit} \Rightarrow s = +Vsatsat - 0,6 \end{aligned}$$

4.2. Convertisseurs de signaux

Les convertisseurs de signaux servent souvent à transformer le signal, dans le but de le simplifier et/ou de le rendre compatible avec la chaîne de mesure. Par exemple, cette opération peut permettre de transformer un signal impulsionnel, créé par un capteur inductif,

en un signal carré alors plus approprié au comptage. On peut retrouver ces montages dans des systèmes de détection synchrone ou de comptage. Dans chacun de ces cas, le convertisseur n'est ni plus ni moins qu'un comparateur. Le signal converti est lié à la fréquence et à l'amplitude du signal original, mais son amplitude en est indépendante (**Figure 46**).

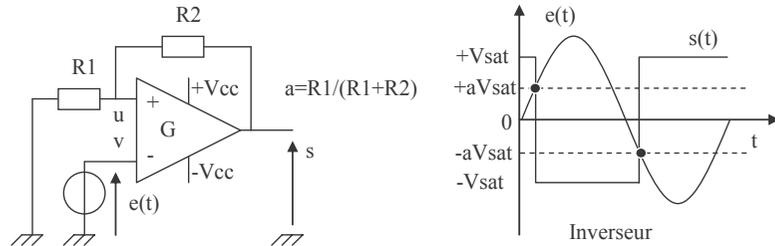


Figure 46: Convertisseur de Sinusoïdale à Rectangulaire

Dans le cas du montage intégrateur de la **Figure 47**, la sortie convertie est liée à la fois à la fréquence et à l'amplitude du signal original. Il s'agit d'un convertisseur de signal rectangulaire en un signal triangulaire. Comme son nom l'indique, la sortie du circuit est l'intégrale de l'entrée (**Éq. 51**).

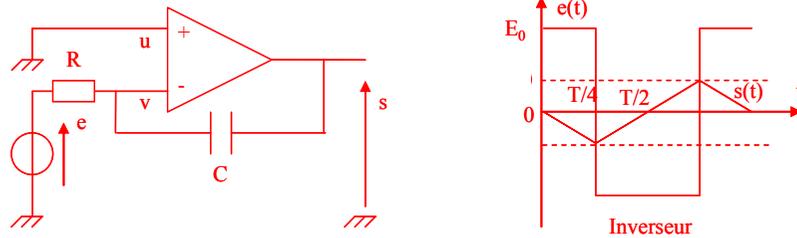


Figure 47: Convertisseur de Rectangulaire à Triangle

Éq. 51: Equation du convertisseur de Rectangulaire à Triangle

Hypothèse : $|\underline{u} - \underline{v}| < V_{sat} / G_0$ (ie. régime linéaire) $\Rightarrow (\underline{u} - \underline{v}) = s / G_0 = s / \infty = 0 \Rightarrow \underline{u} = \underline{v} = 0$ (1)

Millman : $\underline{v} = \frac{\frac{e}{R} + \frac{s}{Z_c}}{1/R + 1/Z_c}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow 0 = \frac{e}{R} + \frac{s}{Z_c} \Rightarrow \underline{s} / \underline{e} = -\frac{Z_c}{R} = -\frac{1}{j\omega RC} \Rightarrow -RC \cdot \frac{ds(t)}{dt} = e(t)$

$\Rightarrow s(t) = \int -\frac{e(t)}{RC} dt + K$

Inversement, pour produire un signal rectangulaire à partir d'un signal triangulaire d'entrée, on peut utiliser un montage dérivateur (ou différenciateur) à base d'ampli-op. Il suffit dans ce cas d'échanger les places de la résistance R et du condensateur C dans le montage intégrateur pour obtenir un montage dérivateur.

4.3. Générateurs de signaux astables et monostables

On appelle montage bistable (ou astable), un système qui délivre une tension oscillante entre deux valeurs (deux états stables) (**Figure 48**)



Figure 48: Symbolisation d'un Bistable

On appelle montage monostable, un système qui ne possède qu'un seul état stable. En revanche, il peut répondre à une commande (type impulsion) et modifier temporairement son état d'une durée T (**Figure 49**).



Figure 49: Symbolisation d'un Monostable

4.3.1. Oscillateurs à relaxation

La réaction positive sur l'entrée non-inverseuse garantit un fonctionnement en régime de saturation. Outre les comparateurs et les convertisseurs de signaux, cette réaction positive permet de réaliser des générateurs de signaux tels que des oscillateurs à relaxation. Ces oscillateurs produisent de manière autonome leur signal de sortie (ie sans signal d'entrée).

Le montage de la **Figure 50** est un oscillateur à relaxation générant un signal rectangulaire sans signal d'entrée. Pour comprendre le fonctionnement de cet oscillateur, on suppose qu'à la mise sous tension, le condensateur C n'est pas chargé. La sortie de l'ampli-op se met immédiatement en saturation à cause de la réaction positive. Selon le signe de la tension présente à l'entrée non-inverseuse, cette saturation peut être négative (s=-Vs) ou positive (s=Vs), cela est déterminé par la tension de l'offset de l'ampli-op et/ou éventuellement par du bruit présent à l'instant de la mise sous tension du circuit. En supposant que la sortie sature à +Vs, le condensateur se charge alors progressivement et v(t) évolue exponentiellement vers +Vs. Quand v(t) atteint +Vs, la sortie commute à -Vs et v1(t) évolue exponentiellement vers -Vs. Puis le cycle reprend lorsque v1(t) atteint -Vs (**Éq. 52**).

