

RADIO-ÉLECTRICITÉ GÉNÉRALE

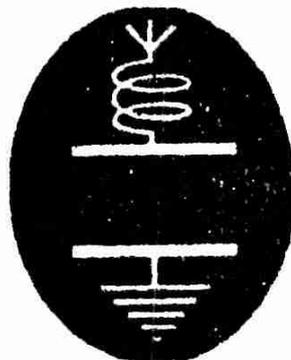
TOME I

ÉTUDE DES CIRCUITS
ET DE LA PROPAGATION

PAR

R. MESNY

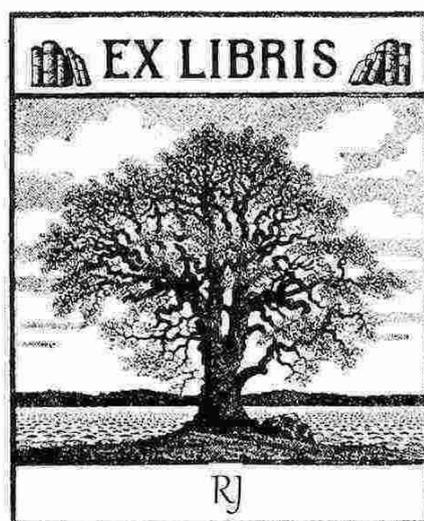
Professeur à l'École supérieure d'Electricité



12^E MILLE

1935

EDITIONS CHIRON, 40, Rue de Seine, PARIS (6^e)



Numérisé en Septembre 2025 par F1CJL , 300dpi

RADIO-ÉLECTRICITÉ GÉNÉRALE

TOME I

ÉTUDE DES CIRCUITS
ET DE LA PROPAGATION

RADIO-ÉLECTRICITÉ GÉNÉRALE

L'ouvrage complet comprendra :

- I. — Étude des circuits et de la propagation
- II. — Étude des émetteurs et des récepteurs
- III. — Émission et réception dirigées.

Tous droits de traduction et de reproduction réservés pour tous les pays y compris la Suède, la Norvège et l'U. R. S. S.
Copyright by R. Mesny, 1935.

RADIO-ÉLECTRICITÉ GÉNÉRALE

TOME I

—
ÉTUDE DES CIRCUITS
ET DE LA PROPAGATION

PAR

R. MESNY

Professeur à l'École supérieure d'Électricité.



ÉTIENNE CHIRON, ÉDITEUR
40, Rue de Seine, PARIS (VI^e)

ERRATA

Page	Ligne				
20	14	Écrire	$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	au lieu de	$\frac{e^x - e^{-x}}{e + e^{-x}}$
29	8	—	$-\frac{E}{R}$	—	$\frac{E}{R}$
35	13	—	9-a	—	8-a
37	9	—	9-a	—	8-a
61	13	—	8 et 9	—	3 et 4
61	29	—	$1 - j\frac{L\omega}{R} \dots$	—	$1 - jL\omega \dots$
75	11	—	$\sqrt{n^2 + 1} \mp 1$	—	$\sqrt{n^2 + 1} \mp 1$
79	27	—	$(1 - k^2)$	—	$(1 + k^2)$
80	7	—	$(1 \pm k)$	—	$(1 + k)$
82	10	Écrire :	$d' = CR\omega, \xi = \frac{1}{d'} \frac{\eta^2 - \omega^2}{\eta^2}$	au lieu de :	$d' = \frac{R}{L\omega}, \xi = \frac{1}{d'} \frac{\eta^2 - \omega^2}{\omega^2}$
83	14 à 19	Remplacer ces lignes par : k varie avec les accords. Cependant, n ne change pas et les représentations géométriques restent valables.			
84	6	Écrire	$R_2 I_2^2 + R_1 I_1^2$	au lieu de	$R_2 I_2^2 + R_1 I_1^2$
85	33	—	13-a	—	3-a
92	8	Ajouter	$I_p = \frac{E_p M \eta}{R_1 R_2} \frac{d_1 d_2}{p \beta^2}$		
93	10 et 12	Écrire	β	—	β^2
110	3	—	$v_2 = \frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} (\dots$	—	$v_2 = \frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} (\dots$
119	14 et 17	—	$e^{-2a_2 t}$	—	$e^{-a_2 t}$
134	25	—	0	—	1
159	32	—	$R_1 + \rho^2 R_2$	—	$R_2 + \rho^2 R_1$
163	note	—	D	—	CA
165	16	—	+ $a_2 y \dots$	—	- $a_2 y \dots$
165	17	—	ω' et positif	—	ω'' et négatif
171	4	Supprimer :	$-\frac{d^4}{4}$, ou pratiquement à d^2 .		
181	4	Écrire :	les chapitres précédents	au lieu de :	le chapitre précédent
187	3	—	infini	—	nul
209	fig. 7	Prolonger la flèche indicatrice de x jusqu'à la verticale de O.			
210	14	Écrire	$e^{-\beta x}$	au lieu de	e^{-x}
212	11	—	gauche	—	droite
213	fig. 11	—	ψ	—	φ
215	3	—	tg	—	Th
217	13	—	gauche	—	droite
218	18	—	ctg	—	Cth
220	29	—	tg	—	Th
302	31	—	σ	—	p
337	4, 5, 6	Échanger les mots premier, première avec second, seconde			
356	22	Écrire	p_0 et q_0	au lieu de	p et q
357	9	—	11	—	12

TABLE ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

Les numéros en italique sont ceux des pages où le sujet est plus complètement traité.

A

ABRAHAM, 157, 260.
Absorption ionique, 329, 334, 340.
Admittance, 26.
Alimentation, 100, 217.
Alliages de fer, 302.
Alternateurs haute fréquence, 289.
Amorties (Emissions), 38, 105.
— (Oscillations), 31, 105.
Amortissement (Coefficient), 25, 43.
Amplification (Coefficient), 139.
Amplitudes réelle et complexe, 17.
Analogies mécaniques, 41, 42.
Angle de pertes, 280.
Antennes, 231.
— Beverage, 204.
— horizontales, 235, 246.
— quart d'onde, 225, 234, 254.
— demi-onde, 235.
— (harmoniques), 236.
Antirésonance, 98, 100, 216.
A périodiques (Circuit), 28, 67.
APPLETON, 337, 347, 350.
Arc, 146.
Aurores, 321, 342.
AUSTIN (B.), 278, 366.
AUSTIN (L.), 320, 350.
Atténuation (Coefficient), 204.
— des harmoniques, 91.

B

BARFIELD, 365.
Battements, 178.
BAUMLER, 375.
DE BELLESCIZE, 173, 179.
BESSEL, 257.
BETHENOD, 304.
BEVERAGE, 204.
BJERKNES, 117.
BLOCH, 157, 197, 260, 350.
BLONDEL, 142, 157.
Bobines à fond de panier, 264.
— à noyau de fer, 266.
— à plusieurs couches, 264, 270.
— normales, 272.
— soignées, communes, 44, 273.
BOUASSE, 278, 350.

BOUTHILLON, 120, 321, 350.
BOWN, 375.
BREWSTER, 359.
BUILDER, 350.
BUREAU, 313, 350.
BUTTERWORTH, 258, 261, 270, 278.

C

Capacité d'une antenne, 232.
— d'une bobine, 229.
— linéique, 187.
— shuntée, 93.
Caractéristiques des lampes, 138.
— composées, 138.
CHAFFEE, 157.
CHAUCHAT, 304.
Champ d'une antenne, 244.
— d'un doublet, 239.
— (Inclinaison du), 359.
— magnétique terrestre, 142, 333.
— tournant, 314, 358.
Charge d'un condensateur, 35.
Choc (Excitation par), 39.
Chocs moléculaires, 327, 329, 332.
Circuits antirésonnants, 98, 103, 131.
— a périodiques, 28, 67.
— couplés (Equations), 54.
— couplés (Rendement), 83, 116.
— équivalents, 89.
— fermés, 21.
— ouverts, 181, 227.
CLAVIER, 374, 375.
Classification des ondes, 307.
Coefficient d'amplification, 139.
— de couplage, 60, 82.
— d'enroulement, 260.
— d'induction mutuelle, 56.
Complexes (Quantités), 14.
COLEBROOK, 167, 169, 300, 304.
Condensateurs à air, 284.
Conductance, 26.
Conductivité du sol, 364.
Constante diélectrique, 282, 323, 344, 365.
— de temps, 41, 127.
Couplage, 53.
Couplage (Coefficient et degré), 60.
— critique, 64.
— d'un générateur, 159, 171.

Couplage par capacité, 54, 82, 92.
 — magnétique, 54, 58, 92.
 — par résistance, 54.
 Courants tourbillonnaires, 262, 278.

D

DARROW, 346, 350.
 DAUVILLIER, 322, 350.
 DAVID, 373, 375.
 DECAUX, 317, 350.
 Decibel, 133.
 Décharge d'un condensateur, 31.
 Décément, 40, 123, 272.
 Décrochage, 166.
 Degré de couplage, 60.
 DELLINGER, 351.
 Déplacement, 184.
 Diagrammes de portées, 308, 370, 372.
 Diélectriques, 264, 279.
 Discontinuités sur lignes, 223.
 Distance numérique, 363.
 Distorsion, 314, 341.
 DOPPLER-FIZEAU, 342.
 Doublet, 238.
 DOUGUET, 351.
 Dualité (Principe de), 151.
 Dynatron, 151.

E

ECCLES, 325.
 Echos, 317, 343.
 ECKERSLEY, 364.
 Eclipses, 314.
 Effective (hauteur), 251.
 Efficace (intensité), 37, 117.
 ELMEN, 304.
 Émissions amorties, 38, 105.
 Énergie dans un circuit, 30.
 — rayonnée, 194.
 Entraînement (Phénomène d'), 165.
 Entretenués (Oscillations), 25, 59, 139.
 Equations différentielles, 8.
 — des circuits couplés, 55, 106, 127.
 Équations de MAXWELL, 183.
 — aux oscillations sur lignes, 199.
 — des télégraphistes, 200.
 Établissement d'un courant, 28, 45.
 ESPENCHIED, 375.
 Étincelle, 38, 116, 119.
 Évanouissements, 313, 341.

F

Facteur de puissance, 95, 281.
 — surtension, 47.
 FASSBENDER, 375.
 FAYARD, 128, 136.
 Fer (Alliages), 302.
 — (Noyaux), 266.

Fer (Poudres), 267, 300.
 — (Usages), 289.
 Ferrocarril, 266.
 Ferrolyte, 267.
 Fil divisé, 264, 271.
 FLEMING, 321.
 Fonctions hyperboliques, 20, 32, 207.
 Fondamentale, 229, 233, 268.
 FOUCAULT (Courants de), 293, 297.
 Fréquence (Démultiplication), 156.
 — (Sauts de), 170.
 — (Stabilité), 146.
 — (Variations), 162, 176.
 FRUHAUF, 278.

G

GALLE, 318, 351.
 Galvanomètre (Oscillations), 42.
 Générateur à arc, 146.
 — à lampes, 142, 171.
 — (Couplage), 159, 171.
 — (Synchronisation), 171.
 GILLET, 375.
 GUINCHANT, 321, 351.
 GUTTON, 142, 157, 344, 351.
 GROOT, 264, 278.
 GROVER, 261, 278.

H

HALBORG, 343.
 Harmoniques, 235, 249.
 — (Atténuation), 91.
 HARTREE, 337, 351.
 Hauteur effective, 251.
 — de rayonnement, 250.
 — de l'ionosphère, 346, 349.
 HEAVISIDE, 321.
 Hétérodyne, 178.
 HOWE, 304.
 HUND, 264, 278.
 Hyperboliques (Fonctions), 20, 32, 207.
 Hystérésis, 290, 295, 297, 301.

I

Images (Principe des), 186.
 Imaginaires, 14.
 Impédance caractéristique, 205.
 — complexe, 26.
 — d'entrée d'une ligne, 219, 208.
 Incrément, 153.
 Inductance d'antenne, 232.
 — linéique, 189.
 — shuntée, 93.
 Induction électrique, 183.
 — magnétique, 183, 293.
 — mutuelle, 56.
 Intensité efficace, 37, 117.
 Ionisation de l'atmosphère, 322, 349.

Ionisés (Gaz), 323, 344.
 Ionosphère, 322, 346, 348, 350.
 Isolants, 264, 265.

J, K

JOUAUST, 343.
 KENNELLY, 321.
 KIEBITZ, 321.
 KIRCHHOFF (Lois de), 51.

L

LABAT, 321, 351.
 Lampes (Générateurs), 142, 171.
 LASSEN, 339, 351.
 LATOUR, 304.
 LE CORBEILLER, 140, 157.
 Lignes chargées, 219,
 — discontinues, 223.
 — doubles, 188, 200.
 — illimitées, 205.
 — limitées, 208, 218.
 — simples, 188, 191, 197.
 — transformateurs, 221.
 Limites (Condition aux), 184.

M

MACKU (von), 116, 120.
 MADRID (DWagrammes), 368.
 MARCONI, 305.
 MAURAIN, 321, 351.
 MAXWELL, 183.
 MEISSNER, 335, 351.
 Mer, 360, 366.
 MERCIER, 120.
 Mesures, 95, 97, 125, 178.
 Mu-métal, 296, 302.

N

NAISMITH, 351.
 Néon (Lampes), 154.
 NEPER, 134.
 NEUMANN, 190.
 NICHOLS, 337, 351.
 Nickel (Aciers au), 302.

O

Ondes courtes, 305, 336.
 — (Classification), 307.
 — d'espace, 338.
 — progressives, 204, 213.
 — de surface, 338, 353.
 — très courtes, 313, 339, 362, 373.
 Onde unique, 115.
 — (Longueur d'onde), 25, 203.
 Oscillations amorties, 25, 31, 37, 105.
 — contraintes, 25, 27, 57.
 — entretenues, 137, 146.

Oscillations libres, 25, 57, 106.
 — sur lignes, 199.
 — non sinusoïdales, 40, 149, 175.
 — de relaxation, 149.
 Oscillographe, 155.

P

PALERMO, 278.
 Pelliculaire (Effet), 259.
 Pénétration, 276.
 Pente d'une lampe, 140.
 Période propre, 25, 154.
 Permalloy, 302.
 Perméabilité, 291, 302.
 Pertes (Angle de), 280.
 — d'énergie dans les condensateurs, 284.
 Pertes d'énergie dans les diélectriques, 279.
 Pertes d'énergie dans le fer, 289, 298.
 Phase, 17, 26, 210, 240.
 PICAULT, 375.
 PICKARD, 351.
 Plaques (Courants dans les), 274, 294.
 POINTING, 194, 254, 329.
 Polarisation (Rotation), 314, 349.
 Poles magnétiques, 322, 342, 371.
 POLYDOROFF, 278.
 Portées, 308, 370, 371, 372, 374.
 — influences diurnes, 309.
 — — géographiques, 316, 342.
 Portées, influences météorologiques, 317.
 Potentiels retardés, 185, 191.
 Poudres de fer, 267, 300.
 Propagation dans l'espace, 305.
 — sur lignes, 202.
 — près du sol, 338, 353.
 — (Formules de), 363, 366.
 Puissances active et réactive, 30.

Q

QUACK, 310, 351.
 Quartz, 282.

R

Radiant (Vecteur), 194.
 RATCLIFFE, 351.
 Rayonnement (Hauteur de), 250.
 — (Résistance de), 193, 252.
 Réaction (Phase de la), 145, 174.
 Réflexion (Formules de la), 361.
 Réfraction (Double), 336.
 — ionique, 325, 335, 339.
 Règle des trois doigts, 195.
 Relaxation (Oscillations de), 149.
 Rendement, 83, 116.

Résistance des bobines, 257.
 — (Calcul des), 270.
 — caractéristique, 206.
 — critique, 34.
 — en dérivation, 93.
 — équivalente, 89, 284.
 — intérieure, 141.
 — négative, 144, 147, 149.
 — de rayonnement, 193, 252.
 — shuntée, 95.
 — variable, 151.

Résistivité du sol, 364.

Résonance, 26, 100, 216, 334, 346.
 — (Courbes de), 79, 121.

ROCARD, 128, 136.

S

SCHNEIDER, 278.

SCHUSTER, 321.

Semi-conducteurs, 283, 361.

Sélectivité, 125.

Signe des éléments, 22, 55, 56.

Silicium (Aciers au), 299, 303.

SIRE DE VILLAR, 157.

Sirufer, 267.

Sol (Conductivité), 364.

Sol mauvais conducteur, 360.

Solaire (Activité), 318.

SOMMERFELD, 260, 363, 364.

Stabilité, 146, 163.

STEINMETZ, 300.

STORMER, 321, 343, 351.

STRUTT, 304.

SUBRA, 173, 179.

Superposition des états électriques, 13, 184.

Surtension (Facteur de), 47.

Synchrones (Emission et réception), 179.

Synchronisation, 171.

T

Tension composée, 138.

Terre (Résistance de la), 364.

Transformateur par lignes, 221.

Transformation (Rapport de), 60.

Transitoires, 105.

U, V, W, Z

Ultra-violet (Rayonnement), 322, 343.

VAN DER POL, 152, 157, 320, 343, 351, 363.

VIEILLARD, 120, 197, 255.

VILLARD, 322.

Vitesse de propagation sur ligne, 203.

Vitesse de phase et de groupe, 324.

WAGNER, 351.

WATSON, 320, 351.

ZENNECK, 353.

Zones de silence, 311, 339.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER. — PRÉLIMINAIRES

§ I. — Equations différentielles.

1. Propriétés des équations différentielles linéaires.....	9
2. Intégrale générale d'une équation différentielle linéaire.....	10
3. Intégration d'une équation linéaire à coefficients constants.....	10
4. Intégrale particulière d'une équation linéaire avec second membre.....	11
5. Intégrale générale d'un système d'équations différentielles.....	11
6. Intégration d'un système d'équations linéaires à coefficients constants.....	12
7. Intégrale particulière d'un système d'équations avec second membre.....	12
8. Superposition de plusieurs états électriques d'un système.....	13

§ II. — Emploi des quantités complexes. Représentations géométriques

9. Solutions imaginaires des équations différentielles sans second membre.....	14
10. Solution imaginaire particulière d'une équation avec second membre.....	14
11. Solution imaginaire particulière d'un système d'équations à second membre.....	16
12. Amplitude et phase d'un élément réel correspondant à un élément complexe.....	17
13. Représentation géométrique de la notation complexe.....	17

§ III. — Lignes hyperboliques.

14. Définition et propriétés.....	20
-----------------------------------	----

CHAPITRE II. — CIRCUIT FERMÉ SIMPLE

I. — Oscillations d'un circuit fermé.

1. Définition d'un circuit fermé.....	21
2. Oscillations d'un circuit simple.....	21
3. Oscillations libres.....	25
4. Oscillations contraintes. — Résonance.....	25
5. Etude géométrique des oscillations contraintes.....	27
6. Circuit aperiodique.....	28
7. Etablissement et évanouissement du courant dans un circuit.....	28
8. Echanges d'énergie dans un circuit. — Puissance active et réactive.....	30

§ II. — Oscillations amorties.

9. a. Décharge oscillante d'un condensateur à travers une inductance et une résistance.....	31
b. Décharge aperiodique d'un condensateur.....	32
c. Décharge critique d'un condensateur.....	33
d. Décharge d'un condensateur à travers une résistance.....	34
10. Charge d'un condensateur à travers une inductance et une résistance.....	34
11. Valeur efficace des éléments d'une oscillation amortie.....	37
12. Emissions amorties. — Influence de l'étincelle.....	38
13. Excitation d'un circuit par choc.....	39
14. Oscillations non sinusoïdales.....	40
15. a. Analogie mécanique : Pendule.....	41
b. Analogie mécanique : Oscillations d'un galvanomètre.....	42

§ III. — Caractéristiques d'amortissement.

16. Décrément.....	43
17. a. Constante de temps d'un circuit oscillant.....	44
b. Constante de temps de charge ou de décharge d'un condensateur.....	46
c. Constante de temps d'une inductance résistante.....	47
18. Facteur de surtension.....	47

**CHAPITRE III. — OSCILLATIONS CONTRAINTES ENTRETENUES
DES CIRCUITS COUPLÉS**

§ I. — Equations d'un réseau en régime permanent.

1.	Lois de Kirchhoff.....	50
2.	Impédances en parallèle.....	52
3.	Tension aux bornes d'une inductance ou d'une capacité.....	52

§ II. — Généralités sur le couplage.

4.	Problème général du couplage.....	53
5.	Différents modes de couplage.....	53
6.	a. Equations générales de deux circuits couplés.....	54
	b. Signes des termes de ces équations.....	54
	c. Signe du coefficient d'induction mutuelle.....	55
7.	Cas des oscillations contraintes.....	57
8.	Oscillations libres.....	57

§ III. — Oscillations entretenues de deux circuits couplés.

9.	Equations du système. — Expression du courant secondaire.....	58
10.	a. Maxima et minima de I_2 quand ω et k restent constants, ou modifie les accords des circuits.....	61
	b. Variations de $\frac{I_1}{I_{2\max}} = \zeta$ en fonction de ξ_1 et ξ_2 , k et ω restent constants.....	67
	c. Cas où l'un des circuits est apériodique.....	68
11.	Représentation plane des variations de I_2 , k et ω restent constants.....	69
12.	Variations de ζ en fonction du couplage, η_1 , η_2 et ω restent constants.....	72
13.	a. Variations de ζ en fonction de ω . — Déformation de la surface.....	74
	b. Variations de ζ en fonction de ω quand n ne dépasse pas quelques unités.....	75
	c. Variations de ζ en fonction de ω quand n est grand — $d_1 = d_2$	78
14.	Influence du couplage sur les variations de ζ en fonction de ω	80
15.	Oscillation contraintes de deux circuits couplés par induction électrique.....	82
16.	Rendement des circuits couplés.....	83
17.	Conditions d'application des théories précédentes.....	85
18.	Utilisation des circuits couplés pour obtenir de faibles variations de l'intensité dans une gamme de fréquence étendue.....	86

§ IV. — Applications.

19.	Circuits équivalents.....	89
20.	Elimination des harmoniques.....	91
21.	Inductance ou capacité shuntée par une résistance.....	93
22.	Résistance shuntée par une inductance ou une capacité.....	95
23.	Introduction d'un instrument de mesure dans un circuit auxiliaire apériodique.....	97
24.	Impédance équivalente à un circuit antirésonnant.....	98
25.	Résonance et antirésonance.....	100
26.	Généralisation du problème du numéro 24.....	102
27.	Circuit antirésonnant couplé à un second circuit.....	103

CHAPITRE IV. — OSCILLATIONS LIBRES DES CIRCUITS COUPLÉS

1.	Intérêt de l'étude des oscillations amorties.....	105
2.	Solution générale des équations aux oscillations libres.....	106
3.	Oscillations libres de deux circuits sans résistance et de même fréquence propre.....	108
4.	Oscillations libres de deux circuits amortis de même fréquence propre.....	112
5.	Cas d'un couplage extrêmement lâche.....	115
6.	Primaire très amorti.....	115
7.	Problème de l'onde unique. — Excitation par choc.....	115

8. Rendement.....	116
9. Divergences entre les théories précédentes et la pratique des circuits à étincelle.....	116
10. Calcul de l'intensité efficace d'une série périodique de trains d'oscillations. — Formule de Bjerkness.....	117
11. Secondaire apériodique. — Application aux mesures.....	119
12. Analogie mécanique.....	119

CHAPITRE V. — COURBES DE RÉSONANCE ET SÉLECTIVITÉ

§ I. — Courbes de résonance.

1. Définition et usage des courbes de résonance.....	121
2. a. Courbe de résonance d'un circuit simple en oscillations entretenues.....	122
b. Courbe de résonance d'un circuit excité par une force électromotrice amortie.....	122
3. Mesure du décrétement par la courbe de résonance.....	123
4. Précautions à prendre dans les mesures.....	125

§ II. — Sélectivité.

5. Courbe et facteur de sélectivité.....	125
6. Facteur de sélectivité d'un circuit simple.....	126
7. Facteur de sélectivité des circuits faiblement couplés.....	127
8. Constante de temps et durée d'établissement dans un système de circuits.....	127
9. Facteur de sélectivité de deux circuits très fortement couplés.....	130
10. Cas de deux circuits moyennement couplés.....	131
11. Facteur de sélectivité d'un circuit antirésonant.....	131
12. Echelles logarithmiques. — Décibel.....	133

CHAPITRE VI. — OSCILLATIONS AUTO-ENTRENUES

§ I. — Génération des oscillations sinusoïdales.

1. Entretien des oscillations par une source continue.....	137
2. Caractéristique et tension composées ou totales d'un tube électronique.....	138
3. Résistance intérieure et pente d'un tube électronique.....	140
4. Rôle de la grille.....	141
5. a. Génération d'oscillations par un tube électronique.....	142
b. Condition limite d'entretien. — Résistance négative.....	144
6. Influence de la phase de la réaction sur la fréquence.....	145
7. Génération des oscillations par un arc.....	146

§ II. — Oscillations de relaxation.

8. Oscillations des circuits à résistance négative.....	149
9. Equations aux oscillations d'un circuit dont la résistance est en dérivation.....	150
10. Oscillations d'un circuit à résistance variable. — Oscillation de relaxation.....	151
11. Période des oscillations de relaxation.....	153
12. Oscillations de relaxation avec une lampe au néon.....	154
13. Différences caractéristiques entre les oscillations sinusoïdales et les oscillations de relaxation.....	155
14. Démultiplication des fréquences.....	156
15. Autres types d'oscillations de relaxation.....	157

CHAPITRE VII. — COUPLAGE DES GÉNÉRATEURS A LAMPE. SYNCHRONISATION

§ I. — Couplage d'un générateur à un circuit passif.

1. Conséquences du couplage des générateurs à lampe.....	159
2. Equations du système.....	159
3. a. Influence des variations d'accord du circuit passif.....	161
b. Stabilité des oscillations possibles.....	163
4. Phénomène d'entraînement.....	165
5. Décrochage des oscillations. — Conditions des applications. — Mesures.....	166

6. Variations relatives des intensités.....	167
7. Influence des variations d'accord du générateur.....	170
§ II. — Synchronisation des générateurs.	
8. Description du phénomène de synchronisation.....	171
9. Influence de la phase de la force électromotrice synchronisante sur la fréquence du générateur.....	174
10. Variations de la fréquence — Synchronisation.....	176
11. Variations du courant dans le circuit oscillant du générateur.....	177
12. Conséquences relatives aux mesures.....	179
13. Emission et réception synchrones.....	179
CHAPITRE VIII. — LES CIRCUITS OUVERTS	
1. Définition du circuit ouvert.....	181
2. Difficultés de l'étude rigoureuse des circuits ouverts.....	182
3. Equations générales de l'Electromagnétisme.....	182
4. Principe de la superposition de plusieurs états électromagnétiques.....	184
5. Potentiels scalaire et vecteur.....	185
6. Principe des images.....	186
7. Capacité linéique d'une ligne.....	187
8. Self-Inductance linéique d'une ligne.....	188
9. Influence de la fréquence sur les approximations précédentes.....	191
10. Influence du retard des potentiels.....	192
11. Résistance de rayonnement.....	193
12. Vecteur radiant.....	194
13. Action du champ électrique sur un fil.....	195
14. Conclusions.....	196
CHAPITRE IX. — LES OSCILLATIONS SUR LIGNES	
§ I. — Équations générales.	
1. But de l'étude des oscillations sur lignes.....	199
2. Equations générales aux oscillations sur lignes.....	199
3. Lignes doubles.....	200
4. Equations aux oscillations entretenues.....	202
5. Vitesse de propagation. — Longueur d'onde sur lignes.....	203
6. Expressions diverses de α et β	204
§ II. — Étude des lignes.	
7. Ondes progressives.....	204
8. Impédance caractéristique d'une ligne.....	205
9. Réalisation d'une portion de ligne illimitée.....	207
10. Formules en lignes hyperboliques.....	207
11. a. Oscillations sur une ligne limitée.....	208
b. Variation de la phase.....	210
c. Représentation géométrique des oscillations.....	212
12. a. Ondes stationnaires sur une ligne limitée.....	214
b. Ondes stationnaires et transmission d'énergie.....	215
13. Résonance et antirésonance sur une ligne limitée.....	216
14. Lignes symétriques.....	218
15. Ligne dont l'extrémité est maintenue au potentiel zéro.....	218
16. a. Ligne chargée. — Impédance d'entrée.....	219
b. Distribution du courant et de la tension sur une ligne chargée.....	220
c. Impédance d'entrée d'une ligne limitée.....	220
17. Les lignes considérées comme des transformateurs.....	221
18. Discontinuités sur les lignes.....	223
19. Addition d'une impédance à l'entrée d'une ligne.....	224
20. Ligne soumise à un champ électrique en tous ses points.....	224
21. Formules des lignes en termes réels.....	226
22. Retour sur les circuits fermés.....	227
23. Capacité propre d'une bobine.....	229

CHAPITRE X. — LES ANTENNES

§ 1. — Modes d'oscillations.

1. Circuit équivalent à une antenne. — Capacité et self-inductance effectives..	231
2. Fondamentale d'une antenne à la terre. — Antenne quart d'onde.....	233
3. Antenne demi-onde.....	335
4. Antenne vibrant en harmoniques.....	235
5. Assimilation d'une antenne à une chaîne de circuits.....	236

§ II. — Rayonnement des antennes.

6. Décomposition d'un système oscillant en doublets.....	237
7. a. Champ d'un doublet.....	238
b. Champ d'un doublet à grande distance.....	240
c. Champ d'un doublet à courte distance.....	240
d. Champ d'un doublet aux distances intermédiaires.....	241
8. Décomposition d'un doublet en plusieurs composantes.....	243
9. Champ d'une antenne près du sol.....	244
10. a. Champ d'une antenne verticale dans des directions inclinées sur l'horizon.....	245
b. Champ d'une antenne horizontale.....	246
c. Champ d'une antenne quelconque dans toutes les directions.....	248
11. Champ des antennes vibrant sur harmoniques.....	249
12. Hauteur de rayonnement d'une antenne.....	250
13. Hauteur effective de réception d'une antenne.....	251
14. Expression du champ d'une antenne à courte distance.....	252

§ III. — Résistance de rayonnement.

15. Résistance de rayonnement d'une antenne.....	252
16. Valeurs numériques des résistances de rayonnement.....	253
17. Résistance de rayonnement d'une antenne élevée au-dessus du sol.....	254

CHAPITRE XI. — RÉSISTANCES EN HAUTE FRÉQUENCE

§ I. — Résistance des bobines.

1. Dissipation d'énergie dans les milieux matériels.....	257
2. Résistance d'un conducteur rectiligne.....	257
3. Effet pelliculaire.....	259
4. a. Résistance d'un conducteur enroulé.....	260
b. Influence mutuelle des spires d'une bobine.....	261
c. Courants tourbillonnaires dans les fils.....	262
d. Pertes d'énergie dans les spires extrêmes.....	263
5. a. Bobines à plusieurs couches.....	264
b. Bobines en fond de panier, nid d'abeille, etc.....	264
6. Emploi du fil divisé.....	264
7. Bobines à noyau de fer.....	266
8. Résistance d'une bobine dans le voisinage de sa fondamentale.....	268
9. Pertes provenant de l'emplacement et des connexions de la bobine.....	269
10. Formules et tables de calcul.....	270
11. Résistance des bobines normales.....	272

§ II. — Résistance d'une plaque.

12. Distribution du courant dans une plaque.....	274
13. Résistance et self-inductance d'une plaque.....	276
14. Courants tourbillonnaires dans une plaque.....	278

CHAPITRE XII. — DISSIPATION D'ÉNERGIE DANS LES DIÉLECTRIQUES

1. Constatation des pertes dans les diélectriques.....	279
2. Lois de variation des pertes.....	280
3. Angle de pertes. — Facteur de puissance.....	280
4. Variations de B et α avec le diélectrique.....	281

5. Pertes par conduction.....	283
6. Pertes dans les semi-conducteurs.....	283
7. <i>a.</i> Pertes d'énergie dans les condensateurs à air.....	284
<i>b.</i> Résistance équivalente d'un condensateur à air.....	284
<i>c.</i> Variations de la résistance d'un condensateur avec la fréquence.....	285
<i>d.</i> Condensateurs montés en parallèle et en série.....	286
8. Pertes dans les isolants voisins des circuits oscillants.....	286

CHAPITRE XIII. — DISSIPATION D'ÉNERGIE DANS LE FER

1. Usages du fer en radio-électricité.....	289
2. Hystérésis du fer.....	290
3. <i>a.</i> Induction moyenne et perméabilité apparente.....	291
<i>b.</i> Induction et perméabilité effectives.....	293
4. Pertes par courants de Foucault.....	293
5. Pertes par hystérésis.....	295
6. Pertes totales.....	296
7. Influence des caractéristiques du fer sur les pertes.....	296
8. Valeurs numériques des pertes.....	298
9. Comparaison entre la théorie et l'expérience.....	299
10. Formule de Steinmetz.....	300
11. Emploi des poudres de fer.....	300
12. Cas où un champ permanent est superposé au champ alternatif.....	301
13. Caractéristiques des alliages de fer.....	302

CHAPITRE XIV. — PROPAGATION DES ONDES DANS L'ESPACE

§ I. — Résultats des observations.

1. Considérations générales.....	305
2. Classification des ondes suivant leur fréquence.....	308
3. <i>a.</i> Variations de la portée en fonction de la fréquence.....	308
<i>b.</i> Variations diurnes et saisonnières.....	309
<i>c.</i> Conséquences des influences diurnes sur la direction de transmission des signaux.....	310
4. Zones de silence.....	311
5. Évanouissements.....	313
6. Distorsion des modulations.....	314
7. Rotation du plan de polarisation du champ.....	314
8. Influences géographiques.....	316
9. Influences météorologiques.....	317
10. Signaux multiples. — Échos.....	317
11. Echos retardés.....	318
13. Corrélation entre les variations de la propagation et celles de l'activité solaire.....	318

§ II. — Influence de la haute atmosphère.

13. Premières idées sur l'influence de la haute atmosphère.....	320
14. Constitution de la haute atmosphère.....	321
15. Causes de l'ionisation. — Ionosphère.....	322
16. Constante diélectrique d'un gaz ionisé.....	323
17. Vitesse de phase et de groupe.....	324
18. Réfraction ionique.....	325
19. Influence des chocs moléculaires sur la réfraction ionique.....	327
20. Cas où le coefficient diélectrique devient négatif.....	328
21. Absorption ionique.....	329
22. Calcul plus complet de la vitesse des ions.....	331
23. <i>a.</i> Influence du champ magnétique terrestre sur l'absorption.....	333
<i>b.</i> Influence du champ terrestre sur la réfraction ionique.....	335
24. Explication approchée des phénomènes observés.....	337
25. Causes des évanouissements et des distorsions.....	341

26. Effet Doppler-Fizeau.....	342
27. Explication des influences géographiques.....	342
28. Explications des échos retardés.....	343
29. Objections aux théories précédentes.....	344
30. Mesure de la hauteur de l'ionosphère.....	346
31. Renseignements numériques sur l'ionosphère.....	348
32. Mesure de la polarisation du champ.....	349

CHAPITRE XV. — PROPAGATION LE LONG DU SOL.

FORMULES DE PROPAGATION

1. Propagation d'une onde en présence du sol.....	354
2. <i>a.</i> Théorie de Zenneck.....	354
<i>b.</i> Caractère des ondes de Zenneck.....	356
<i>c.</i> Champ tournant des ondes de Zenneck.....	358
<i>d.</i> Champ dans la mer.....	360
3. Réflexion d'une onde sur un milieu semi-conducteur.....	361
4. Formule de Sommerfeld.....	363
5. Champ des ondes d'espace.....	361
6. Conductivité et constante diélectrique du sol.....	364
7. <i>a.</i> Formule d'Austin.....	366
<i>b.</i> Valeur du coefficient exponentiel pour des terrains divers.....	366
8. Diagramme de Madrid et de Lucerne.....	368
9. Propagation des ondes très courtes.....	373

RADIO-ÉLECTRICITÉ GÉNÉRALE

INTRODUCTION

Ce livre contient l'exposé des leçons que nous professons à l'École supérieure d'Électricité; on y trouvera les principes qui sont à la base de toutes les techniques particulières de la Radio-Électricité. Nous avons rattaché avec soin ces principes aux théories générales de l'électricité en insistant toujours sur les approximations admises pour permettre à l'étudiant d'apprécier à la fois leur généralité et les limites de leur validité; une connaissance trop imprécise des fondements conduit trop souvent à une injuste méfiance envers les considérations théoriques.

Cette façon de procéder nous a souvent conduit à des calculs assez longs; nous n'avons pas cherché à les abrégier pour éviter au lecteur la peine inutile de les rétablir ou la mauvaise habitude de les admettre d'autorité. Qu'il me soit cependant permis de rappeler au débutant que le calcul n'est que l'outil et que la place qu'il occupe dans un exposé ne mesure pas son importance : les résultats d'une étude sont souvent exprimés en quatre lignes suivant quatre pages de calcul, ce sont les quatre lignes qui comptent.

Dans la plupart des questions il s'agit de phénomènes oscillatoires qui sont liés entre eux par des équations souvent très voisines, parfois identiques à celles qui régissent les oscillations matérielles; il en résulte toute une série d'analogies susceptibles de fournir des modèles utiles pour la conception des phénomènes électriques, surtout au moment où on aborde l'étude de ces derniers. Il ne faudrait pourtant pas pousser trop loin une assimilation qui conduirait à ne les voir qu'à travers des modèles mécaniques; on arriverait souvent à une impasse et on compliquerait le travail, en risquant de fausser son jugement. Il faut au contraire cultiver son propre sens électrique; il deviendra bientôt aussi

fertile que le sens mécanique qui n'est plus commun et parfois plus efficace, qu'en raison de l'habitude que nous en avons depuis l'enfance.

Si certains problèmes importants de radio-électricité relèvent d'une mathématique élevée — encore impuissante dans bien des cas à fournir les solutions nécessaires, mais qui se développe rapidement aujourd'hui — la science radio-électrique classique ne fait appel qu'à une mathématique très simple; elle se borne à l'utilisation des équations différentielles linéaires à coefficients constants, dont les solutions s'obtiennent, comme on sait, machinalement. C'est à cette étude classique que nous nous sommes limité en signalant à l'occasion certains problèmes de grand intérêt qui lui échappent et en renvoyant pour leur étude à des mémoires spéciaux.

Les lois rigoureuses des phénomènes radio-électriques sont évidemment identiques à celles de l'électricité industrielle; leurs expressions particularisées peuvent néanmoins différer notablement. C'est que chaque fois que l'on approche des applications, on se trouve amené à simplifier la représentation des réalités en négligeant tout ce qui n'a pas une influence appréciable sur les résultats; les termes conservés ou négligés peuvent s'échanger en passant des basses aux hautes fréquences.

S'il est indispensable d'avoir recours à l'intermédiaire mathématique pour débrouiller la complexité des phénomènes, il ne l'est pas moins d'examiner avec soin, à la lumière des faits expérimentaux, les résultats qu'il fournit. Sauf dans quelques cas très simples il est en effet impossible d'introduire dans les équations tout ce que la nature accumule dans les phénomènes eux-mêmes, soit que nous les connaissions imparfaitement, soit que leur représentation mathématique soit trop complexe; ce n'est généralement qu'au prix de l'abandon ou de la simplification de quelques données qu'on arrive aux solutions simples. Une règle s'impose donc : l'examen très attentif des hypothèses faites au départ et le contrôle par l'expérience des résultats obtenus.

Si dans les opérations arithmétiques l'influence d'une petite modification des données sur le résultat peut être facilement enfermée entre les limites bien définies, il est loin d'en être de même dans l'intégration des équations; aussi leurs solutions ne sont-elles souvent qu'un guide pour l'expérience.

Pour utiliser avec fruit le secours du calcul il est essentiel de se pénétrer de ces considérations, mais cela ne suffit pas; pour acquérir sur les phé-

nomènes des connaissances utilisables et pour les concevoir dans leur réalité, on ne doit pas oublier que la mémoire doit se peupler de renseignements numériques. On pourrait posséder à fond tous les principes sous la forme abstraite de théorèmes de géométrie et se faire des phénomènes les idées les plus fausses. Une capacité, une self-inductance, une résistance ne doivent pas rester de simples lettres C. L. R.; dans chaque problème, l'ordre de grandeur des éléments doit s'imposer à l'esprit tout le long du raisonnement; c'est indispensable pour les simplifications à introduire et pour l'appréciation des résultats.

Nous avons naturellement suivi ces directives et les exposés théoriques sont toujours accompagnés de valeurs numériques.

On trouvera en fin des chapitres une courte bibliographie de traités et d'articles qui précisent quelques questions importantes dont le développement ne saurait entrer dans le cadre de ce livre; cette bibliographie est limitée aux points essentiels, mais fait toujours l'objet de références introduites dans le texte entre crochets carrés; le lecteur la complètera, s'il le désire, par les indications qu'il trouvera dans les mémoires cités et que nous avons choisis, autant que possible, de date récente.

Nous tenons enfin à remercier le Colonel Chaulard de l'aide précieuse que nous avons trouvée dans ses conférences antérieures et le Colonel Bedoura qui a bien voulu assumer la charge ingrate de la lecture des épreuves.

R. M.

NOTATIONS

D'une façon générale la valeur instantanée d'un élément réel ou complexe (courant, tension, ...) est représentée par une lettre minuscule italique. Quand une distinction est nécessaire entre des éléments alternatifs et des éléments continus ou ondulés, ces derniers sont représentés par des minuscules romaines.

Quand il s'agit d'un élément à variation sinusoïdale, son amplitude réelle est représentée par la lettre majuscule correspondante et son amplitude complexe par la lettre majuscule bâtarde.

Les valeurs moyennes sont surlignées.

Exemple : courant à l'instant t : i ou i ; amplitude réelle d'un courant sinusoïdal : I ; amplitude complexe \mathcal{J} ; valeur moyenne de I : \bar{I} .

Les valeurs réelles et complexes des impédances ou éléments analogues sont aussi représentées par des majuscules : Z , \mathcal{Z} .

Les quantités vectorielles sont surmontées d'une flèche : \vec{a} .

a = Coefficient d'amortissement.

\vec{a} = Potentiel vecteur.

b = Induction magnétique.

c = Vitesse de la lumière dans le vide.

c_φ = Vitesse de phase.

c_g = Vitesse de groupe.

c_l = Vitesse de propagation sur une ligne.

C = Capacité.

C_l = Capacité par unité de longueur d'une ligne.

d = Décrément divisé par π .

Diamètre d'un fil.

Demi-épaisseur d'une tôle.

e = Force électromotrice (majuscules \mathcal{E} , E).

Nombre $e = 2,718$.

Charge de l'électron.

f = Fréquence.

h = Champ magnétique.

Hauteur.

h_r = Hauteur de rayonnement.

i = Intensité de courant.

j = Densité de courant.

$j = \sqrt{1}$.

k = Coefficient de couplage = $\frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$.

K = Constante diélectrique.

L = Coefficient de self-induction.

L_1 = Coefficient de self-induction par unité de longueur d'une ligne.