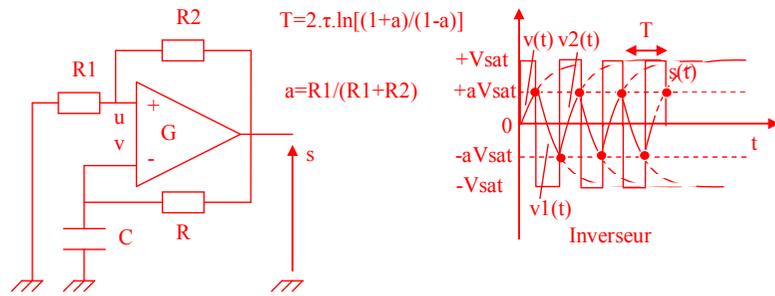


Figure 50: Oscillateur à relaxation basé sur un Trigger de Schmitt (Bistable)

Éq. 52: Equation de l'oscillateur à relaxation basé sur un Trigger de Schmitt

$$v(t) = V_{sat}(1 - e^{-t/\tau}) \text{ avec } \tau = RC$$

$$v1(t) = V_{sat}\left[-1 + (1+a) \cdot e^{-t1/\tau}\right] \text{ avec } a = R1/(R1 + R2)$$

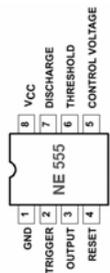
$$v2(t) = V_{sat}\left[1 - (1+a) \cdot e^{-t2/\tau}\right]$$

$$T = 2\tau \ln \frac{1+a}{1-a}$$

On montre ainsi que la période des oscillations est proportionnelle à C. Ce type d'oscillateur peut permettre de mesurer la dérive d'une capacité. Il est notamment utilisé comme capteur de pression ou de déformation. Dans ce cas la capacité dépend par exemple de la géométrie des électrodes liée au mesurande (et/ou de la permittivité interélectrode).

4.3.2. Le temporisateur 555 (Timer 555)

Le temporisateur 555 est un circuit intégré de 8 broches spécialisé dans la production de signaux (Figure 51). Il peut être facilement configuré (avec des composants externes) pour fonctionner en mode monostable ou astable. Ce circuit, dont la fréquence d'oscillation est facilement ajustable, est utilisé dans les applications de temporisation mais aussi de mesures.



(GND): Masse, reliée au potentiel - de l'alimentation
 (Trigger): Déclenchement. Mode monostable : déclenche le départ du signal de sortie. Mode Astable : connecté avec la broche 6
 (Output): Sortie (~ 2/3 de Vcc)
 (Reset): Remise à zéro. Mode monostable : force le signal au niveau L
 (Control voltage): Contrôle la tension du pont diviseur interne. Pas très utilisé et souvent non connecté ou relié à une capa vers la masse
 (Threshold): Seuil de déclenchement ou comparateur. Mode monostable connecté avec la broche 7
 (Discharge): Décharge le condensateur externe de la minuterie
 (Vcc): Alimentation + du circuit de 4,5V à 16V. La tension d'alimentation n'a que très peu d'influence sur la période du Timer, soit 0,1%/V. Elle influence cependant la tension de sortie et le courant

Figure 51: Schéma de câblage du 555 de Philips Semiconductors

La Figure 52 présente un schéma simplifié du circuit 555. On distingue essentiellement deux comparateurs avec tension de référence, une bascule R-S, un transistor NPN et un diviseur de tension à trois résistances identiques.

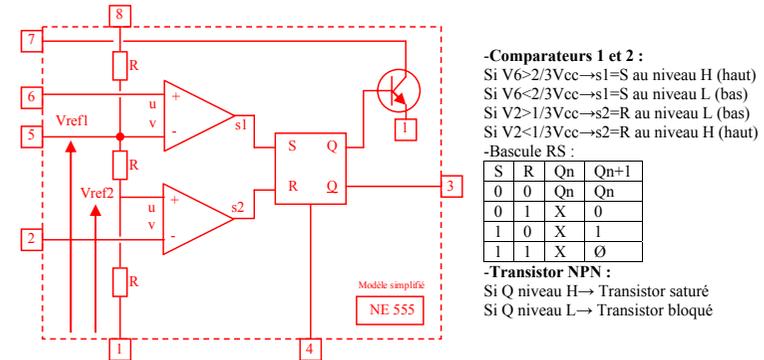


Figure 52: Schéma de base du temporisateur

4.3.2.1. Fonctionnement en bistable (astable)

Ce mode de fonctionnement (Figure 53, Éq. 53) nécessite deux résistances externes (R1 et R2) et un condensateur C. Le circuit génère (sans signal d'entrée) des signaux rectangulaires dont la fréquence et le rapport cyclique sont définis par les valeurs des composants externes. Ce type de dispositif peut non seulement servir de base de temps dans une chaîne de mesure mais aussi de capteur à part entière dans le cas où l'on choisi une capacité sensible au mesurande.

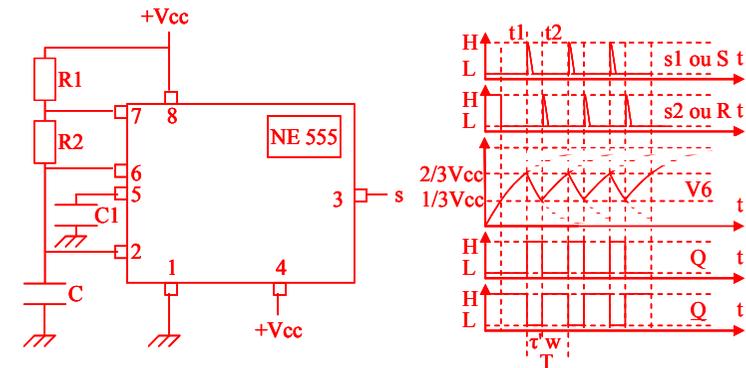


Figure 53: Schéma de câblage en mode Bistable

Éq. 53: Equation du 555 en mode Bistable

$$0 < t < t_1 \quad v_6(t) = V_{cc}(1 - e^{-t/\tau}) \text{ avec } \tau = (R_1 + R_2).C$$

$$t_1 < t < t_2 \quad v_6(t) = 2/3.V_{cc}.e^{-t_1/\tau} \text{ avec } \tau = R_2.C$$

$$t_2 < t < t_3 \quad v_6(t) = V_{cc} - (V_{cc} - V_{cc}/3).e^{-t_2/\tau} \text{ avec } \tau = (R_1 + R_2).C$$

$$\tau' = \tau \ln 2 \text{ avec } \tau = R_2.C$$

$$T = \tau' + w = R_2.C \cdot \ln 2 - (R_1 + R_2).C \cdot \ln \left(\frac{V_{cc} - 2/3.V_{cc}}{V_{cc} - V_{cc}/3} \right)$$