$m = \sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}$.

Masse de l'électron.

M = Coefficient d'induction mutuelle.

N = Coefficient d'induction mutuelle.

p = Pente d'une lampe.

$\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ dans l'étude des plaques.

q = Quantité d'électricité.

$\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ dans l'étude des plaques.

r = Rendement.

Distance d'un point à une antenne d'émission.

R = Résistance.

R_i = Résistance intérieure d'une lampe.

R_l = Résistance par unité de longueur.

R_c = Résistance caractéristique d'une ligne.

R_r = Résistance de rayonnement.

s = facteur de surtension.

S = Réactance = $L\omega - 1/C\omega$.

Coefficient de sélectivité.

t = Temps.

T = Période.

u = Potentiel ou différence de potentiel.

v = Potentiel ou différence de potentiel.

W = Puissance.

w = Densité de puissance.

z = Azimut.

Z = Impédance.

Z_c = Impédance caractéristique d'une ligne.

$\alpha = 2\pi/\lambda$.

$\alpha_1 = 2\pi/\lambda_1$.

β = Coefficient d'atténuation sur une ligne.

$\gamma = a + j\omega$.

$\beta + j\alpha_1$.

$p + jq$.

- Γ = Capacité.
- δ = Décrément.
- ε = Champ électrique (majuscules ε , \mathbf{E}).
Petite quantité.
- ζ = Distance zénithale.
- τ_1 = Pulsation de résonance d'un circuit = $1/\sqrt{LC}$.
Pulsation de modulation.
- λ = Longueur d'onde dans le vide ou dans l'air.
- λ_1 = Longueur d'onde sur une ligne.
- μ = Coefficient d'amplification d'une lampe.
Perméabilité magnétique.
- ρ = Rapport de transformation = $\frac{M\omega}{Z_2}$.
Densité électrique.
- σ = Conductivité.
- θ = Constante de temps.
Angle de coordonnées.
- φ, ψ, χ = Angles de phase.
Angles de coordonnées.
- ω = Pulsation.

Quelques-unes des lettres précédentes sont aussi employées pour représenter momentanément des fonctions, des variables ou des coefficients dans des équations, après spécification particulière.

SIGNES PARTICULIERS

- proportionnel à : \approx
- presque égal à : \doteq

SCHÉMAS

- Résistance pure. 
- Inductance. 
- Impédance q. c. q. 



TABLEAU DES DIMENSIONS ET UNITÉS

Le tableau ci-dessous donne les dimensions des différentes grandeurs et les rapports de leurs mesures dans les différents systèmes; $c = 3 \cdot 10^{10}$.

GRANDEURS	UNITÉS Pratiques	DIMENSIONS		RAPPORT DES MESURES	
		UES	UEM	$\frac{UEM}{UES}$	$\frac{\text{Pratiques}}{UEM}$
Charge électrique.....	Coulomb.	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$	$L^{1/2} M^{1/2}$	$1/c$	10
Constante diélectrique.	—	1	$L^{-2} T^2$	$1/c^2$	—
Champ électrique.....	—	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}$	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-2}$	c	—
Potentiel.....	Volt.	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}$	c	10^{-8}
Courant.....	Ampère.	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}$	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$	$1/c$	10
Résistance.....	Ohm.	$L^{-1} T$	$L T^{-1}$	c^2	10^{-9}
Capacité.....	Farad.	L	$L^{-1} T^2$	$1/c^2$	10^9
Coefficient d'induction.	Henry.	$L^{-1} T^2$	L	c^2	10^{-9}
Charge magnétique.....	—	$L^{1/2} M^{1/2}$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$	c	—
Perméabilité.....	—	$L^{-2} T^2$	1	c^2	—
Champ magnétique.....	—	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-2}$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}$	$1/c$	—
Longueur.....	Quadrant.		L	1	10^{-9}
Travail.....	Joule.		$L^2 M T^{-2}$	1	10^{-7}
Puissance.....	Watt.		$L^2 M T^{-3}$	1	10^{-7}

RADIO-ÉLECTRICITÉ GÉNÉRALE

I

ÉTUDE DES CIRCUITS ET DE LA PROPAGATION

CHAPITRE PREMIER

Préliminaires

Les problèmes que nous rencontrerons par la suite se ramènent presque toujours à la solution d'équations différentielles linéaires à coefficients constants et l'usage des quantités complexes ou imaginaires apporte dans les calculs et dans l'interprétation des résultats des simplifications considérables; les représentations géométriques sont aussi d'un grand secours. Quoique ces questions soient supposées connues du lecteur, nous en retracerons les traits les plus importants en vue de bien fixer les méthodes que nous aurons l'occasion d'appliquer. On rencontrera de bonne heure des applications simples qui corrigeront le caractère un peu abstrait des principes succinctement exposés ci-dessous. Nous nous contenterons d'énoncer quelques propositions dont la démonstration serait un peu longue; on les trouvera établies dans tous les traités d'analyse.

§ I. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. — Propriétés des équations différentielles linéaires. — Une équation différentielle est dite linéaire quand elle se présente sous la forme

$$(1) \quad B_0 \frac{d^n y}{dt^n} + B_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + B_2 \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + B_n y = B$$

où les B sont des fonctions de t .

Il y a lieu de considérer séparément les équations sans second membre dans lesquelles $B = 0$. On voit immédiatement que si y_1, y_2, \dots, y_p sont des solutions particulières de l'équation sans second membre, l'expression

$$(2) \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_p y_p$$

où les C sont des constantes arbitraires, est aussi une solution de cette équation.

De même, si y_0 est une solution particulière de l'équation complète (1) et y_1, y_2, \dots, y_p des solutions de l'équation sans second membre, l'expression

$$(3) \quad y = y_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_p y_p$$

est une solution de l'équation (1).

Enfin l'équation

$$(4) \quad B_0 \frac{d^n y}{dt^n} + B_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + B_{n-1} y = B' + B''$$

a pour solution

$$y = y' + y''$$

en désignant par y', y'' des solutions de l'équation (4) dans laquelle le second membre serait seulement B' ou B'' .

2. — Intégrale générale d'une équation différentielle linéaire. — On sait que l'intégrale générale d'une équation différentielle du n^{me} ordre doit contenir n constantes arbitraires, que l'on détermine dans chaque cas particulier par la connaissance des valeurs que prennent la fonction y et ses $(n - 1)$ premières dérivées pour une valeur particulière de la variable t .

On démontre que l'expression 3 représente l'intégrale générale de l'équation 1 si p est égal à n et si les fonctions y_i sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire si aucune d'elles ne peut s'exprimer identiquement, en fonction linéaire des autres.

3. — Intégration d'une équation linéaire à coefficients constants. — Dans le cas d'une équation sans second membre, on obtient immédiatement les n solutions particulières indépendantes par la méthode suivante. Dans le premier membre de l'équation 1 on remplace la fonction y par

$$y = e^{\gamma t}$$

et il vient :

$$(5) \quad B_0 \gamma^n + B_1 \gamma^{n-1} + \dots + B_{n-1} = 0.$$

Cette équation en γ est l'équation caractéristique; si $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ sont ses racines, l'intégrale générale est

$$(6) \quad y = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} + \dots + C_n e^{\gamma_n t}.$$

Le procédé serait en défaut si l'équation 4 avait des racines égales; mais on démontre que si la racine γ_1 , par exemple, est multiple d'ordre q , les fonctions suivantes sont des intégrales particulières :

$$C_1 e^{\gamma_1 t}, C_2 t e^{\gamma_1 t}, C_3 t^2 e^{\gamma_1 t}, \dots, C_q t^{q-1} e^{\gamma_1 t}.$$

On retrouve donc le nombre de constantes nécessaires.

L'intégrale générale d'une équation avec second membre se déduira immédiatement du deuxième principe du numéro 1, si l'on sait trouver une intégrale particulière de l'équation complète; il suffira d'ajouter cette intégrale particulière à l'expression 6 de y .

4. — Intégrale particulière d'une équation linéaire avec second membre. — Dans les problèmes que nous aurons à résoudre, les équations différentielles seront toujours linéaires à coefficients constants et les seconds membres seront de la forme

$$e^{-at} S' \sin(\omega' t + \varphi') + e^{-at} S'' \sin(\omega'' t + \varphi'') + \dots$$

les a , S , ω et φ étant des constantes¹. D'après le troisième principe du numéro 1, il suffira de chercher une solution de chacune des équations obtenues en ne laissant au second membre que l'un des termes de la somme précédente. Pour cela, on remplacera y dans le premier membre par

$$(8) \quad y = e^{-at} (M \sin \omega t + N \cos \omega t)$$

a et ω étant affectés du même accent que dans le terme conservé au second membre. On aura alors une équation ne contenant comme quantités variables que $\sin \omega t$ et $\cos \omega t$; en annulant les coefficients de ces deux lignes trigonométriques, on obtiendra deux équations qui détermineront M et N .

Nous montrerons plus loin (nos 10 et 11) qu'on peut simplifier très notablement les calculs en utilisant l'exponentielle complexe $e^{j\omega t}$.

5. — Intégrale générale d'un système d'équations différentielles. — Les théorèmes précédents se généralisent aisément pour un système d'équations. Considérons seulement le cas simple de deux équations du second ordre :

$$(9) \quad \begin{cases} A'_0 \frac{d^2x}{dt^2} + A'_1 \frac{dx}{dt} + A'_2 x + B'_0 \frac{d^2y}{dt^2} + B'_1 \frac{dy}{dt} + B'_2 y = D' \\ A''_0 \frac{d^2x}{dt^2} + A''_1 \frac{dx}{dt} + A''_2 x + B''_0 \frac{d^2y}{dt^2} + B''_1 \frac{dy}{dt} + B''_2 y = D'' \end{cases}$$

Si $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots x_4, y_4$, sont quatre groupes de solutions particulières des équations (9) dans lesquelles on aura annulé le second membre, et

1. Le plus souvent les quantités a seront nulles.

si x_0, y_0 est une solution particulière des mêmes équations avec second membre, l'intégrale générale est

$$(10) \quad \begin{aligned} x &= x_0 + C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_4 x_4 \\ y &= y_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_4 y_4 \end{aligned}$$

à condition que les fonctions x_i et y_i soient linéairement indépendantes.

Pour m équations du n^{me} ordre le nombre des constantes arbitraires serait égal à mn .

6. — Intégration d'un système d'équations linéaires à coefficients constants. — On résoudrait d'abord les équations sans second membre en remplaçant x et y dans les premiers membres des équations 9 par

$$x = Pe^{\gamma t} \quad y = Qe^{\gamma t}$$

ce qui donnerait

$$(11) \quad \begin{aligned} (A'_0 \gamma^2 + A'_1 \gamma + A'_2) P + (B'_0 \gamma^2 + B'_1 \gamma + B'_2) Q &= 0 \\ (A''_0 \gamma^2 + A''_1 \gamma + A''_2) P + (B''_0 \gamma^2 + B''_1 \gamma + B''_2) Q &= 0. \end{aligned}$$

Pour que ces équations soient compatibles, il faut que

$$(12) \quad \begin{vmatrix} A'_0 \gamma^2 + A'_1 \gamma + A'_2 & B'_0 \gamma^2 + B'_1 \gamma + B'_2 \\ A''_0 \gamma^2 + A''_1 \gamma + A''_2 & B''_0 \gamma^2 + B''_1 \gamma + B''_2 \end{vmatrix} = 0$$

équation caractéristique du quatrième degré. En désignant ses racines par $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, l'intégrale générale des équations sans second membre sera

$$(13) \quad \begin{aligned} x &= \sum_1^4 C_i P_i e^{\gamma_i t} \\ y &= \sum_1^4 C_i Q_i e^{\gamma_i t} \end{aligned}$$

P_i et Q_i étant reliés par la relation

$$(14) \quad \frac{P_i}{Q_i} = - \frac{B'_0 \gamma_i^2 + B'_1 \gamma_i + B'_2}{A'_0 \gamma_i^2 + A'_1 \gamma_i + A'_2} = - \frac{B''_0 \gamma_i^2 + B''_1 \gamma_i + B''_2}{A''_0 \gamma_i^2 + A''_1 \gamma_i + A''_2}$$

Pour avoir l'intégrale générale des équations avec second membre 9, il suffirait d'ajouter aux expressions 11 une solution particulière de ces équations.

7. — Intégrale particulière d'un système d'équation avec second membre. — Comme nous l'avons dit, au numéro 4 dans le cas d'une seule équation, les seconds membres seront de la forme $e^{-at} S \sin(\omega t + \varphi)$ ou pourront s'y ramener. On trouvera une intégrale particulière en opérant

rant d'une façon analogue : On remplacera dans les premiers membres de 9, x et y par

$$(15) \quad \begin{aligned} x &= e^{-at} (K \sin \omega t + L \cos \omega t) \\ y &= e^{-at} (M \sin \omega t + N \cos \omega t). \end{aligned}$$

En annulant dans les relations ainsi obtenues les coefficients de $\sin \omega t$ et $\cos \omega t$, on obtiendra quatre équations qui donneront K , L , M et N .

Ici encore, il sera plus expéditif d'utiliser l'exponentielle complexe $e^{j\omega t}$ (n° 1).

8. — Superposition de plusieurs états électriques d'un système. — Les propositions précédentes conduisent immédiatement à une propriété fort importante des systèmes électriques.

Quand l'état électrique d'un système ou d'un milieu est le résultat de plusieurs actions qui lui sont appliquées simultanément, cet état peut s'obtenir en superposant, par simple addition algébrique, les différents états qui prendraient naissance si une seule action était appliquée au système.

Nous constaterons en effet que ces états sont définis par des équations différentielles linéaires à coefficients constants, dont les premiers membres ne dépendent que des caractéristiques du système ou du milieu et sont par conséquent indépendants des actions qui leur sont appliquées; ces dernières ne figurent que dans les seconds membres.

Quand il n'y aura qu'une équation, par exemple, elle sera de la forme

$$(16) \quad B_0 \frac{d^n y}{dt^n} + B_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + B_n y = B'$$

pour une action déterminée exprimée par B' : puis de la forme

$$(17) \quad B_0 \frac{d^n y}{dt^n} + B_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + B_n y = B''$$

pour une action différente B'' et ainsi de suite.

Si toutes les actions agissent simultanément, l'équation sera :

$$(18) \quad B_0 \frac{d^n y}{dt^n} + B_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + B_n y = B' + B'' + B''' + \dots$$

et d'après le troisième principe du numéro 1, son intégrale générale sera la somme des intégrales générales des équations 16, 17.....

Le cas où aucune action n'agit sur le système d'une façon continue et où son état ne résulte que d'une impulsion initiale, n'est pas exclu du

raisonnement précédent : l'équation correspondante serait tout simplement sans second membre.

Ce théorème apporte une très grande simplicité dans l'étude des systèmes électriques; il a son analogue en mécanique sous le nom de *Principe de superposition des petits mouvements*, mais il n'est alors applicable qu'aux cas où les mouvements du système sont suffisamment petits pour que l'on puisse ramener les équations aux formes que nous avons étudiées.

Il ne faut pas perdre de vue que cette propriété ne s'applique pas à tous les systèmes électriques que l'on peut imaginer, mais seulement aux *systèmes et milieux inertes dont les caractéristiques sont indépendantes de leur état électrique*. Les systèmes comportant des tubes électroniques, par exemple, échappent à cette simplicité, à moins qu'on ne se limite, comme en mécanique, aux mouvements électriques de très faible amplitude; de sérieuses difficultés mathématiques se présentent le plus souvent dans le cas général.

Nous aurons maintes fois l'occasion de revenir sur ce principe que les applications feront apparaître sous une forme plus concrète; mais en raison de son importance et de sa généralité nous avons tenu à le mettre en évidence dès le début.

§ II. — EMPLOI DES QUANTITÉS COMPLEXES.

REPRÉSENTATIONS GÉOMÉTRIQUES

9. — Solutions imaginaires des équations différentielles sans second membre. — Les équations caractéristiques 5 ou 12 n'ont généralement pas toutes leurs racines réelles; l'intégrale générale des équations différentielles se présente donc normalement sous forme imaginaire. Mais comme les problèmes posés comportent évidemment une solution, un certain état électrique devant correspondre aux conditions imposées aux systèmes, il ressort de ce point de vue physique que les imaginaires doivent disparaître dans les expressions finales des résultats; c'est ce qui arrive en effet et cette disparition se produit au moment où on détermine les constantes C d'après les conditions initiales. Il n'y a donc pas lieu de se préoccuper de cette particularité purement algébrique.

10. — Solutions imaginaires particulières d'une équation avec second membre. — Quand les équations différentielles ont un second membre de la forme $S \sin(\omega t + \varphi)$ et que l'on applique les méthodes indi-

quées aux numéros 4 ou 7, pour en trouver une solution particulière, il ne s'introduit évidemment dans les calculs que des quantités réelles, mais les calculs sont laborieux dans les cas les plus simples, ils deviendraient fatigants, sinon inextricables, dans les cas compliqués. On trouve un grand avantage à introduire les quantités complexes, comme nous allons l'indiquer tout d'abord pour le cas d'une seule équation.

Supposons que nous déterminions une intégrale particulière de chacune des équations suivantes

$$(19) \quad A_0 \frac{d^n y}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + A_n y = S \cos(\omega t + \varphi)$$

$$(20) \quad A_0 \frac{d^n y}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + A_n y = S \sin(\omega t + \varphi).$$

Soient y_r et y_i ces intégrales : la fonction complexe

$$(21) \quad y = y_r + j y_i$$

sera, d'après le troisième principe du numéro 1, une solution de l'équation

$$(22) \quad A_0 \frac{d^n y}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + A_n y = \\ = S [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] = S e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

Inversement, si nous avons trouvé une solution de l'équation 22, elle aura une expression complexe et, en séparant les termes réels et imaginaires, on pourra l'écrire sous la forme 21.

En substituant cette valeur de y dans l'équation 22 qu'elle doit satisfaire identiquement, on obtiendra

$$(23) \quad (A_0 \frac{d^n y_r}{dt^n} + \dots + A_n y_r) + j (A_0 \frac{d^n y_i}{dt^n} + \dots + A_n y_i) = \\ = S \cos(\omega t + \varphi) + j S \sin(\omega t + \varphi)$$

Comme les parties réelles et imaginaires des deux membres doivent être séparément égales, l'équation 22 est équivalente à l'ensemble des équations 19 et 20; y_r est une solution de 19 et y_i une solution de 20. Il en résulte la méthode de résolution suivante de l'une ou l'autre des équations 19 et 20.

Dans l'équation proposée on remplace sinus ou cosinus $(\omega t + \varphi)$ par $e^{j(\omega t + \varphi)}$ et on substitue à y l'expression

$$(24) \quad y = \mathcal{Y}e^{j\omega t}$$

$e^{j\omega t}$ disparaît et il vient :

$$\mathcal{Y} = \frac{Se^{j\tau}}{A_0(j\omega)^n + A_1(j\omega)^{n-1} + \dots + A_n}$$

Dans la relation 24 on sépare alors les quantités réelles et imaginaires et elle prend la forme 21; la fonction y_r est solution de 19, la fonction y_i , solution de 20.

On traiterait d'une façon identique le cas où le second membre serait de la forme $Se^{-at} \sin(\omega t + \varphi)$; on remplacerait seulement l'expression 24 par

$$(24') \quad y = \mathcal{Y}e^{(-a+j\omega)t}$$

Cet intermédiaire algébrique, auquel il n'y a lieu de rechercher aucun sens physique, simplifie beaucoup les calculs pour la raison suivante : En suivant la méthode des numéros 4 ou 7, on se trouve conduit à introduire dans les calculs les deux fonctions sinus et cosinus qui s'échangent par dérivation avec certains changements de signes : la présence simultanée de ces deux fonctions donne lieu à des expressions longues et encombrantes. Avec la méthode actuelle on n'a plus affaire qu'à une seule fonction qui se reproduit par dérivation à un facteur constant près.

11. — Solution imaginaire particulière d'un système d'équations à second membre. — La même méthode s'applique naturellement à la recherche d'une intégrale particulière de plusieurs équations simultanées; nous allons traiter un exemple simple. Soit à résoudre les équations

$$(25) \quad \begin{aligned} A'_0 \frac{d^2x}{dt^2} + A'_1 \frac{dx}{dt} + A'_2 x + B'_0 \frac{d^2y}{dt^2} + B'_1 \frac{dy}{dt} + B'_2 y &= S' \cos(\omega t + \varphi') \\ A''_0 \frac{d^2x}{dt^2} + A''_1 \frac{dx}{dt} + A''_2 x + B''_0 \frac{d^2y}{dt^2} + B''_1 \frac{dy}{dt} + B''_2 y &= S'' \cos(\omega t + \varphi'') \end{aligned}$$

On remplacera les cosinus des seconds membres par les expressions $e^{j(\omega t + \varphi')}$ et $e^{j(\omega t + \varphi'')}$ et on posera

$$(26) \quad x = \mathcal{X}e^{j\omega t} \quad y = \mathcal{Y}e^{j\omega t}$$

Les équations 23 donneront alors

$$(27) \quad \begin{aligned} (-A'_0\omega^2 + jA'_1\omega + A'_2)\mathcal{X} + (-B'_0\omega^2 + jB'_1\omega + B'_2)\mathcal{Y} &= S'e^{j\tau} \\ (-A''_0\omega^2 + jA''_1\omega + A''_2)\mathcal{X} + (-B''_0\omega^2 + jB''_1\omega + B''_2)\mathcal{Y} &= S''e^{j\tau} \end{aligned}$$

qui permettront de calculer \mathcal{X} et \mathcal{Y} . Écrivons ces quantités complexes sous la forme

$$(28) \quad \begin{aligned} \mathcal{X} &= P + jQ \\ \mathcal{Y} &= R + jT. \end{aligned}$$

L'expression 26 de x deviendra :

$$\begin{aligned} x &= (P + jQ) (\cos \omega t + j \sin \omega t) \\ &= (P \cos \omega t - Q \sin \omega t) + j (P \sin \omega t + Q \cos \omega t). \end{aligned}$$

On opérerait de même pour y et la solution particulière des équations proposées serait ¹

$$(29) \quad \begin{aligned} x_r &= R(x) = P \cos \omega t - Q \sin \omega t \\ y_r &= R(y) = R \cos \omega t - T \sin \omega t. \end{aligned}$$

La même remarque qu'au numéro 10 s'appliquerait ici pour le cas où les seconds membres contiendraient tous deux la même exponentielle e^{-at} .

12. — Amplitude et phase d'un élément réel correspondant à un élément complexe. — La détermination de x_r peut se faire d'une manière différente qui conduit généralement à des calculs plus courts : l'expression 29 de x_r peut s'écrire

$$(30) \quad x_r = X \cos (\omega t + \psi) \text{ avec } X = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ et } \operatorname{tg} \psi = \frac{Q}{P}$$

$X = \sqrt{P^2 + Q^2}$ est l'amplitude de l'élément x_r , ψ est sa phase par rapport à un élément de la forme $A \cos \omega t$ dont on peut prendre la phase comme origine dans le système. X et ψ définissent complètement l'état de l'élément cherché.

Comme on peut écrire

$$(31) \quad \mathcal{X} = X e^{j\psi}$$

on voit que :

l'amplitude d'un élément réel est égal au module de l'élément complexe correspondant;

la phase d'un élément réel est égale à l'argument de l'élément complexe correspondant.

Ces remarques sont d'un usage courant.

13. Représentation géométrique de la notation complexe. — La notation imaginaire conduit aisément à une représentation géométrique souvent utile. Soit un élément complexe

$$\mathfrak{Z} = X + jY$$

X et Y étant réels.

1. $R(x)$ est écrit pour « partie réelle de x ».

Convenons de porter sur l'axe ox de la figure 1 les quantités réelles et sur oy les quantités imaginaires; ζ pourra être représenté par le vecteur \overrightarrow{OM} , la longueur OM sera son module et l'angle \overrightarrow{xOM} son argument.

On peut en effet écrire

$$\zeta = (OM \cos \varphi) + j (OM \sin \varphi) = OM e^{j\varphi} = |\zeta| e^{j\varphi}.$$

On reconnaît immédiatement les propriétés suivantes :

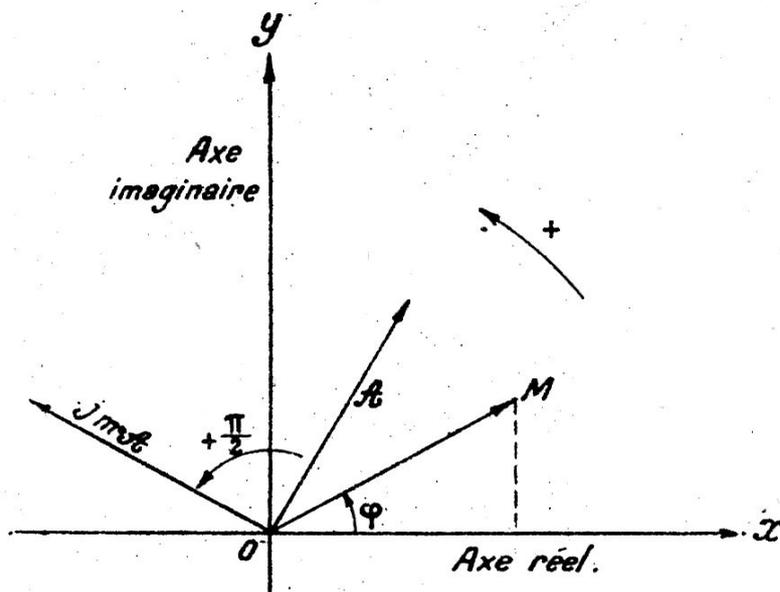


Fig. 1.

La somme de deux quantités complexes est représentée par la somme géométrique des vecteurs correspondants.

Le produit de deux quantités complexes \mathcal{C} et \mathcal{D} d'arguments φ et ψ est représenté par un vecteur de module $|\mathcal{C}||\mathcal{D}|$ et d'argument $(\varphi + \psi)$.

En remarquant que $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$, on voit que le produit d'un vecteur par j le fait tourner de $+\frac{\pi}{2}$ sans changer son module. Le vecteur $m\mathcal{C}j$ (m réel) a pour module $|m||\mathcal{C}|$; il fait un angle de $\pm\frac{\pi}{2}$ avec \mathcal{C} suivant que m est positif ou négatif.

Une quantité complexe harmonique, c'est-à-dire de la forme

$$(32) \quad \mathcal{D} = \mathcal{C}e^{\pm j\omega t}$$

est représentée par un vecteur de longueur $|\mathcal{C}|$ tournant autour de l'origine

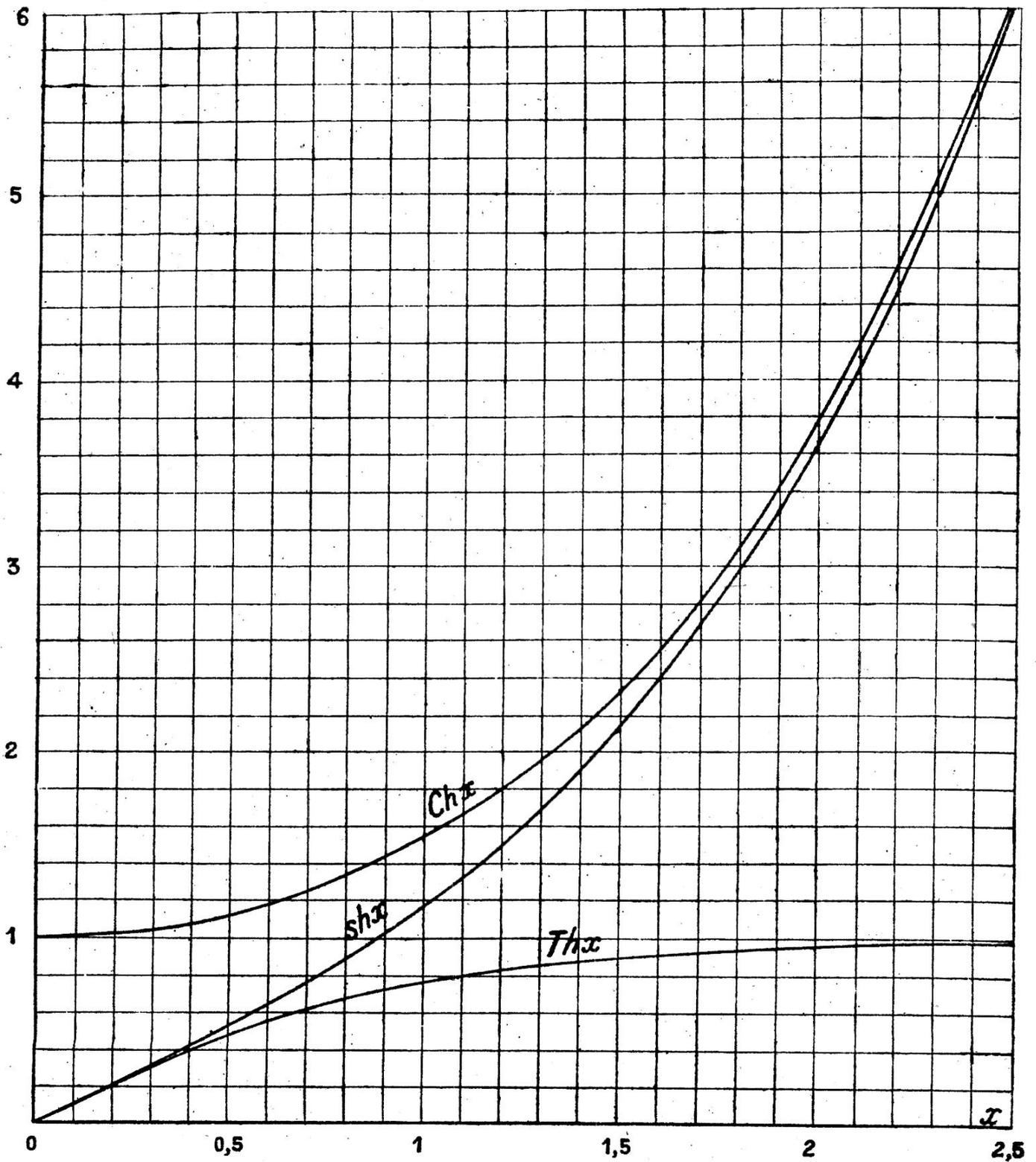


Fig. 2. — Valeurs numériques des lignes hyperboliques.

Pour les valeurs de x supérieures à 2,5, $\text{Sh } x$ et $\text{Ch } x$ sont égaux à $\frac{e^x}{2}$ avec une erreur relative inférieure à 0,007 et $\text{Th } x = 1$ avec une erreur inférieure à 0,013.

avec une vitesse angulaire ω , dans le sens positif ou négatif suivant que j a le signe (+) ou (—).

En dérivant \mathcal{Q} par rapport au temps on a

$$\frac{d\mathcal{Q}}{dt} = \pm j\omega\mathcal{Q}$$

d'où l'on déduit que la dérivée par rapport au temps de la quantité harmonique 32 est en avance ou en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur cette quantité suivant que le signe de j est (+) ou (—).

§ III. — LIGNES HYPERBOLIQUES

14. — Définitions et propriétés. — Nous aurons souvent l'occasion d'utiliser les lignes hyperboliques; elles apportent de grandes simplifications dans l'écriture et abrègent de nombreux calculs; nous rappelons ci-dessous leurs propriétés.

Elles sont définies par les relations

$$\text{Sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{Ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{Th } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

qui se déduisent des expressions des lignes trigonométriques par la substitution de x à jx . On en déduit immédiatement les relations

$$\begin{aligned} \text{Ch } (jx) &= \cos x & \text{Sh } (jx) &= j \sin x & \text{Th } (jx) &= j \text{tg } x \\ \cos (jx) &= \text{Ch } x & \sin (jx) &= j \text{Sh } x & \text{tg } (jx) &= j \text{Th } x \\ & & \text{Ch}^2 x - \text{Sh}^2 x &= 1 & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sh } (a \pm b) &= \text{Sh } a \text{Ch } b \pm \text{Sh } b \text{Ch } a & \text{Sh } 2a &= 2 \text{Sh } a \text{Ch } a \\ \text{Ch } (a \pm b) &= \text{Ch } a \text{Ch } b \pm \text{Sh } a \text{Sh } b & \text{Ch } 2a &= \text{Ch}^2 a + \text{Sh}^2 a \end{aligned}$$

$$\text{Th } (a \pm b) = \frac{\text{Th } a \pm \text{Th } b}{1 \pm \text{Th } a \text{Th } b} \quad \text{Th } 2a = \frac{2 \text{Th } a}{1 + \text{Th}^2 a}$$

La figure 2 montre l'allure des variations de ces fonctions et fournit leurs valeurs numériques avec une précision qui sera toujours suffisante dans les applications que nous rencontrerons.

CHAPITRE II

Circuit fermé simple.

§ I. — OSCILLATIONS D'UN CIRCUIT FERMÉ.

1. — **Définition d'un circuit fermé.** — On désigne sous le nom de circuit fermé un système constitué par une self-inductance L , une résistance R et une capacité C en série (fig. 1); certains de ces éléments peuvent d'ailleurs manquer, la self-inductance pouvant être négligeable ou la capacité remplacée par un court-circuit.

Nous supposons chacun de ces éléments distinct; cette condition

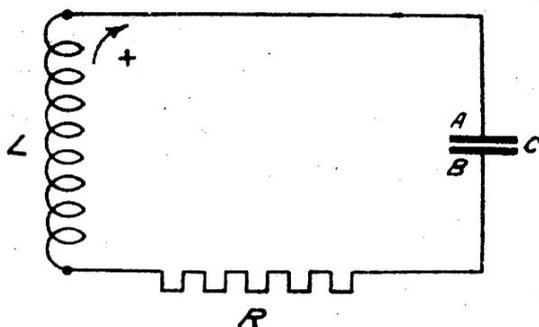


Fig. 1.

n'est pas rigoureusement remplie dans la pratique; en particulier il s'accumule toujours dans les fils d'une bobine une certaine quantité d'électricité, mais dans les circuits fermés la capacité qui en résulte est généralement négligeable; elle ne devient sensible que quand C est très faible ou que les dimensions du circuit sont du même ordre de grandeur que la longueur de l'onde correspondant aux oscillations. Nous excluons ce cas du présent chapitre pour y revenir au chapitre IX, n° 22, après avoir étudié les circuits ouverts.

Quant à la résistance, elle est toujours, au moins en partie, liée à la self-inductance, elle provient souvent aussi pour une part de la capacité C ; mais ces circonstances ne modifient aucunement les équations du problème. La loi de KIRCHHOFF que nous allons employer s'applique aussi bien au cas où la résistance et la self-inductance sont liées qu'à celui où elles sont distinctes et le cas où la capacité introduit de la résistance sera examiné à part et ramené au problème précédent.

2. — **Oscillations d'un circuit simple.** — Faisons agir sur le circuit fermé de la figure 1 une force électromotrice alternative e de la forme la

plus simple, c'est-à-dire sinusoïdale; elle sera représentée par la relation

$$e = E \sin \omega t.$$

Nous ne nous préoccupons pas pour le moment de la façon dont elle est appliquée; on pourra, si l'on veut concrétiser, supposer qu'elle est due à un alternateur idéal sans inductance, ni résistance, ni capacité, placé en série dans le circuit. Si i est le courant à l'instant t et v la tension du condensateur au même instant, l'application de la Loi de KIRCHHOFF donnera l'équation :

$$(1) \quad \boxed{L \frac{di}{dt} + Ri + v = E \sin \omega t.}$$

On peut évidemment choisir à volonté le sens positif de l'un des éléments qui figurent dans cette relation, celui de i par exemple; mais quand ce sens est choisi, ceux des autres éléments se trouvent déterminés.

Admettons que l'on prenne comme sens positif du courant celui de la flèche, il est facile de voir que les valeurs positives de v correspondront au cas où l'armature A aura un potentiel supérieur à celui de l'armature B. Supposons en effet $L = E = 0$, l'équation précédente donne :

$$v = - Ri.$$

Si i est positif, v doit être négatif; mais pour que i circule dans le sens de la flèche, le potentiel de B doit être supérieur à celui de A.

De même, le sens positif de E sera celui qui produirait un courant positif dans le circuit supposé simplement résistant. Cela résulte de ce que, si l'on fait $L = 0$, en remplaçant la bobine par un fil court, simplement résistant, et $v = 0$ en court-circuitant le condensateur, l'équation devient :

$$Ri = E \sin \omega t.$$

L'équation 1 contient deux inconnues i et v , il faut donc en trouver une seconde. Si q est la charge de la capacité C à un instant donné, on a

$$q = Cv$$

d'où

$$(2) \quad \boxed{i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt}}$$

Dérivons l'équation 1 par rapport à t et remplaçons y $\frac{dv}{dt}$ par $\frac{i}{C}$, en posant

$$\boxed{\frac{R}{L} = 2a}$$

et

$$\boxed{\frac{1}{CL} = \eta^2}$$

il vient :

$$(3) \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + 2a \frac{di}{dt} + r_1^2 i = \frac{E \omega}{L} \cos \omega t.$$

D'après le numéro 2-I l'intégrale générale de cette équation s'obtiendra en résolvant l'équation sans second membre

$$(4) \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + 2a \frac{di}{dt} + r_1^2 i = 0$$

et en ajoutant à son intégrale, une solution particulière de l'équation 3. D'après le numéro 3, l'équation caractéristique de 4 sera

$$\gamma^2 + 2a\gamma + r_1^2 = 0.$$

Cette équation a pour racines

$$\gamma = -a \pm \sqrt{a^2 - r_1^2}.$$

Le radical est presque toujours imaginaire car a est généralement inférieur à r_1 ; pour faire ressortir cette imaginaire, nous poserons :

$$r_1' = \sqrt{r_1^2 - a^2}, \quad \gamma = -a \pm jr_1'$$

et l'intégrale générale de 4 sera

$$i_l = C_+ e^{(-a + jr_1')t} + C_- e^{(-a - jr_1')t} = e^{-at} (C_+ e^{jr_1't} + C_- e^{-jr_1't})$$

qu'on peut encore écrire :

$$(5) \quad \text{ou} \quad i_l = e^{-at} (A_s \sin r_1' t + A_c \cos r_1' t)$$

$$\boxed{i_l = A e^{-at} \sin (\eta t + \psi)}$$

A_s et A_c , ou A et ψ , étant deux constantes arbitraires.

Cherchons maintenant une solution particulière de l'équation 3 en appliquant la méthode du numéro 10. Dans l'équation initiale 1, remplaçons $\sin \omega t$ par $e^{j\omega t}$, l'équation 3 deviendra ¹ :

$$(6) \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + 2a \frac{di}{dt} + r_1^2 i = j \frac{E \omega}{L} e^{j\omega t};$$

substituons alors à i l'expression

$$i = \mathcal{J}_c e^{j\omega t},$$

1. Au numéro 10, c'est la ligne trigonométrique figurant dans le second membre de l'équation à résoudre que nous avons remplacée par $e^{j\omega t}$; mais on reconnaîtra aisément qu'il revient au même de faire la substitution dans une relation d'où dérive l'équation à résoudre et cette façon d'opérer est plus avantageuse pour lier le résultat final à la force électromotrice imposée au circuit.

il viendra

$$(7) \quad \mathcal{J}_c = \frac{j \frac{E\omega}{L}}{-\omega^2 + 2ja\omega + \eta^2} = \frac{E}{R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}$$

En posant encore

$$(8) \quad \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \operatorname{tg} \varphi \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}$$

on pourra écrire

$$\mathcal{J}_c = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}} e^{-j\varphi}$$

et l'intégrale particulière cherchée sera

$$i = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}} e^{j(\omega t - \varphi)}$$

Puisque c'est $\sin \omega t$ que l'on a remplacé par $e^{j\omega t}$ la solution de l'équation en termes réels 3 s'obtiendra en prenant la partie imaginaire de l'expression précédente. Nous la désignerons par i_c

$$(9) \quad \boxed{i_c = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}} \sin (\omega t - \varphi)}$$

Finalement l'intégrale générale de l'équation proposée est

$$(10) \quad \boxed{i = i_l + i_c = Ae^{-at} \sin (\eta t + \psi) + \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}} \sin (\omega t - \varphi)}$$

Les deux constantes arbitraires A et ψ seront déterminées par les conditions initiales imposées au circuit.

Pour obtenir la différence de potentiel aux bornes de la capacité, on peut utiliser la relation 2 qui donne

$$(11) \quad \boxed{v = \frac{1}{c} \int_0^t i dt}$$

il est souvent plus commode de déduire v de l'équation 1.

3. — **Oscillations libres.** — Examinons maintenant les résultats précédents du point de vue physique. L'expression 5

$$i_l = Ae^{-at} \sin(\gamma_1 t + \psi)$$

représente les oscillations dans le circuit quand aucune force électromotrice ne lui est appliquée, c'est-à-dire quand il est livré à lui-même après avoir reçu une impulsion première : pour cette raison on les nomme oscillations libres. Le coefficient $a = \frac{R}{2L}$, auquel on donne le nom de *coefficient d'amortissement*, est essentiellement positif; les oscillations libres s'éteignent donc suivant la loi exponentielle : *la valeur numérique de a est généralement comprise entre 10^2 et 10^6* aussi l'amortissement est-il très rapide, l'amplitude des oscillations est divisée par $e = 2,7$ en moins de un centième de seconde.

Le courant n'est pas périodique, mais il s'annule à des intervalles égaux auxquels on donne le nom de *quasi-période* ou plus souvent de *période propre* du circuit :

$$(12) \quad T_p = \frac{2\pi}{\gamma_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma_1^2 - a^2}}$$

Comme a^2 est toujours très petit par rapport à γ_1^2 cette relation peut le plus souvent se remplacer par ¹

$$T \doteq \frac{2\pi}{\gamma_1} = 2\pi \sqrt{L \cdot C}$$

4. — **Oscillations contraintes entretenues. — Résonance.** — Les oscillations libres s'éteignant très vite, l'expression 10 du courant se réduit pratiquement, au bout d'un temps très court, à

$$i_c = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

qui représente les oscillations imposées d'une façon permanente au circuit par la force électromotrice $E \sin \omega t$; on les appelle *oscillations contraintes entretenues*.

1. Si c est la vitesse de la lumière dans le vide, la longueur de l'onde correspondant à la période T est $\lambda = 2\pi c \sqrt{LC}$ ou, avec les unités le plus couramment employées : mètre, microhenry, millième de microfarad, $\lambda = 59,6 \sqrt{L^{\mu H} C^{m\mu F}}$ qu'on peut le plus souvent remplacer par $\lambda = 60 \sqrt{L^{\mu H} C^{m\mu F}}$, formule dont le calcul mental est très facile.

On voit tout d'abord que l'amplitude des oscillations contraintes est inversement proportionnelle à l'impédance du circuit

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} :$$

l'intensité du courant dépend donc de la valeur attribuée à ω , elle sera maximum quand la fréquence d'excitation sera choisie de façon que la réactance $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ soit nulle¹. On dit alors que le circuit est *en résonance* sur la force électromotrice; on a dans ces conditions :

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} = \eta^2$$

et la période de résonance est

$$T_r = 2\pi \sqrt{L \cdot C}.$$

La période de résonance est donc à très peu près égale à la période propre du circuit.

A ce moment l'amplitude I_r du courant est

$$I_r = \frac{E}{R}.$$

Les amplitudes du courant et de la force électromotrice sont donc liés par la loi d'Ohm, comme en courant continu.

En outre $\varphi = 0$; le courant est donc en phase avec la force électromotrice.

Si $\omega \neq \eta$, i et $e = E \sin \omega t$ sont en discordance de phase, i est en retard ou en avance suivant que $L\omega$ est supérieur ou inférieur à $\frac{1}{C\omega}$.

Revenons un instant sur l'expression complexe 7.

$$(13) \quad \mathcal{I}_c = \frac{E}{R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}.$$

Le dénominateur du second nombre est désigné sous le nom d'*impédance complexe*, nous représenterons cette dernière par la lettre \mathfrak{Z}

$$(14) \quad \mathfrak{Z} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

on voit que l'impédance réelle est le module de l'impédance complexe

$$(15) \quad Z = \mathfrak{Z} \quad \text{ou} \quad \mathfrak{Z} = Ze^{j\varphi}$$

\mathcal{I}_c est l'amplitude complexe du courant et la relation 13, que l'on peut écrire

$$\mathcal{I}_c = \frac{E}{\mathfrak{Z}}$$

1. On désigne souvent sous les noms de *conductance* et *d'admittance* les inverses d'une résistance et d'une réactance; leur unité est le *mho* correspondant à l'inverse d'un ohm.

montre qu'en notation complexe, la loi d'Ohm s'applique encore. Cette remarque sera généralisée au numéro 1-III.

D'après 15 on a encore

$$\mathcal{J}_c = \frac{E}{Z} e^{-j\varphi}$$

Comme $\frac{E}{Z}$ est réel, l'argument de \mathcal{J}_c est $(-\varphi)$; on voit alors que l'amplitude réelle I_c du courant est le module de l'amplitude complexe et que la phase de i_c par rapport à la force électromotrice $E \sin \omega t$ est l'argument de \mathcal{J}_c , comme nous l'avons montré au numéro 12-I.

5. — **Etude géométrique des oscillations contraintes.** — Appliquons les considérations du numéro 13-I à la solution du problème des oscillations contraintes. L'équation 7 peut s'écrire.

$$R \mathcal{J}_c + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \mathcal{J}_c = E.$$

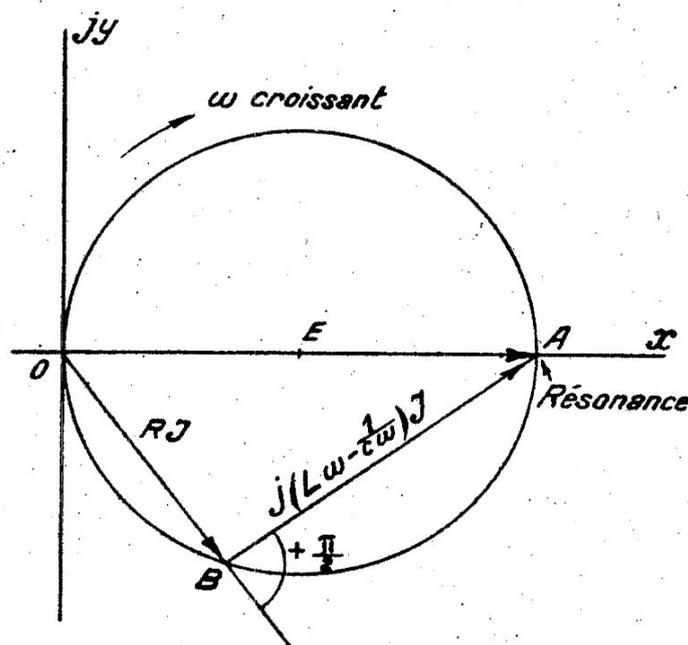


Fig. 2.

E étant une quantité réelle, sera porté sur l'axe ox en \overrightarrow{OA} (fig. 2). Quant aux quantités complexes $R\mathcal{J}_c$ et $j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \mathcal{J}_c$, elles seront représentées par des vecteurs perpendiculaires entre eux, le deuxième faisant avec le premier un angle de $+\frac{\pi}{2}$ si $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$ est positif; comme

leur somme est égale à E ces deux vecteurs seront représentés par \vec{OB} et \vec{BA} . Les variations de ω produiront le déplacement du point B sur le cercle, dans le sens des aiguilles d'une montre pour ω croissant; B partira de O pour $\omega = 0$ et y reviendra pour $\omega = \infty$.

R étant constant, la longueur OB peut être considérée comme représentant l'amplitude du courant réel à une échelle convenablement choisie. On voit que cette amplitude partira de zéro pour $\omega = 0$ et reviendra à cette valeur pour $\omega = \infty$, en passant par une valeur maximum pour $\omega^2 = \frac{1}{LC}$. Ce maximum sera atteint en A; I sera alors égal à $\frac{E}{R}$ et en phase avec la force électromotrice.

6. — Circuit apériodique. — On désigne souvent ainsi un circuit fermé ne comportant que de la résistance et de la self-inductance.

En reprenant les calculs dans ce cas, on trouverait qu'il n'existe plus d'oscillations libres et que l'oscillation forcée est donnée par :

$$i_c = \frac{E \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\text{tg } \varphi = \frac{L\omega}{R}}$$

On peut déduire immédiatement ces résultats des précédents en remarquant que le cas est équivalent à celui dans lequel la capacité deviendrait infinie. L'électricité pourrait en effet s'accumuler indéfiniment dans une telle capacité et un courant de même sens pourrait indéfiniment circuler dans le circuit comme si la capacité était court-circuitée. Alors il n'y a plus de résonance et le courant décroît constamment quand ω croît de 0 à l'infini, il est toujours en retard sur la force électromotrice.

On voit donc que l'introduction d'une capacité permet de compenser l'influence d'une self-inductance.

La formule 5 donnerait comme solution libre :

$$i_l = Ae^{-2at};$$

un courant existant à l'origine du temps dans le circuit soustrait à toute action extérieure s'annulerait sans oscillations.

7. — Établissement et évanouissement du courant dans un circuit. — Considérons encore le circuit de la figure 1 et supposons-le accordé sur la pulsation de la force électromotrice d'excitation, on aura à très peu près

$$\tau_1' \doteq \omega$$

et la formule 10 deviendra

$$i = Ae^{-at} \sin(\omega t + \psi) + \frac{E}{R} \sin \omega t.$$

Si à l'instant $t = 0$ le circuit est en repos, c'est-à-dire si $i = v = 0$ la relation

$$L \frac{di}{dt} + Ri + v = E \sin \omega t$$

montre que la dérivée $\frac{di}{dt}$ est également nulle. On déduit de ces conditions les valeurs des constantes arbitraires :

$$\psi = 0 \quad \text{et} \quad A = \frac{E}{R}.$$

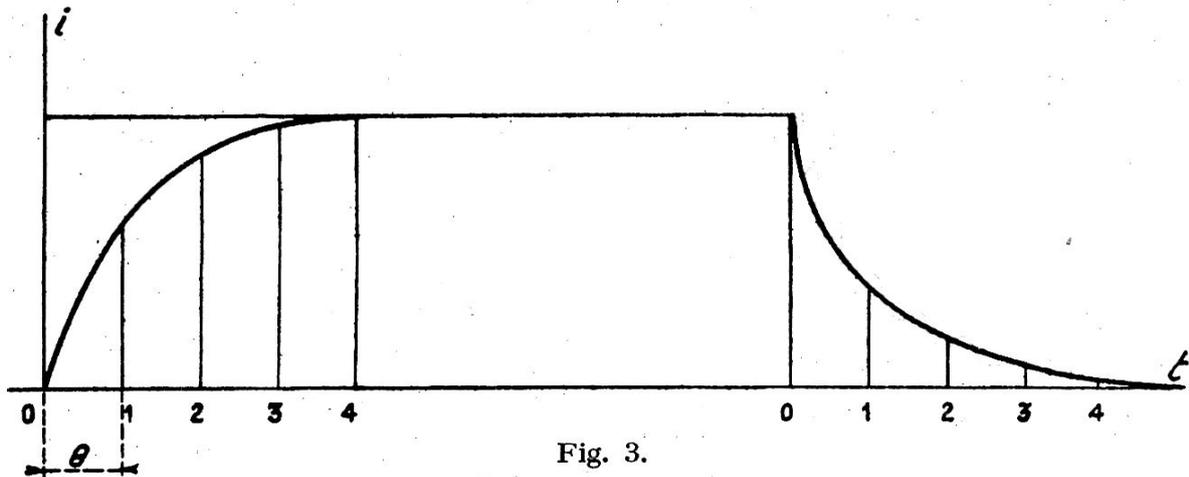


Fig. 3.

Le courant s'établit donc suivant la loi

$$(16) \quad i = \frac{E}{R} (1 - e^{-at}) \sin \omega t.$$

Si, le circuit étant en état d'oscillations contraintes, on supprime brusquement la force électromotrice, on trouve de même que le courant décroît suivant la loi

$$(17) \quad i = \frac{E}{R} e^{-at} \sin \omega t.$$

Ces résultats sont d'une application courante, ils indiquent comment s'établit ou s'évanouit le courant dans un récepteur au début et à la fin d'un signal¹. La figure 3 représente l'allure des phénomènes; la durée désignée par θ sur cette figure est la constante de temps du circuit que nous définirons au numéro 17-a.

1. Pour être rigoureux, il faudrait tenir compte de ce que la force électromotrice du signal ne s'établit pas instantanément, mais les formules simples 16 et 17 suffisent pour les applications.

8. — Échanges d'énergie dans un circuit. — Puissances active et réactive. — Reprenons l'équation

$$L \frac{di}{dt} + Ri + v = e.$$

Pour faire apparaître l'énergie $ei\delta t$ fournie par la source dans un intervalle δt , multiplions les deux membres de cette relation par $i\delta t$; en remarquant que $i = \dot{C} \frac{dv}{dt}$, nous pourrions écrire

$$(18) \quad \boxed{ei\delta t = Ri^2\delta t + \delta \left[\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cv^2 \right].}$$

On sait que $\frac{1}{2} Li^2$ et $\frac{1}{2} Cv^2$ représentent les quantités d'énergie magnétique et électrique accumulées soit dans une bobine de self-induction L parcourue par un courant i , soit une capacité chargée à une tension v . Le crochet du second membre est donc la quantité d'énergie accumulée dans le circuit à l'instant considéré. La relation 18 nous montre que l'énergie fournie par la source se divise en deux parts : l'une d'elles $Ri^2\delta t$ est dissipée sous forme d'effet Joule, l'autre modifie la quantité d'énergie accumulée dans le circuit.

Si $e = E. \sin \omega t$, on a $i = I. \sin (\omega t - \varphi)$ et l'équation précédente devient

$$ei\delta t = Ri^2\delta t + \frac{1}{2} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) I^2 \sin 2 (\omega t - \varphi) \delta t.$$

Cette nouvelle relation montre que l'énergie emmagasinée est tantôt croissante, tantôt décroissante, autrement dit, tantôt le circuit absorbe une partie de l'énergie fournie par la source, tantôt il la lui restitue; la fréquence de ces échanges est double de la fréquence de l'excitation, leur amplitude est $\frac{1}{2} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) I^2$ quantité que l'on désigne sous le nom de *puissance réactive*, par analogie avec la *puissance active* $\frac{1}{2} RI^2$, effectivement dépensée.

Si le circuit est en résonance, la puissance réactive est nulle et la puissance emmagasinée est invariable.

$$\boxed{\frac{1}{2} (Li^2 + Cv^2) = \text{Constante, à la résonance.}}$$

Les modifications se bornent alors à un échange périodique, de fréquence $2f$, des énergies magnétique et électrique. Si I et V sont les amplitudes

du courant et de la tension, l'énergie totale emmagasinée peut se représenter soit par $\frac{1}{2}LI^2$, soit par $\frac{1}{2}CV^2$ puisque i et v sont en quadrature.

On a donc

$$LI^2 = CV^2.$$

On déduit de là

$$V = \sqrt{\frac{L}{C}} I = \frac{L}{\sqrt{LC}} I = L\omega I$$

qui donne, pour un circuit en résonance, l'amplitude de la tension en fonction de celle du courant.

§ II. — OSCILLATIONS AMORTIES.

9-a. — **Décharge oscillante d'un condensateur à travers une inductance et une résistance.** — Imaginons que le condensateur de la figure 1 soit chargé à la tension V_0 à l'instant $t = 0$, le courant étant nul; on aura, par exemple, coupé le circuit avant de charger la capacité. Au moment où on le fermera, le condensateur se déchargera, donnant lieu à des oscillations libres puisqu'aucune action extérieure n'entrera en jeu. Le courant sera alors donné par la formule 5 (n° 2).

$$i = Ae^{-at} \sin(\gamma't + \psi)$$

$$\text{où } a = \frac{R}{2L} \quad \gamma'^2 = \gamma^2 - a^2 \quad \gamma^2 = \frac{1}{L \cdot C}$$

Pour $t = 0$, $i = 0$ et $v = V_0$; comme

$$L \frac{di}{dt} + Ri + v = 0$$

$$\text{il vient } L \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = -V_0$$

Ces conditions initiales donnent pour les constantes A et ψ

$$\psi = 0 \quad A = -\frac{V_0}{L\gamma'}$$

Les éléments i et v sont alors donnés par les relations

$$(19) \quad i = -\frac{V_0}{\gamma'L} e^{-at} \sin \gamma't$$

$$(20) \quad v = \frac{V_0}{\sin \chi'} e^{-at} \sin(\gamma't + \chi') \quad \text{avec } \text{tg } \chi' = \frac{\sqrt{\gamma'^2 - a^2}}{a}$$

Ces formules montrent que la tension et le courant oscillent en s'annulant périodiquement à des intervalles $\frac{2\pi}{\gamma'}$, cette quantité est appelée la pseudo-période ou période propre; les amplitudes des oscillations successives s'atténuent selon la loi exponentielle e^{-at} . Ces oscillations sont dites *amorties* (fig. 4).

Dans la plupart des circuits radioélectriques $\frac{a}{\eta}$ est très petit, γ' est

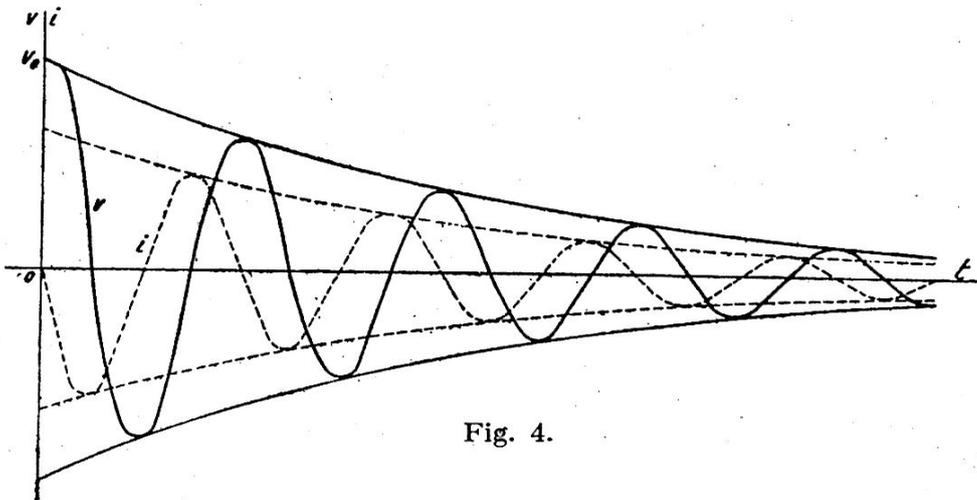


Fig. 4.

donc très voisin de $\frac{\pi}{2}$ et η' de η ; le *courant et la d. d. p. aux bornes du condensateur sont en quadrature*.

9-b. — **Décharge aperiodique d'un condensateur.** — Nous venons d'examiner le cas où a est inférieur à η c'est-à-dire $R^2 < \frac{4L}{C}$; admettons maintenant l'hypothèse inverse

$$R^2 > \frac{4L}{C} \quad \text{ou} \quad a > \eta.$$

La quantité $\eta' = \sqrt{\eta^2 - a^2}$, réelle dans le cas précédent, devient imaginaire, mais tous les calculs effectués conservent évidemment leur valeur algébrique et la solution est encore donnée par les équations 19 et 20, où η' et γ' sont imaginaires.

Pour ramener dans ces expressions la forme réelle il suffit d'y remplacer les lignes trigonométriques par les lignes hyperboliques qui sont d'un usage très courant dans les calculs de circuits et de lignes et avec lesquelles il faut se familiariser (n° 14-I).

Posons pour cela

$\gamma_1' = j\gamma_1''$, $\chi_1' = j\chi_1''$ c'est-à-dire $\gamma_1'' = \sqrt{a^2 - \gamma_1'^2}$, Th $\chi_1'' = \frac{\sqrt{a^2 - \gamma_1'^2}}{a}$
 γ_1'' et χ_1'' sont réels et les formules 18 et 19 deviennent

$$(21) \quad i = -\frac{V_0}{\gamma_1'' L} e^{-at} \text{Sh } \gamma_1'' t$$

$$(22) \quad v = \frac{V_0}{\text{Sh } \chi_1''} e^{-at} \text{Sh } (\gamma_1'' t + \chi_1'') \quad \text{avec Th } \chi_1'' = \frac{\sqrt{a^2 - \gamma_1'^2}}{a}$$

On voit que la décharge ne contient plus que des exponentielles et que le caractère oscillatoire a disparu; v décroît constamment et tend vers zéro, i croît d'abord en valeur absolue jusqu'à un maximum pour tendre ensuite vers zéro (fig. 5). Pour nous rendre compte de l'allure de la décroissance de v , exprimons $e^{-at} \text{Sh } (\gamma_1'' t + \chi_1'')$ en exponentielles :

$$e^{-at} \text{Sh } (\gamma_1'' t + \chi_1'') = \frac{1}{2} \left\{ e^{-(a - \gamma_1'')t + \chi_1''} - e^{-(a + \gamma_1'')t - \chi_1''} \right\}$$

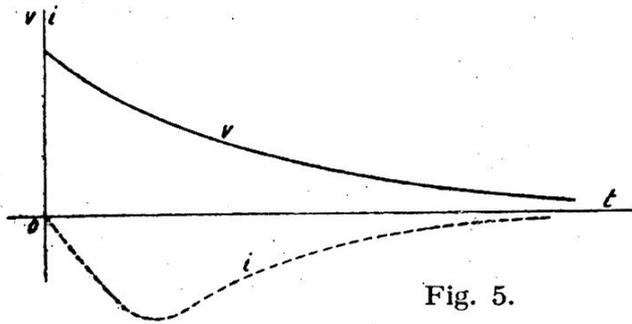


Fig. 5.

C'est évidemment la première exponentielle qui donne l'allure de la décroissance, la seconde devenant bientôt négligeable par rapport à la première. La décharge sera donc d'autant moins rapide que γ_1'' sera grand; elle sera effectuée dans le moindre temps quand γ_1'' sera nul ou $a = \gamma_1$ ou $R^2 = \frac{4L}{C}$; examinons ce cas limite entre les décharges oscillante et apériodique.

9-c. — Décharge d'un condensateur dans le cas critique. — Si les quantités $\gamma_1'' = \sqrt{a^2 - \gamma_1'^2}$ et $\chi_1'' = \frac{\sqrt{a^2 - \gamma_1'^2}}{a}$ sont très petites on peut remplacer $\text{Sh } \gamma_1'' t$ et $\text{Sh } (\gamma_1'' t + \chi_1'')$ par : $\gamma_1'' t$ et $\gamma_1'' t + \chi_1''$; les formules 21 et 22 deviennent alors :

$$(23) \quad i = -\frac{V_0}{L} t e^{-at}$$

$$(24) \quad v = V_0 (1 + at) e^{-at}$$

C'est dans ces conditions que la décharge apériodique est la plus rapide. Ce cas est appelé le cas critique et la résistance correspondante $R = \sqrt{\frac{4L}{C}}$ est la *résistance critique*.

On voit aisément comment la décharge oscillante se modifie pour devenir apériodique quand, R^2 étant plus petit que $\frac{4L}{C}$ ($a < \eta$), cette résistance tend vers cette limite. La période des oscillations $\frac{2\pi}{\sqrt{\eta^2 - a^2}}$ augmente et tend vers l'infini, les ondulations de la figure 4 s'élargissent de plus en plus pour disparaître enfin complètement.

9-d. — **Décharge d'un condensateur à travers une résistance.** — On se trouve évidemment dans le cas de la décharge apériodique et

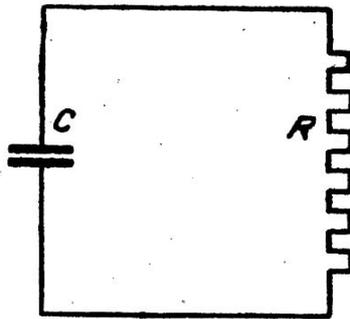


Fig. 6.

l'on pourrait déduire les formules de ce cas particulier des formules 21 et 22 en y remplaçant $\text{Sh } \eta''t$ par son expression en exponentielle et en y faisant $L = 0$. Il est aussi rapide d'opérer directement. On a :

$$Ri + v = 0 \quad \text{ou} \quad CR \frac{dv}{dt} + v = 0$$

d'où l'on déduit, en appelant V_0 la tension initiale :

$$(25) \quad v = V_0 e^{-\frac{t}{CR}}$$

La décharge est naturellement d'autant plus lente que R est grand.

10. — **Charge d'un condensateur à travers une inductance et une résistance.** — Entre les points A et B (fig. 7), on crée une différence de potentiel constante V ; quel sera le régime de charge du condensateur C dont la tension finale sera évidemment V ?

L'équation du système sera

$$(26) \quad \frac{di}{dt} + 2 ai + \frac{v}{L} = \frac{V}{L}$$

d'où on déduit :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2a \frac{di}{dt} + \gamma_1^2 i = 0, \quad a = \frac{R}{2L}, \quad \gamma_1^2 = \frac{1}{LC}$$

dont la solution est fournie par la formule 5 du numéro 2.

Nous laisserons de côté les cas correspondant aux forts amortissements $a \gg \gamma_1$ pour lesquels la charge serait apériodique¹ et, pour simplifier l'écriture, nous supposons a suffisamment petit pour qu'on puisse le négliger devant γ_1 ; dans ces conditions $\gamma_1' \doteq \gamma_1$. On a alors :

$$i = Ae^{-at} \sin(\gamma_1 t + \psi).$$

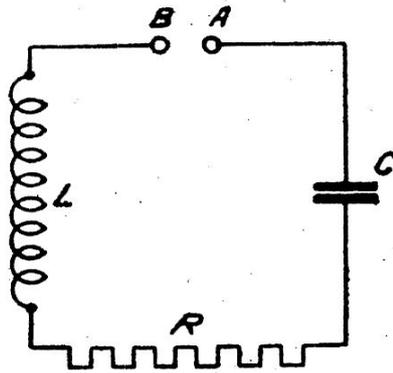


Fig. 7.

Les conditions initiales sont : $i = 0$ et $v = 0$; cette dernière équivaut d'après 26 à :

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \frac{V}{L}$$

Les équations de détermination des constantes sont donc les mêmes qu'au numéro 9-a avec cette seule différence que V_0 est remplacé par $-V$, on aura donc :

$$i = \frac{V}{\gamma_1 L} e^{-at} \sin \gamma_1 t.$$

Connaissant i on déduira v de la relation 26; en tenant compte de ce que a est négligeable devant γ_1 , on aura

$$v = V(1 - e^{-at} \cos \gamma_1 t).$$

La forme du courant est exactement la même que pour la décharge, celle de la tension aux bornes n'en diffère que par l'addition d'une constante (fig. 8).

1. L'examen de ces cas donnerait lieu à des circonstances analogues à celles rencontrées pour la décharge.

Il est important de remarquer que la tension aux bornes du condensateur atteint, au bout d'une demi-période, une valeur presque double de la tension appliquée V (exactement une tension $V(1 + e^{-a\frac{1}{2}})$). Cet effet pourrait être utilisé pour charger le condensateur à une tension double de celle de la source, si l'on pouvait couper le circuit à l'instant convenable; si au contraire, à ce même instant, on supprimait la source et que l'on court-circuitât les points A et B, on obtiendrait dans le circuit des oscillations amorties dont la tension initiale serait $2V$.

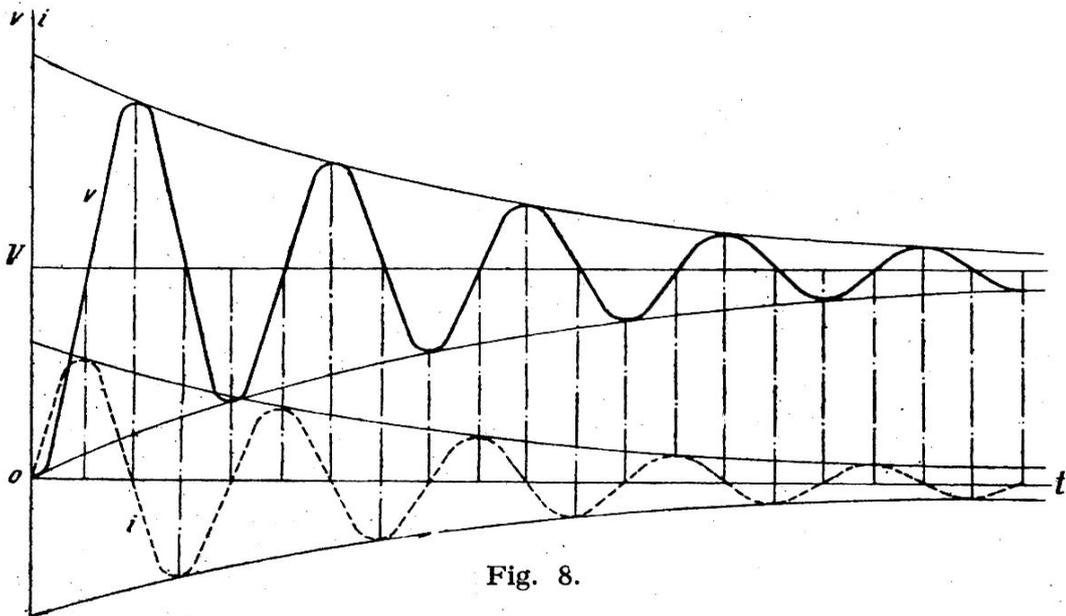


Fig. 8.

Cette considération est intéressante en ce qui concerne l'excitation d'oscillations amorties; il est donc utile de chercher le rendement d'une telle opération. Si on coupe le circuit au moment où le potentiel atteint la valeur V' l'énergie accumulée est $\frac{1}{2} QV'$, Q étant la quantité d'électricité emmagasinée. D'autre part le travail produit par la source est $\int Vi dt = VQ$. Le rendement est donc : $\frac{1}{2} \frac{V'}{V}$, il peut être très voisin de 1 si le circuit est peu amorti.

Il est facile de constater que cette élévation de la tension est due à l'influence de l'inductance de la bobine. Pendant le premier quart de période la source emmagasine de l'énergie électrique dans la capacité et de l'énergie magnétique dans la bobine où le courant atteint son maximum (n° 8); au bout d'une demi-période toute l'énergie est accumulée sous forme électrique dans le condensateur.

Cet effet est de la plus grande importance et il doit en être tenu compte pour les condensateurs qui peuvent se trouver dans les conditions que nous venons d'étudier, les condensateurs d'arrêt de l'alimentation des plaques de lampes par exemple.

La charge d'un condensateur est utilisée en radioélectricité pour produire des oscillations amorties en prenant des dispositions telles qu'au moment où la tension aux bornes du condensateur a atteint une valeur convenable, le circuit auquel il appartient soit fermé et qu'il oscille librement dans les conditions étudiées au n° 8-a. Les procédés employés sont décrits et discutés dans les traités d'émissions amorties.

11. — Valeur efficace des éléments d'une oscillation amortie. — Les émissions produites au moyen d'oscillations amorties sont réalisées en chargeant périodiquement le condensateur d'un circuit, qui se décharge ensuite en régime libre. Chaque décharge donne lieu à un *train d'oscillations* dont la durée est théoriquement infinie, mais dans lequel l'amplitude devient pratiquement négligeable au bout d'un temps très court; la période des charges successives est telle que les oscillations d'un train se sont pratiquement annulées au début du train suivant.

L'intensité efficace est définie de la même façon qu'en courant alternatif entretenu : c'est celle du courant continu qui dissiperait dans un temps donné la même quantité de chaleur dans le circuit¹. On a donc en prenant ce temps égal à 1

$$i_{eff}^2 = \int_0^1 i^2 dt.$$

En raison des considérations précédentes, l'intensité d'un train s'annulant pratiquement avant le début du suivant, s'il y a N trains à la seconde on peut écrire

$$i_{eff}^2 = N \int i^2 dt$$

l'intégrale étant étendue à l'intervalle entre deux charges où, ce qui revient au même, entre zéro et l'infini.

Le courant étant représenté par la formule

$$i = I e^{-at} \sin \eta t,$$

1. Pour être rigoureux il faudrait tenir compte de l'énergie rayonnée (n° 11-VIII); mais dans les circuits fermés que nous considérons ici, cette énergie est négligeable.

on trouve¹

(27)

$$i_{eff} = \frac{I\eta}{2} \sqrt{\frac{N}{a(a^2 + r_1^2)}}$$

a^2 étant généralement négligeable par rapport à r_1^2 on peut écrire

$$i_{eff} = \frac{I}{2} \sqrt{\frac{N}{a}}$$

12. — **Émissions amorties. — Influence de l'étincelle.** — Le procédé employé pour produire des oscillations amorties dans un circuit, en vue de leur utilisation à l'émission, consiste à charger périodiquement le condensateur du circuit et à provoquer sa décharge aussitôt après la charge. Pour mener à bien cette opération, il faut couper le circuit pendant la charge et le fermer brusquement aussitôt après; ces opé-

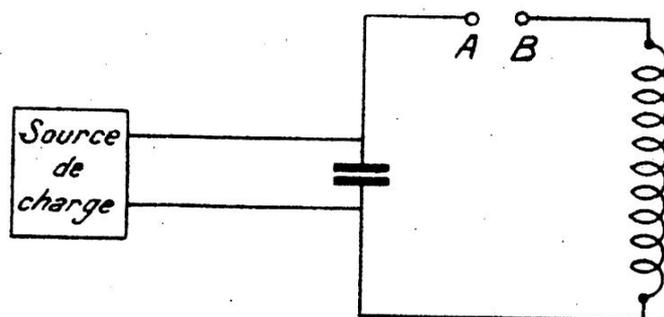


Fig. 9.

rations sont effectuées avec toute la rapidité désirable par l'étincelle qui jaillit entre les bornes A et B d'une coupure ménagée dans le circuit (fig. 9). Cette étincelle produit en éclatant une ionisation de l'air sur le chemin qu'elle a parcouru et le rend conducteur; quand les oscillations d'un train sont suffisamment amorties la conductibilité devient insuffisante, l'étincelle s'éteint, et le condensateur se recharge pour la production d'un nouveau train.

La source comporte une forte inductance dont la réactance élevée empêche le condensateur de se décharger par un autre chemin que la bobine L et la coupure.

La présence de l'étincelle dans le circuit modifie les résultats obtenus

1. Il faut intégrer $e^{-2at} \sin 2\omega t = \frac{1}{2} e^{-2at} (1 - \cos 2\omega t)$.

Or $e^{-2at} \cos 2\omega t = R [e^{2(-a + j\omega)t}]$ R = partie réelle de
 $\int_0^\infty e^{-2at} dt = \frac{1}{2a}$ $\int_0^\infty e^{2(-a + j\omega)t} dt = \frac{1}{2(a - j\omega)} = \frac{1}{2} \frac{a + j\omega}{a^2 + \omega^2}$
 doù la formule ci-dessus.

précédemment sur l'amortissement des oscillations; la résistance de l'étincelle ne peut pas être considérée comme constante et la loi exponentielle ne s'applique plus. *Seule l'expérience peut renseigner sur la marche du phénomène*; on constate au moyen de l'oscillographe que l'amortissement est plutôt linéaire, c'est-à-dire que les sommets des oscillations successives sont à peu près en ligne droite au lieu de suivre une courbe exponentielle; l'extinction est donc plus rapide que dans les circuits sans étincelle. On peut alors représenter approximativement l'intensité oscillante par la loi

$$i = (p - qt) \sin \tau t.$$

13. — Excitation d'un circuit par choc. — On peut encore obtenir des oscillations amorties pures en produisant par induction des impulsions extrêmement brèves sur un circuit sans coupure. La force électromotrice e est alors très grande pendant un temps très court (δt) et l'on se trouve en présence d'un problème tout à fait analogue à celui des percussions en mécanique. L'équation du phénomène est encore

$$L \frac{di}{dt} + Ri + v = e$$

et en intégrant :

$$L \delta i + R \int_0^{\delta t} i dt + \int_0^{\delta t} v dt = \int_0^{\delta t} e dt$$

δi étant l'accroissement du courant pendant la percussion, c'est-à-dire sa valeur à la fin de celle-ci, si le système est parti du repos. En admettant que le courant ait été constamment croissant pendant la percussion, ce qui est légitime en raison de sa courte durée, on reconnaît aisément que

$$-R \int_0^{\delta t} i dt < R \delta i \delta t \quad \text{et} \quad \int_0^{\delta t} v dt < \frac{\delta i \delta t}{C}$$

Si donc δt est suffisamment petit, les deux derniers termes du premier membre de l'équation sont négligeables et il vient en appelant P l'intégrale $\int_0^{\delta t} e dt$:

$$L di = P$$

ou, d'après la remarque précédente :

$$i = \frac{P}{L}$$

La percussion terminée, le circuit oscillera librement avec une intensité initiale $\left(\frac{P}{L}\right)$.

A la vérité il est très difficile de produire des impulsions aussi brèves qu'il le faudrait pour se trouver dans les conditions ci-dessus; c'est un résultat vers lequel on tend sans l'atteindre rigoureusement; dans la plupart des cas les oscillations commencent avant que la force électromotrice ait cessé d'agir, mais la période troublée qui en résulte n'a pas grande importance.

14. — Oscillations non sinusoïdales. — Nous avons examiné au cours de ce paragraphe les oscillations qui prennent naissance dans un circuit soit quand il a été momentanément dérangé de sa position d'équilibre, soit quand il est soumis à une force électromotrice sinusoïdale.

Il peut arriver que la force électromotrice agissante soit amortie comme celle qui résulterait de l'induction produite par la décharge oscillante ou apériodique d'un condensateur à travers une bobine, avec ou sans étincelle. Dans ce cas, la force électromotrice peut être représentée par un polynôme en $e^{-bt} \sin(\omega t + \varphi)$; or on sait que les équations se résolvent alors facilement à la longueur des calculs près¹.

Mais la force électromotrice peut aussi être représentée par une fonction périodique quelconque du temps. On la développe alors en série de FOURIER et si, comme il arrive en général, cette série peut être limitée à ses premiers termes, on obtient aisément la solution (n° 1-I). Les éléments de l'oscillation contrainte contiennent alors un terme dont la pulsation est la pulsation fondamentale ω de la force électromotrice et des harmoniques de pulsation $2\omega, 3\omega, \dots$. Si le circuit est accordé sur ω , le terme fondamental seul est important, le rapport de l'intensité du p^{me} harmonique à celle du terme fondamental est de l'ordre de :

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + Lp\omega - \frac{1}{(Cp\omega)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2 \left(p - \frac{1}{p}\right)^2}}$$

rapport d'autant plus faible que le coefficient de surtension $\frac{L\omega}{R}$ est grand.

Dans un circuit de faible amortissement on peut donc obtenir un courant presque sinusoïdal avec une force électromotrice périodique quelconque. C'est ce qui arrive en particulier dans le circuit oscillant

1. On pourrait aussi avoir des forces électromotrices en $t \sin(\omega t + \varphi)$, (n° 12). Nous n'avons pas examiné ce cas dans les préliminaires du premier chapitre, car nous ne le considérons pas; mais la solution des équations correspondantes est aussi classique et on la trouvera dans les traités d'analyse.

d'un émetteur à triode dans lequel la force électromotrice est représentée par les impulsions du courant plaque qui sont loin d'être sinusoïdales quand on recherche un haut rendement.

En accordant le circuit soumis à la force électromotrice sur le p^{me} harmonique de celle-ci on peut au contraire éliminer l'oscillation de pulsation ω et obtenir une oscillation presque sinusoïdale de pulsation $p\omega$.

Inversement une force électromotrice sinusoïdale peut donner naissance à des oscillations d'allure très différente. Nous n'avons en effet étudié dans ce paragraphe que des circuits dans lesquels L , R et C étaient constants; or, dans certains montages à lampe par exemple, R peut être fonction de l'état d'oscillation du système et subir des variations importantes au cours d'une période; les équations cessent d'être linéaires et les solutions prennent une forme très complexe. De même si la self-inductance comporte un noyau de fer, L et R sont variables. Nous étudierons certaines de ces questions par la suite.

15-a. — Analogie mécanique : Pendule. — Les oscillations électriques que nous venons d'étudier présentent de grandes analogies avec les oscillations mécaniques. Considérons par exemple (fig. 10) une masse

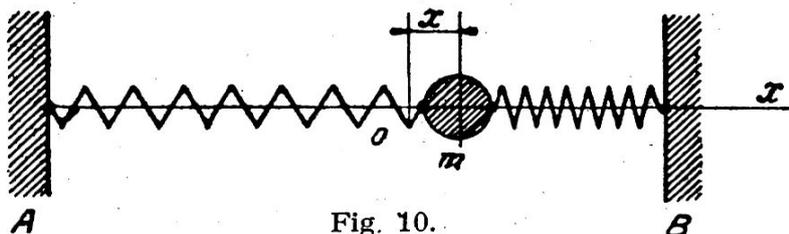


Fig. 10.

m sollicitée vers deux points fixes A et B par des ressorts qui dans l'état d'équilibre la maintiennent en O. Si on l'écarte de cette position O et qu'on l'abandonne à elle-même elle oscillera et sous l'influence des effets de frottement, de résistance de l'air, etc... ses oscillations seront amorties; si elle est soumise à une force alternative $F \sin \omega t$, elle prendra au bout d'un certain temps un mouvement entretenu, ses oscillations seront contraintes. Supposons que les résistances à son mouvement soient de la forme $P \frac{dx}{dt}$ et que la force de rappel des ressorts soit $\frac{x}{A}$; l'équation du mouvement sera

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + P \frac{dx}{dt} + \frac{x}{A} = F \sin \omega t$$

de forme identique à celle du mouvement de la quantité d'électricité q dans un circuit :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \sin \omega t.$$

La self-inductance correspond à une masse, l'effet de capacité à un effet d'élasticité; l'énergie magnétique $\frac{Li^2}{2}$ accumulée dans le circuit correspond à une énergie cinétique $\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ et l'énergie électrique $\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$ à une énergie potentielle $\frac{1}{2} \frac{x^2}{A}$.

Les petites oscillations d'un pendule seraient dans le même cas.

15-b. — Analogie mécanique : oscillations d'un galvanomètre. — Parmi les nombreuses analogies possibles, examinons encore celle des différents régimes de fonctionnement d'un galvanomètre. Soit θ l'angle de torsion du fil, I le moment d'inertie du système mobile, $f \frac{d\theta}{dt}$ le moment des résistances au mouvement, h la constante de torsion (ou le couple directeur dans le cas des galvanomètres à aimant mobile) soit enfin Ki le couple produit par un courant i . On a :

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} + h\theta = Ki.$$

Les mouvements du galvanomètre depuis le moment où le courant i lui est appliqué jusqu'à son repos final sont identiques au mouvement de l'électricité dans la charge d'un condensateur par une force électromotrice constante; on y retrouve tous les cas étudiés aux nos 10 et 9.

1° Si $f^2 < 4 Ih$, l'équipage oscille avec un coefficient d'amortissement $a = \frac{f}{2I}$. Si $f^2 \ll 4 Ih$ la période est voisine de $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{h}}$, cette période augmente avec le rapport $\frac{f^2}{4 Ih}$ pour devenir infinie quand il atteint l'unité.

2° Si $f^2 > 4 Ih$ il n'y a plus d'oscillations, l'équipage atteint sa position d'équilibre au bout d'un temps d'autant plus long que $\frac{f^2}{4 Ih}$ est grand.

3° Si $f^2 = 4 Ih$ on se trouve dans le cas critique; l'équipage atteint sa position d'équilibre dans le moindre temps possible, sans oscillations.

Il est important de remarquer que dans le cas d'un galvanomètre à cadre mobile le coefficient f comporte une part f_1 due à la viscosité de

l'air et une part f_2 provenant des courants engendrés par le mouvement du cadre dans le champ magnétique. Si Φ_0 est le flux maximum embrassé par le cadre et R la résistance de son circuit, on voit aisément que $f_2 \doteq \frac{\Phi_0^2}{R}$. Comme on peut faire varier R dans des limites très larges, on est maître de la durée de retour à la position d'équilibre; on a intérêt à régler R de façon à se placer dans le cas critique.

Cette remarque explique pourquoi en circuit ouvert le galvanomètre oscille longtemps et pourquoi on arrête ses oscillations en le court-circuitant.

§ III. — CARACTÉRISTIQUES D'AMORTISSEMENT D'UN CIRCUIT.

16. — Décrément. — La rapidité avec laquelle les oscillations s'établissent et s'éteignent dans un circuit oscillant joue un très grand rôle dans la pratique. Une succession de signaux provoque dans les circuits de réception une série d'établissements et d'extinctions d'oscillations et l'on conçoit que pour un trafic rapide, composé de signaux très brefs et très rapprochés, on soit obligé de compter avec les durées des phénomènes de transition.

Le coefficient d'amortissement $a = \frac{R}{2L}$ est déjà une caractéristique intéressante de ces durées, mais pour les usages pratiques il est plus commode de le remplacer par d'autres quantités ayant un sens physique plus immédiat : ce sont le décrément et la constante de temps. Définissons d'abord le décrément.

Soit un circuit oscillant tel que celui étudié au numéro 9-a; écrivons l'intensité du courant sous la forme

$$i = I_n e^{-at} \sin \gamma' t$$

les amplitudes maxima de i sont très sensiblement obtenues, si $\frac{a}{\gamma'}$ est petit, en faisant dans cette formule $\sin \gamma' t = 1$. Deux maxima successifs I_n et I_{n+1} sont donc séparés par la pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\gamma'}$ et l'on a :

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = e^{-aT}.$$

On donne à (aT) le nom de *décrément du circuit* et on représente cette quantité par la lettre δ :

(28)

$$\delta = \frac{R}{2L} T = aT$$

On dit parfois *décroissement logarithmique* car :

$$\text{Log}_e \frac{I_n}{I_{n+1}} = \delta$$

δ est un nombre sans dimension; il est plus commode à employer que q car sa valeur caractérise la décroissance de l'amplitude après un nombre donné d'oscillations, *indépendamment de leur fréquence*; l'amplitude après n oscillations est en effet ¹ :

$$I_n = I_0 e^{-anT} = I_0 e^{-n\delta}.$$

La valeur numérique de δ varie avec le soin apporté à l'établissement des circuits et avec les usages auxquels il est destiné, mais, à construction également soignée, elle est à peu près constante pour toutes les fréquences. Les circuits communs de réception ont un *décroissement* voisin de $1/30$; avec du soin dans le choix du type des bobines et dans leur fabrication, on atteint assez facilement $1/70$; enfin avec des bobines particulièrement étudiées et dans des cas exceptionnels on peut dépasser $1/300$.