4.3.2.2. Fonctionnement en monostable

Dans ce mode de fonctionnement (Figure 54, Éq. 54), le circuit donne des retards temporels ajustables par une résistance et un condensateur externes au circuit (de la µs à l'heure). La broche 5 n'est pas utilisée. Une impulsion d'entrée sous la forme d'un bref passage du niveau de tension Vcc à un niveau inférieur est appliquée sur l'entrée de déclenchement 2.

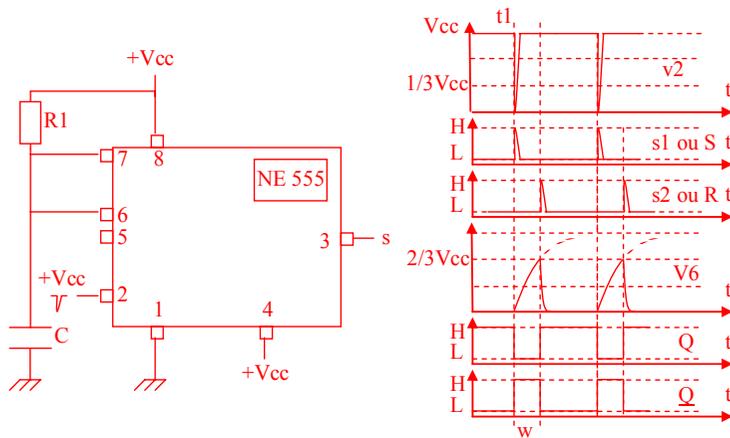


Figure 54: Schéma de câblage en mode Monostable

Éq. 54: Equation du 555 en mode Monostable

$$v_6(t) = V_{cc}(1 - e^{-t/\tau}) \text{ avec } \tau = R_1.C$$

$$w = \tau \ln 3$$

4.4. Modulation

En électronique on appelle modulation le processus qui consiste à faire varier un ou plusieurs paramètres (amplitude, fréquence, phase, spectre etc...) d'un signal porteur noté p(t) par un autre signal modulateur noté m(t). Le dispositif qui effectue cette modulation, est un modulateur. L'opération inverse permettant d'extraire le signal de la porteuse est la démodulation. Typiquement le modem est l'association d'un modulateur et d'un démodulateur.

La modulation permet notamment de translater l'information dans un domaine de fréquences qui est plus adapté au moyen de propagation et d'assurer après démodulation la qualité requise par les autres couches du système. Le but des modulations analogiques est d'assurer la qualité suffisante de transmission d'une information analogique (voix, musique, image) dans les limites du canal utilisé et de l'application. Le but des modulations numériques est d'assurer un débit maximum de données binaires, avec un taux d'erreur acceptable par les protocoles et correcteurs amont et aval. Dans l'empilement des protocoles OSI (architecture standard des télécommunications numériques), la modulation est l'élément principal de la couche physique. La modulation est parfois inhérente au fonctionnement du capteur (eg. le capteur inductif).

A ce jour, il existe de multiples systèmes de modulation dont les plus connus sont: la modulation AM (modulation d'amplitude), FM (modulation de fréquence), PM (modulation de phase), MLI (modulation de largeur d'impulsion) etc...

4.4.1. Modulation d'amplitude (AM)

En modulation d'amplitude, le signal porteur p(t) est multiplié par le signal modulateur m(t) (information). Par conséquent, l'amplitude du signal modulé en amplitude s_{AM}(t) varie dans le temps selon la loi de variations de m(t) (Figure 55).

4.4.2. Modulation de fréquence (FM)

En modulation de fréquence, la fréquence du porteur p(t) varie dans le temps selon la loi de variations de m(t) (Figure 55).

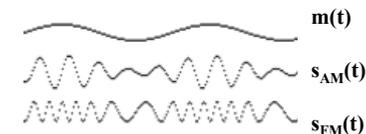


Figure 55: Illustration de la modulation AM et FM d'un signal m(t)

4.4.2.1. Exemple de modulateur FM: l'oscillateur commandé en tension (OCT)

Un oscillateur commandé en tension (OCT) ou "Voltage-Controlled Oscillator (VCO)" est un oscillateur dont la fréquence d'oscillations est contrôlée par une tension d'entrée. Le montage est parfois appelé convertisseur tension-fréquence car une tension d'entrée fait varier une fréquence de sortie. Les OCT sont très utilisés dans de nombreuses applications telles que la modulation et la démodulation de fréquence (FM) ou la synthèse de fréquence. Dans ces applications, la relation entre la tension d'entrée et la fréquence de sortie est linéaire.

Il existe plusieurs façons de réaliser un OCT. Le montage de la Figure 56 est un OCT réalisé à partir d'un 555. On remarque que le circuit est configuré en mode bistable comme au §4.3.2.1. La seule différence réside en la broche 5: une source de tension V₀ vient remplacer une capacité de découplage. Cela a pour conséquence de modifier la tension de référence des deux comparateurs. On obtient donc V₀/2 et V₀ comme nouvelles références. Par conséquent, la tension aux bornes de C oscille entre V₀ (valeur maximale) et V₀/2 (valeur minimale) au lieu de 2V_{cc}/3 et V_{cc}/3 (Éq. 55). Ainsi, en augmentant V₀, la durée de la charge et de la décharge du condensateur est allongée, ce qui provoque une diminution logarithmique de f.