Dans les circuits à étincelle (n° 12), le *décroissement* est beaucoup plus fort, il est en général de l'ordre de $1/10$.

On peut encore donner du *décroissement* une autre interprétation physique : L'énergie dépensée dans le circuit en une demi-période est $\frac{1}{2} RI^2 \frac{T}{2}$; en la comparant à l'énergie totale $\frac{1}{2} LI^2$ emmagasinée dans le circuit (n° 8), on trouve

$$\frac{R}{2L} T = \delta.$$

Le *décroissement* d'un circuit est donc aussi le rapport de l'énergie qu'il dissipe en une demi-période à l'énergie totale qu'il contient à ce moment.

Le *décroissement* intervient le plus souvent dans les calculs divisé par π ; nous désignerons ce quotient par d .

$$d = \frac{\delta}{\pi}$$

d est l'inverse du facteur de surtension (n° 18).

17 a. — Constante de temps d'un circuit oscillant. — On voit aisément que le coefficient d'amortissement a est l'inverse d'un temps; c'est

1. Les mêmes relations existeraient naturellement entre les amplitudes de la tension aux bornes du condensateur.

ce dernier que l'on appelle *constante de temps du circuit oscillant*; nous la désignerons par θ .

$$(29) \quad \boxed{\theta = \frac{1}{a} = \frac{2L}{R}}$$

Dans le cas d'un circuit abandonné à lui-même, considéré au numéro précédent les amplitudes du courant et de la tension aux bornes du condensateur à un instant t pourront donc s'écrire¹ (n° 7) :

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\theta}}, \quad V = V_0 e^{-\frac{t}{\theta}}$$

on voit qu'elles tombent de 1 à $1/e$, soit 0,37, dans un intervalle de temps θ , à $1/7$ environ au bout du temps 2θ , à $1/50$ au bout du temps 4θ . La constante de temps renseigne donc directement sur la rapidité avec laquelle les oscillations s'éteignent; elle fournit naturellement des renseignements du même genre sur la durée de leur établissement sous l'action d'une force électromotrice.

Supposons par exemple qu'un circuit au repos, accordé sur la fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$ soit soumis, à partir de l'instant zéro, à une force électromotrice $e = E \sin \omega t$ c'est le cas d'un circuit de réception recevant un signal (n° 7). On a :

$$I = I_0 (1 - e^{-\frac{t}{\theta}}) \quad V = V_0 (1 - e^{-\frac{t}{\theta}}).$$

Si l'on prend pour unités les amplitudes finales, théoriquement atteintes au bout d'un temps infini, on voit qu'au temps θ elles seront égales à $(1 - 1/e) = 0,63$, au temps 2θ à 0,86, au temps 4θ à 0,98. Dans la pratique on peut donc considérer que l'amplitude maxima est atteinte en une durée de 3 à 4 fois la constante de temps et que les oscillations deviennent négligeables dans une durée égale, quand la force électromotrice est supprimée.

La limite extrême de la durée des signaux et de leurs intervalles en télégraphie rapide est donc de 3 ou 4 θ .

Il existe une relation très simple entre la constante de temps, la période des oscillations et leur décrement :

$$(30) \quad \boxed{\theta = \frac{T}{\delta} = \frac{1}{\delta f}}$$

1. Il est clair que le temps t devra correspondre à un maximum de i ou de v pour donner effectivement une valeur de I ou de V ; mais la durée de la période est si faible par rapport aux durées à considérer que cette restriction est inutile.

Nous avons indiqué au numéro précédent que pour des circuits également soignés, le décrement pouvait être considéré comme indépendant de la fréquence : *la constante de temps varie donc en raison inverse de la fréquence*. Cette considération joue un rôle important dans l'étude des communications.

Enfin, il est intéressant d'exprimer en fonction de δ ou de θ le maximum de la tension aux bornes du condensateur d'un circuit en résonance; c'est en effet cette tension qui est généralement appliquée aux bornes d'entrée des amplificateurs. Si E est l'amplitude de la force électromotrice d'excitation, on a (n° 8) :

$$(31) \quad V = L\omega I = L\omega \frac{E}{R} = \frac{\pi E}{\delta} = \pi E f \cdot \theta.$$

La tension maximum que l'on peut obtenir aux bornes d'un circuit oscillant excité est donc inversement proportionnelle au décrement, quelle que soit la fréquence; pour une fréquence donnée elle est proportionnelle à la constante de temps.

17-b. — Constante de temps de charge ou de décharge du condensateur. — On rencontre souvent — dans les liaisons entre étages d'un amplificateur par exemple — un condensateur en série avec une résistance, et il est important d'apprécier la rapidité avec laquelle le condensateur peut se charger ou se décharger sous l'influence d'une force électromotrice continue donnée. C'est encore une constante de temps que l'on choisit pour cela.

Au numéro 9-d nous avons traité le problème de la décharge et en appelant v et V_0 les tensions du condensateur aux instants t et zéro, nous avons trouvé :

$$v = V_0 e^{-\frac{t}{CR}}$$

On voit immédiatement que la quantité :

$$\theta' = CR$$

joue ici le rôle de constante de temps d'une manière identique à celle étudiée au numéro précédent. Pour la charge, on trouverait d'ailleurs :

$$v = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\theta'}}\right)$$

en désignant par V_0 la tension continue appliquée (n° 10).

Il est clair que si le système résistance-capacité de constante de temps θ' doit être employé à la transmission d'oscillations de période T , θ' devra être notablement plus petit que la période T pour suivre la cadence des charges et des décharges auxquelles il sera soumis.

17-c. — **Constante de temps d'une inductance résistante.** — Un problème du même genre se pose pour le cas d'une inductance en série avec une résistance ou, ce qui revient au même, d'une inductance douée de résistance. Des systèmes de ce genre sont employés dans les liaisons d'amplificateurs ou comme bobines d'arrêt.

Imaginons qu'aux bornes A et B de la bobine de résistance R et de self-inductance L (fig. 11), nous établissions un court-circuit alors qu'elle est parcourue par un courant continu I_0 , le courant va s'éteindre selon la loi :

$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

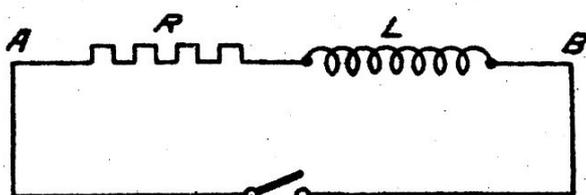


Fig. 11.

Si au contraire, le courant étant nul, on appliquait entre A et B une force électromotrice E le courant s'établirait d'après la relation :

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

la quantité :

$$\theta'' = \frac{L}{R}$$

est la constante de temps du système et ce dernier ne pourra transmettre des oscillations de période T que si θ'' est notablement inférieur à T; inversement pour qu'il s'oppose au passage des mêmes oscillations, il devra avoir une constante de temps beaucoup plus grande que T.

18. — **Facteur de surtension.** — Voici encore un coefficient qui est en rapport simple avec l'amortissement d'un circuit et qui est employé pour caractériser les tensions élevées que l'on peut obtenir en courant alternatif au moyen de courants ou de forces électromotrices relativement faibles.

Considérons une bobine et une résistance en série, comme sur la figure 11, et appliquons entre les points A et B une tension alternative $V \sin \omega t$. Le courant sera donné par l'équation

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V \sin \omega t$$

qui, résolue en quantités complexes (n° 4), donnera

$$\mathcal{V} = (R + j L\omega) \mathcal{I}.$$

Les amplitudes V et I dans le régime permanent seront donc reliées par la relation

$$V = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \cdot I.$$

Si la bobine n'avait pas de self-induction ou si la tension alternative était remplacée par une tension continue, on obtiendrait le même courant avec une tension

$$V' = RI.$$

Donc, à égalité du courant, la présence de la self-induction augmente la tension dans le rapport

$$s = \sqrt{\left(\frac{L\omega}{R}\right)^2 + 1}$$

auquel on donne le nom de *facteur de surtension de la bobine pour la pulsation* ω .

Comme en haute fréquence $L\omega$ est généralement beaucoup plus grand que R , on se contente de prendre pour s la valeur

$$(32) \quad s = \frac{L\omega}{R}$$

Si on remplace la bobine par un condensateur de capacité C , on trouve de la même manière un *facteur de surtension du condensateur*

$$(33) \quad s = \frac{1}{C\omega R}$$

Si enfin, on associe une bobine, une capacité et une résistance pour former un circuit fermé, on appelle *facteur de surtension du circuit celui de la bobine — ou de la capacité — associée à la résistance, pour la pulsation propre* $\eta = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ du circuit.

On a alors

$$(34) \quad s = \frac{L\eta}{R} = \frac{1}{C\eta R}$$

On remarquera que ce coefficient est alors égal au *rapport de la tension aux bornes du condensateur au moment de la résonance, à la force électromotrice appliquée* \dot{E} . On sait en effet que l'on a (n° 8)

$$V = L\omega I = \frac{L\omega}{R} E.$$

On remarquera que, si δ est le décrément du circuit (n° 16) :

$$(35) \quad \boxed{s = \frac{\pi}{\delta} = \frac{1}{d}}$$

En se reportant aux valeurs numériques de δ on voit que le facteur de surtension d'un circuit oscillant est de l'ordre de 100 pour des circuits communs, de l'ordre de 200 pour des circuits soignés et que, dans des cas exceptionnels, il peut dépasser 1000.

CHAPITRE III

Oscillations contraintes entretenues des circuits couplés.

§ I. — EQUATIONS D'UN RÉSEAU EN RÉGIME PERMANENT.

1. — **Lois de Kirchhoff en notation complexe.** — On sait que les courants et les tensions existant à un instant donné dans un réseau (fig. 1) sont liés par les lois très simples de KIRCHHOFF :

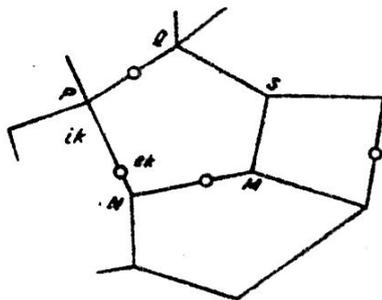


Fig. 1.

1. La somme algébrique des intensités des courants qui aboutissent à un sommet M du réseau est nulle :

$$(1) \quad \sum i_k = 0.$$

2. Si l'on parcourt un chemin ininterrompu MNPQ le long des fils du réseau, la différence de potentiel entre les points extrêmes est égale à la somme algébrique des forces électromotrices rencontrées en chemin, augmentée de celle des produits $R_k i_k$ des résistances des différents éléments du parcours par les courants correspondants :

$$(2) \quad v_{MQ} = \sum e_k + \sum R_k i_k.$$

Si le chemin parcouru est fermé, cette dernière relation devient :

$$(2') \quad \sum e_k + \sum R_k i_k = 0.$$

Nous allons montrer qu'en régime alternatif permanent, ces lois s'appliquent aux amplitudes complexes des courants et des tensions, si l'on y remplace les résistances par les impédances complexes (n° 4-II).

Puisque nous nous plaçons en régime permanent, nous avons affaire à des oscillations contraintes et les courants sont de la forme

$$(3) \quad i_k = I_k \sin(\omega t - \varphi_k).$$

Si T est la période correspondant à ω , l'équation 1 nous donne aux instants t et $\left(t + \frac{T}{4}\right)$

$$\sum I_k \sin(\omega t - \varphi_k) = 0 \quad \sum I_k \cos(\omega t - \varphi_k) = 0.$$

Multiplions la première de ces relations par j et ajoutons; il vient :

$$\sum I_k e^{j(\omega t - \varphi_k)} = \left(\sum I_k e^{-j\varphi_k}\right) e^{j\omega t} = (\sum \mathcal{J}_k) e^{j\omega t} = 0$$

ce qui démontre la première partie de notre proposition.

Pour établir la seconde, considérons un élément NP du contour MNPQ; soient e_k , R_k , L_k , C_k la force électromotrice, la résistance, la self-induction et la capacité rencontrées sur le chemin NP¹, la différence de potentiel entre N et P sera, à l'instant t ,

$$v_k = e_k + R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k dt$$

et entre M et Q on pourra écrire d'après 2 :

$$v_{MQ} = \sum v_k$$

Pour le régime permanent défini par la relation 3, on a donc :

$$V_{MQ} \sin(\omega t - \psi) = \sum \left[R_k \sin(\omega t - \varphi_k) I_k + \left(L_k \omega - \frac{1}{C_k \omega} \right) \cos(\omega t - \varphi_k) I_k \right] + \sum E_k \sin(\omega t - \psi_k)$$

ψ étant la phase de la tension entre M et Q. Au temps $\left(t + \frac{T}{4}\right)$ on aurait

$$V_{MQ} \cos(\omega t - \psi) = \sum \left[R_k \cos(\omega t - \varphi_k) I_k - \left(L_k \omega - \frac{1}{C_k \omega} \right) \sin(\omega t - \varphi_k) I_k \right] + \sum E_k \cos(\omega t - \psi_k).$$

Multiplions encore la première de ces relations par j et ajoutons-la à la seconde. Cela donne

$$V_{MQ} e^{j(\omega t - \psi)} = \sum \left[R_k + j \left(L_k \omega - \frac{1}{C_k \omega} \right) \right] I_k e^{j(\omega t - \varphi_k)} + \sum E_k e^{j(\omega t - \psi_k)}$$

ou $\mathcal{V}_{MQ} = V_{MQ} e^{-j\psi} = \sum \mathcal{Z}_k I_k e^{-j\varphi_k} + \sum E_k e^{-j\psi_k} = \sum \mathcal{Z}_k \mathcal{J}_k + \sum \mathcal{E}_k$ ce qui démontre la proposition. Il en résulte que :

Les amplitudes complexes des courants et des tensions dans un réseau soumis à un régime alternatif permanent, sont reliées par les équations suivantes :

$$(4) \quad \sum \mathcal{J}_k = 0 \quad \text{en un sommet}$$

1. s_k , R_k , L_k sont les sommes des forces électromotrices, résistances et self-inductions rencontrées en chemin; s'il y a plusieurs capacités, C_k est définie par la relation

$$\frac{1}{C_k} = \sum \frac{1}{C}$$

$$(5) \quad \mathcal{V}_{MQ} = \sum \mathfrak{Z}_k \mathcal{J}_k + \sum \mathcal{E}_k \quad \text{sur un chemin reliant M à Q}$$

$$(5') \quad \sum \mathfrak{Z}_k \mathcal{J}_k + \sum \mathcal{E}_k = 0 \quad \text{sur un chemin fermé.}$$

Chaque fois qu'on se trouve en régime permanent, c'est-à-dire que l'on ne recherche que les oscillations contraintes, on abrège notablement les calculs en écrivant d'emblée les équations 4 et 5; on évite ainsi de passer par les équations différentielles elles-mêmes.

2. — **Impédances en parallèle.** — On peut aussi généraliser la formule qui donne en courant continu la résistance équivalente à plusieurs résistances en parallèle. Considérons (fig. 2) plusieurs impédances \mathfrak{Z}_k en

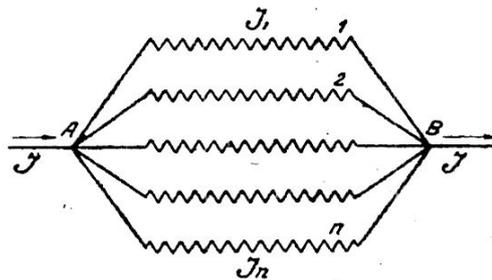


Fig. 2.

parallèle entre deux points A et B et cherchons par quelle impédance il faudrait remplacer leur ensemble pour ne pas modifier le courant arrivant en A.

La formule 5 appliquée à chaque branche permet d'écrire :

$$\mathcal{V}_{AB} = \mathfrak{Z}_1 \mathcal{J}_1 = \mathfrak{Z}_2 \mathcal{J}_2 = \mathfrak{Z}_n \mathcal{J}_n.$$

D'autre part, aux points A et B on a :

$$\mathcal{J} = \sum \mathcal{J}_k.$$

De ces relations on tire

$$\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{V}_{AB}} = \sum \frac{1}{\mathfrak{Z}_k}$$

Mais $\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{V}_{AB}}$ n'est autre chose que l'impédance cherchée; on a donc :

$$(6) \quad \frac{1}{\mathfrak{Z}} = \sum \frac{1}{\mathfrak{Z}_k}$$

L'inverse de l'impédance équivalente à plusieurs impédances en parallèle est donc égale à la somme des inverses de ces dernières.

3. — Tension aux bornes d'une inductance ou d'une capacité. — Nous rencontrerons par la suite de nombreuses applications des lois de KIRCHHOFF; montrons seulement ici comment elles s'appliquent aux problèmes déjà étudiés dans le précédent chapitre.

Les oscillations contraintes du circuit simple étudié au numéro 2-II sont immédiatement données par l'équation 5'

$$\mathfrak{Z} \mathfrak{J} - E = 0.$$

D'autre part la tension aux bornes d'une inductance résistante, d'une capacité ou d'une résistance pure sont fournies par la relation 5

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_{ind} &= (jL\omega + R) \mathfrak{J} & \text{d'où} & \quad V_{ind} = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} I \doteq L\omega I \\ \mathfrak{V}_{cap} &= \frac{1}{jC\omega} \mathfrak{J} & \text{»} & \quad V_{cap} = \frac{I}{C\omega} \\ \mathfrak{V}_{res} &= R \mathfrak{J} & \text{»} & \quad V_{res} = RI \end{aligned}$$

Dans un circuit oscillant en résonance $L\omega = 1/C\omega$, et la tension aux bornes du condensateur peut s'écrire

$$V = \frac{I}{C\omega} \doteq L\omega I.$$

§ II. — GÉNÉRALITÉS SUR LE COUPLAGE.

4. — Problème général du couplage. — L'emploi d'un circuit unique n'est pas assez souple pour les besoins de la pratique. Une source donnée exerce sur lui des effets parfaitement définis qui peuvent ne pas convenir aux applications éventuelles, dans lesquelles la puissance doit se présenter sous des formes très variables; tantôt il est nécessaire de la faire varier entre des limites très étendues pour un même débit de la source en intensité ou en tension, tantôt elle doit comporter des tensions élevées, tantôt de fortes intensités. La question est tout à fait analogue à celle qui se pose dans les machines mécaniques où les transformations du travail doivent être des plus variées.

Ces nécessités conduisent, dans un cas comme dans l'autre, à multiplier le nombre et la nature des intermédiaires entre l'élément qui reçoit l'énergie et celui qui la cède.

D'un point de vue tout à fait général, l'organe qui permet d'atteindre ces résultats est le transformateur dont l'emploi est déjà si fréquent et si important en électricité industrielle. En principe il réalise la liaison entre deux circuits au moyen de l'induction mutuelle de deux éléments convenablement agencés; dans ce paragraphe, nous allons l'étudier du point de vue de la haute fréquence.

Comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent, nous admettrons que les éléments des circuits L , R et C sont des constantes indépendantes du temps et des conditions d'oscillation; il en sera de même des coefficients d'induction mutuelle. C'est ainsi que nos bobines ne devront pas contenir de noyaux de fer ou, si elles en contiennent, les conditions dans lesquelles elles se trouveront ne devront donner naissance à aucun phénomène sensible de saturation, d'hystérésis ou de courants de Foucault.

5. — Différents modes de couplage. — Quand deux circuits sont en présence, les oscillations qui parcourent l'un engendrent en général des oscillations dans l'autre. Celui-ci réagit à son tour sur le premier, il y a donc action mutuelle des deux circuits. On dit qu'ils sont couplés.

Le couplage est une liaison, au sens où l'entend la mécanique. Il est faible ou lâche si la réaction du secondaire sur le primaire est peu importante; dans le cas contraire, il est serré.

Le couplage peut se faire de différentes façons, il suffit qu'un circuit agisse sur l'autre d'une manière quelconque. On distingue ordinairement : le couplage par *induction magnétique*, dans lequel les circuits sont liés par un champ magnétique commun comme dans un transformateur, le couplage par *capacité ou électrique* dans lequel les circuits sont rendus solidaires par l'intermédiaire du champ électrique d'un condensateur commun; le couplage par *résistance ou galvanique* dans lequel les circuits ont une portion résistante commune. Ces couplages peuvent bien entendu exister simultanément; c'est le cas du couplage dit « Oudin » dans lequel les circuits ont en commun une portion de bobine dont la self-inductance dépasse d'ailleurs beaucoup la résistance.

Nous n'envisagerons que les liens les plus étroits que l'on puisse établir entre deux circuits; nous ne ferons intervenir que les forces qui s'exercent au voisinage immédiat des circuits et pour lesquelles la durée de la propagation est négligeable. Quand cette simplification est impossible, les difficultés du problème deviennent presque insurmontables, nous nous occuperons par la suite de cette question.

Nous nous bornerons au cas de deux circuits dont nous ferons une étude très complète; dans une autre partie, nous examinerons des cas particuliers relatifs à une chaîne de circuits.

6-a. — Équations générales de deux circuits couplés. — Considérons les deux circuits couplés de la figure 3 avec les notations qui y sont figurées. Désignons encore par e_1 et e_2 les forces électromotrices appli-

quées séparément à chacun des circuits et remarquons que d'une façon générale on a les relations :

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad v = \frac{1}{C} \int i dt$$

i étant le courant qui traverse une capacité C et v la tension à ses bornes.

En appliquant la deuxième loi de KIRCHHOFF à chacun des circuits, on aura :

$$\begin{aligned} R'_1 i_1 + (L'_1 + L''_1) \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C'_1} \int i_1 dt + P(i_1 + i_2) + M \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{F} \int (i_1 + i_2) dt &= e_1 \\ R'_2 i_2 + (L'_2 + L''_2) \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C'_2} \int i_2 dt + P(i_1 + i_2) + M \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{F} \int (i_1 + i_2) dt &= e_2 \end{aligned}$$

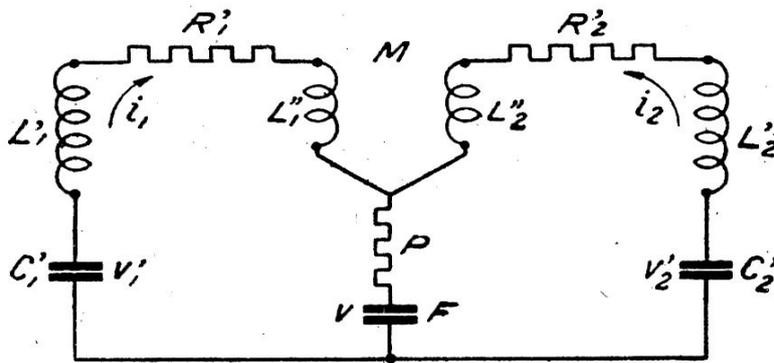


Fig. 3.

Il est plus commode d'introduire dans ces équations les inductances, résistances totales et capacités effectives de chaque circuit que nous désignerons par L , R et C avec l'indice convenable et qui sont données par :

$$L = L' + L'', \quad R = R' + P, \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{F}$$

On trouve alors :

$$(7) \left\{ \begin{aligned} R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + P i_2 + M \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{F} \int i_2 dt &= e_1 \\ P i_1 + M \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{F} \int i_1 dt + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt &= e_2 \end{aligned} \right.$$

6-b. — Signes des termes de ces équations. — Comme pour le cas du circuit simple du numéro 2-II, on peut encore choisir à volonté le sens positif du courant dans chacun des deux circuits; les sens positifs des autres éléments en découlent immédiatement. Mais il y a lieu d'appeler l'attention sur le fait que, quel que soit le sens positif choisi pour

les courants, les termes en P , M et $1/\Gamma$ doivent avoir le même signe dans les deux équations, si on écrit celles-ci comme ci-dessus de telle sorte que les termes $R_1 i_1$ et $R_2 i_2$ aient le même signe extérieur.

Admettons par exemple que les sens positifs de i_1 et i_2 soient tels qu'ils traversent P dans le même sens, il est clair alors que la force électromotrice $P i_1$ produite dans le second circuit devra avoir le même signe que celle $P i_2$ produite par le circuit 2 dans le circuit 1.

Pour les termes en M , il est plus commode de considérer l'énergie produite dans le système. Supposons qu'au moyen des équations 7 on développe l'expression de l'énergie fournie dans le temps dt : $(e_1 i_1 dt + e_2 i_2 dt)$, on trouvera entre autres un terme comportant la somme ou la différence de $M i_1 di_2$ et de $M i_2 di_1$, suivant que ces deux quantités auront le même signe ou non.

Or nous savons que ce terme doit se réduire à $d(M i_1 i_2)$ accroissement de l'énergie magnétique mutuelle des deux circuits; c'est donc que $M \frac{di_1}{dt}$ et $M \frac{di_2}{dt}$ doivent avoir le même signe.

6-c. — **Signe du coefficient d'induction mutuelle.** — Les coefficients de self-induction sont toujours essentiellement positifs, mais il n'en va

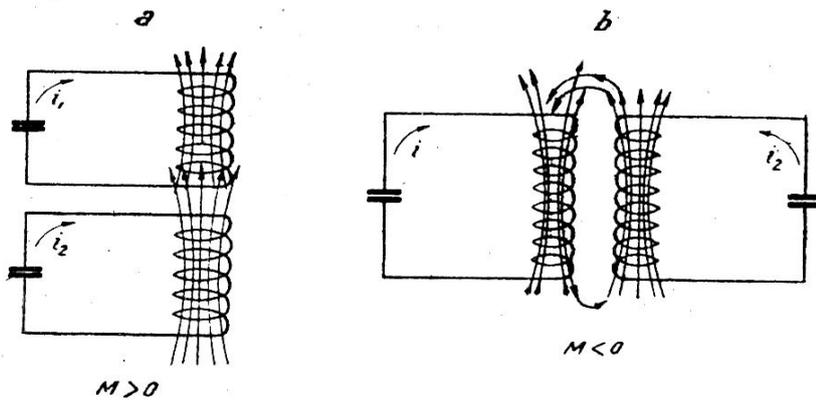


Fig. 4.

pas de même des coefficients d'induction mutuelle. On conçoit par exemple que si, dans les circuits précédents, on change, le sens d'enroulement de l'une des bobines de couplage sans rien modifier d'autre, les forces électromotrices d'induction mutuelle changeront de sens et il faudra changer le signe de M . Le plus souvent on écrit les équations sans se préoccuper du signe de M ; c'est ensuite, dans l'application, que sa détermination devient nécessaire.

Les sens positifs des courants étant choisis et les sens d'enroulement des bobines couplées étant connus, il est facile de trouver ce signe. Le coefficient M sera positif si, pour des courants de même signe, positifs par exemple, les flux d'induction mutuelle et de self-induction ont le même sens; en effet, pour des variations de même signe de i_1 et i_2 , les variations des flux s'ajouteront; $L_1 \frac{di_1}{dt}$ et $M \frac{di_2}{dt}$ auront donc le même signe et par conséquent aussi L_1 et M .

Par exemple la figure 4-a correspond à un coefficient d'induction mutuelle positif et la figure 4-b à un coefficient négatif, si le sens d'enroulement des deux bobines est le même et si les sens positifs des courants sont ceux marqués sur les figures.

7. — Cas des oscillations contraintes. — De même que dans le cas d'un circuit simple, les oscillations contraintes jouent un rôle très important dans les circuits couplés et nous allons les étudier en détail; leurs équations générales s'écrivent en quantités complexes, soit en les dérivant des précédentes, soit en les tirant directement des lois de KIRCHHOFF :

$$\begin{cases} \mathfrak{Z}_1 J_1 + \mathfrak{M} J_2 = \mathcal{E}_1 \\ \mathfrak{M} J_1 + \mathfrak{Z}_2 J_2 = \mathcal{E}_2 \end{cases}$$

ou $\mathfrak{Z} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$ et $\mathfrak{M} = P + j \left(M\omega - \frac{1}{\Gamma\omega} \right)$
 ω étant la pulsation commune aux deux forces électromotrices E et E_2 .

8. — Oscillations libres. — Pour obtenir les oscillations libres, on serait conduit, selon la méthode générale (n° 6-I), à remplacer dans les équations 7 dont le second membre aurait été annulé, i_p par $J_p e^{pt}$.

On obtiendrait l'équation caractéristique :

$$\begin{vmatrix} R_1 + L_1\gamma + \frac{1}{C_1\gamma} & P + M\gamma + \frac{1}{\Gamma\gamma} \\ P + M\gamma + \frac{1}{\Gamma\gamma} & R_2 + L_2\gamma + \frac{1}{C_2\gamma} \end{vmatrix} = 0$$

du 4^{me} degré en γ .

Si les racines de cette équation sont imaginaires, elles sont conjuguées deux à deux et donnent par suite deux oscillations amorties. Dans le cas de n circuits on trouverait n oscillations libres qui se superposent dans les circuits pendant les périodes transitoires où le régime permanent se trouve modifié. Les J_p seraient déterminés par les conditions initiales.

Cette question sera étudiée au chapitre suivant.

§ III. — OSCILLATIONS ENTRETENUES DE DEUX CIRCUITS COUPLÉS.

9. — **Equations du système. — Expression du courant secondaire.** — Le couplage que l'on rencontre le plus souvent est celui où l'induction magnétique intervient seule. Nous n'examinerons en détail que ce cas, car les conséquences générales auxquelles nous aboutirons se retrouvent dans les autres cas de couplages simples.

On remarquera que le système électrique dont nous allons étudier les propriétés est identique en principe au transformateur industriel, mais l'absence de noyaux de fer dans les circuits, et l'ordre de grandeur de la fréquence donnent lieu à une analyse très différente.

Nous examinerons le cas qui se présente à peu près uniquement dans

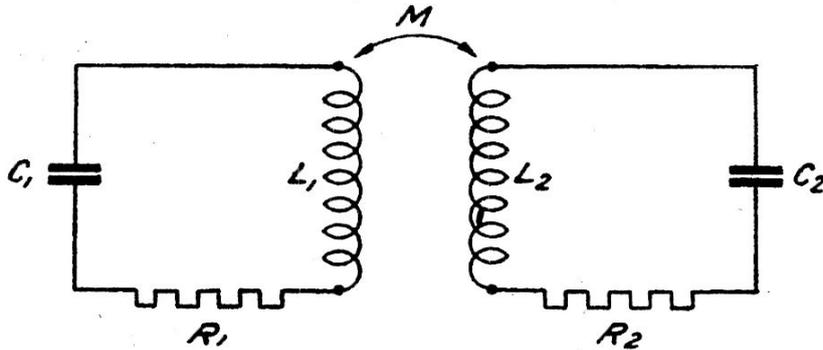


Fig. 5.

la pratique, celui où le primaire seul reçoit une force électromotrice que nous supposons de la forme $E \cdot \sin \omega t$. Nous emploierons la notation imaginaire dans laquelle la force électromotrice sera représentée par $E \cdot e^{j\omega t}$ (n° 11-I et 2-II); la solution en termes réels sera alors représentée par les parties imaginaires des éléments complexes.

Posons

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = S.$$

La loi 5' de Kirchhoff donne :

$$(8) \quad (R_1 + jS_1) \mathcal{J}_1 + jM\omega \mathcal{J}_2 = E$$

$$(9) \quad jM\omega \mathcal{J}_1 + (R_2 + jS_2) \mathcal{J}_2 = 0$$

De 9 on déduit immédiatement :

$$\frac{\mathcal{J}_2}{\mathcal{J}_1} = - \frac{jM\omega}{R_2 + jS_2} \quad \text{d'où} \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{M\omega}{\sqrt{R_2^2 + S_2^2}} = \frac{M\omega}{Z_2}$$

Z_2 désignant l'impédance réelle du second circuit. On voit que les amplitudes I_1 et I_2 des courants sont dans un rapport indépendant des éléments

du premier circuit; $\frac{M\omega}{Z_2}$ porte le nom de *rapport de transformation*, nous le désignerons par ρ de sorte que :

$$\rho^2 = \frac{M^2 \omega^2}{Z_2^2} = \frac{M^2 \omega^2}{R_2^2 + S_2^2}$$

En posant : $tg \psi = \frac{S_2}{R_2}$ avec $-\frac{\pi}{2} < \psi < +\frac{\pi}{2}$

On peut écrire : $R_2 + j S_2 = Z_2 e^{j\psi}$

puis : $\frac{J_2}{J_1} = -j \frac{M\omega}{Z_2} e^{-j\psi} = \frac{M\omega}{Z_2} e^{-j(\psi + \frac{\pi}{2})}$

Il en résulte que J_2 est en retard sur J_1 d'un angle de phase $\psi + \frac{\pi}{2}$.

On peut remarquer que les considérations du numéro 4-II conduisent directement à ce résultat, car le secondaire est soumis de la part du primaire à une force électromotrice ($-jm \omega J_1$) et il se comporte, sous l'influence de cette force électromotrice, comme un circuit simple. Cependant, en raison des réactions du secondaire, J_1 change avec J_2 et pour obtenir l'amplitude de ce dernier courant il faut résoudre complètement les équations.

Pour mettre l'expression de I_2 sous la forme la plus simple, nous poserons :

$$(10) \left\{ \begin{array}{ll} \eta_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1} & \eta_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2} \\ \xi_1 = \frac{1}{d_1} \frac{\eta_1^2 - \omega^2}{\omega^2} & \xi_2 = \frac{1}{d_2} \frac{\eta_2^2 - \omega^2}{\omega^2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{ll} d'_1 = \frac{R_1}{L_1 \omega} & d'_2 = \frac{R_2}{L_2 \omega} \end{array}$$

Ces notations ne sont pas seulement choisies en vue de la simplicité des formules, elles ramènent les données et les variables du problème à des éléments ayant un sens physique important dans la pratique courante. Sauf en des cas exceptionnels, les pulsations propres η diffèrent peu de la pulsation d'excitation ω , $\frac{\eta - \omega}{\omega}$ vaut alors au plus quelques centièmes et d' est très voisin de la quantité $\frac{R}{L\eta}$ où figure la pulsation de résonance du circuit correspondant et que nous désignerons par d ; cette dernière quantité est d'ailleurs le quotient $\frac{\delta}{\pi}$ du décrement par π . On aura donc aisément présentes à l'esprit les valeurs numériques approchées des éléments d , par exemple 1/100 environ pour des circuits communs, 1/200 pour des circuits soignés (n° 16-II).

Il y a lieu néanmoins de distinguer parfois entre d et d' et c'est pourquoi nous avons adopté deux notations différentes: pour la clarté de ce qui suivra nous placerons côte à côte les expressions de ces quantités :

$$(11) \quad d' = \frac{R}{L\omega} \quad d = \frac{R}{L\eta} = \frac{\delta}{\pi} \quad \frac{d'}{d} = \frac{\eta}{\omega}$$

et nous remarquerons que les ξ peuvent encore s'écrire :

$$(12) \quad \xi_1 = \frac{1}{d_1} \left(\frac{\eta_1}{\omega} - \frac{\omega}{\eta_1} \right) \quad \xi_2 = \frac{1}{d_2} \left(\frac{\eta_2}{\omega} - \frac{\omega}{\eta_2} \right)$$

Dans les mêmes conditions de voisinage des pulsations ω et η , on peut écrire :

$$\frac{\eta^2 - \omega^2}{\omega^2} \doteq 2 \frac{\eta - \omega}{\omega} = 2 \frac{\Delta\omega}{\omega}$$

et les ξ ne sont autre chose que les doubles des désaccords relatifs des circuits, divisés par les d' correspondants :

$$\xi_1 \doteq \frac{2}{d'_1} \frac{\Delta_1\omega}{\omega} \quad \xi_2 \doteq \frac{2}{d'_2} \frac{\Delta_2\omega}{\omega}$$

Les quantités ξ et d sont des nombres sans dimensions.

Avec ces notations, les équations 3 et 4 deviennent ¹ :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 - j \xi_1) \mathcal{J}_1 + j \frac{M}{L_1 d'_1} \mathcal{J}_2 = \frac{E}{R_1} \\ j \frac{M}{L_2 d'_2} \mathcal{J}_1 + (1 - j \xi_2) \mathcal{J}_2 = 0. \end{array} \right.$$

Posons encore :

$$(14) \quad \boxed{k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{n^2 = \frac{k^2}{d'_1 d'_2} = \frac{k^2}{d_1 d_2} \frac{\omega^2}{\eta_1 \eta_2} = \frac{M^2 \omega^2}{R_2 R_1}}$$

k est appelé *coefficient de couplage des circuits*, c'est un nombre qui peut varier entre 0 et 1; pratiquement, il est très difficile de réaliser un couplage pour lequel k soit supérieur à 0,6 environ. Quant à n , c'est un paramètre qui jouera un rôle important dans la discussion, le comportement des circuits étant très différent selon que n est supérieur ou inférieur à l'unité; nous le désignerons sous le nom de *degré de couplage*. Il vient alors :

$$(15) \quad \mathcal{J}_2 = \frac{EM\omega}{R_1 R_2} \frac{1}{(\xi_1 + \xi_2) + j(n^2 + 1 - \xi_1 \xi_2)}$$

1. Les quantités $(1 - j\xi)$ sont en relation simple avec les impédances complexes. On a en effet :

$$1 - j\xi = 1 - jL\omega \left(\frac{\eta^2}{\omega^2} - 1 \right) = 1 + j \frac{L\omega}{R} \left(1 - \frac{1}{LC\omega^2} \right) = \frac{1}{R} (R + jS) = \frac{\mathcal{Z}}{R}$$

d'où $\mathcal{Z} = R(1 - j\xi)$ $Z = R\sqrt{1 + \xi^2}$

et l'amplitude du courant dans le secondaire est :

$$(16) \quad I_2 = \frac{EM\omega}{R_1 R_2} \frac{1}{\sqrt{(\xi_1 + \xi_2)^2 + (n^2 + 1 - \xi_1 \xi_2)^2}}$$

Partant de ces formules, nous allons étudier les variations du courant secondaire, tout d'abord en supposant ω et k constants et en faisant varier les accords des circuits, c'est-à-dire η_1 et η_2 ; ensuite, laissant les circuits fixes, nous modifierons ω ; enfin nous rechercherons l'influence des variations de couplage.

Nous supposons que les résistances R_1 et R_2 sont des constantes; cela n'est pas rigoureux quand ω varie, mais les variations relatives de la fréquence d'excitation sont généralement si faibles que cette approximation est suffisante¹. D'autre part, nous nous placerons dans le cas conforme à la pratique, où les variations d'accord des circuits sont obtenues par des condensateurs variables, les inductances restant fixes; les quantités d' ou d seront alors proportionnelles à $1/\omega$ ou $1/\eta$.

Nous pouvons dès maintenant noter que *le courant dans le secondaire est indépendant de l'ordre dans lequel on a associé les circuits: c'est-à-dire qu'il reste le même si l'on prend le circuit 2 comme primaire et le circuit 1 comme secondaire*. Cela résulte immédiatement de la symétrie des formules précédentes.

✓ **10-a. — Maxima et minima de I_2 quand, ω et k restant constants, on modifie les accords des circuits.** — Remarquons d'abord que l'expression de I_2 ne contient que le paramètre n ; tous les cas correspondant au même degré de couplage auront donc la même représentation par rapport aux variables ξ , indépendamment des éléments d' . Cette représentation étant obtenue, il sera facile de passer à la représentation en fonction des désaccords $\frac{\Delta\omega}{\omega} \doteq \frac{1}{2} \xi$ en modifiant les variables dans les rapports $\frac{d'_1}{2}$ et $\frac{d'_2}{2}$

Les maxima et minima de I_2 s'obtiennent en annulant les dérivées $\frac{\partial I_2}{\partial \xi_1}$ et $\frac{\partial I_2}{\partial \xi_2}$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} (\xi_1 + \xi_2) - \xi_2 (n^2 + 1 - \xi_1 \xi_2) &= 0 \\ (\xi_1 + \xi_2) - \xi_1 (n^2 + 1 - \xi_1 \xi_2) &= 0 \end{aligned}$$

1. Pour des couplages très forts où l'on fait varier ω dans de larges limites (n° 13-c), il n'en est plus ainsi et il faudrait, à l'occasion, en tenir compte.

d'où l'on déduit les solutions

$$(17) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_2 = 0 \\ \xi_1 &= \xi_2 = \pm \sqrt{n^2 - 1} \end{aligned}$$

Ces résultats montrent d'abord qu'il y a lieu de considérer deux cas.

1^{er} Cas $n \leq 1$ ou $k^2 \leq d'_1 d'_2$ ou $M^2 \omega^2 \leq R_1 R_2$.

La solution $\xi_1 = \xi_2 = 0$ existe seule; elle correspond évidemment à un maximum de I_2 . On voit aisément que :

Pour $n = 1$	$I_2^{Max} = \frac{E}{2 \sqrt{R_1 R_2}}$
Pour $n < 1$	$I_2^{Max} = \frac{E}{2 \sqrt{R_1 R_2}} \frac{2n}{n^2 + 1}$

Donc dans ce cas, il existe un seul maximum que l'on obtient en accordant les deux circuits sur la fréquence d'excitation; la valeur de ce maximum décroît avec le degré de couplage. Quand n est un peu faible par rapport à 1, I_2^{Max} est sensiblement proportionnel à n .

2^{me} Cas $n > 1$ ou $k^2 > d'_1 d'_2$ ou $M^2 \omega^2 > R_1 R_2$.

Ici, on ne peut savoir a priori si les valeurs zéro et $\pm \sqrt{n^2 - 1}$ correspondent à des maxima ou des minima; pour le rechercher, il est commode d'employer le langage géométrique.

Considérons la surface obtenue en portant les ξ et la fonction I_2 sur trois axes rectangulaires. Sur la figure 6 l'axe OI_2 , non représenté, est supposé perpendiculaire au papier; S' et S'' représentent les points de coordonnées $\pm \sqrt{n^2 - 1}$. Pour connaître la nature de la surface en S' , S'' et O , il faut chercher l'équation de l'indicatrice¹ en ces points.

Cette équation est :

$$\xi_1^2 \frac{\partial^2 I_2}{\partial \xi_1^2} + 2 \xi_1 \xi_2 \frac{\partial^2 I_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \xi_2^2 \frac{\partial^2 I_2}{\partial \xi_2^2} = c^{te}$$

les dérivées étant prises au point considéré. Or on a, à un même facteur près

$$(18) \quad \frac{\partial^2 I_2}{\partial \xi_1^2} \approx \xi_1^2 + 1, \quad \frac{\partial^2 I_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \approx 2 \xi_1 \xi_2 - n^2, \quad \frac{\partial^2 I_2}{\partial \xi_2^2} \approx \xi_2^2 + 1.$$

1. Rappelons que l'indicatrice est la courbe du second ordre qui, au voisinage d'un point, se confond avec la section de la surface par un plan parallèle au plan tangent, et très voisin de ce dernier. Si l'indicatrice est une ellipse, il y a maximum ou minimum; si c'est une hyperbole, il existe un col.

On reconnaît que l'indicatrice en S' et S'' est une ellipse; ces points sont donc des maxima ou des minima, il est aisé de voir que ce sont des maxima. En O l'indicatrice est une hyperbole et l'on se trouve en présence d'un col : I_2 passe par un minimum quand on traverse le point O en suivant $S'' S'$, et par un minimum quand on le traverse dans la direction perpendiculaire.

La surface cherchée affecte donc la forme de deux collines séparées par un col; on peut la représenter par quelques lignes de niveau.

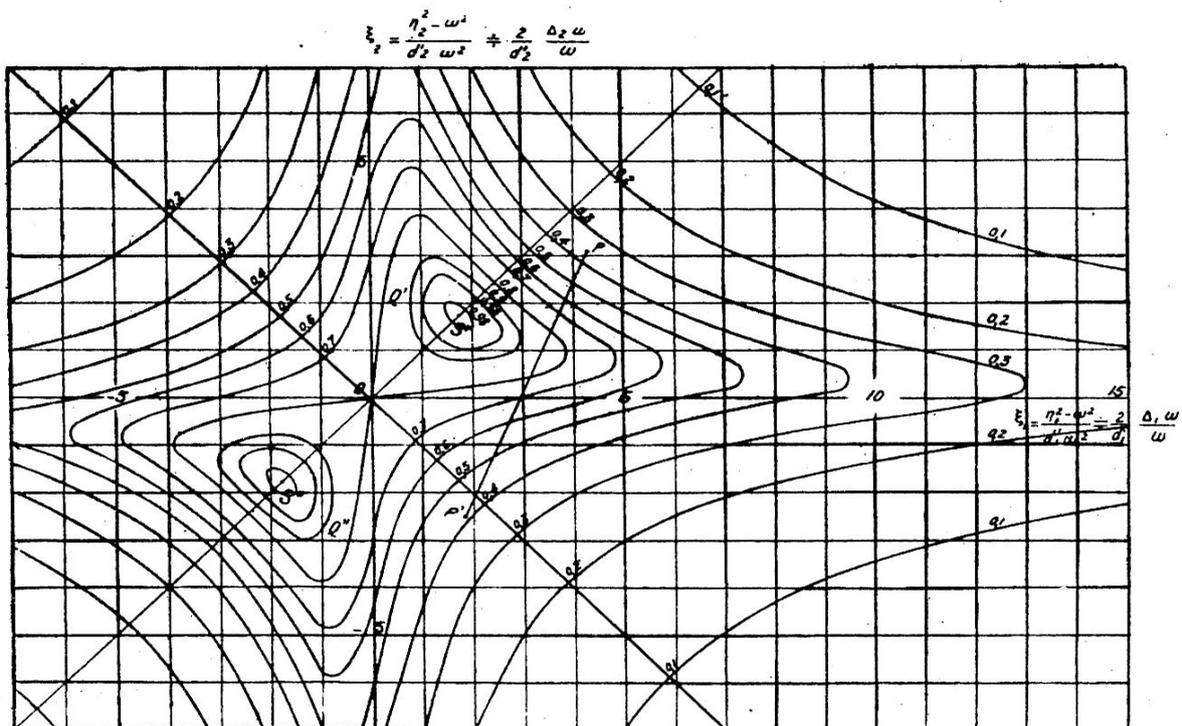


Fig. 6. — Surface représentant les variations de $\zeta = \frac{I}{I_{\max}}$ en fonction de ξ_1 et ξ_2 pour $n = 2$.

Les maxima du courant ont pour valeur commune

$$I_2^{\text{Max}} = \frac{E}{2 \sqrt{R_1 R_2}};$$

quant à sa valeur en O elle est

$$(19) \quad I_2^0 = \frac{E}{2 \sqrt{R_1 R_2}} \frac{2n}{n^2 + 1}.$$

L'intensité maxima est donc indépendante du degré de couplage quand celui-ci est supérieur à 1.

On peut remarquer en passant que la surface tout entière ne correspond pas au problème physique; de la relation :

$$\xi = \frac{\gamma_1^2 - \omega^2}{d' \omega^2} = \frac{\gamma_1^2}{d' \omega^2} - \frac{1}{d'}$$

on déduit que ξ doit être supérieur à $-1/d'$. Si donc $\sqrt{n^2 - 1}$ est supérieur à $1/d'_1$ ou $1/d'_2$ le point S'' n'a pas de sens physique; mais cela ne pourrait arriver que pour des couplages généralement inusités ou des décrets très élevés.

Notons enfin que tout le long de la ligne $S'' S'$ on a la relation :

$$(20) \quad \frac{L_1 \omega - 1/C_1 \omega}{R_1} = \frac{L_2 \omega - 1/C_2 \omega}{R_2}$$

qui exprime que les réactances des deux circuits sont proportionnelles à leurs résistances; ceci résulte de ce que cette ligne a pour équation $\xi_2 = \xi_1$.

La discussion précédente peut se résumer comme suit :

$$1^\circ \quad n < 1 \quad \text{ou} \quad k^2 < d'_1 d'_2 \quad \text{ou} \quad M^2 \omega^2 < R_1 R_2$$

Un seul maximum

$$I_2^{Max} = \frac{E}{2 \sqrt{R_1 R_2}} \frac{2n}{n^2 + 1}$$

obtenu en accordant les deux circuits sur la fréquence d'excitation; ce maximum est inférieur à celui que l'on peut obtenir avec des couplages plus forts; il décroît avec le degré de couplage.

$$2^\circ \quad \text{Couplage critique. } n = 1 \quad \text{ou} \quad k^2 = d'_1 d'_2 \quad \text{ou} \quad M^2 \omega^2 = R_1 R_2.$$

Un seul maximum

$$I_2^{Max} = \frac{E}{2 \sqrt{R_1 R_2}}$$

encore obtenu en accordant les deux circuits sur la fréquence d'excitation. C'est la plus forte valeur que l'on puisse obtenir quel que soit le couplage.

$$3^\circ \quad n > 1 \quad \text{ou} \quad k^2 > d'_1 d'_2 \quad \text{ou} \quad M^2 \omega^2 > R_1 R_2.$$

Deux maxima obtenus en accordant les deux circuits sur les pulsations correspondant à $\xi_1 = \xi_2 = \pm \sqrt{n^2 - 1}$. L'accord des deux circuits sur la pulsation ω correspond à un maximum ou à un minimum suivant la loi de variation de γ_{11} et γ_{12} ; si l'on passe par ω en maintenant γ_{11} et γ_{12} égaux, c'est un minimum.

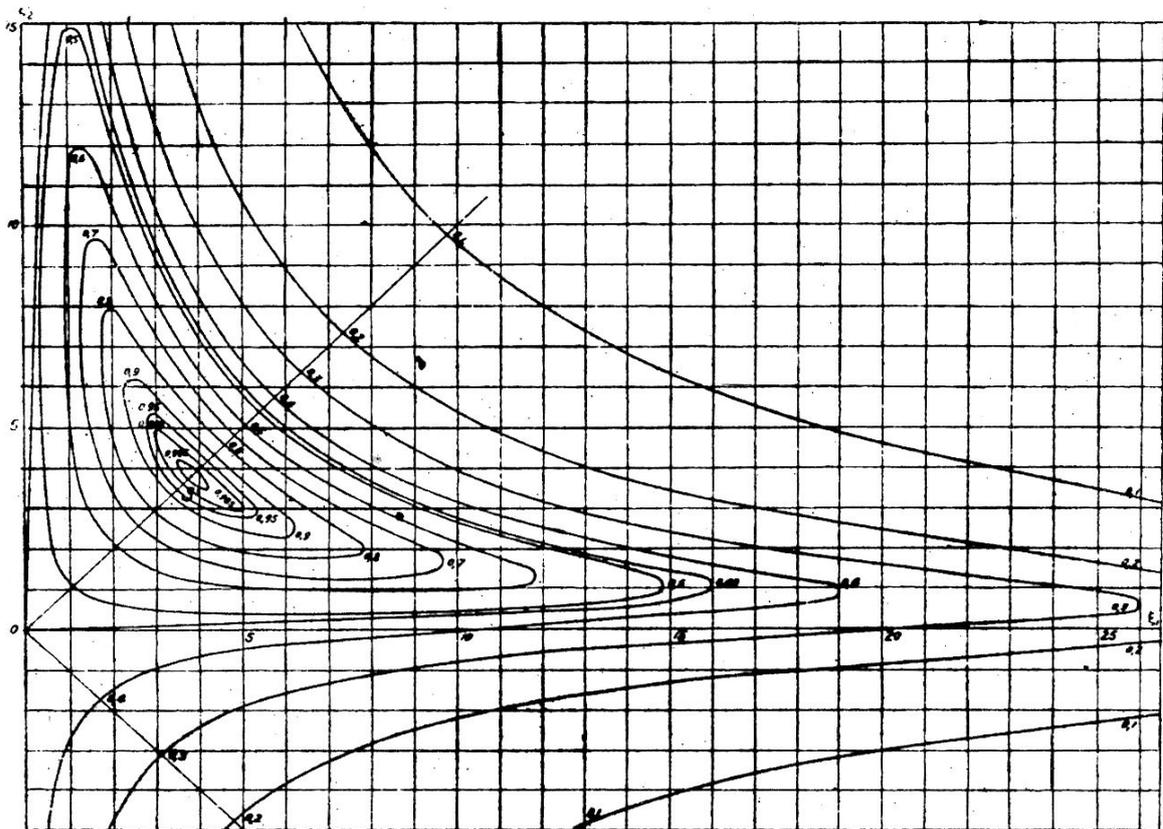


Fig. 7. — Surface représentant les variations de $\zeta = \frac{I_2}{I_{2\max}}$ en fonction de ξ_1 et ξ_2 pour $n = 4$.

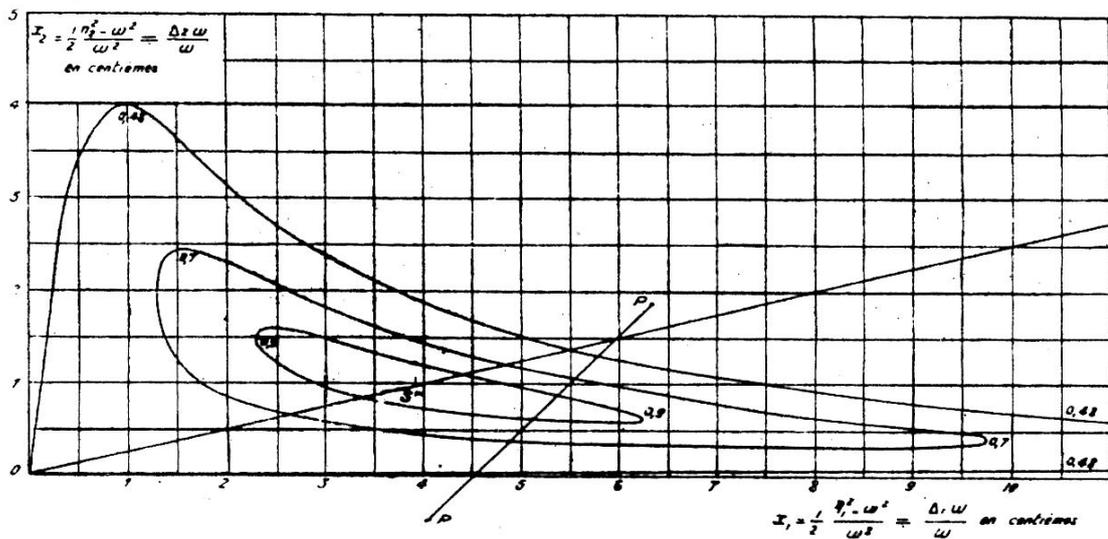


Fig. 8. — Surface représentant les variations de $\zeta = \frac{I_2}{I_{2\max}}$ en fonction de $\frac{\Delta_1(\omega)}{\omega}$ et $\frac{\Delta_2(\omega)}{\omega}$ pour $n = 4$ et $\frac{d_1}{d_2} = 4$.

10-b. — Variations de $\frac{I_2}{I_2^{Max}} = \zeta$ en fonction de ξ_1 et ξ_2 , k et ω restant constants. — Pour se rendre compte des variations de I_2 quand les accords des circuits prennent toutes les valeurs possibles, il suffit de tracer quelques lignes de niveau de la surface précédente; c'est ce que nous avons fait sur les figures 6, 7 et 9 pour divers degrés de couplage, en

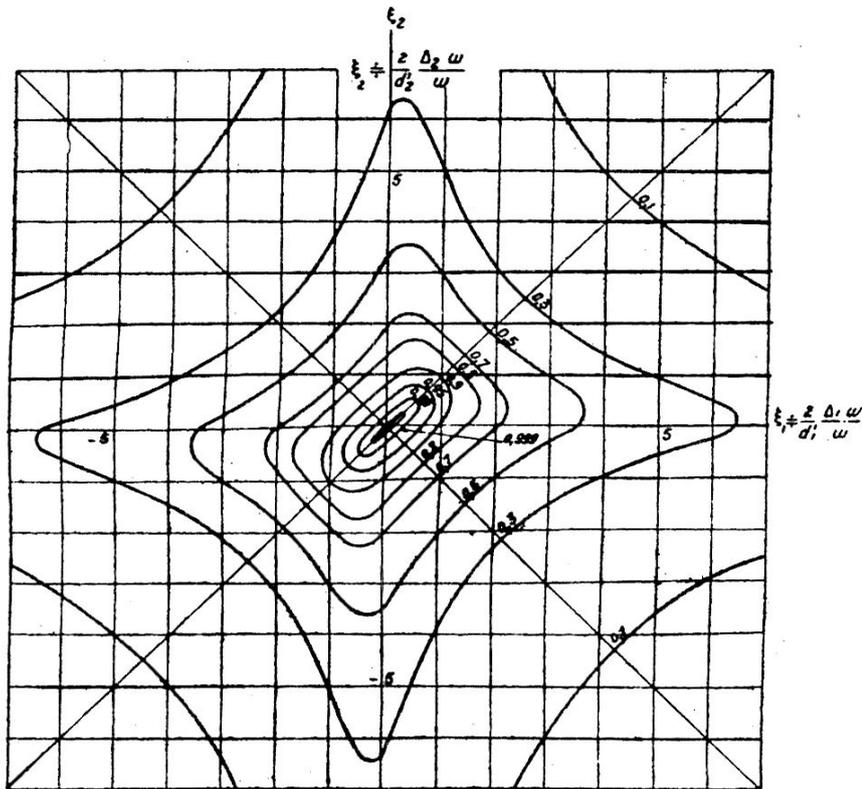


Fig. 9. — Surface représentant les variations de $\zeta = \frac{I_2}{I_2^{max}}$ en fonction de ξ_1 et ξ_2 pour $n = 1$.

prenant comme unité d'intensité la valeur maxima. La fonction représentée est donc :

$$(21) \quad \zeta = \frac{I_2}{I_2^{Max}} = \frac{2n}{\sqrt{(\xi_1 + \xi_2)^2 + (n^2 + 1 - \xi_1 \xi_2)^2}}$$

L'effet produit par le changement d'accord d'un seul circuit s'obtient en traçant une parallèle à l'un des axes; mais il ne faut pas oublier que les coordonnées ξ_1 ou ξ_2 contiennent en facteur $1/d'_1$ et $1/d'_2$. Si les décrements des deux circuits sont inégaux, la représentation choisie, avantageuse par sa généralité, ne permet pas de mettre nettement en évidence les différences existant entre les effets de l'accord de l'un ou l'autre cir-

cuit; il est alors préférable de prendre comme variables les quantités :

$$(22) \quad \frac{\Delta_1 \omega}{\omega} \doteq \frac{d'_1}{2} \zeta_1 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta_2 \omega}{\omega} \doteq \frac{d'_2}{2} \zeta_2$$

C'est ce que nous avons fait sur la figure 8 pour le cas où $n = 4$ et $d'_1/d'_2 = 4$.

Si l'on désire seulement se rendre compte des différences de comportement des deux accords, sans chercher les valeurs numériques absolues des $\frac{\Delta \omega}{\omega}$, il est commode de remarquer que la figure 8 est semblable à la projection de la figure 7 sur un plan passant par $O\xi_1$ et faisant avec celui de cette figure un angle α donné par :

$$\cos \alpha = \frac{1}{p} = \frac{d'_2}{d'_1}$$

10-c. — Cas où l'un des circuits est apériodique. — Supposons par exemple le primaire apériodique : alors $\eta_1 = 0$, $\zeta_1 = -1/d'_1$ et on ne peut agir que sur ζ_2 pour modifier I_2 . Le maximum de cette intensité correspondra encore à $\zeta_1 = \zeta_2 = -\sqrt{n^2 - 1}$, ce qui donne ici :

$$\sqrt{n^2 - 1} = 1/d'_1 \quad \text{ou} \quad n^2 = 1 + \frac{1}{d'^2_1}$$

ce qui revient à :

$$(23) \quad M^2 \omega^2 = R_1 R_2 \left[1 + \left(\frac{L_1 \omega}{R_1} \right)^2 \right]$$

ou encore, le facteur de surtension étant généralement grand par rapport à l'unité¹,

$$(23') \quad M \omega \doteq L_1 \omega \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{d'_1}$$

Le maximum de I_2 sera naturellement toujours :

$$I_2^{\text{Max}} = \frac{E}{2 \sqrt{R_1 R_2}}$$

et l'accord du secondaire sera donné par :

$$(24) \quad \zeta_2 = -\frac{1}{d'_1} \quad \text{ou} \quad \eta_2^2 = \left(1 - \frac{d'_2}{d'_1} \right) \omega^2$$

1. Le cas inverse peut se rencontrer : dans un couplage de deux lampes par transformateur le primaire est en général apériodique et sa résistance est la résistance filament-plaque de la lampe; $\left(\frac{L_1 \omega}{R_1} \right)^2$ est alors $\ll 1$ quand il s'agit de haute fréquence. Alors $M \omega \doteq \sqrt{R_1 R_2}$.

Il semble résulter de ce qui précède qu'un primaire apériodique permet d'obtenir une intensité secondaire aussi élevée que deux circuits accordables, et qu'il n'y a pas lieu de considérer, à priori, que l'impossibilité d'accorder l'un des circuits crée une infériorité dans un système couplé; il y a lieu cependant de faire les remarques suivantes :

Les relations 23 et 23' montrent que le couplage de résonance devra être notablement plus élevé dans le cas actuel que dans le cas où on peut accorder les deux circuits; le rapport des deux couplages sera sensiblement $\frac{1}{d'_1}$.

Si le facteur de surtension est très élevé il pourra même arriver qu'il soit impossible d'atteindre la valeur de M nécessaire; la chose sera d'autant plus difficile que R_2 sera plus grand. En outre la relation 24 montre que d'_2 devra être inférieur à d'_1 pour que, la valeur de M étant atteinte, on puisse accorder convenablement la secondaire. Enfin, l'importance du couplage nécessaire conduira à multiplier le nombre des spires des bobines, ce qui augmentera R_1 et R_2 et réduira par conséquent I_2 . On ne peut pas énoncer de règles générales sur les avantages et inconvénients des primaires apériodiques qui offrent souvent des avantages sérieux et chaque cas devra être examiné en particulier.

11. — Représentation plane des variations de I_2 , ω et k restant constants. — La représentation des variations de ξ par une surface nous a paru indispensable pour bien mettre en évidence l'allure de ces variations, mais il est possible d'en obtenir une autre plus simple convenant à tous les cas et susceptible de résoudre tous les problèmes de couplage par une construction graphique immédiate.

Nous avons trouvé (n° 9, formule 15) que :

$$\frac{1}{J_2} = \frac{R_1 R_2}{EM\omega} \left[(\xi_1 + \xi_2) + j(n^2 + 1 - \xi_1 \xi_2) \right].$$

Posons :

$$(25) \quad \begin{cases} u = \xi_1 + \xi_2 \\ v = -\xi_1 \xi_2 \end{cases}$$

et marquons par rapport aux deux axes de la figure 10 le point M de coordonnées u et v ; puis portons sur ov le segment $OA = -(n^2 + 1)$. On voit immédiatement que AM représente, à une échelle convenable, l'inverse de l'intensité I_2 correspondant au couple de valeurs ξ_1 et ξ_2 choisies et que l'angle φ est le retard de phase de J_2 sur la force électromotrice E. Nous allons montrer que la représentation de la fonction :

$$(26) \quad y = u + jv$$

indépendante de n et satisfaisant par conséquent à tous les cas possibles, est particulièrement simple. Cette représentation étant réalisée, on en déduira la valeur de l'intensité ramenée à sa valeur maxima par la relation :

$$(27) \quad \zeta = \frac{I_2}{I_2^{M_{01}}} = \frac{2n}{AM}$$

comme il résulte de la formule 21 du numéro 10-b.

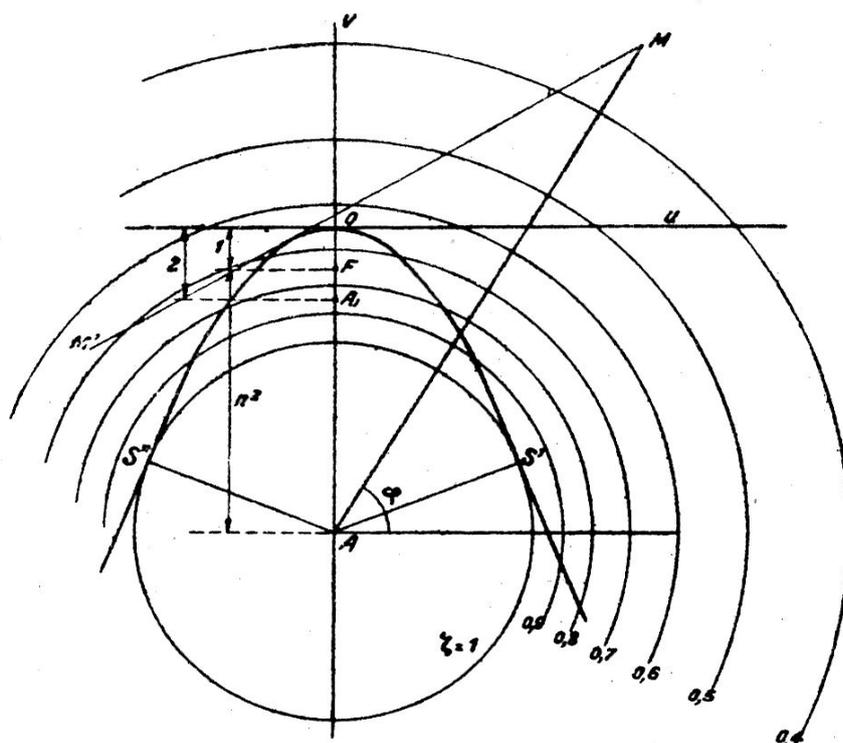


Fig. 10.

Les équations 25 montrent que si l'un des ξ est constant, ξ_2 par exemple, le point M se déplace sur la droite MM' ayant pour équation :

$$v = -\xi_2(u - \xi_2)$$

et la valeur de ξ_1 correspondant à un point particulier de cette droite est :

$$\xi_1 = u - \xi_2.$$

Si donc on trace le réseau de ces droites, on pourra déterminer très facilement en fonction de ξ_1 et de ξ_2 la valeur de ζ quels que soient les circuits et leur degré de couplage.

Toutes les droites ont pour enveloppe la parabole :

$$u^2 + 4v = 0$$

et le point de tangence de l'une d'elles a pour abscisse $u = 2\xi_2$. Le gra-

phique complet est dessiné sur la figure 11; il est inutile en raison de la symétrie de tracer les droites correspondant aux valeurs positives de ξ_2 : pour la même raison de symétrie, le graphique que l'on dessinerait

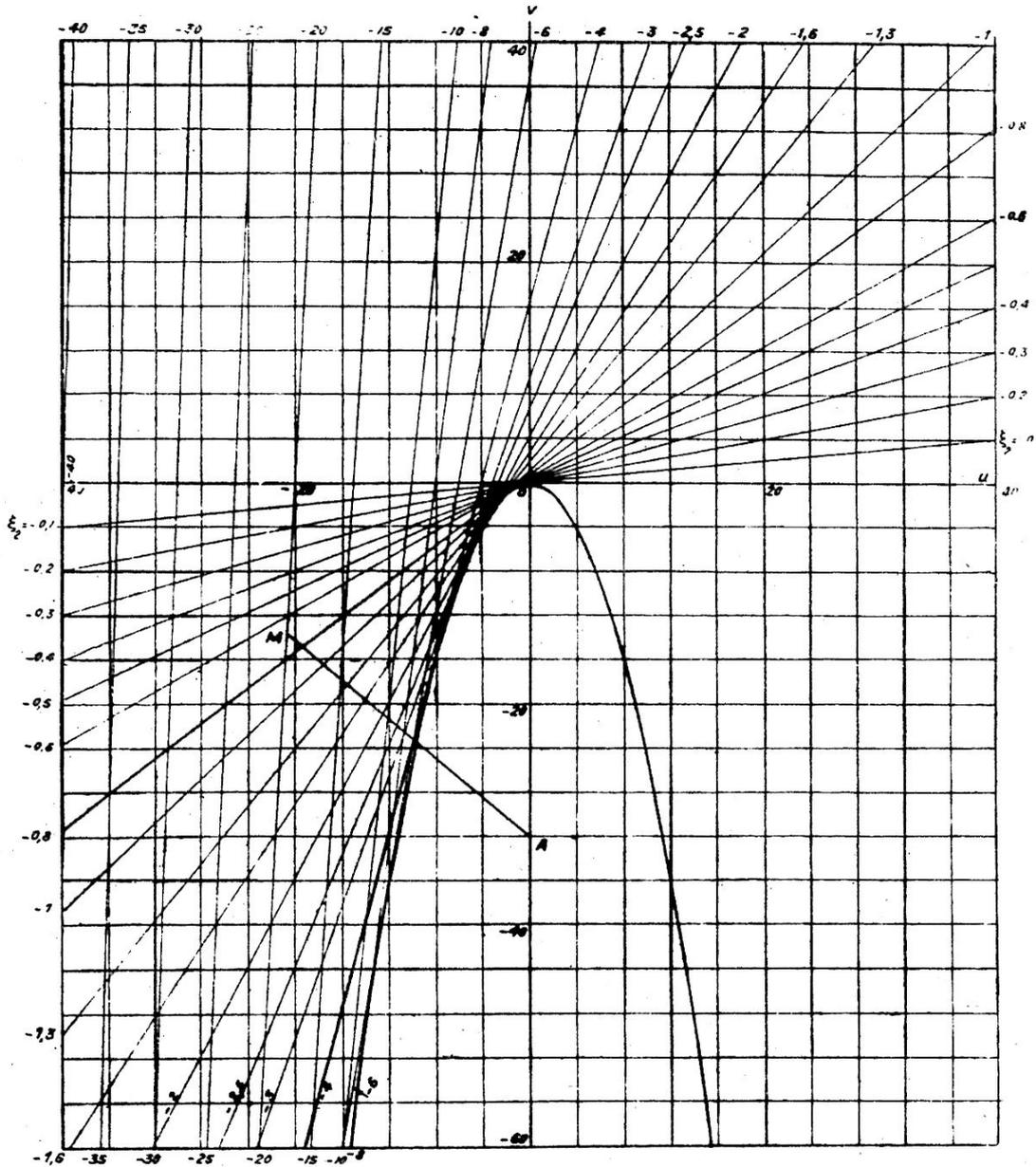


Fig 11. — Représentation plane du rapport $\zeta = \frac{I_2}{I_{2max}}$ quand ω reste constant

$$u = \xi_1 + \xi_2, \quad v = -\xi_1 \xi_2, \quad OA = n^2 + 1, \zeta = \frac{2n}{AM}$$

ξ_2 est constant le long des droites tangentes à la parabole et a, sur chaque droite, la valeur marquée en marge.

en traçant les droites $\xi_1 = \text{constante}$ serait identique au précédent.

Ce graphique se prête à une discussion très simple des cas de couplage : rappelons d'abord que le rayon de courbure d'une parabole,

à son sommet, est égal au paramètre de la parabole. Dans le cas actuel ce paramètre est égal à 2 : il en résulte que, si n est supérieur à 1, il y aura deux maxima correspondant aux points S' et S'' . Si n est inférieur à 1, il n'y en aura qu'un seul correspondant au sommet O .

Une valeur de n étant choisie, les lignes de niveau de ζ seraient des cercles décrits de A comme centre.

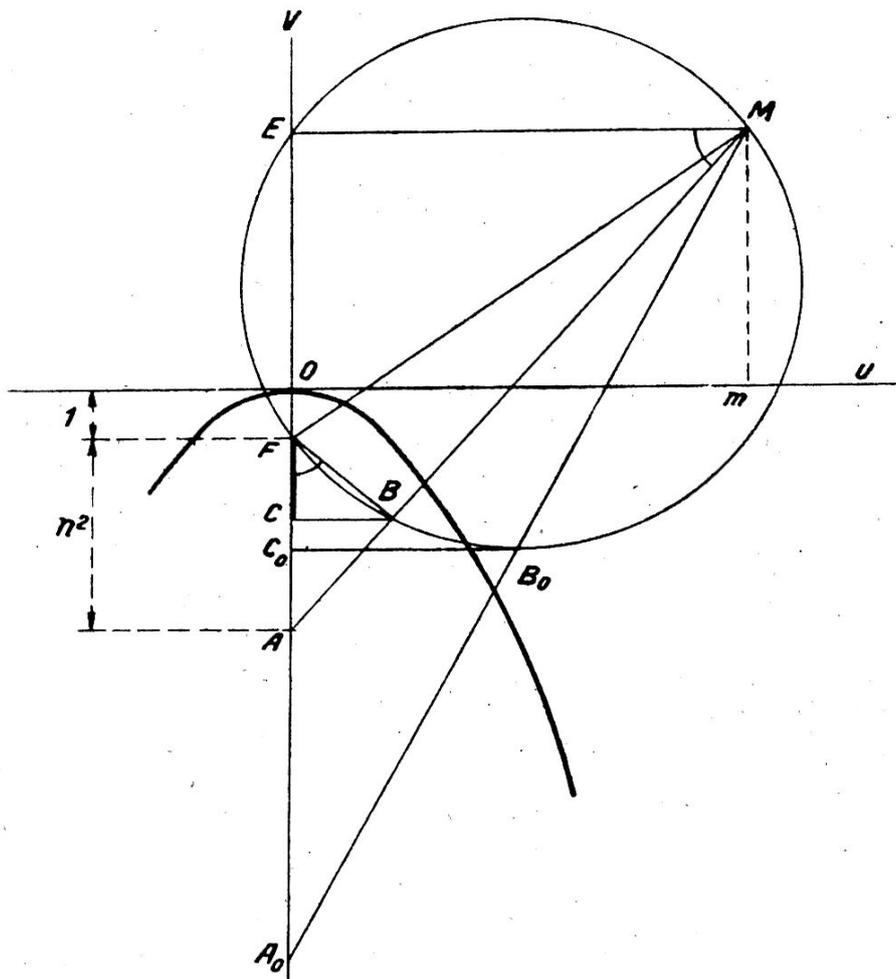


Fig. 12.

12. — Variations de ζ en fonction du couplage, η_1 , η_2 et ω restant constants. — On peut se faire une idée de l'influence du couplage en marquant un point fixe sur la figure 6 par exemple, et en faisant varier n par la pensée; les lignes de niveau se déforment et leurs passages sur ce point montrent les variations de ζ . Mais la représentation plane du numéro précédent permet de figurer exactement ces variations.

Marquons sur la figure 12 le foyer de la parabole et portons $FA = n^2$; marquons encore le point M correspondant à un état des circuits (Om

$= u = \xi_1 + \xi_2, mM = v = - \xi_1 \xi_2$) et traçons le cercle de diamètre FM. La valeur de ζ^2 correspondant au point M, peut se représenter par :

$$\zeta^2 = \frac{4}{ME^2} \cdot FC$$

expression dans laquelle FC est seul variable quand n varie, M restant fixé. On a en effet (formule 27) : $\zeta^2 = 4n^2/AM^2$ et on peut écrire :

$$\zeta^2 = \frac{4n^2}{AM^2} = 4 \frac{AF}{AM^2} = \frac{4}{AM} \frac{AF}{AM} = \frac{4}{AM} \frac{FB}{ME} = \frac{4}{ME} \frac{FC}{ME}$$

La valeur maximum de ζ pour le point M choisi correspond donc à la position A_0 du point A et comme $B_0C_0^2 = C_0F \cdot C_0E$, il vient :

$$\zeta_{Max}^2 = \frac{1}{CE}$$

Si M est pris sur la parabole, ce maximum est égal à 1, car C_0E est alors la moitié de la sous-normale. Ce résultat ne surprendra pas si l'on remarque qu'en un point de la parabole, on a toujours $\xi_1 = \xi_2$; sur la figure 6 le point représentatif est alors sur la droite $S'S''$ et il est évident qu'en modifiant n on peut amener l'un des points S' ou S'' sur le point M.

Le couplage optimum est donné par :

$$n_{opt}^2 = FA_0 = FM = \sqrt{u^2 + (v + 1)^2} = \sqrt{(1 + \xi_1^2)(1 + \xi_2^2)}$$

qu'on peut encore écrire :

$$n_{opt}^2 = \frac{Z_1 Z_2}{R_1 R_2} \quad \text{ou} \quad M^2 \omega^2 = Z_1 Z_2$$

Z_1 et Z_2 étant les impédances des deux circuits; on a en effet (note du n° 9) :

$$Z = R \sqrt{1 + \xi^2}.$$

La relation $M^2 \omega^2 = Z_1 Z_2$ peut s'obtenir directement sans difficultés. Des équations 8 et 9 (n° 9) on tire en effet :

$$J_2 = - \frac{jM\omega E}{\tilde{\mathcal{Z}}_1 \tilde{\mathcal{Z}}_2 + M^2 \omega^2}$$

et il suffit de chercher le maximum de :

$$\left| \frac{M\omega}{\tilde{\mathcal{Z}}_1 \tilde{\mathcal{Z}}_2 + M^2 \omega^2} \right| \quad \text{ou de} \quad \left[\frac{1}{\frac{\tilde{\mathcal{Z}}_1 \tilde{\mathcal{Z}}_2}{M\omega} + M\omega} \right]$$

ψ étant l'argument de $(\tilde{\mathcal{Z}}_1 \tilde{\mathcal{Z}}_2)$ on peut poser :

$$\tilde{\mathcal{Z}}_1 \tilde{\mathcal{Z}}_2 = Z_1 Z_2 e^{j\psi} = Z_1 Z_2 (\cos \psi + j \sin \psi).$$

Alors :

$$\left| \frac{\tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2}{M\omega} + M\omega \right| = \sqrt{\left(\frac{Z_1 Z_2}{M\omega}\right)^2 + (M\omega)^2 + 2 Z_1 Z_2 \cos \psi}$$

Z_1 et Z_2 étant constants, le minimum du radical est obtenu pour :

$$(28) \quad (M^2 \omega^2)_{opt} = Z_1 Z_2.$$

Si les deux circuits sont accordés, cette relation se réduit bien à

$$(M^2 \omega^2)_{crit.} = R_1 R_2$$

correspondant au maximum absolu de I_2 .

Enfin la valeur de I_2 qui correspond à la condition (28) est :

$$I_2 = \frac{E}{2 \sqrt{Z_1 Z_2 \cos \frac{\psi}{2}}}$$

✓ 13-a. — Variations de ζ en fonction de ω . — Déformations de la surface quand ω varie. — Quand, γ_1 et γ_2 restant constants, c'est ω qui varie, l'étude de la fonction devient plus difficile car alors $n^2 = \frac{k^2}{d_1 d_2}$, $= \frac{k^2}{d_1 d_2} \cdot \frac{\omega^2}{\gamma_1 \gamma_2}$ varie en même temps que ξ_1 et ξ_2 et la surface précédemment étudiée se déforme. Nous allons montrer que, quand n ne dépasse pas quelques unités, cette déformation est pratiquement négligeable pour les petites variations habituelles de ω , et que l'on peut encore utiliser les représentations géométriques précédentes en donnant à n sa valeur moyenne dans l'intervalle où ω varie. Nous examinerons ensuite le cas où n est grand.

Quand la fonction ζ , définie par :

$$\zeta^2 = \frac{(\xi_1 + \xi_2)^2 + (n^2 + 1 - \xi_1 \xi_2)^2}{4 n^2}$$

varie sous l'influence d'un accroissement $\Delta\omega$, on peut obtenir sa variation en considérant d'abord celle qui résulte du changement des ξ seulement, n restant constant, ensuite celle qui provient du changement de n , les ξ restant constants. La première opération consiste à utiliser la surface correspondant à la valeur initiale de n , la seconde à calculer $\Delta\zeta$ en fonction de Δn .

En prenant les dérivées logarithmiques on a :

$$\frac{\Delta \zeta}{\zeta} = \frac{\Delta n}{n} \left[1 - \frac{2n^2 (n^2 + 1 - \xi_1 \xi_2)}{(\xi_1 + \xi_2)^2 + (n^2 + 1 - \xi_1 \xi_2)^2} \right] =$$

$$= \frac{\Delta n}{n} \left[1 - \frac{\zeta^2}{2} (n^2 + 1 - \xi_1 \xi_2) \right].$$

Désignant par y le second terme du crochet et remarquant que :

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta \omega}{\omega}$$

on peut écrire :

$$\frac{\Delta \zeta}{\zeta} = \frac{\Delta \omega}{\omega} (1 - y).$$

On voit que la fonction y s'annule le long de l'hyperbole $\xi_1 \xi_2 = n^2 + 1$ et qu'elle est positive dans la région contenant l'origine, négative dans l'autre région du plan; son étude détaillée montre que sa valeur absolue

passé par deux maxima $\frac{n^2}{2(\sqrt{n^2+1} \mp 1)}$ pour

$$\xi_1^2 = \xi_2^2 = n^2 + 1 \mp 2\sqrt{n^2 + 1}.$$

Le plus grand de ces maxima correspond à une valeur positive de y , le plus petit à une valeur négative et les valeurs absolues maxima de $(1 - y)$ sont données par le tableau suivant :

$n =$	1	3	5	10	grand
$(1 - y_{\max})$	= 1,2	= 2,1	= 3,1	= 5,5	$\left(\frac{n}{2} + 1\right)$

Ces considérations montrent que les déformations de la surface sont négligeables dans la pratique quand n ne dépasse pas quelques unités, car $\frac{\Delta \omega}{\omega}$ est en général de l'ordre de 1 ou 2/100; dans tous les cas, elles permettent de se faire une idée des erreurs à craindre en négligeant les variations de n . Au contraire pour les grandes valeurs de ce paramètre, les déformations sont très importantes.

✓ 13-b. — Variations de ζ en fonction de ω quand n ne dépasse pas quelques unités. — D'après ce qui précède, nous pourrions employer les représentations géométriques précédemment étudiées en y prenant pour n la valeur moyenne de cet élément. Voyons maintenant comment se déplace le point de coordonnées ξ_1 et ξ_2 quand la fréquence d'excitation seule est modifiée.

$$\text{On a : } \quad \xi_1 = \frac{1}{d_1} \frac{\tau_{11}^2 - \omega^2}{\omega^2} \quad \xi_2 = \frac{1}{d_2} \frac{\tau_{12}^2 - \omega^2}{\omega^2}$$

il en résulte qu'en désignant par $\Delta\xi_1$ et $\Delta\xi_2$ les variations de ξ_1 et ξ_2 correspondant à une variation $\Delta\omega$, on a :

$$\frac{\Delta \xi_2}{\Delta \xi_1} = \frac{d_1}{d_2} \frac{\tau_{11}}{\tau_{12}} \frac{\omega^2 + \tau_{12}^2}{\omega^2 + \tau_{11}^2}$$

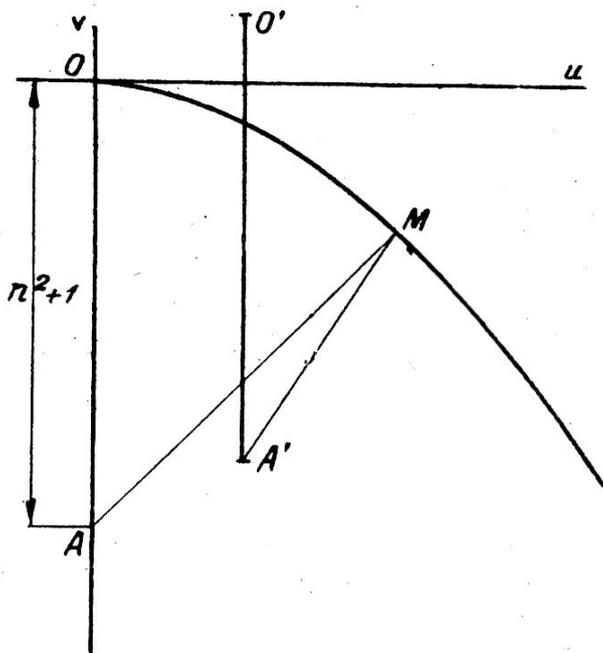


Fig. 1

ou sensiblement

$$\frac{\Delta \xi_2}{\Delta \xi_1} \doteq \frac{d_1}{d_2} = \text{constante}$$

car τ_{11} , τ_{12} et ω diffèrent peu.

Si donc ω varie, le point représentatif de la figure 6 se déplace sur un segment de droite PP' de coefficient angulaire

$$p = \frac{d_1}{d_2}$$

Sur la figure 8 où les coordonnées sont $\frac{1}{2} \frac{\tau_{11}^2 - \omega^2}{\omega^2}$ et $\frac{1}{2} \frac{\tau_{12}^2 - \omega^2}{\omega^2}$ le déplacement du point figuratif est parallèle à la bissectrice de l'angle des axes. Dans l'un et l'autre cas on suit facilement les variations de ζ .