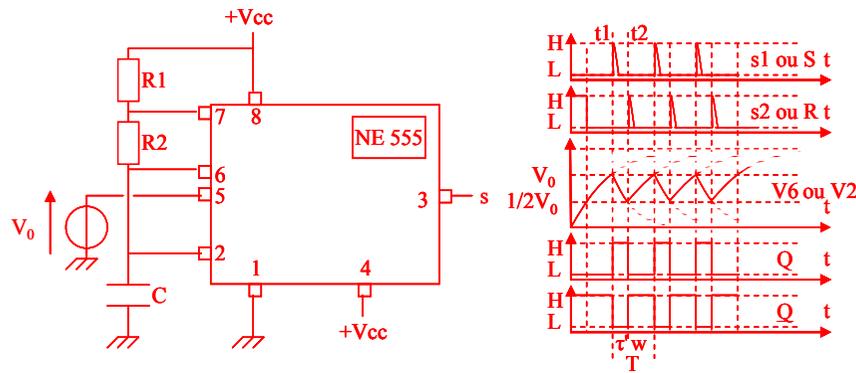


Figure 56: Schéma de câblage en mode Bistable (configuration du 555 en OCT)

Éq. 55: Equation du 555 en mode Bistable (configuration en OCT)

$$\begin{aligned}
 0 < t < t_1 \quad v_6(t) &= V_{cc}(1 - e^{-t/\tau}) \text{ avec } \tau = (R_1 + R_2)C \\
 t_1 < t < t_2 \quad v_6(t) &= V_0 e^{-t/t_1/\tau} \text{ avec } \tau = R_2C \\
 t_2 < t < t_3 \quad v_6(t) &= V_{cc} - (V_{cc} - V_0/2) \cdot e^{-t/t_2/\tau} \text{ avec } \tau = (R_1 + R_2)C \\
 \tau' &= \tau \ln 2 \text{ avec } \tau = R_2C \\
 T = \tau' + w &= R_2C \cdot \ln 2 - (R_1 + R_2)C \cdot \ln \left(\frac{V_{cc} - V_0}{V_{cc} - V_0/2} \right)
 \end{aligned}$$

Démo: (TD)

4.4.3. Modulation en largeur d'impulsions (MLI)

Dans le cas de la modulation en largeur d'impulsion (MLI) ou Pulse-Width Modulation (PWM), c'est la largeur d'impulsion w du signal porteur $p(t)$ qui est modifiée en fonction du signal modulateur $m(t)$ (information). Par conséquent, la largeur d'impulsion $w(t)$ du signal modulé $s_{MLI}(t)$ varie dans le temps selon la loi de variations de $m(t)$ (Figure 57).

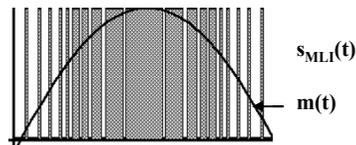


Figure 57: Illustration de la modulation MLI d'un signal $m(t)$

4.4.3.1. Exemple de modulateur MLI: l'oscillateur 555 en mode monostable

Il existe plusieurs façons de réaliser une MLI. Le montage de la Figure 58 est une MLI réalisée à partir d'un 555. On remarque que le circuit est configuré en mode monostable

comme au §4.3.2.2. Il y a ceci dit deux modifications majeures: d'une part un signal modulateur $m(t)$ est relié à la broche 5 via une capacité de découplage C . Cela a pour conséquence de modifier de tension de référence du comparateur A1. Cette tension de référence devient alors $2/3V_{cc}+m(t)$; d'autre part un train d'impulsion régulières de type horloge est appliqué à la broche de déclenchement 2. Par conséquent, chaque impulsion de déclenchement génère en sortie une impulsion dont la largeur dépend de $m(t)$. Ainsi on obtient en sortie un signal périodique de période T et de largeur d'impulsions variables $w(t)$. Le signal $m(t)$ n'a aucun effet sur la période T (fixée par l'horloge), mais il change seulement la largeur de chaque impulsion w .

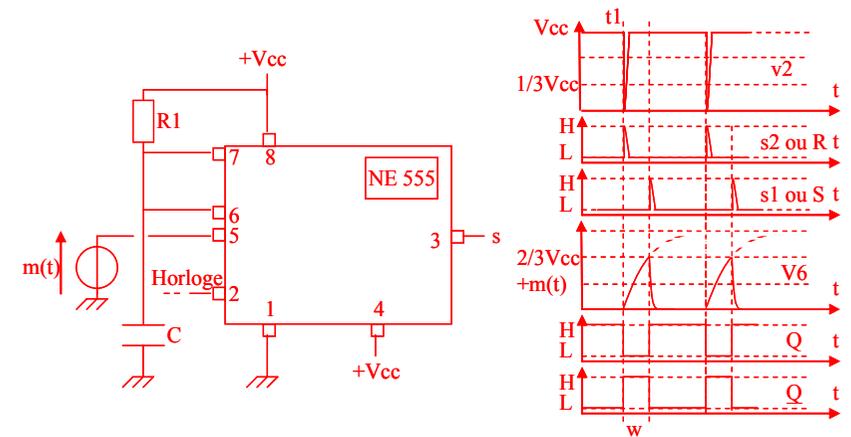


Figure 58: Schéma de câblage en mode Monostable (configuration du 555 en MLI)