Avec la représentation plane des figures 10 et 11, le point figuratif se déplace sur une parabole. On a en effet :

$$\xi_2 = p \xi_1 + q \quad u = (1 + p) \xi_1 + q \quad v = -p \xi_1^2 - q \xi_1$$

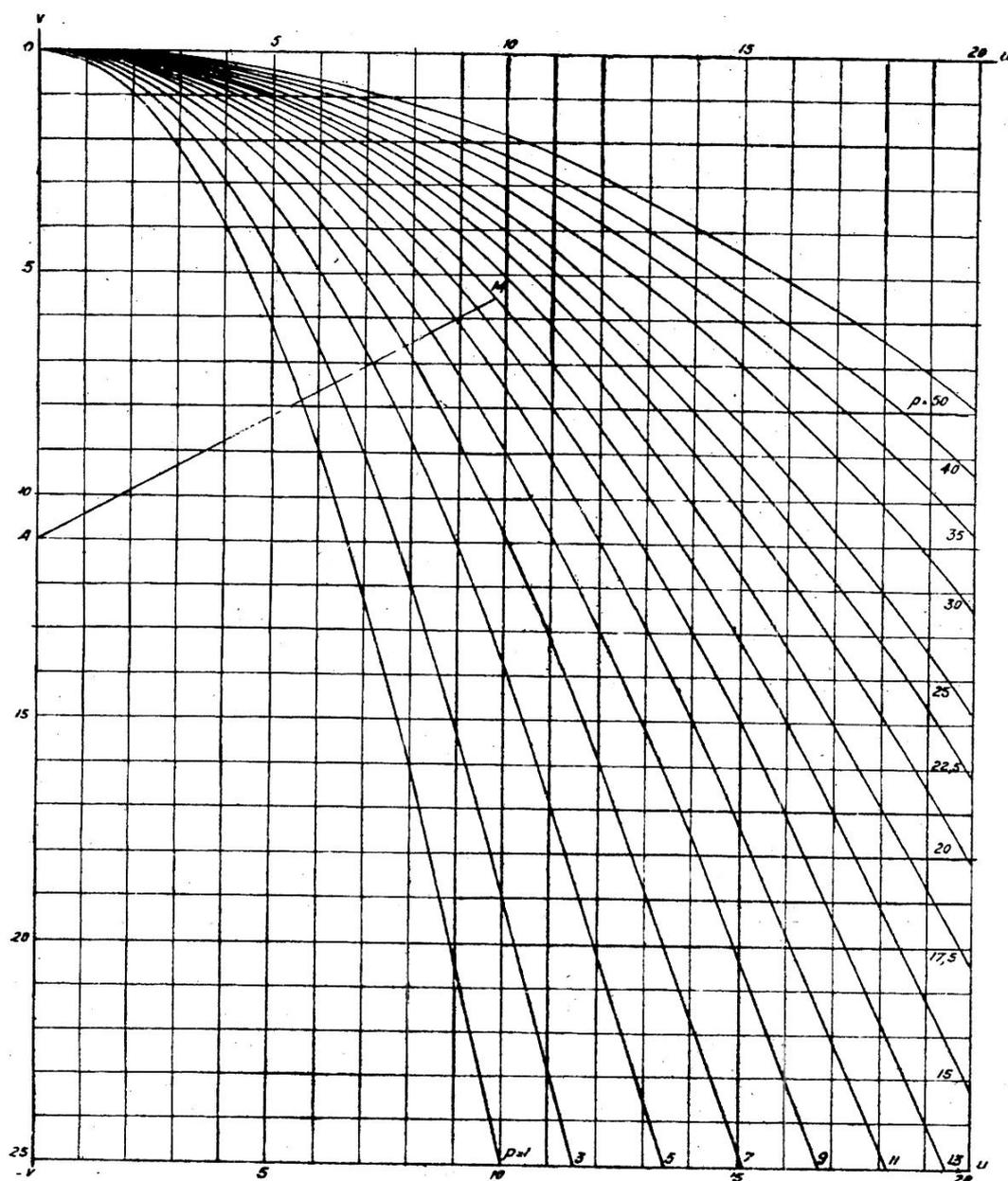


Fig. 14.

Variations du rapport $\zeta = \frac{I_2}{I_{2\max}}$ quand ω est seul variable

et n inférieur à 5 environ.

$$oA = n^2 + 1, \quad \zeta = \frac{2n}{AM}, \quad \xi_1 = \frac{1}{d_1} \frac{r_1^2 - \omega^2}{\omega^2} = \frac{u - q}{1 + p}, \quad p = \frac{d_1}{d_2}$$

Quand ω varie, le point figuratif de l'état des circuits se déplace, sur la parabole d'indice p .

$$\text{d'où : } \left[u - \frac{p-1}{2p} q \right]^2 + \frac{(p+1)^2}{p} \left[v - \frac{q^2}{4p} \right] = 0.$$

A une valeur donnée de p correspond une parabole de forme déterminée que les variations de q ne font que déplacer parallèlement à elle-même. Si $q = 0$, c'est-à-dire si les deux circuits sont accordés sur la même fréquence ($\tau_{11} = \tau_{22}$), toutes les paraboles ont le même sommet et on peut tracer leur réseau comme sur la figure 14. En marquant encore sur ce graphique un point A tel que $OA = (n^2 + 1)$ (fig. 13) et en déplaçant le point représentatif M sur la parabole correspondante on obtient les variations de ζ par la formule 27 du numéro 11 :

$$\zeta = \frac{2n}{AM}$$

Si q n'était pas nul, on voit que le même réseau serait utilisable en portant le segment $O'A' = (n^2 + 1)$ parallèlement à l'axe des v à partir d'un point O' de coordonnées

$$u = \frac{p-1}{2p} q, \quad v = \frac{q^2}{4p}.$$

Quant aux valeurs de $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ elles se détermineraient sur le graphique par la relation :

$$\zeta_1 = \frac{2}{d_1} \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{u-q}{1+p}$$

13-c. — Variations de ζ en fonction de ω quand n est grand. — $d_1 = d_2$. — Si n est grand, de l'ordre de la centaine par exemple, ce qui avec les décrets normaux correspond à des coefficients k de quelques dixièmes, on a sensiblement :

$$\frac{\Delta\zeta}{\zeta} \approx \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{n}{2}$$

et les variations de ω déforment considérablement les représentations géométriques. Dans ce cas, on ne pourrait obtenir les variations de ζ qu'en traçant la courbe donnée par l'expression :

$$\zeta^2 = \frac{4n^2}{(\zeta_1 + \zeta_2)^2 + [n^2 + 1 - \zeta_1 \zeta_2]^2}$$

où l'on ferait :

$$\zeta_2 = p \zeta_1 + q.$$

Mais la connaissance des variations de ζ pour un domaine étendu de ω n'est généralement pas nécessaire et pour les forts couplages les régions les plus utiles sont celles qui avoisinent les sommets S' et S'' (fig. 5).

On peut alors mettre ζ sous une forme très simple que nous allons chercher pour le cas où $d_1 = d_2 = d$.

En admettant que le segment figuratif des variations de ω passe par S' ou S'' , ξ_1 et ξ_2 sont égaux; nous désignerons leur valeur commune par ξ . On pourra alors écrire :

$$\frac{1}{\zeta^2} = \frac{4\xi^2 + (n^2 + 1 - \xi^2)^2}{4n^2} = 1 + \left[\frac{n^2 - 1 - \xi^2}{2n} \right]^2$$

Représentons par ε la valeur du numérateur du crochet dans le voisinage des sommets S' ou S'' ;

$$\varepsilon = n^2 - 1 - \xi^2$$

expression dans laquelle il faut bien remarquer que n et ξ varient tous deux avec ω . Désignant par n_s la valeur du degré de couplage au moment du maximum, la coordonnée ξ_s de ce maximum sera $\xi_s^2 = n_s^2 - 1$; écrivons alors :

$$\varepsilon = (n^2 - 1) - (n_s^2 - 1) + \xi_s^2 - \xi^2.$$

En remarquant que :

$$n = \frac{k}{d'} = \frac{k}{d} \frac{\omega}{\gamma_1} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{1}{d} \left(\frac{\eta}{\omega} - \frac{\omega}{\eta} \right)$$

il vient :

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_s^2}{d'^2 \gamma_1^2} \left[\frac{\gamma_1^4}{\omega^2 \omega_s^2} - (1 - k^2) \right].$$

Pour représenter par une courbe commode pour l'usage, les variations de ζ , posons :

$$\Delta \omega = \omega - \omega_s$$

$\frac{\Delta \omega}{\omega_s}$ sera l'abscisse d'un point de la courbe en prenant pour origine la projection de son sommet. Remarquons encore que :

$$\frac{1}{d'} \left(\frac{\gamma_1^2}{\omega_s^2} - 1 \right) = \pm \sqrt{n^2 - 1} \quad \text{d'où} \quad \gamma_1^2 \doteq (1 \pm n d') \omega_s^2 = (1 \pm k) \omega_s^2$$

et convenons de négliger les puissances de $\frac{\Delta \omega}{\omega_s}$ égales ou supérieures à 2; nous pourrons écrire :

$$\varepsilon \doteq \frac{2 \omega_s \Delta \omega}{d'^2 \gamma_1^2} [(1 \pm k)^2 - (1 + k^2)] \doteq \frac{4k(1 \pm k) \omega_s \Delta \omega}{d'^2 \gamma_1^2}$$

et

$$\frac{\varepsilon}{2n_s} \doteq \frac{2(1 \pm k)}{d} \frac{\Delta \omega}{\gamma_1} = \frac{2(1 \pm k)}{d'} \frac{\Delta \omega}{\omega_s}$$

On a donc finalement :

$$(29) \quad \frac{1}{\zeta^2} = 1 + \left[\frac{2(1 \pm k)}{d'} \frac{\Delta \omega}{\omega_s} \right]^2 \quad \text{au premier ordre près en } \frac{\Delta \omega}{\omega_s}$$

formule très simple pour étudier la résonance de deux circuits très fortement couplés. On remarquera que la courbe correspondant à S' (signe +, fréquence de résonance la plus basse) est plus pointue que celle qui correspond au point S'' (signe —); c'est ce qui apparaît bien sur la figure 16 tracée pour $n = 50$, $d = 1/100$, $k = 0,5$. Les pulsations correspondant aux deux résonances sont enfin, d'après la relation ci-dessus

$$(30) \quad \omega_s' \doteq \frac{\eta}{\sqrt{1+k}} \quad \text{et} \quad \omega_s'' \doteq \frac{\eta}{\sqrt{1-k}}$$

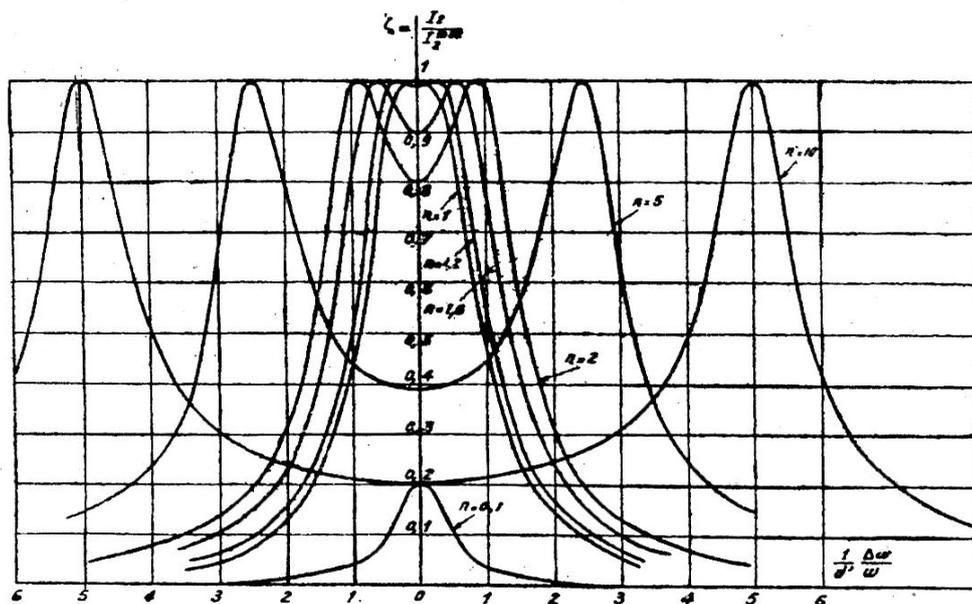


Fig. 15. — Variations du rapport $\zeta = \frac{I_2}{I_2^{\max}}$ pour diverses valeurs de n , quand ω varie.

$$\gamma_1 = \gamma_2, \quad d'_1 = d'_2 = d' \doteq \frac{\delta}{\pi}$$

Notons enfin que quelle que soit la valeur de n , il est possible d'utiliser la représentation plane du numéro 11; il suffit en effet de modifier la position du point A à mesure que n varie.

14. — Influence du couplage sur les variations de ζ en fonction de ω .
— Pour mettre bien en évidence l'influence du couplage, nous avons tracé sur la figure 15 les courbes ζ pour différents couplages faibles et moyens et sur la figure 16 la courbe correspondant à un couplage très fort; dans ces figures les décrets sont supposés égaux ainsi que les fréquences propres des deux circuits ($d'_1 = d'$, $\gamma_1 = \gamma_2$). Dans les premières l'abscisse est $\xi = \frac{2}{d} \frac{\Delta \omega}{\omega}$, dans la dernière $\frac{\omega}{\eta}$. On voit qu'avec des couplages faibles

les courbes correspondant à des décrets différents et à la même valeur de n , se déduisent les unes des autres par une simple dilatation

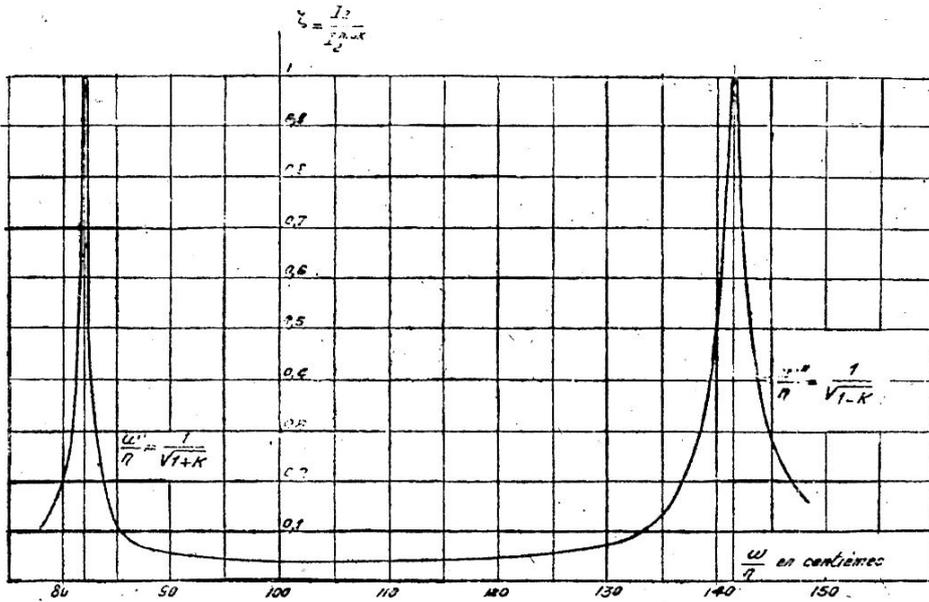


Fig. 16. — Variations du rapport $\zeta = \frac{I_2}{I_{2max}}$, pour un couplage très fort, quand ω varie.

$\eta_1 = \eta_2, d_1 = d_2 = d = 1/100, \delta = 1/32, n_0 = 50, k = 0,5.$

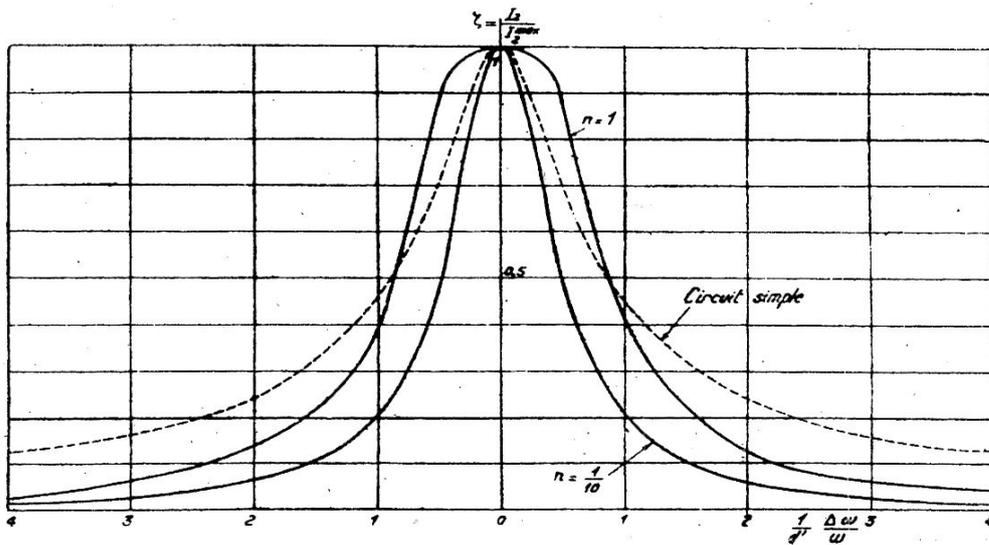


Fig. 17. — Comparaison des courbes de résonance de deux circuits couplés avec celle d'un circuit simple de même décrement que chacun des précédents. Les échelles sont différentes de façon à ramener les maxima à la même valeur.

$\eta_1 = \eta_2 \quad d'_1 = d'_2 = d' = \frac{\delta}{\pi}$

dans le sens horizontal; il n'en est plus de même avec les couplages forts où les courbes dépendent séparément de k et de d .

La figure 17 permet de comparer un circuit simple avec deux circuits

de même décrement, faiblement couplés; pour faciliter cette comparaison, on a ramené les maxima à la même valeur dans les trois cas.

15. — **Oscillations contraintes de deux circuits couplés par induction électrique.** — Supposons les circuits couplés comme sur la figure 18. On peut traiter ce cas exactement comme le précédent et obtenir une expression de I_2 ne différant de celle du numéro 9, formule 15, que par le remplacement de $M\omega$ par $-\frac{1}{\Gamma\omega}$, ces deux éléments représentant les inductions magnétique et électrique.

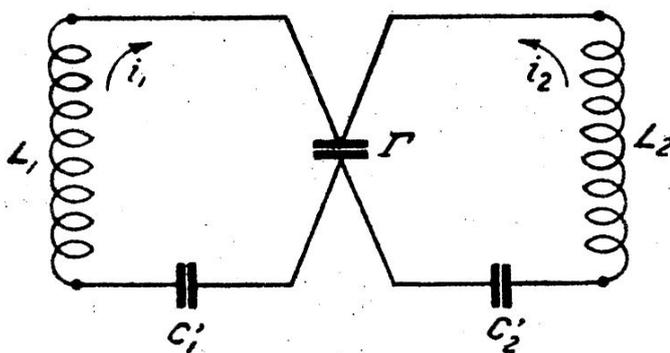


Fig. 18.

Nous poserons comme précédemment :

$$\gamma_1^2 = \frac{1}{LC} \quad , \quad d' = \frac{R}{L\omega} \quad . \quad \xi = \frac{1}{d'} \frac{\gamma_1^2 - \omega^2}{\omega^2};$$

mais il y a lieu de remarquer que les valeurs des capacités qui interviennent dans les accords des circuits ne sont pas les capacités C_1 et C_2 des condensateurs de chaque circuit, mais celles données par :

$$(31) \quad \frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_1'} + \frac{1}{\Gamma} \quad \quad \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_2'} + \frac{1}{\Gamma}$$

Ce sont les capacités C_1 et C_2 que nous introduisons dans les expressions des γ_1 ; la transformation des équations conduit d'ailleurs naturellement à cette introduction, comme on l'a vu au numéro 6-a.

Les équations du système peuvent alors s'écrire :

$$(31') \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 - j\xi_1) \mathcal{J}_1 - j \frac{C_1}{\Gamma d_1} \mathcal{J}_2 = \frac{E}{R_1} \\ -j \frac{C_2}{\Gamma d_2} \mathcal{J}_1 + (1 - j\xi_2) \mathcal{J}_2 = 0 \end{array} \right.$$

tout à fait analogues aux équations 13 du numéro 9.

Cette fois le coefficient de couplage k et le degré de couplage n seront donnés par :

$$(32) \quad k^2 = \frac{C_1 C_2}{\Gamma^2} \quad n^2 = \frac{k^2}{d'_1 d'_2} = \frac{1}{R_1 R_2 \Gamma^2 \omega^2}$$

Avec ces notations on trouve :

$$(33) \quad \mathcal{J}_2 = - \frac{E}{R_1 R_2} \frac{\left(\frac{1}{\Gamma \omega} \right)}{(\xi_1 + \xi_2) + j(n^2 + 1 - \xi_1 \xi_2)}$$

Toutes les conclusions pratiques relatives à l'induction magnétique restent valables, en particulier il existe un couplage critique donné par :

$$n = 1 \quad \text{ou} \quad k^2 = d'_1 d'_2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\Gamma^2 \omega^2} = R_1 R_2$$

et l'intensité maximum réalisable est :

$$I_2^{Max} = \frac{E}{2\sqrt{R_1 R_2}}$$

A côté de l'analogie, il faut noter une différence importante avec le cas de l'induction magnétique. Comme les circuits sont presque toujours accordés par variation des capacités, C_1 et C_2 ne sont pas constants et k varie avec les accords; les surfaces précédemment étudiées se déforment donc quand on modifie τ_{11} et τ_{12} ; dans la représentation plane du numéro 11, les réseaux de droites et de courbes restent inchangés, mais le point A se déplace, ce dont il est d'ailleurs facile de tenir compte. Il est clair que ces déformations et déplacements n'ont d'importance que pour des changements d'accord importants, peu courants dans les applications.

Quand c'est ω qui varie, les C restent fixes et la différence ci-dessus n'existe plus.

16. — Rendement des circuits couplés. — Dans l'étude que nous venons de faire des circuits couplés nous avons été constamment guidés par le souci d'obtenir au secondaire la plus forte intensité possible, la force électromotrice appliquée au primaire restant constante. Ce problème correspondait au cas de la réception; l'antenne ou le cadre reçoivent en effet de l'onde qui passe une force électromotrice bien déterminée pour un type de collecteur donné, force électromotrice qui conserve sa valeur, quelle que soit la puissance qu'on lui demande de fournir, au moins dans la limite des applications possibles. Dans ces conditions il était inutile de se préoccuper du rendement. Il en est tout autrement quand la force électromotrice est fournie par un générateur dont la

puissance est limitée et qui, si on lui demande trop de travail, ne pourra plus continuer à produire une tension aussi élevée, dans lequel, en tous cas, toute élévation du rendement se traduira par une économie; il est donc important de calculer ce dernier.

Son expression est évidemment

$$r = \frac{R_2 I_2^2}{R_2 I_2^2 + R_1 I_2^2}$$

ou, en introduisant le rapport de transformation (n° 9) $\rho = \frac{I_2}{I_1} = \frac{M\omega}{Z_2}$

$$r = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \frac{1}{\rho^2}}$$

Cette relation montre que le rendement croît avec le rapport de transformation, ce qui était vraisemblable a priori; à *couplage constant*, il sera maximum quand le secondaire sera accordé.

a) *Cas d'un secondaire accordé sur la fréquence d'excitation.*

Si cette condition est remplie on a : $Z_2 = R_2$ et

$$\frac{R_1}{R_2} \frac{1}{\rho^2} = \frac{R_1 R_2}{M^2 \omega^2} = \frac{1}{n^2}$$

Le rendement prend alors la forme très simple :

$$(34) \quad r = \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

On voit que dans ce cas, le plus important pour la pratique, *le rendement devient très voisin de 1 dès que n vaut quelques unités*; pour $n = 3$ par exemple, $r = 0,9$. Comme $n = k \sqrt{d_1 d_2}$, les valeurs de k correspondantes sont de l'ordre du centième.

Il résulte de là qu'avec un secondaire accordé et un fort couplage le primaire n'est le siège d'aucun phénomène électrique appréciable; *c'est qu'il n'est, en quelque sorte, que le support de deux actions antagonistes, la force électromotrice de la source et la force contre-électromotrice de l'organe d'utilisation qui s'opposent presque entièrement dans son circuit.* Il transforme alors, dans les conditions les plus avantageuses, l'énergie de la source pour l'adapter aux besoins du secondaire.

Cette remarque s'applique bien entendu aux couplages mécaniques; le primaire reste alors sensiblement immobile pendant la transformation.

b) *Cas de circuits accordés au maximum d'intensité secondaire.*

Dans ce cas, où le secondaire n'est généralement plus accordé sur la fréquence d'alimentation, on a (n° 10-a, formules 17) : $\xi_2^2 = n^2 - 1$ et comme (note du n° 9) $Z_2^2 = R_2^2 (1 + \xi_2^2)$ on peut écrire :

$$Z_2^2 = n^2 R_2^2 \quad \text{et} \quad \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{1}{\rho^2} = \frac{n^2 R_1 R_2}{M^2 \omega^2} = 1.$$

Le rendement est donc égal à 1/2.

Les conditions qui assurent le maximum du courant secondaire réalisent en même temps le maximum de puissance dans ce circuit; donc *pour tirer de la source agissant à tension constante dans le primaire toute la puissance possible dans le secondaire, il faut se contenter d'un rendement 1/2; si l'on cherche un rendement plus avantageux, on n'obtiendra à tension égale de la source qu'une puissance réduite.*

Cette propriété se rencontre sous des formes analogues dans un grand nombre de phénomènes physiques, dans le débit des dynamos par exemple, celui des oscillateurs à lampes, dans le fonctionnement d'un couple thermoélectrique associé à un galvanomètre.

17. — Conditions d'application des théories précédentes. — Il est important de bien remarquer que la donnée essentielle des études précédentes est la *constance de la force électromotrice excitant le primaire*: ce qui revient à dire que les phénomènes ayant leur siège dans les circuits couplés et en particulier le courant primaire, ne réagissent pas sur la source. C'est le cas, dans certaines limites, quand cette source est constituée par un alternateur ou une lampe à excitation séparée; mais dans un très grand nombre de circonstances qui se rencontrent souvent en radioélectricité — dans les générateurs à arc ou à lampes auto-excitées par exemple — la force électromotrice produite par le générateur dépend des constantes des circuits dans lequel il débite, et les résultats précédents ne sont plus applicables. Dans ces derniers cas d'ailleurs il ne s'agit plus d'oscillations contraintes, tout changement dans l'état des circuits modifie profondément le fonctionnement du générateur lui-même; un changement du couplage ou de l'accord du secondaire entraîne non seulement la modification de la puissance, mais encore celle de la fréquence (n° 3-a).

D'autre part, dans les problèmes d'émission le couplage critique n'offre en général aucun intérêt, car il correspond au faible rendement de 1/2 et l'on recherche toujours des rendements aussi voisins que possible de l'unité, nécessitant un couplage plus fort.

Néanmoins quand l'étude des variations du fonctionnement sous l'influence de modifications des accords, ou des autres variables, n'entre pas en jeu et qu'il s'agit seulement de calculer les courants ou les tensions ou tels autres éléments correspondant à un état donné, toutes les formules établies sont naturellement valables; c'est le cas en particulier pour l'expression du rendement.

18. — Utilisation des circuits couplés pour obtenir de faibles variations de l'intensité dans une gamme de fréquence étendue. — L'examen

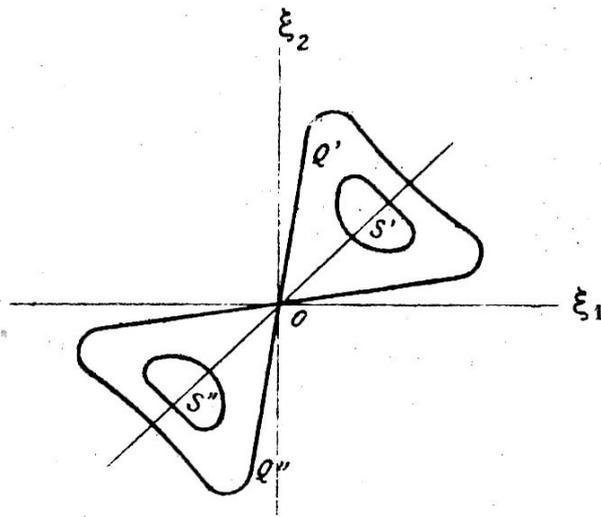


Fig. 19.

des figures 6 et 7 montre que l'on peut disposer les circuits de façon que le rapport ζ varie très peu pour des changements importants de la fréquence d'excitation, ce qui présente de l'intérêt pour certains problèmes. Il suffit de faire en sorte que le segment PP' correspondant aux variations de ω soit aligné le long d'une des courbes de niveau dans les régions où elles sont sensiblement rectilignes.

Pour obtenir ce résultat, on déterminerait les décrets des deux circuits de façon à ce que le quotient $p = \frac{d_1}{d_2}$ soit précisément égal au coefficient angulaire de la direction moyenne de la courbe de niveau dans la région considérée et on donnerait à τ_{11} et à τ_{12} des valeurs convenables pour placer PP' dans cette région; cela revient à déterminer convenablement les coefficients de l'équation :

$$\xi_2 = p \xi_1 + q.$$

Nous allons examiner un des cas qui paraît le plus intéressant, c'est celui où τ_{11} étant égal à τ_{12} , le segment PP' passe par l'origine. Il faut alors orienter ce dernier dans la direction $Q'Q''$ (fig. 6 et 19) de la tangente

à l'origine de la ligne de niveau passant en ce point, c'est-à-dire suivant l'asymptote de l'indicatrice de la surface au point O. L'équation de cette indicatrice est d'après les formules 18 du numéro 10-a :

$$\xi_2^2 - 2n^2 \xi_2 \xi_1 + \xi_1^2 = C^2$$

on prendra donc :

$$(35) \quad \frac{d_1}{d_2} = p = n^2 + \sqrt{n^2 - 1}.$$

En traitant directement cette question, on se rend peut-être mieux compte des avantages que peut fournir ce choix. Imaginons qu'après avoir réglé les circuits sur la même fréquence, nous faisons varier ω ; ω aura :

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{d_1}{d_2} = p$$

et la formule 21 du numéro 10-b deviendra :

$$\frac{4n^2}{\zeta^2} = p^2 \xi_1^2 - [2p(n^2 + 1) - (1 + p)^2] \xi_1^2 + (n^2 + 1)^2$$

ζ restera d'autant plus voisin de son maximum pour les faibles valeurs de ξ_1 que le terme en ξ_1^2 sera faible; on obtiendra donc la plus grande constance de ζ en posant :

$$(36) \quad \frac{(1 + p)^2}{2p} = n^2 + 1.$$

Il est facile de voir que cette relation équivaut à 35; si p y satisfait, il vient :

$$\frac{4n^2}{\zeta^2} = p^2 \left[\xi_1^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1 + p}{p} \right)^2 \right].$$

On peut remarquer que si les variations de ζ sont alors très faibles dans le voisinage du maximum, elles deviennent rapides quand ξ_1 dépasse l'unité; on peut donc obtenir un effet appréciable de filtrage.

Pour comparer ζ à sa valeur maximum, atteinte pour $\xi_1 = 0$, écrivons :

$$\frac{\zeta_0^2}{\zeta^2} = 1 + 4 \left[\frac{p}{1 + p} \xi_1 \right]^2$$

et prenons comme variable le rapport $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ en utilisant la relation :

$$\xi_1 = \frac{2}{d_1} \frac{\Delta\omega}{\omega}$$

En posant

$$d_m = \frac{1}{2} (d_1 + d_2)$$

on a

$$(37) \quad \frac{\xi_2^2}{\xi^2} = 1 + \left(\frac{\Delta\omega/\omega}{d_m/\sqrt{2}} \right)^4$$

Cette formule montre que les variations du courant secondaire ne dépendent que de la moyenne d_m des décrets; la courbe qui les représente est indépendante de p , elle est donc identique à la courbe relative à $n = 1$ de la figure 17, qui correspond au couplage critique quand $p = 1$ et $d_1 = d_2 = d_m$.

Mais si les variations de l'intensité secondaire sont indépendantes de p il n'en est pas de même du rendement. Nous avons vu en effet, au numéro 16 (formule 34) que le rendement de deux circuits couplés est égal à

$$r = \frac{1}{1 + 1/n^2}$$

quand le secondaire est accordé sur la fréquence d'excitation; c'est précisément le cas actuellement pour le point moyen O du segment Q'Q'' parcouru par le point figuratif de l'état des circuits, car alors $\xi_2 = 0$ ou $\tau_{12} = \omega$. En remplaçant n^2 par son expression (36) en fonction de p , on a

$$r = \frac{1 + p^2}{(1 + p)^2}$$

Quand p croît à partir de 1, le rendement prend alors les valeurs suivantes :

$p =$	1	3	6	10	15	25
$r =$	0,5	0,68	0,76	0,83	0,89	0,93

Pour apprécier la valeur de $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ qui produit une variation relative de l'intensité égale à une petite quantité ε , on peut remplacer la relation 37 par

$$2\varepsilon = \left(\frac{\Delta\omega/\omega}{d_m/\sqrt{2}} \right)^4$$

d'où

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = d_m \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{2}}$$

et comme les variations de fréquence peuvent avoir lieu pour les deux sens OQ' et OQ'', la largeur relative de la gamme de fréquence dans laquelle la variation relative de l'intensité sera inférieure à ε se déduira de

$$\frac{\Delta f}{f} = 2 d_m \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{2}}$$

Les valeurs de $\frac{\Delta f}{f}$ sont données, en fonction de la moyenne $\delta_m = \pi d_m$ des décroissements, dans le tableau suivant pour $\varepsilon = 0,1$; on y donne également les valeurs de $\frac{\Delta f}{f}$, calculées par la formule 37, qui correspondent à une chute de l'intensité, égale à la moitié de sa valeur maximum. On remarquera que pour les valeurs de p un peu fortes, δ_m est sensiblement la moitié du décroissement le plus fort.

	$\delta_m =$	1/3	1/5	1/10	1/20	
Pour $\frac{\Delta I_2}{I_2} =$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,1 \\ 0,5 \end{array} \right.$	$\frac{\Delta f}{f} =$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,10 \\ 0,20 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,06 \\ 0,12 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,03 \\ 0,06 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,015 \\ 0,030 \end{array} \right.$

En se basant sur les considérations précédentes, on pourra employer les dispositions suivantes qui offrent des avantages appréciables sur l'excitation directe :

Si le circuit d'utilisation est peu amorti, l'excitation directe donnera lieu à une intensité variant très rapidement avec la fréquence : en le couplant à un circuit primaire très amorti, on pourra obtenir une intensité restant à peu près constante dans une gamme de fréquence étendue et tombant assez rapidement en dehors de cette gamme.

Si le circuit d'utilisation est très amorti, en le couplant à un secondaire très peu amorti, on y obtiendra une intensité variant très peu dans une gamme donnée, notablement moins qu'avec l'excitation directe, et à partir d'une certaine limite la chute du courant sera au contraire beaucoup plus rapide.

Dans les deux cas, ces résultats pourront s'obtenir avec un bon rendement.

§ IV. — APPLICATIONS.

19. — Circuits équivalents. — Les équations 8 et 9 du numéro 9 résolues par rapport à J_1 donnent

$$(38) \quad E = [(R_1 + \varphi^2 R_2) + j (S_1 - \varphi^2 S_2)] J_1$$

où φ est le rapport de transformation $\frac{M_\omega}{Z_2}$.

Si l'on réalisait un circuit de résistance $R_1 + \varphi^2 R_2$ et de réactance $S_1 - \varphi^2 S_2$, il donnerait la même intensité sous l'action de E; on donne à ce circuit le nom de *circuit équivalent*. Son usage dans les calculs est parfois avantageux; en outre l'inspection des résistances et réactances fictives peut renseigner utilement sur le côté physique des phénomènes.

On voit que le couplage d'un circuit avec un autre produit le même effet qu'un accroissement de résistance de ce dernier. Le rapport de transformation pouvant être aisément modifié par la variation de M ou de S_2 , il est possible d'obtenir par ce moyen des variations continues de la résistance apparente pour adapter le système à des conditions définies.

Le couplage modifie également la réactance apparente du primaire, mais ici la variation peut être positive ou négative. Si l'on suppose le second circuit apériodique, c'est-à-dire sans condensateur, $S_1 - \rho^2 S_2$ se réduit à $\left[(L_1 - \rho^2 L_2) \omega - \frac{1}{C_1 \omega} \right]$ et l'on voit qu'en approchant un circuit fermé, sans condensateur, d'un circuit en état d'oscillation on réduit l'inductance de ce dernier. Une plaque métallique sans coupure peut être assimilée à un circuit apériodique, elle produit donc le même effet quand on l'approche des bobines d'un circuit, en prenant soin bien entendu de la présenter de façon à ce qu'elle soit coupée par les lignes de force de façon à être effectivement couplée. Les variations d'inductance ainsi obtenues peuvent être très importantes et il y a toujours lieu d'en tenir compte quand on enferme dans un coffre métallique les éléments d'un circuit. Ces considérations sont à rapprocher de la loi de Lenz; le flux dû au circuit excité induit dans le circuit apériodique couplé des courants qui sont de nature à diminuer le flux inducteur.

On peut bien entendu généraliser la notion du circuit équivalent; on pourrait par exemple résoudre les mêmes équations 8 et 9 par rapport à I_2 et on obtiendrait un nouveau circuit équivalent relatif à E et I_2 . On peut aussi remplacer n circuits couplés par un seul en résolvant les équations linéaires dont ils dépendent par rapport à l'intensité I_p dans un des circuits. On trouve alors une relation de la forme

$$E_s = (R'_p + j S'_p) J_p$$

R'_p et S'_p sont la résistance et la réactance apparentes du circuit équivalent.

On doit remarquer que les expressions de R'_p et S'_p contiennent ω ; l'équivalence du système avec un circuit simple matérialisé n'est donc valable que pour une fréquence donnée. En outre : il ne saurait être question de circuit équivalent pour des oscillations amorties qui, dans un ensemble de circuits, se produisent sur de nombreuses fréquences existant simultanément, comme on le verra au chapitre suivant.

Enfin, la recherche de la résonance ne se fera pas sur le circuit équivalent comme sur un circuit simple où on annule simplement la réac-

tance S . Ici S'_p et R'_p dépendent des mêmes variables et on ne peut pas les traiter séparément; on recherchera le minimum de l'impédance réelle $Z'_p = \sqrt{R'^2_p + S'^2_p}$. On trouvera en général plusieurs solutions.

20. — Elimination des harmoniques. — Jusqu'ici nous avons toujours supposé que les forces électromotrices étaient sinusoïdales, mais il arrive bien souvent que cette condition n'est pas remplie et il en résulte des inconvénients graves si les courants auxquels elles donnent naissance conservent ce défaut. Nous avons indiqué au numéro 14-II qu'un élément non sinusoïdal peut être remplacé par la superposition de plusieurs éléments sinusoïdaux : le fondamental et ses harmoniques; si donc on veut obtenir un courant sinusoïdal, on devra chercher à éliminer ses harmoniques. L'emploi des circuits couplés et surtout celui du couplage électrique donne une solution, au moins partielle de ce problème; il est facile de voir sans calculs les avantages du couplage électrique; la force électromotrice induite dans le secondaire est en effet $M\omega I_1$ avec le couplage magnétique et $\frac{I_1}{\Gamma\omega}$ avec le couplage électrique; toutes choses égales d'ailleurs, le courant induit dans le secondaire par un harmonique de rang p sera donc p^2 fois plus faible dans le second cas que dans le premier. Ce raisonnement ne saurait cependant donner des résultats certains, car il ne tient pas compte des réactions, mais on peut le préciser comme suit.

Nous nous bornerons au cas où les deux circuits sont accordés sur la fréquence fondamentale d'excitation ($\tau_{11} = \tau_{12} = \omega$), c'est celui qui correspond aux besoins de la pratique, dans les problèmes d'émission. Nous désignerons par E_1 et E_p , I_1 et I_p les amplitudes des fondamentaux et des harmoniques de rang p de la force électromotrice et du courant secondaire, supprimant l'indice 2 de ce dernier pour alléger l'écriture.

Reprenons la formule 16 (n° 9)

$$I_2 = \frac{EM\omega}{R_1 R_2} \frac{1}{\sqrt{(\xi_1 + \xi_2)^2 + (n^2 + 1 - \xi_1 \xi_2)^2}}$$

Pour la fondamentale, $\tau_{11} = \tau_{12} = \omega$ ou $\xi_1 = \xi_2 = 0$; on a donc

$$I_1 = \frac{E_1 M \tau_1}{R_1 R_2} \frac{1}{n^2 + 1}$$

Quant au courant harmonique, il s'obtiendra en faisant $\omega = p \gamma_1$; les valeurs des ξ sont alors (formule 11) :

$$\xi = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{p} - p \right) = -\frac{p}{d} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) = -\frac{p \beta}{d}$$

en posant :

$$\beta = 1 - \frac{1}{p^2}$$

Ces valeurs de ξ sont toujours très grandes; par exemple, pour $p = 2$ et $d = 1/100$, on a $\xi = 150$. Dans ces conditions, le dénominateur de I_2 se réduit pratiquement au produit $\xi_1 \xi_2$ et on a¹ :

L'harmonique sera d'autant moins sensible que le rapport

$$\frac{I_1}{I_p} = \frac{E_1}{E_p} \cdot \frac{p \beta^2}{(n^2 + 1) d_1 d_2}$$

sera grand et l'on peut donner le nom de *coefficient de filtrage* au facteur

$$F_m = \frac{p \beta^2}{(n^2 + 1) d_1 d_2}$$

qu'on peut écrire, en introduisant le rendement $r = \frac{n^2}{n^2 + 1}$ et le coefficient de couplage $k = n \sqrt{d_1 d_2}$.

$$(39) \quad F_m = \frac{p \beta^2 r}{k^2}$$

a) *Avantages du couplage électrique sur le couplage magnétique.*

En recommençant les mêmes opérations avec un couplage électrique on trouverait un coefficient :

$$(40) \quad F_e = \frac{p^3 \beta^2 r}{k^2}$$

car les formules relatives à ce cas ne diffèrent des précédentes que par la substitution de $1/\Gamma \gamma_1$ à $M \gamma_1$ (formule 33, n° 15).

Le rapport F_e/F_m est donc égal à p^2 , ce qui justifie nos prévisions.

1. Les résistances sur la pulsation $p \gamma_1$ sont certainement beaucoup plus fortes que sur la pulsation γ_1 , mais il n'y a pas lieu de s'en préoccuper ici. Les résistances ne figurent que d'une façon apparente dans cette formule qui contient le produit $R R_2$ à la fois au dénominateur et au numérateur dans $d_1 d_2$; on peut donc prendre pour les résistances telles valeurs que l'on désire et en conservant celles qui correspondent à la pulsation γ_1 on conserve aux d leur acception normale, relative à la fréquence fondamentale.

b) *Avantages des circuits couplés sur un circuit simple.*

Supposons maintenant que notre force électromotrice agisse sur un circuit simple accordé sur la fondamentale; les courants seront :

$$I_1 = \frac{E_1}{R} \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{E_p}{\sqrt{R^2 + p^2 L^2 r^2 \beta^2}} = \frac{E_p}{p \beta L r}$$

(41) et l'on aura :

$$F_s = \frac{p \beta}{d}$$

où d est le décrement, divisé par π , du circuit simple.

Le rapport

$$\frac{F_m}{F_s} = \frac{\beta r d}{k^2}$$

fait ressortir l'avantage des circuits couplés pour l'élimination des harmoniques. On peut l'écrire sous la forme :

$$\frac{F_m}{F_s} = \beta^2 r \frac{d}{n^2 d_1 d_2}$$

qui permet d'apprécier plus facilement sa valeur numérique, les coefficients d étant du même ordre de grandeur et $\beta^2 r$ étant voisin de l'unité.

21. — Inductance ou capacité shuntées par une résistance. — Shuntions par une résistance R une inductance L faisant partie d'un circuit

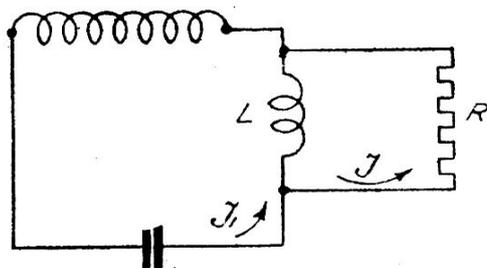


Fig. 20.

soumis à une force électromotrice E (fig. 20). Nous constituons deux circuits couplés magnétiquement par l'inductance L . Soit R_1 la résistance du primaire et S_1 sa réactance *extérieure à la bobine* L .

Avec les sens positifs des courants indiqués par les flèches, on a :

$$\begin{aligned} [R_1 + j(S_1 + L\omega)] J_1 - jL\omega J &= E \\ -jL\omega J_1 + (R + jL\omega) J &= 0. \end{aligned}$$

Supposons R *beaucoup plus grand que* $L\omega$, la seconde équation donne

$$J = \frac{jL\omega}{R} J_1$$

le circuit équivalent a alors pour équation :

$$\left[R_1 + \frac{L^2 \omega^2}{R} + j(S_1 + L\omega) \right] J_1 = E.$$

On en déduit que la dérivation R ne modifie pas sensiblement l'inductance du circuit primaire, mais augmente sa résistance de $\frac{L^2 \omega^2}{R}$

Si au lieu de shunter une inductance on avait shunté une capacité C

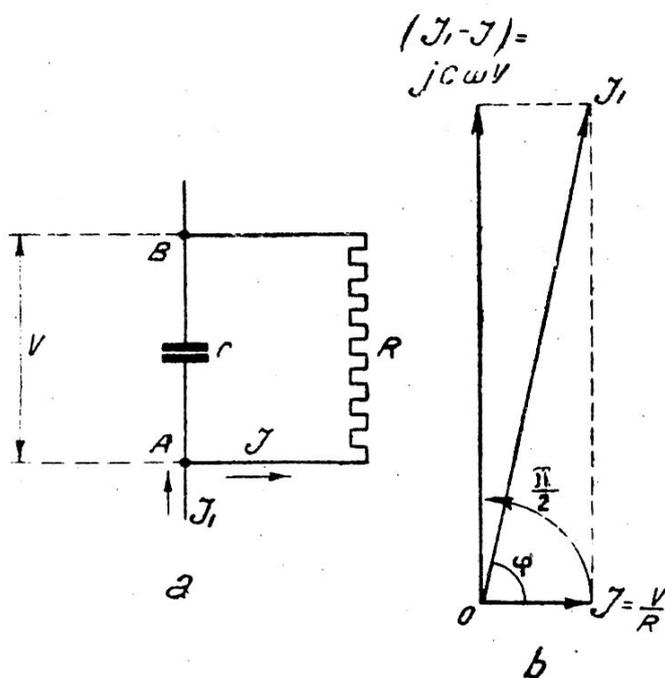


Fig. 21.

on aurait trouvé un accroissement de résistance $\frac{1}{C^2 \omega^2 R}$. Donc :

Si on shunte une inductance L ou une capacité C appartenant à un circuit par une très grande résistance R , l'effet produit est le même que si l'on avait ajouté en série une résistance ¹

$$R_1 = \frac{L^2 \omega^2}{R} \quad \text{ou} \quad R_1 = \frac{1}{C^2 \omega^2 R}$$

1. Il faut bien remarquer que la force électromotrice doit être entièrement extérieure au circuit formé par l'inductance ou la capacité et la résistance en dérivation sur elle, sans quoi les équations précédentes devraient être modifiées. Cette remarque s'applique au cas où la résistance R serait en dérivation aux bornes du condensateur du circuit oscillant; comme la force électromotrice n'agit généralement que sur la bobine de ce circuit, R_1 est alors égal à $1/RC^2\omega^2$ et non à $\frac{L^2\omega^2}{R}$ quoique R soit également en dérivation sur l'inductance L . Les deux expressions ne sont égales qu'à la résonance.

Le problème du condensateur shunté a une grande importance dans la pratique; on le rencontre sous différentes formes. Il peut s'agir par exemple d'un condensateur mal isolé ou d'un condensateur dont le diélectrique donné lieu à des pertes d'énergie.

L'expression de la perte de puissance provenant de la résistance R est

$$W_p = \frac{1}{2} \frac{I_1^2}{C^2 \omega^2 R} = \frac{1}{2} \frac{VI_1}{C \omega R}$$

en désignant par V l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur; il en résulte que *pour un même courant I_1 les pertes augmentent rapidement quand la fréquence diminue*. On peut se rendre compte directement de ce fait en remarquant que la période étant plus longue, le condensateur accumule à chaque alternance une quantité d'électricité plus importante et la tension V aux bornes de la résistance augmente; la puissance $\frac{1}{2} \frac{V^2}{R}$ dissipée dans celle-ci devient donc beaucoup plus grande.

On peut encore traiter la question par une construction géométrique (fig. 21). Le courant dans la capacité, $\mathcal{J}_1 - \mathcal{J} = jC\omega V$, est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur le courant dans la résistance, $I = \frac{V}{R}$; I_1 est donc donné par la construction *b*. Quant à la puissance dissipée elle est égale au demi-produit de la tension par la composante du courant en phase avec elle

$$W_p = \frac{1}{2} V \cdot I_1 \cos \varphi \quad \text{avec } \cos \varphi = \frac{1}{RC\omega}$$

$\cos \varphi$ est le *facteur de puissance* du condensateur.

22. — Résistance shuntée par une inductance ou une capacité. —

Il peut arriver que la résistance d'un instrument de mesure à intercaler dans un circuit soit tellement grande qu'elle réduise par trop le courant à mesurer. Il est possible de remédier à cet inconvénient en le shuntant par une inductance ou une capacité; prenons une inductance pour exemple.

Soit R la résistance trop élevée de l'appareil de mesure intercalé dans le circuit ABCD (fig. 22) dont la résistance est R_1 . Les intensités ayant les sens positifs marqués par les flèches on a :

$$\mathfrak{Z}_1 \mathcal{J}_1 + R \mathcal{J}_2 = E$$

$$R \mathcal{J}_1 + \mathfrak{Z}_2 \mathcal{J}_2 = 0$$

d'où l'on déduit :

$$\left(\mathfrak{Z}_1 - \frac{R^2}{\mathfrak{Z}_2} \right) \mathcal{J}_1 = E.$$

Posant $\frac{L_2 \omega}{R} = s$ il vient $\mathfrak{Z}_2 = R(1 + js)$ et on a :

$$\mathfrak{Z}_1 - \frac{R^2}{\mathfrak{Z}_2} = R_1 + R \frac{s^2}{1 + s^2} + j \left[\left(L_1 + \frac{L_2}{1 + s^2} \right) \omega - \frac{1}{C_1 \omega} \right] = R'_1 + jS'_1$$

La résistance du circuit devient $\left(R_1 + R \frac{s^2}{1 + s^2} \right)$ au lieu de $(R_1 + R)$

et la self-induction est augmentée de $\frac{L_2}{1 + s^2}$. Quant au courant I qui traverse la résistance R il est

$$J = J_1 + J_2 = \frac{E}{R'_1 + jS'_1} \left(1 - \frac{1}{1 + js} \right) = \frac{Es}{(R'_1 s + S'_1) + j(S'_1 s - R'_1)}$$

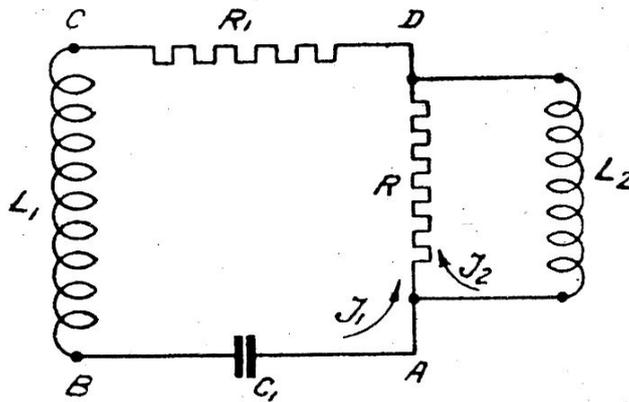


Fig. 22.

son amplitude a pour expression :

$$I = \frac{Es}{\sqrt{(R'_1 s + S'_1)^2 + (S'_1 s - R'_1)^2}}$$

Pour une valeur donnée de s , I atteint son maximum quand, au moyen du condensateur C_1 , on annule S'_1 . On a alors

$$I = \frac{E}{R_1 \frac{\sqrt{1 + s^2}}{s} + R \frac{s}{\sqrt{1 + s^2}}}$$

En faisant maintenant varier s on trouvera la valeur la plus élevée que I puisse atteindre.

$$I_{\text{Max}} = \frac{E}{2\sqrt{R_1 R}} \quad \text{pour} \quad \frac{s^2}{1 + s^2} = \frac{R_1}{R}$$

et la valeur correspondante de I_1 sera :

$$I_1 = \frac{E}{2R_1}$$

La résistance de la branche contenant l'instrument de mesure est donc ramenée à R_1 au lieu de R ; d'autre part, comme s est petit, l'inductance du circuit sera à peine modifiée.

Si l'appareil de mesure est assez sensible pour marquer convenablement des courants inférieurs à $\frac{E}{2\sqrt{R_1 R}}$ on pourra en profiter pour diminuer encore l'importance de la résistance équivalente qu'il introduit dans le circuit. Supposons qu'il puisse mesurer des courants p fois plus faibles que I^{max} on écrira

$$R_1 \frac{\sqrt{1+s^2}}{s} + R \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} = 2p\sqrt{R_1 R}$$

d'où

$$\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} = \sqrt{\frac{R_1}{R}} (p - \sqrt{p^2 - 1})$$

ou approximativement, si p vaut quelques unités, $\frac{1}{2p} \sqrt{\frac{R_1}{R}}$.

La résistance équivalente ajoutée par l'introduction de l'ensemble (R, L_2) n'est plus alors que $\frac{R_1}{4p^2}$.

Il y a lieu de tenir compte de la remarque faite au sujet des circuits équivalents; le résultat précédent ne sera valable que pour la valeur ω qui aura servi à calculer l'inductance L_2 par la formule $L_2\omega = Rs$; en outre un étalonnage sera nécessaire si l'on a besoin de précision.

Enfin, en remplaçant la bobine L_2 par une capacité on obtiendrait des résultats analogues.

23. — Introduction d'un instrument de mesure dans un circuit auxiliaire apériodique. — Le procédé indiqué au numéro précédent a l'inconvénient de n'être utilisable que pour une fréquence déterminée. On peut encore placer un instrument de mesure dans un circuit couplé

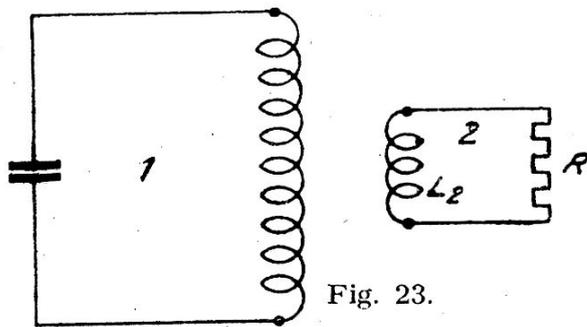


Fig. 23.

avec le circuit principal et pour assurer la fixité de ce circuit auxiliaire, on le prend apériodique (fig. 23).

Le rapport du courant dans l'ampèremètre de résistance R au courant à mesurer est

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{M\omega}{\sqrt{R^2 + L_2^2\omega^2}}$$

et l'addition du circuit 2 augmentera la résistance apparente de 1 de la quantité (n° 19) :

$$R'_1 = \frac{M^2\omega^2}{R^2 + L_2^2\omega^2} R.$$

En agissant sur le couplage on donnera à R'_1 la valeur convenable; on voit d'autre part sur la première formule qu'en prenant une inductance L_2 suffisante on pourra rendre le rapport $\frac{I_2}{I_1}$ indépendant de ω ; un étalonnage fixera sur la valeur exacte de ce rapport.

24. — Impédance équivalente à un circuit antirésonnant. — On qualifie d'*antirésonnant* un circuit monté dans les conditions du circuit 2

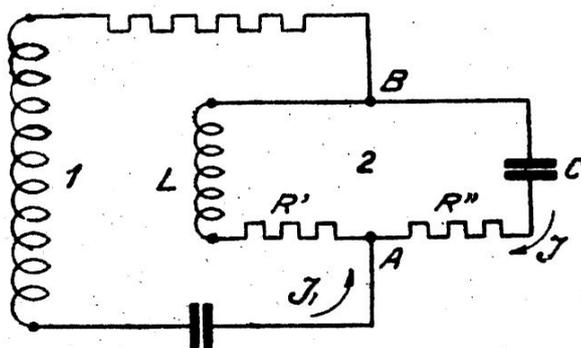


Fig. 24.

de la figure 24; nous nous proposons de chercher l'action qu'il produira sur les oscillations du circuit 1 excité par une force électromotrice donnée.

On pourrait traiter la question en considérant les deux circuits comme couplés par l'une de leurs parties communes ALB ou ACB; on obtiendrait facilement les expressions de \mathcal{J}_1 et \mathcal{J}_2 , mais il est préférable de rechercher directement l'impédance opposée au courant \mathcal{J}_1 entre A et B. On y arrive en remarquant que les impédances $R' + jL\omega$ et $R'' - \frac{j}{C\omega}$ sont montées en parallèle entre ces deux points; si \mathcal{Z}'_1 est l'impédance cherchée, on a alors (n° 2)

$$\frac{1}{\mathcal{Z}'_1} = \frac{1}{R' + jL\omega} + \frac{1}{R'' - j/C\omega} = \frac{R' - jL\omega}{R'^2 + L^2\omega^2} + \frac{R'' + j/C\omega}{R''^2 + 1/C^2\omega^2}$$

Nous nous bornerons aux fréquences d'excitation voisines de la fré-

quence de résonance du circuit 2; dans ces conditions, d'une part $LC\omega^2$ reste très voisin de l'unité, d'autre part R'^2 et R''^2 sont très petits vis-à-vis de $L^2\omega^2$ et de $1/C^2\omega^2$. On pourra alors écrire

$$(42) \quad \frac{1}{Z_1} = \frac{R}{L^2\omega^2} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega \quad \text{avec } R = R' + R''.$$

Si l'on suppose le circuit 2 accordé sur la pulsation de l'excitation, il vient :

$$(43) \quad Z_1 = \frac{L^2\omega^2}{R} = \frac{1}{C^2\omega^2 R} = \frac{L}{CR} = \frac{R}{d^2}$$

toutes ces valeurs se déduisant facilement de la première. Donc :

Quand on introduit, dans les conditions de la figure 2A, entre deux points A et B d'un conducteur un circuit 2 accordé sur la fréquence d'excitation, cela équivaut à l'introduction entre ces deux points d'une résistance pure dont la valeur est donnée par la relation 43. Cette résistance équivalente est considérable car d est généralement inférieur à 1/100.

Dans le circuit 2, on peut encore écrire :

$$(Z_1 + j)(R' + jL\omega) + j\left(R'' - \frac{j}{C\omega}\right) = 0$$

et en introduisant les mêmes simplifications que ci-dessus, on trouve comme rapport des amplitudes I et I_1

$$\frac{I}{I_1} = \frac{L\omega}{R} \quad \text{ou} \quad I_1 = I \cdot d.$$

Donc l'amplitude du courant dans le circuit 1 est égale à celle du courant dans le second, multipliée par d; elle est donc très faible.

Si nous posons maintenant

$$\frac{L^2\omega^2}{R} = R_1$$

la relation 42 peut s'écrire

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{1/jC\omega}$$

et on peut la traduire comme il suit :

1. Pour voir si ces conditions sont acceptables dans une gamme de fréquence assez étendue autour de la fréquence de résonance, supposons que l'on donne à ω une valeur telle que la réactance prenne la même valeur que la résistance totale R du circuit 2; on aura

$$L\omega - 1/C\omega = R \quad \text{et} \quad LC\omega^2 - 1 = RC\omega \div \frac{R}{L\omega} \div d < 1/100.$$

Une telle variation de fréquence ferait tomber à sa moitié l'intensité de résonance du circuit 1 excité directement; les conditions posées sont donc valables dans une gamme assez importante pour les applications pratiques.

Dans le voisinage de la fréquence propre d'un circuit antirésonnant, ce circuit peut être remplacé par une inductance, une capacité et une résistance en parallèle (fig. 25) : l'inductance et la capacité sont celles du circuit et

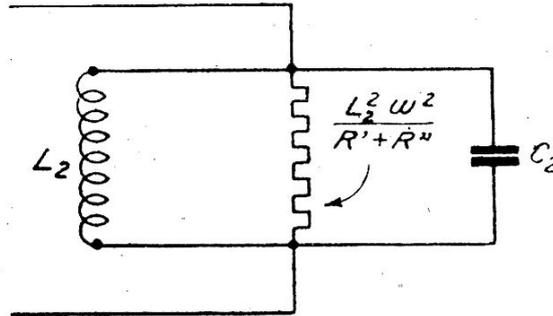


Fig. 25.

la résistance est celle qui équivaut au circuit au moment de l'accord. Cette interprétation physique est souvent commode.

25. — Résonance et antirésonance. — La qualification d'antirésonance donnée au montage de la figure 25 peut s'expliquer par la propriété que possède le circuit 2, quand on l'accorde, de rendre maximum l'impédance entre A et B. Il se trouve en quelque sorte, opposé au circuit résonnant monté entre A et B sur la figure 26; quand on accorde ce

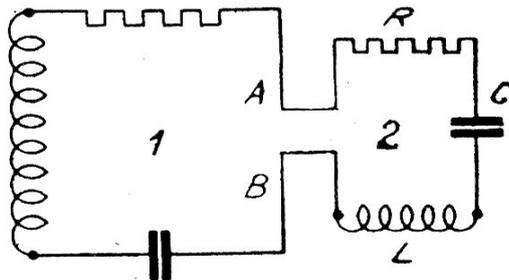


Fig. 26.

dernier circuit de façon à réaliser la condition $LC\omega^2 = 1$, l'impédance entre A et B prend sa valeur minimum R.

Mais on peut encore envisager cette appellation sous un autre aspect : Pour exciter des oscillations électriques dans un circuit oscillant, on peut utiliser soit une source de tension E_e , montée en série¹ (fig. 27-a), soit une source de tension E_e , montée en dérivation (fig. 27-b). Dans le cas a, le courant qui traverse le générateur est maximum quand la condition $LC\omega^2 = 1$ est réalisée; dans le second cas, c'est l'inverse.

1. L'excitation par induction magnétique ou par le champ d'une onde peut être considérée comme appartenant à ce cas.

la résultante OG. Quand on modifie C, L et R restant constants, le point G décrit la droite BR et le courant d'alimentation est minimum en R, il vaut alors $\frac{E_b}{Z^2} R$ et l'impédance devient une résistance pure

$$\frac{L^2\omega^2 + R^2}{R} \cdot \frac{L^2\omega^2}{R}$$

Le procédé *a* s'emploie quand on dispose d'une source de faible tension pouvant supporter un fort courant, c'est le cas des alternateurs ou du champ d'une émission agissant sur une antenne de réception. Le procédé *b* correspond au cas opposé, on le rencontre dans l'excitation d'un circuit par une lampe; le circuit est alors disposé en circuit antirésonnant dans le conducteur filament-plaque où l'on peut obtenir des tensions très élevées, mais qui ne peut supporter que des courants faibles.

Le montage antirésonnant est encore employé pour éliminer dans un circuit l'effet d'une excitation parasite de fréquence différente de celle sur laquelle on travaille; on l'appelle souvent alors *circuit bouchon*.

26. — Généralisation du problème du numéro 24. — Quand on emploie le montage antirésonnant dans le conducteur filament-plaque d'une

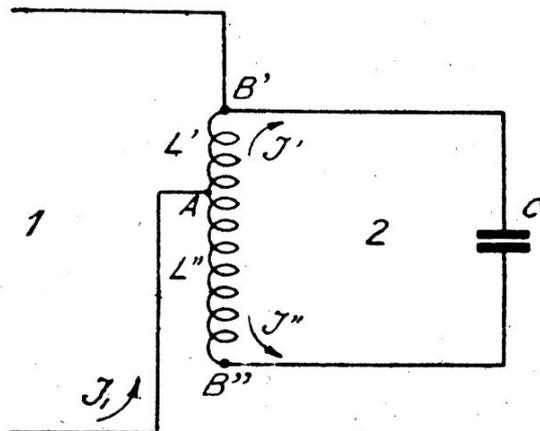


Fig. 29.

lampe, il arrive le plus souvent qu'une partie seulement de l'inductance soit introduite dans ce circuit, comme sur la figure 29; nous allons examiner ce cas quand le circuit 2 est accordé.

Soient L' , R' et L'' , R'' les inductances et résistances — ces dernières non figurées — des portions AB' et AB'' de la bobine, M la mutuelle entre ces deux portions et L l'inductance totale qui est, comme on sait :

$$L = L' + L'' + 2M.$$

Soit J' le courant dans la branche AB' compté positivement de A vers B' et J'' celui qui parcourt la branche $AB''CB'$, positif de A vers B'' on peut écrire :

$$\begin{aligned} (R' + jL'\omega) J' - jM\omega J'' &= \mathfrak{V} \\ -jM\omega J' + \left[R'' + j \left(L''\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] J'' &= \mathfrak{V} \end{aligned}$$

en appelant \mathfrak{V} la différence de potentiel entre A et B' . On en tire :

$$J_1 = J' + J'' = \mathfrak{V} \frac{R' + R'' + j \left[(L' + L'' + 2M)\omega - \frac{1}{C\omega} \right]}{M^2\omega^2 - L'\omega \left(L''\omega - \frac{1}{C\omega} \right) + R'R'' + j \left[R''L'\omega + R' \left(L''\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right]}$$

Si l'on suppose le circuit 2 accordé, le numérateur se réduit à $(R' + R'')$. D'autre part, comme $L'' = L - L' - 2M$, les deux premiers termes du dénominateur peuvent s'écrire $(L' + M)^2\omega^2$. Tenant enfin compte de ce que les résistances sont faibles par rapport aux réactances, il vient :

$J_1 = \frac{R' + R''}{(L' + M)^2\omega^2} \mathfrak{V}$. L'impédance relative au courant J_1 est donc à la résonance :

$$(44) \quad \mathfrak{Z}_1 = \frac{(L' + M)^2\omega^2}{R}$$

en désignant par R la résistance totale du circuit 2.

27. Circuit antirésonnant couplé à un second circuit. — Dans les applications à l'émission, le circuit antirésonnant est généralement couplé à un second circuit constitué par l'antenne; dans ce cas, ce n'est plus la résistance propre R_1 du premier circuit qui doit figurer dans les formules 43 et 44, mais celle que l'on déduit de la considération des circuits équivalents (n° 19). Si R_2 est la résistance du deuxième circuit et ρ le rapport de transformation, on remplacera dans les formules précédentes R par

$$R = R_1 + \rho^2 R_2.$$

CHAPITRE IV

Oscillations libres des circuits couplés.

1. — **Intérêt de l'étude des oscillations amorties.** — Pendant de nombreuses années les oscillations amorties ont été les seules que l'on sache produire, au moins avec quelque énergie; elles étaient uniquement employés pour les émissions, que l'on obtenait alors en excitant l'antenne par la décharge d'un condensateur à travers une inductance couplée à cette antenne. Le problème des oscillations libres amorties dans deux circuits couplés avait donc une importance capitale et comme il présente de très sérieuses difficultés de calcul, il a donné lieu à de nombreux travaux.

Aujourd'hui ce mode d'émission est relativement rare et se trouve limité à quelques petites stations anciennes qui n'ont pas encore pu faire les frais de postes à ondes entretenues. En 1940 toute émission amortie sera interdite, sauf sur de très faibles puissances.

Il ne faudrait pas en conclure que la connaissance des lois qui régissent les circuits couplés en oscillations amorties a perdu tout intérêt. Assurément les oscillations contraintes représentent le régime qui existe le plus souvent dans les circuits radioélectriques actuels; mais il ne faut pas perdre de vue que pendant l'établissement de ce régime les choses sont loin d'aller aussi simplement; il en est de même, au moment où la force électromotrice de contrainte cesse son action, et ces périodes transitoires ont une importance d'autant plus grande que les circuits sont moins amortis comme dans les récepteurs, et aussi que les changements de régime sont plus fréquents, comme dans le cas des manipulations très rapides. En outre, les parasites de toute nature sont une source permanente d'oscillations amorties dans les récepteurs.

On sait qu'en toutes circonstances les oscillations effectives sont dues à la superposition des oscillations contraintes et des oscillations libres (n° 8-I); les régimes transitoires se déduiront donc facilement de l'étude du chapitre précédent et du chapitre actuel.

Les difficultés d'une étude générale des circuits couplés en oscillations libres proviennent principalement de la complexité des formules auxquelles on aboutit. Fort heureusement, surtout si on laisse au second plan les circuits à étincelles, les amortissements sont le plus souvent très faibles

et les fréquences propres des circuits couplés sont très voisines; ces circonstances permettent d'introduire d'importantes simplifications. En outre, en raison de la faiblesse des amortissements, les oscillations libres de couplage présentent avec les oscillations contraintes certaines analogies qui peuvent servir de guide pour la conduite de la discussion.

Nous commencerons par écrire les équations générales qui représentent les phénomènes et par en tirer quelques conclusions de principe. Ensuite nous examinerons les cas les plus intéressants pour les applications. Aucune force électromotrice extérieure ne sera appliquée aux circuits, ceux-ci étant supposés mis en branle par la charge du condensateur du primaire ou une impulsion quelconque très brève.

2. — **Solution générale des équations aux oscillations libres.** — Prenons encore le cas du couplage magnétique (fig. 5-III); en posant comme précédemment

$$\frac{R}{2L} = a \quad \text{et} \quad \frac{1}{CL} = \eta^2$$

les équations s'écriront

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 i_1}{dt^2} + 2a_1 \frac{di_1}{dt} + \eta_1^2 i_1 + \frac{M}{L_1} \frac{d^2 i_2}{dt^2} &= 0 \\ \frac{M}{L_2} \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{d^2 i_2}{dt^2} + 2a_2 \frac{di_2}{dt} + \eta_2^2 i_2 &= 0 \end{aligned}$$

et on les résoudra en appliquant la méthode du numéro 6-I; on posera

$$(2) \quad i_1 = P_1 e^{\gamma t} \quad i_2 = P_2 e^{\gamma t}$$

ce qui conduira à l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} \gamma^2 + 2a_1 \gamma + \eta_1^2 & \frac{M}{L_1} \gamma^2 \\ \frac{M}{L_2} \gamma^2 & \gamma^2 + 2a_2 \gamma + \eta_2^2 \end{vmatrix}$$

ou, puisque $\frac{M^2}{L_1 L_2} = k^2$,

$$(2) \quad (1 - k^2) \gamma^4 + 2(a_1 + a_2) \gamma^3 + (\eta_1^2 + \eta_2^2 + 4a_1 a_2) \gamma^2 + 2(a_1 \eta_2^2 + a_2 \eta_1^2) \gamma + \eta_1^2 \eta_2^2 = 0$$

Les P_1 et P_2 seront reliés par les relations

$$(3) \quad \frac{P_2}{P_1} = - \frac{M}{L_2} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 2a_2 \gamma + \eta_2^2} = - \frac{L_1}{M} \frac{\gamma^2 + 2a_1 \gamma + \eta_1^2}{\gamma^2}$$

où on remplacera γ successivement par les quatre racines de l'équation 2.

Les a sont très petits par rapport aux τ , $\frac{2a}{\tau} = \frac{\delta}{\pi}$ qui est généralement inférieur à $1/100$. Dans ces conditions, la considération du cas où $a_1 = a_2 = 0$ nous donnera d'utiles indications sur les racines de l'équation 3 qui devient alors :

$$(4) \quad (1 - k^2) \gamma^4 + (\tau_1^2 + \tau_2^2) \gamma^2 + \tau_1^2 \tau_2^2 = 0$$

équation qui a deux racines en γ^2 réelles et négatives, extérieures à l'in-

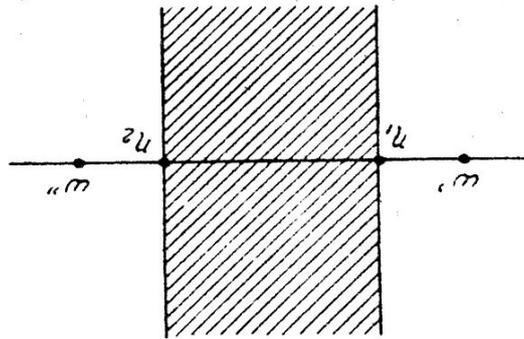


Fig. 1.

tervalle $(-\tau_1^2 - \tau_2^2)$. Soient $(-\omega'^2)$ et $(-\omega''^2)$ ces deux racines, les nombres ω' et ω'' seront disposés par rapport à τ_1 et τ_2 comme sur la figure 1; en outre, k^2 étant toujours petit, ω' et ω'' sont du même ordre de grandeur que τ_1 et τ_2 .

Chacune des intensités i_1 et i_2 solution de l'équation 1 a alors la forme

$$(5) \quad i = P'_+ e^{j\omega' t} + P'_- e^{-j\omega' t} + P''_+ e^{j\omega'' t} + P''_- e^{-j\omega'' t}$$

$P'_+, P'_-, P''_+, P''_- \dots$ désignant les coefficients correspondants aux racines $+j\omega'$, $-j\omega'$, $+j\omega''$, $-j\omega'' \dots$

En termes réels, cette expression devient :

$$(6) \quad i = Q' \sin(\omega' t + \varphi') + Q'' \sin(\omega'' t + \varphi'')$$

Si maintenant, a_1 et a_2 cessent d'être nuls, mais restent très petits, il est certain que les solutions de l'équation 2 resteront complexes, avec des parties imaginaires voisines de $\pm j\tau_1$ et $\pm j\tau_2$. Ces racines complexes pourront s'écrire :

$$(-a' + j\omega'), \quad (-a' - j\omega'), \quad (-a'' + j\omega''), \quad (-a'' - j\omega'')$$

La solution de 1 sera donc représentée sous forme réelle par des expressions

$$(7) \quad \begin{cases} i_1 = Q'_1 e^{-a'_1 t} \sin(\omega'_1 t + \varphi'_1) + Q''_1 e^{-a''_1 t} \sin(\omega''_1 t + \varphi''_1) \\ i_2 = Q'_2 e^{-a'_2 t} \sin(\omega'_2 t + \varphi'_2) + Q''_2 e^{-a''_2 t} \sin(\omega''_2 t + \varphi''_2) \end{cases}$$

où les a sont évidemment positifs, car les courants ne peuvent croître au delà de toute limite. De ces équations, on déduit ce résultat important :

Dans chaque circuit il existe simultanément deux courants superposés d'amortissements a' et a'' et de pulsations ω' et ω'' .

On remarquera que, de même qu'en régime contraint, les circuits n'oscillent plus sur leurs fréquences propres; en outre leurs coefficients d'amortissement disparaissent également de l'expression des oscillations, ils sont remplacés par des coefficients nouveaux, tout comme pour les fréquences.

Les quantités a et ω ayant été déterminées par la solution de l'équation 2, on terminerait le calcul par la recherche des constantes P, au nombre de huit : les relations 3 fourniraient quatre équations, les conditions initiales quatre autres. En supposant, par exemple, qu'au début les deux courants et la tension du condensateur secondaire soient nuls et que le condensateur primaire soit chargé à la tension V_0 , on aurait :

$$i_1 = 0, \quad i_2 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_1 = V_0 \quad \text{pour } t = 0.$$

Les opérations terminées, les imaginaires auront, d'elles-mêmes, disparu des formules, comme nous l'avons fait remarquer au numéro 9-I.

Tous ces calculs sont très laborieux et il y aurait un grand nombre de cas à examiner; aussi nous bornerons-nous à quelques-uns de ceux que l'on rencontre dans la pratique, en cherchant seulement à faire ressortir les résultats généraux qui, le plus souvent, sont seuls utiles. Pour présenter de la façon la plus simple l'allure des phénomènes, nous commencerons par étudier les oscillations libres de deux circuits sans résistance; les résultats énoncés ensuite pour des circuits résistants, paraîtront tout naturels.

3. — **Oscillations libres de deux circuits sans résistance et de même fréquence propre.** — Considérons deux circuits sans résistance ayant la même pulsation propre et supposons-les au repos à l'origine du temps, le condensateur du primaire étant chargé au potentiel V_0 . On aura :

$$a_1 = a_2 = 0 \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$$

et l'équation caractéristique 2 deviendra

$$(8) \quad (\gamma^2 + \eta^2)^2 - k^2 \gamma^4 = 0.$$

Les pulsations des oscillations de couplage seront donc ¹ :

$$(9) \quad \omega' = \frac{\eta}{\sqrt{1+k}} \quad \omega'' = \frac{\eta''}{\sqrt{1-k}}$$

et les solutions auront la forme

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} i_1 = \underset{1+}{P'} e^{j\omega' t} + \underset{1-}{P'} e^{-j\omega' t} + \underset{1+}{P''} e^{j\omega'' t} + \underset{1-}{P''} e^{-j\omega'' t} \\ i_2 = \underset{2+}{P'} e^{j\omega' t} + \underset{2-}{P'} e^{-j\omega' t} + \underset{2+}{P''} e^{j\omega'' t} + \underset{2-}{P''} e^{-j\omega'' t} \end{array} \right.$$

Les P_1 et P_2 seront liés par les relations (formule 3) :

$$\frac{P_2}{P_1} = - \frac{\gamma^2 + \eta^2}{\gamma^2} \cdot \frac{L_1}{M}$$

où on remplacera γ successivement par les quatre racines $\pm j\omega'$, $\pm j\omega''$.
On obtient ainsi

$$\frac{P_{2+}}{P_{1+}} = \frac{P_{2-}}{P_{1-}} = k \frac{L_1}{M} \quad \frac{P''_{2+}}{P''_{1+}} = \frac{P''_{2-}}{P''_{1-}} = -k \frac{L_1}{M}$$

Les conditions initiales $i_1 = i_2 = 0$ au temps $t = 0$ fournissent les équations

$$\frac{P'_{1+}}{1+} + \frac{P'_{1-}}{1-} = 0 \quad \frac{P''_{1+}}{1+} + \frac{P''_{1-}}{1-} = 0$$

d'où on déduit :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} i_1 = Q' \sin \omega' t + Q'' \sin \omega'' t \\ i_2 = \frac{k L_1}{M} (Q' \sin \omega' t - Q'' \sin \omega'' t) \end{array} \right.$$

Pour écrire les relations relatives aux valeurs initiales de v_1 et v_2 , remarquons que les équations 1 proviennent de la dérivation des suivantes

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} + v_1 + M \frac{di_2}{dt} &= 0 \\ M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + v_2 &= 0. \end{aligned}$$

On a donc pour $t = 0$:

$$\begin{aligned} L_1 \left(\frac{di_1}{dt} \right)_0 + M \left(\frac{di_2}{dt} \right)_0 &= -V_0 \\ M \left(\frac{di_1}{dt} \right)_0 + L_2 \left(\frac{di_2}{dt} \right)_0 &= 0 \end{aligned}$$

1. Ces formules sont à rapprocher des formules 30 du numéro 13-c-III donnant les fréquences de résonance de deux circuits couplés.

Ces relations déterminent Q' et Q'' et on a finalement

$$(12) \begin{cases} i_1 = -\frac{V_0}{2L_1\gamma} \left(\frac{\sin \omega' t}{\sqrt{1+k}} + \frac{\sin \omega'' t}{\sqrt{1-k}} \right) & v_1 = \frac{V_0}{2} (\cos \omega' t + \cos \omega'' t) \\ i_2 = -\frac{V_0}{2L_1\gamma} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \left(\frac{\sin \omega' t}{\sqrt{1+k}} - \frac{\sin \omega'' t}{\sqrt{1-k}} \right) & v_2 = \frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} (\cos \omega' t - \cos \omega'' t) \end{cases}$$

Les expressions des tensions peuvent s'écrire différemment; par exemple :

$$(13) \quad v_1 = V_0 \cos \frac{\omega' + \omega''}{2} t \cdot \cos \frac{\omega'' - \omega'}{2} t.$$

On peut donc considérer que la tension v_1 oscille à la fréquence $\frac{\omega'' + \omega'}{4\pi}$,

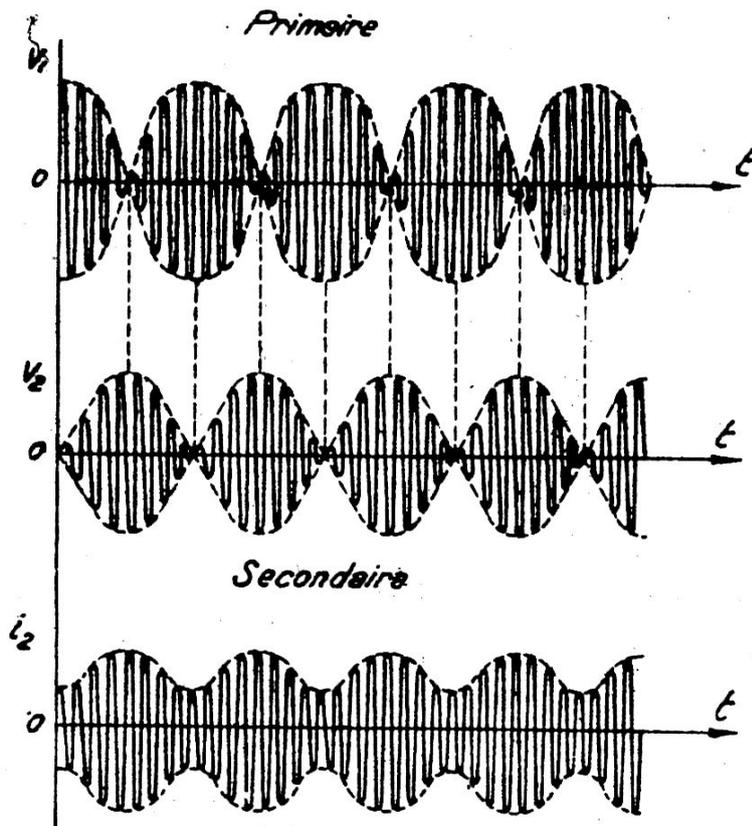


Fig. 2.

avec une amplitude variant entre 0 et V_0 à la fréquence beaucoup plus basse $\frac{\omega'' - \omega'}{4\pi}$ il en est de même pour v_2 ; c'est l'effet des battements entre les deux fréquences ω' et ω'' des deux courants superposés.

Les variations des tensions et courants sont représentés sur la figure 2; i_1 a par rapport à v_1 la même allure que i_2 par rapport à v_2 . On voit que le primaire commence par céder presque toute son énergie au secondaire, qui a naturellement emmagasiné une énergie maximum au moment où

celle du primaire est minimum; quand cet état est atteint, les rôles se renversent et c'est le deuxième circuit qui alimente le premier. On remarquera que l'amplitude du courant ne s'annule pas comme celle de la tension.

Il est intéressant d'étudier d'un peu près le courant. La période des

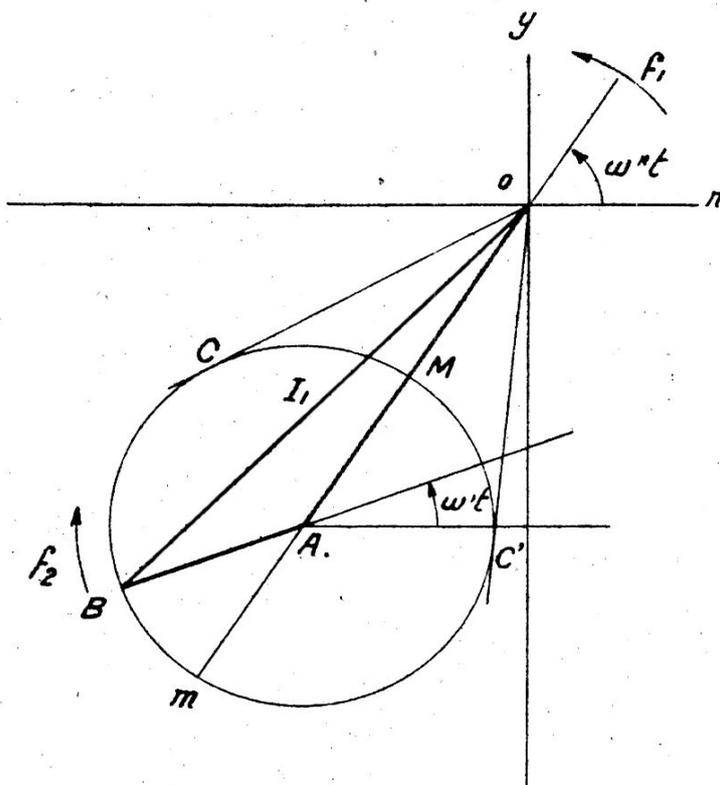


Fig. 3.

oscillations de haute fréquence représentées sur la figure 2, est constante pour la tension, comme le montre la formule 13, mais il n'en est pas de même pour le courant. Pour étudier ce dernier dont l'expression ne peut pas être mise sous la forme 13, le plus commode est d'avoir recours à la représentation géométrique.

Sur la figure 3, portons $OA = \frac{1}{\sqrt{1-k}}$ et $AB = \frac{1}{\sqrt{1+k}}$ de façon qu'ils fassent avec Ox les angles $(\omega''t + \pi)$ et $(\omega't + \pi)$; OB représentera à une échelle convenable l'amplitude I_1 et sa projection sur Oy le courant i_1 . Pendant la rotation du triangle OAB , le point B reste sur le cercle mobile de centre A sur lequel il tourne par rapport à M , dans le sens de la flèche f_2 puisque ω'' est supérieur à ω' ; OB tourne donc à la vitesse ω'' quand B est en C ou C' , il tourne à une vitesse supérieure quand B est sur l'arc CMC' , à une vitesse inférieure quand B est sur l'arc CmC' : En calculant la vitesse angulaire en m on voit qu'elle est supérieure à $\frac{\omega'' + \omega'}{2}$

La fréquence instantanée du courant est donc variable et toujours supérieure à $\frac{\omega'' + \omega'}{4\pi}$; comme celle de la tension est constante et égale à cette dernière valeur, il est impossible que cet état de choses se prolonge indéfiniment, car la tension dans un circuit résulte principalement du courant dans ce circuit, qui doit être sensiblement en quadrature

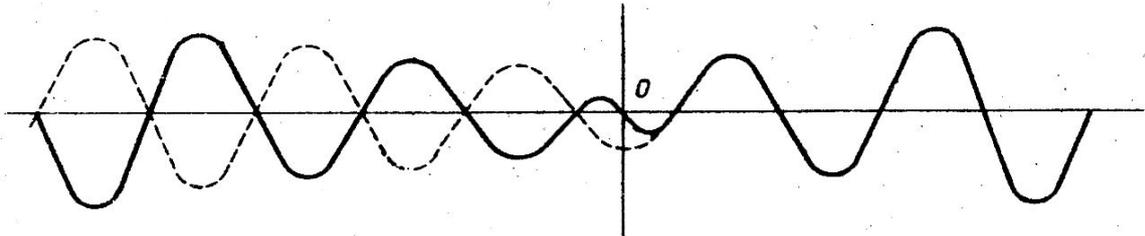


Fig. 4.

avec elle ¹; l'accord est rétabli par un brusque changement de phase de π sur la tension, au moment où l'amplitude de cette dernière s'annule pour $\cos\left(\frac{\omega'' - \omega'}{2}t\right) = 0$. La courbe de tension présente à ce moment la disposition indiquée par le trait plein de la figure 4; au passage en 0, elle se renverse, il y a deux alternances dans une demi-période.