Éq. 56: Equation du 555 en mode Monostable (configuration en MLI)

$$\begin{aligned}
 v_6(t) &= V_{cc}(1 - e^{-t/\tau}) \text{ avec } \tau = R_1C \\
 w &= -R_1C \cdot \ln \left(1 - \frac{(2/3V_{cc} - m(t))}{V_{cc}} \right)
 \end{aligned}$$

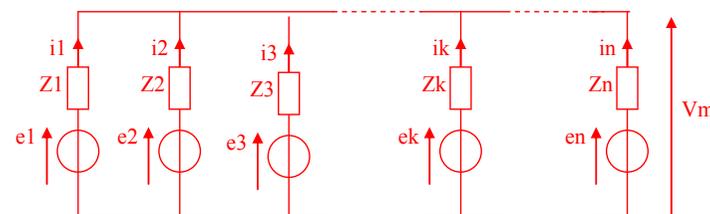
Le signal résultant peut être ensuite transmis par fibre optique ou par infrarouge (après conversion en signal optique). Ce mode de modulation est fréquemment employé pour la transmission de signaux ECG et EEG.

Annexe: Lexique Français / Anglais

Français	English
Amplificateur opérationnel (Ampli-op)	Operational Amplifier (Op-amp)
Circuit intégré (CI)	Integrated circuit (IC)
Ampli-op à usage général	General-purpose op-amp
Entrée (sortie) différentielle	Differential input (output)
Entrée (sortie) asymétrique	Single-ended input (output)
Gain en boucle ouverte	Open-loop gain
Contre-réaction	Negative Feedback
Bande passante ou largeur de la bande passante	Bandwidth
Tension d'alimentation	Power supply
Broche (« patte ») d'un circuit intégré	Lead
Fréquence du gain unitaire ou le produit gain-bande passante ou facteur de mérite	Unit-gain frequency or gain-bandwidth product
Vitesse maximum de balayage	Slew rate
Taux de réjection en mode commun	Common-mode rejection ratio
Circuit imprimé	PC board
Brevet	Patent
Taux	Ratio
Masse d'un circuit	Circuit Ground (GND)
Dérive	Drift
Seuil	Threshold
Déclencher	To trigger
Déclenchement	Trigger
Charge	A load
Charger	To load
Matériel	Device
Fiche technique	Datasheet (or data sheet)
Capteur	Sensor
Fonction de transfert	Transfer Function
Adaptation d'impédance	Impedance matching
Adapter en impédance	To match
Etage d'amplification	Amplification stage
Filtre coupe bande	Band-reject filter
Filtre passe tout	All-pass filter
Filtre passe haut	High-pass filter
Filtre passe bas	Low-pass filter
Filtre passé bande	Band-pass filter
Fréquence de coupure	Cut-off frequency
Etage suiveur	Follower stage

Annexe: Théorème de Millman

Dans un réseau électrique de branches en parallèle, comprenant chacune un générateur de tension parfait en série avec un élément linéaire, la tension aux bornes des branches est égale à la somme des forces électromotrices respectivement multipliées par l'admittance de la branche, le tout divisé par la somme des admittances. (Le théorème de Millman est ainsi nommé en l'honneur de l'électronicien russe Jacob Millman).



$$V_m = \frac{\sum_{k=1}^N E_k \cdot Y_k}{\sum_{k=1}^N Y_k} = \frac{\sum_{k=1}^N \frac{E_k}{Z_k}}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{Z_k}}$$

Démo:

Pour chaque branche, le courant se déduit de la loi d'ohm de la manière suivante:

$$I_k = Y_k \times (V_m - E_k)$$

D'après la loi des nœuds (ie loi de Kirchhoff en courant)

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0$$

D'où

$$\sum_{k=1}^N Y_k \times (V_m - E_k) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^N Y_k \times V_m = \sum_{k=1}^N Y_k \times E_k \quad \Rightarrow$$

$$V_m = \frac{\sum_{k=1}^N E_k \cdot Y_k}{\sum_{k=1}^N Y_k} = \frac{\sum_{k=1}^N \frac{E_k}{Z_k}}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{Z_k}}$$

Ce théorème permet parfois de gagner quelques lignes de calcul. Il est assez bien approprié au calcul de gain d'ampli-op.

Annexe: De l'équation différentielle à la fonction de transfert

Pré-requis

On appelle équation différentielle ordinaire, en abrégé EDO (ODE en anglais) ou plus simplement équation différentielle, toute relation entre une fonction s de la variable t et ses dérivées (ds/dt , d^2s/dt^2 , ...), de la forme générale :

$$F(t, s, \frac{ds}{dt}, \frac{d^2s}{dt^2}, \dots, \frac{d^ns}{dt^n}) = 0. \text{ L'ordre maximal de dérivation } n \text{ définit l'ordre de l'EDO.}$$

En physique, résoudre une EDO consiste à trouver la fonction $s(t)$ vérifiant l'EDO proposée et satisfaisant certaines conditions aux frontières (conditions initiales ou conditions aux limites).

Contrairement à ce que nous enseignent les mathématiciens, nous n'avons pas à nous préoccuper de l'éventuelle existence de la solution (s de classe C^1 ou s continue et localement Lipschitzienne, etc ...):

la réalité du problème posé suffit à prouver son existence.

En revanche, est posé le problème de l'unicité: la solution trouvée, satisfaisant les conditions aux frontières est-elle la seule? Pas toujours (notamment dans le cas d'équations non linéaires).

Toutefois, nous nous limiterons à des problèmes suffisamment simples pour être décrits dans un cadre déterministe, où la solution $s(t)$ cherchée sera unique, compte tenu de conditions aux frontières précisées.

Plus précisément, parmi toutes les solutions mathématiquement convenables d'une EDO, nous choisirons celles qui satisfont les exigences physiques (ou chimiques) du problème posé.

I : Équation linéaire du 1er ordre à coefficients constants.

1°) Le cadre : méthodes générales.

Forme canonique :	$\tau \frac{ds}{dt} + s = e(t)$, avec τ constante réelle.
Solution :	$s(t) = s_{gen}(t) + s_{part}(t)$, où $s_{gen}(t)$ est la solution de l'équation homogène sans second membre (<u>régime libre</u>) et $s_{part}(t)$ une solution particulière de l'équation complète avec second membre (<u>régime forcé</u>).
Solution générale du régime transitoire :	$s_{gen}(t) = C \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right]$
Solution particulière du régime forcé :	s_{part} dépend de la forme de $e(t)$: - pour $e(t) = e_0$ constant : $s_{part}(t) = e_0$ - pour $e(t) = e_0 \cos(\Omega t)$ (ou $e_0 \sin(\Omega t)$), on cherche s_{part} sous la forme : $s_{part}(t) = s_0 \cos(\Omega t + \varphi)$

Pour déterminer s_0 et φ , on passe en complexes en posant: $s_{part} = \underline{s}_0 \exp(j\Omega t)$ et $e(t) = e_0 \exp(j\Omega t)$ et on résout l'équation algébrique : $[1 + j\Omega\tau] \underline{s}_0 = \underline{e}_0$. On en tire :

$$s_0 = |\underline{s}_0| = \frac{|e_0|}{\sqrt{1 + (\Omega\tau)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(\underline{s}_0) = \arg(\underline{e}_0) - \arctan(\Omega\tau).$$

La constante C qui apparaît dans s_{gen} est déterminée grâce à la condition initiale (en raisonnant sur s_{tot}): $s(t = t_0^+) = C + s_{part}(t = t_0^+)$.

2°) Le cas d'un système amorti.

Le système régi par l'EDO précédente sera dit amorti si $\tau > 0$.

Pour un tel système la solution générale (décrivant le régime transitoire) tend vers 0 au bout d'un temps plus ou moins long : le comportement du système est alors entièrement régi par sa solution particulière.

τ , homogène à un temps, est appelé la constante de temps du système, ou temps de relaxation.

Réponse indicielle : on appelle réponse indicielle d'un système, la réponse $s(t)$ à un échelon unité, c'est-à-dire

$$\text{(après un choix convenable d'origine des temps) : } \begin{cases} \forall t < 0, e(t) = 0 \\ \forall t \geq 0, e(t) = 1 \end{cases}$$

En supposant le système initialement au repos ($\forall t < 0, s(t) = 0$), on obtient, pour $t \geq 0$: $s(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

La constante de temps τ du système trouve alors une interprétation géométrique simple :

La tangente à l'origine $\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0}$ coupe l'asymptote en régime permanent $(\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t))$ pour l'instant $t = \tau$.

Temps de montée (ou rise time t_r en anglais) = durée entre les instants pour lesquels $s(t) = 10\%$ et $s(t) = 90\%$ de la variation totale.

On établit facilement que : $t_r \approx 2,2\tau$.

Temps d'établissement à $\alpha\%$ = durée entre l'instant initial et l'instant où $s(t) = \alpha\%$ de la variation totale.

On montre alors que pour $\alpha = 95\%$: $\Delta t_{95\%} \approx 3\tau$; pour $\alpha = 99\%$: $\Delta t_{99\%} \approx 5\tau$.

3°) Comportement fréquentiel : interprétation en terme de filtre.

Soit un système régi par l'EDO du type : $\tau \frac{ds}{dt} + s = e(t)$, où $e(t)$ est le signal appliqué à l'entrée (la commande) et $s(t)$ le signal de sortie (la réponse).

Dans le cas où les signaux $e(t)$ et $s(t)$ sont des fonctions sinusoïdales du temps, de pulsation ω , on définit la fonction de transfert du système par :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}, \text{ où } \underline{e} \text{ et } \underline{s} \text{ sont les grandeurs complexes associées aux signaux réels.}$$

L'intérêt de passer par les complexes est de remplacer les opérations de dérivation et d'intégration par rapport au temps en multiplication ou division par $j\omega$.

L'EDO s'écrit alors : $j\omega \underline{s} + \underline{s} = \underline{e}$; d'où $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$, avec $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$.

Cette fonction de transfert caractérise un filtre passe bas du premier ordre, de pulsation de coupure (à -3dB) ω_0 .

II : Équation linéaire du 2ème ordre à coefficients constants.

1°) Le cadre : méthodes générales.

Forme canonique :	$a \frac{d^2s}{dt^2} + b \frac{ds}{dt} + c.s = e(t)$, avec a, b et c constantes réelles.
Solution :	$s(t) = s_{gen}(t) + s_{part}(t)$, où $s_{gen}(t)$ est la solution de l'équation homogène sans second membre (<u>régime libre</u>) et $s_{part}(t)$ une solution particulière de l'équation complète avec second membre (<u>régime forcé</u>).
Solution générale du régime transitoire :	$s_{gen}(t) = C1.exp(r_1t) + C2.exp(r_2t)$, où C1 et C2 sont des constantes et r_1 et r_2 les racines (a priori complexes) de l'équation caractéristique : $a.r^2 + b.r + c = 0$.
3 cas se présentent, suivant le signe du discriminant Δ de l'équation caractéristique.	
1. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$:	les racines sont <u>toutes deux réelles</u> : $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. On peut écrire s_{gen} sous les deux formes équivalentes : $s_{gen}(t) = \begin{cases} C1.e^{r_1t} + C2.e^{r_2t} \\ ou \\ C1.ch(r_1t) + C2.sh(r_2t) \end{cases}$
2. $\Delta = 0$:	on a une <u>racine réelle double</u> : $r_0 = \frac{-b}{2a}$. On écrit : $s_{gen}(t) = [C1 + C2.t] \exp(r_0t)$.
3. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$:	les racines sont <u>complexes conjuguées</u> , de la forme : $r_1 = -\frac{b}{2a} + j\omega$ et $r_2 = -\frac{b}{2a} - j\omega$, où $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$. On a alors : $s_{gen}(t) = e^{-\frac{b}{2a}t} [C1.\cos(\omega t) + C2.\sin(\omega t)]$.

On rappelle la définition de $\exp(z)$ pour la variable complexe $z = x + jy$ (avec x et y réels) : $\exp(z) = e^x \cdot e^{jy} = e^x (\cos(y) + j \sin(y))$.

Solution particulière du régime forcé :	pour $e(t) = e_0$ constant : $s_{part}(t) = e_0$
	pour $e(t) = e_0 \cdot \cos(\Omega t)$ (ou $e_0 \cdot \sin(\Omega t)$), on cherche s_{part} sous la forme :
	$s_{part}(t) = s_0 \cos(\Omega t + \varphi)$.

Pour déterminer s_0 et φ , on passe en complexes en posant: $s_{part} = s_0 \exp(j\Omega t)$ et $e(t) = e_0 \exp(j\Omega t)$ et on résout l'équation algébrique : $[c - a\Omega^2 + jb\Omega]s_0 = e_0$. On en tire :

$$s_0 = |s_0| = \frac{|e_0|}{\sqrt{[c - a\Omega^2]^2 + [b\Omega]^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(s_0) = \arg(e_0) - \arg(c - a\Omega^2 + jb\Omega)$$

C1 et C2 sont déterminées à partir des conditions initiales en raisonnant sur s_{tot} :

$$s(t=0^+) = s_{gen}(t=0^+) + s_{part}(t=0^+) \quad \text{et} \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0^+} = \left(\frac{ds_{gen}}{dt}\right)_{t=0^+} + \left(\frac{ds_{part}}{dt}\right)_{t=0^+}$$

La résolution d'une équation différentielle du 2^{ème} ordre fait intervenir nécessairement 2 constantes d'intégration. Leur détermination suppose donc de connaître 2 conditions initiales ($s_{t=0^+}$ et $\frac{ds}{dt}_{t=0^+}$).

2°) L'oscillateur harmonique.

Un oscillateur harmonique est un système régi par une équation différentielle du second ordre de la forme : $\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2.s = \omega_0^2.H_0e(t)$. La constante ω_0 , réelle est appelée pulsation propre de l'oscillateur.

La solution générale de l'équation sans second membre peut se mettre sous les deux formes équivalentes (on choisit l'expression qui conduit aux calculs les plus simples compte tenu des conditions initiales) :

$$s(t) = S_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{ou} \quad s(t) = C1.\cos(\omega_0 t) + C2.\sin(\omega_0 t)$$

On a en effet ici : $\Delta = -4\omega_0^2 < 0$; les racines sont imaginaires pures : $r_1 = j\omega_0$ et $r_2 = -j\omega_0$. S_{max} représente l'amplitude de s(t) et φ la phase à l'origine des dates.

3°) Le cas d'un système amorti.

On parle de système amorti quand on a $b > 0$ avec le rapport $\frac{c}{a} > 0$. On écrit l'équation différentielle sous la forme canonique : $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 H_0 e(t)$, avec $\omega_0 > 0$ et $Q > 0$.
 ω_0 est la pulsation propre et Q sans dimension, appelé facteur de qualité, caractérise l'amortissement du système.

Remarque : Avec $c/a > 0$ et $b < 0$, on obtient pour la solution générale de l'équation sans second membre $\lambda < 0$, conduisant à des solutions non bornées (exponentielles divergentes).

Le discriminant réduit de l'équation caractéristique s'écrit : $\Delta' = \omega_0 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$. On distingue alors les

3 cas suivants :

1. $\Delta' > 0 : Q < \frac{1}{2}$: les racines peuvent s'écrire : $r_1 = -\frac{1}{\tau_1}$ et $r_2 = -\frac{1}{\tau_2}$, avec τ_1 et τ_2 réels positifs.

Ainsi $s_{gén}(t) = C1 \cdot \exp(-\frac{t}{\tau_1}) + C2 \cdot \exp(-\frac{t}{\tau_2})$: $s_{gén}(t)$ tend vers 0 sans osciller quand t augmente : le régime est dit **apériodique**.

2. $\Delta' = 0 : Q = \frac{1}{2}$: la racine double de l'équation caractéristique est négative : $r_0 = -\frac{1}{\tau_0}$, avec τ_0 réel positif. Ainsi $s_{gén}(t) = (C1 + C2 \cdot t) \cdot \exp(-\frac{t}{\tau_0})$. Comme au cas 1, $s_{gén}$ tend vers zéro sans osciller : le régime est dit **critique**.

3. $\Delta' < 0 : Q > \frac{1}{2}$: les racines sont complexes conjuguées, à partie réelle négative.

On écrit : $s_{gén}(t) = \exp(-\frac{\omega_0}{2Q}t) \cdot [C1 \cdot \cos(\omega t) + C2 \cdot \sin(\omega t)]$, avec $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$. $s_{gén}$ tend vers zéro en oscillant.

Le régime correspondant est dit **pseudo-périodique**, de pseudo-période T, $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

On peut interpréter un comportement d'oscillateur harmonique comme un cas limite d'oscillateur amorti quand l'amortissement σ tend vers zéro.

➤ **Décrément logarithmique.**

Dans le cas d'un régime pseudo-périodique, on définit le **décrément logarithmique**, noté δ , nombre sans dimension défini comme :

$\delta = \ln\left(\frac{s(t+(n-1)T)}{s(t+nT)}\right)$, avec n entier. La mesure de δ permet de calculer le

facteur de qualité du système, car on a : $\delta = \frac{\omega_0 \cdot T}{2Q_0} = \frac{\pi}{Q_0} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}}$.

Cette dernière relation est intéressante dans le cas d'un système faiblement amorti ($Q_0 > 3$), pour lequel on obtient la relation approchée : $\delta \approx \frac{\pi}{Q_0}$.

3°) **Comportement fréquentiel : interprétation en terme de filtre.**

Prenons le cas d'un système du second ordre amorti. Comme précédemment, on étudie le cas où les signaux $e(t)$ et $s(t)$ sont des fonctions sinusoïdales du temps, de pulsation ω . On cherche la fonction de transfert du système

définie par : $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$, où \underline{e} et \underline{s} sont les grandeurs complexes associées. L'EDO s'écrit : $-\omega^2 \underline{s} + j \cdot \lambda \cdot \omega_0 \omega \underline{s} + \omega_0^2 \underline{s}$

= $\omega_0^2 H_0 \underline{e}$; d'où $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j \lambda \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$.

L'examen de l'évolution asymptotique du module permet de classer ce filtre dans la catégorie des **filtres passe bas**. Toutefois, la possibilité d'obtention d'une résonance, parfois très aiguë si le coefficient d'amortissement λ est faible ($\lambda < \sqrt{2}$), permettra d'utiliser ce filtre comme un **passe bande sélectif** :

$|H|_{max}$ est alors obtenu pour la pulsation ω_r vérifiant l'équation : $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4}}$,

Un **filtre passe bande du second ordre** est caractérisé par une fonction de transfert pouvant se mettre sous la

forme canonique : $H = \frac{j2\sigma x H_0}{1 + j2\sigma \cdot x - x^2}$, ou : $H = \frac{H_0}{1 + j \frac{1}{2\sigma} (x - \frac{1}{x})}$, avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Pour un tel filtre passe bande, la **bande passante** vérifie la relation : $\Delta_{3dB} \omega = \frac{\omega_0}{Q_0}$.

Le **facteur de qualité Q_0** d'un système du second ordre peut alors s'écrire par : $Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta_{3dB} \omega}$.

Démonstration : Les pulsations de coupure ω_c vérifient : $|H(\omega_c)| = \frac{|H|_{max}}{\sqrt{2}}$, soit : $x - \frac{1}{x} = \pm 2\sigma$,

qui conduit aux deux équations du second degré : $x^2 \mp 2\sigma \cdot x - 1 = 0$.

En ne retenant que les racines positives de ces équations, on trouve : $\begin{cases} x_1 = -\sigma + \sqrt{1 + \sigma^2} \\ x_2 = +\sigma + \sqrt{1 + \sigma^2} \end{cases}$.

La bande passante a ainsi pour largeur $\Delta\omega = (x_2 - x_1) \cdot \omega_0$, soit $\Delta\omega = 2\sigma \cdot \omega_0 = \frac{\omega_0}{Q_0}$.

La forme canonique d'un filtre passe bande du 2^{ème} ordre est : $H = \frac{H_0}{1 + jQ_0(x - \frac{1}{x})}$, avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, où Q_0 est le facteur de qualité du système.

4°) **Équation différentielle rendant compte de « l'effet de peau ».**

On considère l'EDO à résoudre dans $\forall : \frac{d^2 F}{dx^2} - \frac{2j}{\delta^2} F = 0$, où F est une fonction à valeurs complexe de la variable réelle x. δ une constante positive, ayant la même dimension que la variable x.

La méthode précédente reste valable en prenant garde au fait que l'équation caractéristique est à coefficients complexes.

Le discriminant s'écrit : $\Delta = \frac{2j}{\delta^2}$. On notera que $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$, ce qui permet d'écrire les racines sous la

forme : $r_1 = -\frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{j\frac{\pi}{4}}$ et $r_2 = \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{j\frac{\pi}{4}}$. Soit encore : $r_1 = -\frac{1}{\delta} - j\frac{1}{\delta}$ et $r_2 = \frac{1}{\delta} + j\frac{1}{\delta}$.

La solution s'écrit : $F(x) = C1 \cdot \exp(r_1 \cdot x) + C2 \cdot \exp(r_2 \cdot x)$, ou bien $F(x) = C1 \cdot ch(r_1 \cdot x) + C2 \cdot sh(r_2 \cdot x)$.

La détermination des constantes complexes C1 et C2 dépend du problème posé (conditions aux limites sur x).

Résumé

Nous examinons dans ce cours les principaux dispositifs électroniques permettant de traiter le signal issu d'un capteur. L'ampli-op jouant un rôle prépondérant dans ce domaine, nous étudions les principaux montages d'amplification de signaux à base d'ampli-op, puis nous analysons leurs imperfections afin de sensibiliser le technicien aux erreurs de mesures. Enfin, les signaux issus de capteurs étant généralement bruités, il est nécessaire d'utiliser des dispositifs de filtrage qui peuvent être de type passif ou actif, analogique ou numérique. Nous nous intéressons dans ce cours essentiellement aux filtres actifs analogiques exploitant l'amplificateur opérationnel. A ce stade les imperfections évoquées précédemment ne sont plus prises en compte car elles peuvent être considérées comme négligeables. En effet le gain d'un filtre est généralement bien plus faible que celui d'un montage amplificateur dont la fonction amont est de prélever et amplifier le signal produit par le capteur. Enfin nous étudions le cas des montages à rétroaction positive (mode non-linéaire) et des oscillateurs à relaxation utilisés dans les processus de traitement, génération et conversion de signaux.

Bibliographie

- [1] A. Asfour, Notes de cours en formation initiale, UJF-IUT1 dpt Mesures Physiques
- [2] J. Millman & A. Grabel, Microelectronics, 2nd Ed McCraw-Hill International
- [3] A.P. Malvino, Principes d'électronique, 6e Ed Dunod Sciences Sup
- [4] T. Dutoit, Notes de cours, Faculté Polytechnique de Mons, 1ère Ed