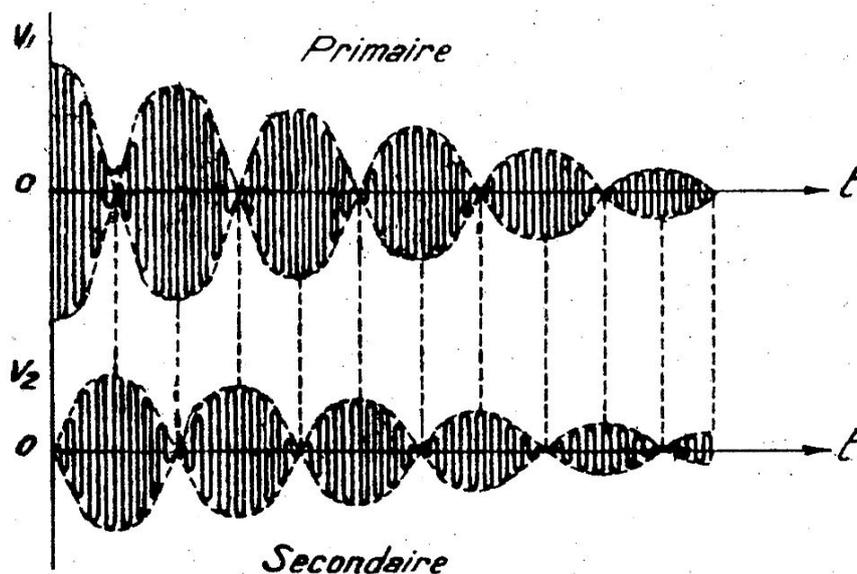


Fig. 5.

4. — Oscillations libres dans deux circuits amortis de même fréquence propre. — Si les amortissements ne sont plus nuls, mais restent petits, les considérations du numéro précédent restent valables dans leurs

1. Il n'y a pas quadrature exacte, comme dans un circuit isolé, car une partie de la tension est produite par l'induction du deuxième circuit.

grandes lignes, mais les amplitudes diminuent naturellement avec le temps. Quand les amortissements sont peu différents, les tensions aux bornes des condensateurs sont représentées par la figure 5, mais si on s'écarte de ces conditions, les nœuds des battements s'atténuent et peuvent même disparaître complètement; ils disparaissent également quand le couplage est très faible (n° 6).

Nous allons rechercher l'expression des pulsations et des amortissements dans le cas où les deux circuits sont accordés sur la même fréquence.

Ce qui a facilité la résolution de l'équation caractéristique dans le cas des résistances nulles c'est qu'elle se présentait sous forme d'une différence de deux carrés, il est donc naturel de chercher à la mettre encore sous une forme voisine de celle-là; on y arrive en introduisant la somme et la différence des amortissements. Avant de faire cette transformation nous remplacerons les amortissements par les décrets relatifs à la pulsation commune γ , ou mieux par les quotients $\frac{\delta}{\pi} = d$; on a alors $2a = d\gamma$.

Posons

$$\frac{d_2 + d_1}{2} = d_m \quad \text{et} \quad \frac{d_2 - d_1}{2} = d_a.$$

l'équation caractéristique peut s'écrire

$$(14) \quad (\gamma^2 + d_m \gamma + \tau^2)^2 - (k^2 \gamma^2 + d_a^2 \tau^2) \gamma^2 = 0.$$

Nous savons que les solutions en γ sont de la forme $(-a \pm j\omega)$ dans laquelle $\frac{a}{\omega}$ est petit en raison de nos hypothèses. D'autre part, les valeurs ω' et ω'' obtenues dans le cas des résistances nulles, montrent que ces pulsations diffèrent peu de τ , si k est assez petit. Dans ce cas, γ^2 sera voisin de $-\tau^2$ et le deuxième terme de 14 pourra s'écrire approximativement $(k^2 - d_a^2) \gamma^4$. Examinons deux cas :

a) Si $k^2 > d_a^2$

on peut poser :

$$k'^2 = k^2 - d_a^2$$

et l'équation 14 se dédouble en

$$\gamma^2 (1 \pm k') + d_m \gamma + \tau^2 = 0$$

ou
$$\gamma^2 + \left(\frac{d_m}{\sqrt{1 \pm k'}} \right) \gamma + \left(\frac{\tau}{\sqrt{1 \pm k'}} \right)^2 = 0.$$

Sous cette forme, on voit que les γ sont les racines que l'on trouverait pour un circuit simple dont le d serait $\frac{d_m}{\sqrt{1 \pm k'}}$ et la pulsation propre $\frac{\eta}{\sqrt{1 \pm k'}}$. On en déduit les relations suivantes :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega' = \frac{\eta}{\sqrt{1 + k'}} \\ \omega'' = \frac{\eta}{\sqrt{1 - k'}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta' = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \frac{\omega'}{\eta} \\ \delta'' = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \frac{\omega''}{\eta} \end{array} \right.$$

avec $k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} \quad k'^2 = k^2 - \left(\frac{\delta_2 - \delta_1}{2\pi} \right)^2$

On remarquera que les fréquences des oscillations de couplage sont très voisines de celles des oscillations de résonance en régime contraint (formule 30, n° 13-c-III). Cette coïncidence se comprend aisément, ces fréquences sont celles pour lesquelles les circuits se laissent le plus facilement traverser par les oscillations.

b) Si $k^2 < d_a^2$ on peut remplacer $(k^2 \gamma^2 + d_a^2 \eta^2)$ par $(d_a^2 - k^2) \eta^2$ et poser

$$d_a'^2 = d_a^2 - k^2.$$

Les γ seraient alors donnés par les équations

$$(16) \quad \gamma^2 + (d_m \pm d_a') \eta \gamma + \eta^2 = 0.$$

Nous ne poursuivrons pas l'étude de ce cas; il correspond à des couplages très faibles pour lesquels nous indiquons les résultats généraux au numéro suivant.

Les développements contenus dans ce numéro sont assurément loin de satisfaire un mathématicien ou tout simplement un esprit précis; ils abondent en petits, très petits, sensiblement, à peu près... sans que nous ayons fixé suffisamment le sens que nous attribuons à ces mots. Qu'on nous en excuse, il est impossible de faire autrement sans entrer dans des calculs interminables, écrire des formules de plusieurs lignes, considérer des cas innombrables, toutes longueurs incompatibles avec l'intérêt actuel de la question. Nous corrigerons cette impression de confusion dans l'esprit du lecteur en lui disant que *les résultats que nous avons obtenus s'appliquent bien à l'allure des oscillations qui prennent naissance dans les circuits de réception habituels sous l'influence d'impulsions parasites ou pendant les phénomènes transitoires*; ce que nous avons dit est d'ailleurs suffisant pour guider dans l'étude d'un cas concrétisé

par des données numériques. Dans les quelques numéros suivants, nous fixerons les traits principaux des phénomènes que l'on rencontre dans les émissions amorties.

5. — **Cas d'un couplage extrêmement lâche.** — Si le couplage est très lâche, l'équation 16 du numéro précédent montre que les deux pulsations ω' et ω'' sont très voisines. Les battements des ondes ont alors une très longue durée, les nœuds de la figure 5 s'écartent de plus en

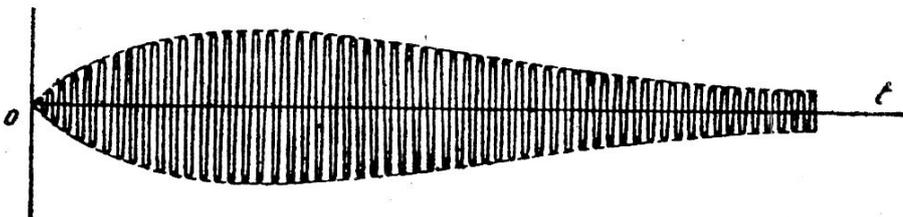


Fig. 6.

plus et les oscillations peuvent s'éteindre pratiquement avant la fin du premier battement. L'oscillation secondaire prend alors l'allure de la figure 6.

6. — **Primaire très amorti.** — Dans le cas des oscillations libres, le primaire est le circuit qui, dans l'état de repos initial, contient toute l'énergie du système, celui qui reçoit l'impulsion; si son amortissement est beaucoup plus grand que celui du secondaire, par exemple $\gamma_1 = 1$ et $\gamma_2 = 0,05$, et que le couplage ne soit pas trop fort, les oscillations du primaire deviennent très rapidement insensibles et le secondaire, mis en branle, continue à osciller seul, très sensiblement sur sa fréquence propre; l'allure de ses oscillations est encore celle de la figure 6.

7. — **Problème de l'onde unique. Excitation par choc.** — La présence de deux ondes dans l'énergie rayonnée par une antenne d'émission amortie est préjudiciable à un bon rendement des communications. Car, ou bien le récepteur est sélectif et alors il n'absorbe qu'une partie de l'énergie qui passe, ou bien il ne l'est pas et alors il est soumis aux brouillages. On a donc cherché de bonne heure à obtenir des conditions d'oscillations (décréments et fréquences propres des deux circuits) telles qu'il n'existe qu'une seule onde. Ce problème n'est pas insoluble mais, outre qu'il exigerait des relations précises entre les éléments du système couplé, difficiles à réaliser dans la pratique, la théorie montre que, quelles que soient les dispositions auxquelles elle conduit, l'énergie transmise au secondaire serait très faible; le rendement serait très mauvais.

Aussi a-t-on résolu le problème d'une façon toute différente, au moyen de l'excitation par choc, en réalisant les conditions du numéro 6. On a étudié l'étincelle pour la rendre très résistante; on l'a soufflée pour l'éteindre rapidement, et on a placé en série plusieurs éclateurs dont les résistances s'ajoutent (étincelle fractionnée). Nous n'entrerons pas dans les détails de cette question; insistons seulement sur *la nécessité de souffler les étincelles du primaire*. Sans cette précaution, le primaire, après avoir mis en branle le second circuit, troublerait la pureté de ses oscillations et réabsorberait une part importante de l'énergie cédée; on verra au numéro suivant que le rendement est toujours très faible quand le décrement du primaire est grand relativement à celui du secondaire.

8. — Rendement. — Pour obtenir le rendement, il suffit de calculer les énergies dépensées dans les deux circuits, le primaire étant encore celui qui a reçu à l'origine l'énergie d'excitation. Dans le cas où les décrets sont encore suffisamment petits et où le couplage se fait par induction magnétique, on trouve que *le rendement atteint son maximum pour des valeurs très peu différentes des fréquences propres du primaire et du secondaire*; son expression est alors [4]

$$r = \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\delta_1 \delta_2}{k^2 \pi^2}} \quad \text{si } \delta_2 > \delta_1$$

$$r = \frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\delta_1 \delta_2}{k^2 \pi^2}} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + k^2 \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2}} \right) \quad \text{si } \delta_2 < \delta_1$$

Ces formules sont à rapprocher de celle obtenue en oscillations entretenues (n° 16-III); $\frac{k^2 \pi^2}{\delta_1 \delta_2}$ n'est autre chose que le degré de couplage n^2 . On voit que dans le cas où le primaire est plus amorti que le secondaire, le rendement est toujours faible; c'est pourquoi dans l'excitation par choc, il est essentiel de couper le primaire dès qu'il a fourni un premier train d'énergie au secondaire.

9. — Divergences entre les théories précédentes et la pratique des circuits à étincelle. — *Les développements théoriques qui précèdent sont applicables aux phénomènes transitoires qui prennent naissance dans les récepteurs sous certaines actions; ils donnent aussi l'allure des phénomènes dans le cas des excitations très brèves obtenues par étincelles multiples et soufflées, bien soufflées; mais quand il s'agissait d'émetteurs où les deux circuits échangeaient de l'énergie pendant une partie*

importante de la durée des trains d'onde, on trouvait des résultats expérimentaux très différents. Non seulement la nature de l'étincelle est complexe en elle-même, mais les battements, en modifiant l'énergie qui la traverse, compliquent encore sa nature. On pouvait obtenir un ou même plusieurs couplages optima alors que la théorie n'en fait prévoir aucun, et l'onde la plus courte était ordinairement la moins amortie, contrairement à ce qu'indiquent les formules 15.

D'ailleurs, sur les deux ondes émises on n'en reçoit effectivement qu'une, c'est donc l'énergie mise en jeu dans cette onde qu'il faudrait évaluer et ce problème est à peu près inabordable au calcul. *L'expérience seule peut alors donner des résultats exacts*, car l'oscillographe permet d'analyser les détails intimes des phénomènes; la théorie joue cependant encore le rôle de guide pour le choix des mesures à faire et pour l'interprétation des résultats.

10. — **Calcul de l'intensité efficace d'une série périodique de trains d'oscillations. — Formule de Bjerkness.** — Dans certains cas, et en particulier dans la question des mesures, il est nécessaire de connaître l'expression de l'intensité efficace dans le secondaire, intensité définie comme au numéro 11-II; nous allons la chercher.

Dans le cas des mesures, où il s'agit par exemple de déterminer les constantes d'un des circuits en oscillation, on se place naturellement dans le cas le plus simple, obtenu pour un *couplage extrêmement lâche*; il faut alors disposer d'une énergie relativement importante, mais ce n'est généralement pas une difficulté dans les applications.

Dans ces conditions, la réaction du secondaire sur le primaire est tout à fait négligeable et on peut faire le calcul comme si le premier était simplement soumis à une force électromotrice ayant l'amortissement et la fréquence du primaire

$$e = E_0 e^{-at} \sin \tau_1 t.$$

Le courant dans le secondaire est alors la somme des courants d'oscillation libre (a_2, τ_2) et d'oscillation contrainte (a_1, τ_1); le calcul s'effectue le plus simplement par la méthode suivante: Le courant secondaire peut s'écrire

$$i_2 = Q_1 e^{-a_1 t} \sin (\tau_1 t + \varphi_1) + Q_2 e^{-a_2 t} \sin (\tau_2 t + \varphi_2).$$

A l'origine du temps, les éléments i_2, v_2 et e sont nuls et, à cause de la relation

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + v_2 = E_0 e^{-at} \sin \tau_1 t$$

la condition $(v_2)_0 = 0$ peut se remplacer par $\left(\frac{di_2}{dt}\right)_0 = 0$. En négligeant les a vis-à-vis des r , on obtient alors les deux équations

$$\begin{aligned} Q_1 \sin \varphi_1 + Q_2 \sin \varphi_2 &= 0 \\ Q_1 r_{11} \cos \varphi_1 + Q_2 r_{12} \cos \varphi_2 &= 0 \end{aligned}$$

d'où
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{r_{12}}{r_{11}} \\ \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{r_{11}}{r_{12}} \end{aligned}$$

Nous supposons r_{11} et r_{12} très peu différents, alors

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi \quad \text{et} \quad Q_1 = -Q_2 = Q$$

donc

$$i_2 = Q [e^{-a_1 t} \sin (r_{11} t + \varphi) - e^{-a_2 t} \sin (r_{12} t + \varphi)]$$

Comme il faut évaluer $\int_0^{\infty} i_2^2 dt$, nous calculerons d'abord i_2^2 ; or, le carré de la parenthèse contiendra des termes trigonométriques en $2 r_{11}$, $2 r_{12}$, $(r_{11} + r_{12})$, et $(r_{11} - r_{12})$, plus des termes indépendants des r . On calculera les intégrales partielles comme dans la note du numéro 11-II et on verra qu'en raison de la petitesse des a et de la différence $(r_{11} - r_{12})$ relativement aux r , il n'y a lieu de retenir que les termes indépendants des r et celui en $(r_{11} - r_{12})$. Dans ces conditions, on trouve

$$\int_0^{\infty} i_2^2 dt = Q^2 \frac{a_1 + a_2}{4 a_1 a_2} \frac{(a_2 - a_1)^2 + (r_{12} - r_{11})^2}{(a_2 + a_1)^2 + (r_{12} - r_{11})^2}$$

Pour obtenir la valeur de Q , remarquons que l'oscillation contrainte est

$$i_2^c = Q e^{-a_1 t} \sin (r_{11} t + \varphi)$$

Q est donc l'amplitude initiale de l'oscillation contrainte et cette amplitude n'est autre chose que le module du coefficient de $e^{(-a_1 + j r_{11}) t}$ dans l'expression imaginaire du courant contraint qui correspondrait à une force électromotrice $E_0 e^{(-a_1 + j r_{11}) t}$ (n° 12-I). Ce courant est la solution particulière de l'équation

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + 2 a_2 \frac{d i_2}{dt} + r_{12}^2 i_2 = \frac{E_0 (-a_1 + j r_{11})}{L_2} e^{-a_1 + j r_{11} t}$$

calculée comme au numéro 10-I. On trouve

$$\begin{aligned} Q^2 &= \left| \frac{E_0}{L_2} \frac{-a_1 + j r_{11}}{(-a_1 + j r_{11})^2 + 2 a_2 (-a_1 + j r_{11}) + r_{12}^2} \right|^2 = \\ &= \frac{E_0^2}{L_2^2} \frac{a_1^2 + r_{11}^2}{[(r_{12}^2 - r_{11}^2) + a_1 (a_1 - 2 a_2)]^2 + 4 r_{11}^2 (a_2 - a_1)^2} \end{aligned}$$

Le premier crochet du dénominateur peut s'écrire

$$(\gamma_1 + \gamma_2) \left[(\gamma_2 - \gamma_1) + a_1 \frac{a_1 - 2a_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \right] \div 2\gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_1)$$

En effet, d'une part γ_1 et γ_2 sont très voisins, d'autre part, $a_1 \frac{a_1 - 2a_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$ est très petit vis-à-vis de $\gamma_2 - \gamma_1$. Donc

$$Q^2 = \frac{E_o^2}{L_2^2} \frac{a_1^2 + \gamma_1^2}{4[(\gamma_2 - \gamma_1)^2 + (a_2 - a_1)^2]}$$

et

$$\int_0^\infty i_2^2 dt = \frac{E_o^2}{16L_2^2} \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} \frac{1}{(\gamma_2 - \gamma_1)^2 + (a_2 + a_1)^2}$$

Comme il y a N trains d'ondes à la seconde, on trouve finalement en introduisant les décrets et les fréquences

$$(17) \quad i_{2\text{eff}}^2 = N \frac{E_o^2}{64 \pi^2 f_1^2 L_2^2} \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_1 \delta_2} \frac{1}{\left(1 - \frac{f_2}{f_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2\pi}\right)^2}$$

C'est la formule de Bjerkness; on remarquera toutes les restrictions qu'elle comporte et que nous avons soulignées.

11. — Secondaire aperiodique. — Application aux mesures. — Si le secondaire est aperiodique, sa fréquence propre devient nulle et il n'introduit qu'un terme en $e^{-\alpha_2 t}$; il n'y a plus de battements et les oscillations se font à la fréquence f_1 du primaire; le diagramme ondulé figuratif des oscillations n'est plus symétrique par rapport à l'axe du temps, sa courbe moyenne a pour ordonnées $e^{-\alpha_2 t}$.

C'est souvent à un tel dispositif que l'on a recours pour mesurer l'intensité efficace dans un circuit; on évite ainsi d'y introduire un thermique dont la forte résistance élèverait l'amortissement; comme en oscillations entretenues (n° 23-III) on peut réduire considérablement l'influence de cette résistance en employant un couplage extrêmement lâche.

Le thermique doit, bien entendu, donner des indications comparables à celles que donnerait un appareil placé dans le primaire; pour cela il faut que les intensités efficaces dans les deux circuits soient proportionnelles; et que les indications soient indépendantes de la fréquence. On trouve que ces deux conditions sont remplies, comme en oscillations entretenues, quand la réactance du secondaire est forte par rapport à sa résistance.

12. — Analogie mécanique. — On obtient des oscillations mécaniques amorties tout à fait analogues à celles des circuits couplés en considérant

deux pendules $O_1 A_1$ et $O_2 A_2$ oscillant autour d'une tige horizontale XY et couplés par un ressort à boudin R enfilé sur XY et relié à chacun des pendules près de son point d'attache (fig. 7).

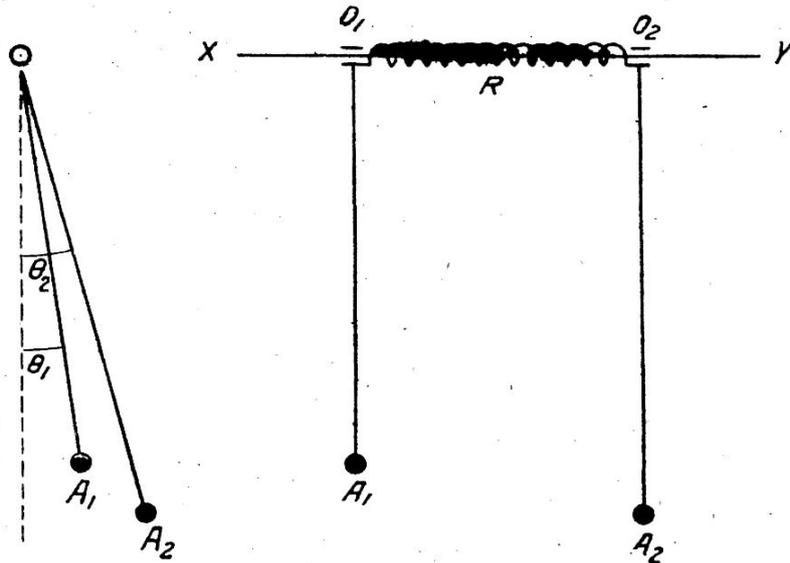


Fig. 7.

En représentant par I les moments d'inertie, $\rho\theta$ les moments de la pesanteur, $\varphi \frac{d\theta}{dt}$ les résistances de l'air et par C le couple de torsion du ressort R pour un angle de 1 radian, on aurait pour de petites oscillations :

$$I_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \varphi_1 \frac{d\theta_1}{dt} + (\rho_1 - C) \theta_1 + C\theta_2 = 0$$

$$C\theta_1 + I_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \varphi_2 \frac{d\theta_2}{dt} + (\rho_2 - C) \theta_2 = 0$$

équations de forme identique à celles qui régissent les tensions des condensateurs de deux circuits électriques couplés par capacité.

C'est un mécanisme facile à réaliser et qui permettrait d'étudier expérimentalement les phénomènes de couplage dans tous les cas possibles.

BIBLIOGRAPHIE

1. BOUTHILLON (L.), *Théorie et pratique des radio-communications*. — III. Oscillations en haute fréquence. — 1^{re} partie : Les oscillations électriques. — Delagrave, Paris.
2. MERCIER (J.), *Les circuits oscillants*. — Introduction à l'étude de la Radiotechnique. — Delagrave, Paris.
3. VIEILLARD (P. M.). — *L'émission en ondes amorties*. — Chiron, Paris.
4. VON MACKU (B.). — *Théorie des oscillations de deux circuits couplés*. — Jahrbuch der Draht. Teleg., 2, 1909, 251-294.

CHAPITRE V

Courbes de résonance et sélectivité

§ I. — COURBES DE RÉSONANCE

1. — **Définition et usage des courbes de résonance.** — Étant donné un circuit soumis à l'action d'une force électromotrice de pulsation donnée, on appelle courbe de résonance la courbe obtenue en portant en abscisses les différentes fréquences propres sur lesquelles on accorde le circuit et en ordonnées les amplitudes des intensités correspondantes ou les carrés de ces amplitudes. On peut également envisager un système de circuits couplés et la courbe de résonance de l'un quelconque d'entre eux. Cette définition n'est d'ailleurs pas exclusive, on peut aussi apprécier les qualités de résonance d'un circuit ou d'un système de circuit en laissant les circuits fixes et en faisant varier la fréquence de la force électromotrice¹; pour les faibles variations de fréquence les résultats sont identiques quand il s'agit de circuits simples, il n'en est pas toujours de même avec les circuits couplés.

Au temps des émissions amorties, les courbes de résonance ont joué un rôle capital; elles étaient à la base de la seule méthode que l'on pût employer pour mesurer les fréquences des oscillations et la résistance des circuits; il fallait connaître non seulement leur allure, mais posséder sur elles des renseignements quantitatifs, aussi précis que possible. Aujourd'hui, avec les ondes entretenues, leur usage dans les mesures est moins fréquent; les mesures de fréquence par résonance sont grossières par rapport à celles que l'on obtient par d'autres procédés tels, par exemple, que les méthodes de zéro ou de battements et on possède des procédés plus rapides pour la mesure des résistances.

Néanmoins l'étude de l'allure des courbes de résonance est nécessaire pour apprécier correctement la façon dont se comportent les circuits, principalement à la réception. Mais, alors que pour les mesures il importait surtout de bien connaître ces courbes dans le voisinage de leur sommet, ce qui permettait de simplifier considérablement les équations utilisées, les exigences croissantes de la réception nécessitent souvent une

1. C'est dans ces conditions que nous avons tracé les courbes des figures 15, 16 et 17-III.

étude des courbes sur une grande étendue. Cette considération et la complexité habituelle des circuits récepteurs rendent impossible une exposition d'ensemble du sujet qui doit être traité dans chaque cas particulier au moyen des connaissances générales qui ont été exposées dans les chapitres précédents et le seront par la suite. Nous nous limiterons donc ici à un bref exposé des propriétés des courbes de résonance pour des fréquences voisines de la fréquence de résonance.

Comme l'amplitude d'un courant est toujours proportionnelle à celle de la force électromotrice, l'échelle des ordonnées peut être arbitraire; on choisit celle qui représente l'ordonnée maxima par l'unité, ce qui revient à porter en ordonnée le carré I^2/I_{\max}^2 du rapport de l'intensité correspondant à une fréquence donnée, à l'intensité maxima.

2-a. — Courbe de résonance d'un circuit simple en oscillations entretenues. — En appelant y le rapport I^2/I_{\max}^2 on a :

$$y = \frac{R^2}{R^2 + \frac{L^2}{\omega^2} (\omega^2 - \eta^2)^2}$$

η étant la fréquence propre du circuit.

Posons
$$\frac{\omega - \eta}{\omega} = x$$

x est la variation relative de fréquence autour de la résonance, on lui donne parfois le nom de dissonance. Si l'on se limite à des fréquences très voisines de η on peut écrire

$$\omega^2 - \eta^2 \doteq 2 \omega^2 x$$

et en tenant compte de ce que $\frac{R}{L\omega} = \frac{\delta}{\pi} = d$, on trouve la forme très simple:

$$(1) \quad y = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\frac{d}{2}}\right)^2}$$

La figure 1 donne quelques courbes de résonance correspondant à différents décrets.

2-b. — Courbe de résonance d'un circuit excité par une force électromotrice amortie. — Nous avons établi au numéro 10-IV, formule 17, l'expression du carré de l'intensité efficace dans un circuit amorti

excité par une force électromotrice amortie; on en déduit immédiatement, en donnant à x et y les mêmes acceptions qu'au numéro précédent :

$$(2) \quad y = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\frac{\delta_1 + \delta_2}{2\pi}} \right)^2}$$

δ_1 et δ_2 étant les décrets de la force électromotrice et du circuit. Il y a lieu de ne pas oublier que la formule 17 a été établie pour un couplage extrêmement lâche; la formule 2 est naturellement soumise aux mêmes restrictions.

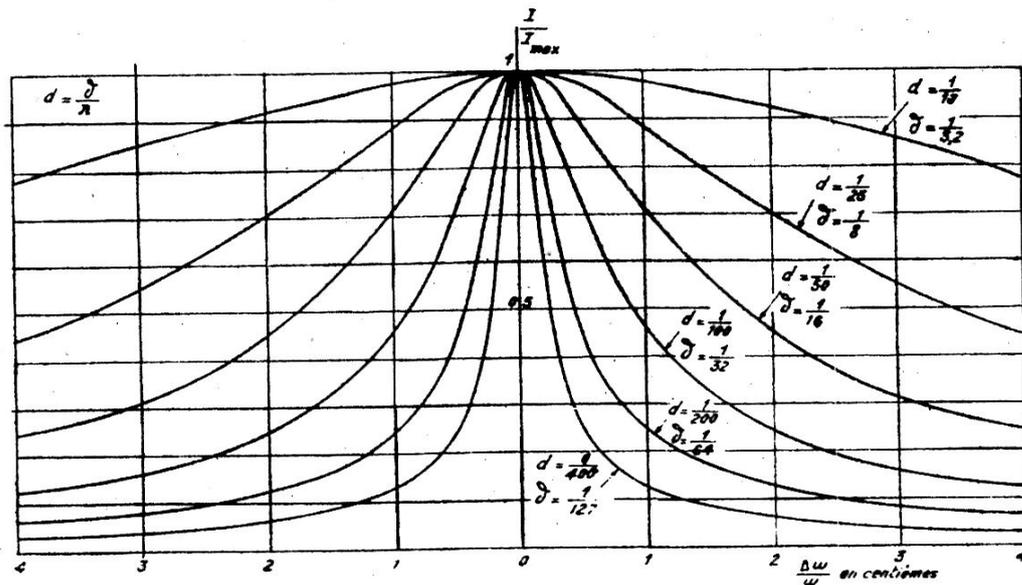


Fig. 1.

Courbes de résonance pour différents décrets.

3. — Mesure du décret par la courbe de résonance. — Il est clair que si l'on a tracé expérimentalement la courbe représentée par la formule 1, on peut en déduire facilement la valeur de δ_1 :

$$\delta_1 = 2\pi x \sqrt{\frac{y}{1-y}}$$

Il est difficile de connaître x exactement car l'axe des y devrait passer par le maximum de la courbe qui est évidemment mal déterminé; mais si l'on trace une parallèle à ox la courbe y détermine un segment AB et l'on a évidemment

$$\delta_1 = \pi \cdot AB \sqrt{\frac{y}{1-y}}$$

Il serait même inutile de tracer la courbe, il suffirait de déterminer les

fréquences en A et B (fig. 2) et de mesurer l'intensité du courant en ces points; en prenant $y = \frac{1}{2}$ les opérations et calculs seraient simplifiés au maximum.

Cependant, étant donné le caractère approché de la formule 2, et les troubles accidentels que peuvent produire dans les mesures les irrégula-

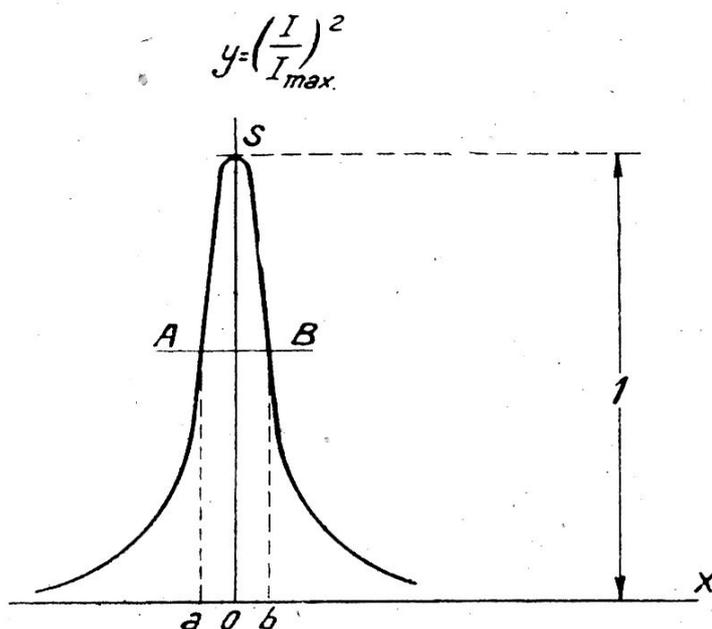


Fig. 2.

rités de l'excitation, assez fréquentes avec les générateurs habituels. il est prudent d'employer la partie la plus élevée possible de la courbe et de déterminer de nombreux points, surtout quand elle est un peu aplatie. Comme d'autre part il serait dangereux de se placer trop près du sommet, car les erreurs relatives dans la mesure des fréquences prendraient une importance exagérée, on voit que ces opérations demandent beaucoup de soin et un examen minutieux des conditions où elles sont faites.

La méthode suivante permet de supprimer les calculs tout en tenant compte, dans les meilleures conditions, de l'ensemble de la courbe. Comme les tracés de la figure 1 ne dépendent que du décrément, on peut les construire pour un grand nombre de valeurs de ce paramètre ; après avoir dessiné sur un calque la courbe donnée par les mesures, on cherchera la meilleure coïncidence possible avec une des courbes du réseau, dont le décrément sera celui du circuit étudié.

Nous venons de remarquer qu'il suffirait de connaître la différence des fréquences correspondant à deux points de la courbe. Dans ces condi-

tions, la mesure absolue des fréquences devient inutile et il suffit de lire avec soin les graduations du condensateur d'accord du circuit en expérience. Si C_1 et C_2 sont les valeurs exactes correspondant à deux opérations et C_0 la valeur approchée correspondant au maximum, on a, au second ordre près

$$x_2 - x_1 = \frac{r_2 - r_1}{\omega} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} - \sqrt{\frac{C_1}{C_0}}$$

et si $x_2 - x_1$ est assez petit :

$$x_2 - x_1 \doteq \frac{1}{2} \frac{C_2 - C_1}{C_0}$$

car on peut écrire $\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} = \sqrt{1 + \frac{C_1 - C_2}{C_2}} \doteq 1 + \frac{C_1 - C_2}{2C_2}$

4. — Précautions à prendre dans les mesures. — Nous avons rappelé au numéro 2-b que le circuit générateur des oscillations amorties qui produisent *la force électromotrice d'excitation doit être en couplage extrêmement lâche avec le circuit en expérience*; nous verrons au numéro 5-VII qu'il en est de même quand la force électromotrice est entretenue; *c'est une considération sur laquelle il faut veiller particulièrement sous peine d'obtenir des résultats tout à fait inexacts.*

On reconnaît facilement que le couplage est faible en montant dans le circuit du générateur un thermique dont les indications doivent rester invariables quand on change l'accord du circuit couplé; mais pour obtenir toute la précision désirable, il est préférable de s'assurer que la fréquence du générateur n'est pas modifiée par l'accord. Il peut en effet se produire des variations non négligeables de la fréquence sans changement notable de l'intensité.

§ II. — SÉLECTIVITÉ

5. — Courbe et facteur de Sélectivité. — La sélectivité d'un système est assez difficile à définir d'une façon précise; c'est évidemment la propriété qui permet à ce système de recevoir les signaux désirés sans que l'on soit gêné par les autres, mais il est évident que cette condition ne peut être réalisée si les signaux perturbateurs sont très forts; et dans les autres cas, la limite est difficile à fixer des signaux qui ne devront pas troubler la réception.

Pour résoudre complètement les problèmes qui peuvent se poser, il est nécessaire de posséder la courbe de résonance du récepteur, tracée

pour l'intensité ou la tension à la sortie et dans laquelle les abscisses sont les fréquences d'accord; c'est en fait la *courbe de sélectivité* ¹.

On considère souvent, sous le nom de *facteur de sélectivité* une expression simplifiée du rapport $\frac{I_{\text{Max}}}{I}$ ou $\frac{V_{\text{Max}}}{V}$ en fonction du désaccord $\Delta \omega$ supposé petit; mais il ne faut pas oublier que ce facteur ne convient souvent qu'à des désaccords extrêmement faibles et que l'on peut commettre des erreurs très grossières en lui donnant une application trop étendue (n° 8).

6. — Facteur de Sélectivité d'un circuit simple. — Dans le cas d'un circuit oscillant unique, le facteur de sélectivité est évidemment :

$$S = \frac{I_{\text{max}}}{I} = \sqrt{1 + \frac{(L\omega - 1/C\omega)^2}{R^2}}$$

qu'on peut facilement écrire :

$$S = \sqrt{1 + \theta^2 (\Delta\omega)^2 \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\eta}{\omega}\right)^2}$$

en désignant par η la pulsation propre du circuit, par ω celle de l'excitation et par $\Delta \omega$ leur écart; θ est la constante de temps du circuit, égale à $2L/R$.

Le facteur $\frac{1}{4} \left(1 + \frac{\eta}{\omega}\right)^2$ est toujours négligeable en haute fréquence; mais il est bon d'en tenir compte, dans certains cas, en basse fréquence en raison de la dissymétrie importante qu'il introduit quand $\frac{\omega - \eta}{\omega}$ est grand.

Dans les autres cas, on a simplement :

$$(3) \quad S = \sqrt{1 + \theta^2 (\Delta\omega)^2}$$

Il est facile de voir que S^2 n'est autre chose que l'inverse de la quantité y donnée par la formule 1.

Il est intéressant de comparer à l'expression précédente celles qui correspondent aux systèmes le plus souvent employés; c'est ce que nous allons faire pour quelques-uns d'entre eux.

1. Dans la pratique, on remplace le plus souvent la courbe de résonance par celle obtenue en portant en ordonnées les inverses de celles de la courbe de résonance et on emploie une échelle logarithmique (n° 12).

7. — Facteur de Sélectivité de p circuits faiblement couplés. —

Considérons p circuits identiques dont chacun est couplé très lâchement avec le suivant; les équations du système seront :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z} \mathcal{J}_1 + jM\omega \mathcal{J}_2 &= E \\ jM\omega \mathcal{J}_{q-1} + \mathfrak{Z} \mathcal{J}_q + jM\omega \mathcal{J}_{q+1} &= 0 \dots (q = 2, 3, 4 \dots, p - 1) \\ jM\omega \mathcal{J}_{p-1} + \mathfrak{Z} \mathcal{J}_p &= 0 \end{aligned}$$

avec des notations évidentes. Les couplages étant extrêmement faibles, la réaction d'un circuit sur le précédent sera négligeable et l'on pourra dans chaque équation supprimer $jM\omega \mathcal{J}_{q+1}$ en face de $\mathfrak{Z} \mathcal{J}_q$. Il viendra alors :

$$I_p = |\mathcal{J}_p| = \frac{(M\omega)^{p-1}}{Z^p} E$$

En désignant par L, C, R les éléments de l'un des circuits, on pourra écrire :

$$S^2 = \left(\frac{I_p^{max}}{I_p} \right)^2 = \left(\frac{Z^2}{B^2} \right)^p = \left(1 + \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}{R^2} \right)^p$$

ou, en appelant η la pulsation propre d'un circuit isolé et θ sa constante de temps (n° 17-a — II) :

$$S^2 = \left[1 + \left(\frac{L(\omega^2 - \eta^2)}{R\omega} \right)^2 \right]^p = [1 + \theta^2 (\Delta\omega)^2]^p$$

Développant la puissance p^{me} de la parenthèse et ne conservant que les deux premiers termes pour les cas où $(\theta\Delta\omega)^2$ est très petit, il vient :

$$(4) \quad S = \sqrt{1 + (\theta\sqrt{p})^2 (\Delta\omega)^2}$$

Avec des circuits ordinaires ces très faibles couplages ne présentent pas d'intérêt car l'intensité finale serait trop faible; mais les couplages par lampe rentrent dans le problème que nous venons de traiter par suite de l'absence de réaction d'un circuit sur le précédent.

En comparant les formules 3 et 4, on pourrait être tenté de dire que le système de p circuits est équivalent à un circuit simple dans la constante de temps serait \sqrt{p} fois plus forte; mais si cette équivalence est correcte pour des désaccords très petits, elle conduirait à des interprétations grossièrement erronées dans d'autres cas; nous allons examiner de près cette question qui a déjà donné lieu à maintes confusions.

8. — Constante de temps et durée d'établissement dans un système de circuits. — Au numéro 17-II, nous avons défini la constante de temps

d'un circuit simple comme le temps nécessaire pour qu'un courant qui s'évanouit, tombe de 1 à $1/e$; celle d'un circuit oscillant est

$$\theta_1 = \frac{1}{a} = \frac{2L}{R}$$

et nous avons vu que cette quantité renseigne bien sur la durée pratique d'établissement ou d'évanouissement d'un courant, cette durée étant égale à 3 ou 4 θ_1 . Mais cette propriété de la constante de temps ainsi définie ne se conserve pas pour un système de circuits.

Si en effet, la décroissance du courant se fait suivant la loi

$$(5) \quad i = I e^{-\frac{t}{\theta_1}} \sin \omega t$$

dans le circuit simple, il n'en est pas de même dans un système et l'on doit remplacer la relation précédente par une autre

$$(6) \quad i = I \varphi(t) \sin \omega t$$

où $\varphi(t)$ est une fonction très différente de l'exponentielle, égale à 1 pour $t = 0$.

Pour calculer la constante de temps précédemment définie dans un tel cas, il faudrait chercher la quantité Θ qui satisferait à la relation

$$\varphi(\Theta) = 1/e;$$

Θ étant connu, on saurait que le courant tombe de 1 à $1/e$ dans le temps Θ , mais cette durée n'aurait en général aucun intérêt; ce qu'il est utile d'obtenir, c'est le temps Θ' au bout duquel $\varphi(t)$ devient négligeable; il n'existe évidemment aucune raison pour que $\varphi(4\Theta')$ soit très petit

comme l'est $e^{-\frac{4\Theta'}{\Theta}}$

Si, d'autre part, ne conservant de la notion de constante de temps que l'idée qu'elle doit caractériser la durée d'établissement ou d'évanouissement, on la définit par la condition :

$$\varphi(\Theta') = \varepsilon$$

ε étant un nombre beaucoup plus petit que l'unité, 0,05 par exemple, le temps Θ' reprendra son intérêt pratique.

Quand il s'agit des p circuits considérés au numéro précédent, la fonction $\varphi(t)$ est ¹

1. Voir en fin de chapitre la référence aux études de MM. Rocard et Fayard. Le calcul du second est plus élémentaire, mais il emploie une notation assez spéciale; on s'assurera sans peine que l'expression qu'il écrit $\frac{\pi n}{s} (1 + p)$ n'est autre chose que $\frac{R + L^2 \omega^2 / \rho}{2L} t$ où ρ est la résistance intérieure de la lampe; le numérateur est la résistance effective d'un des circuits oscillants shunté par la résistance de la lampe, de telle sorte que la fraction est l'inverse de la constante de temps d'un des circuits composants.

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t}{\theta_1}} \left[1 + \frac{1}{1} \frac{t}{\theta_1} + \frac{1}{1.2} \frac{t^2}{\theta_1^2} + \dots + \frac{1}{(p-1)!} \frac{t^{p-1}}{\theta_1^{p-1}} \right]$$

où $\theta_1 = \frac{2L}{R}$, L et R étant l'inductance et la résistance communes à tous les circuits. En posant $\frac{t}{\theta_1} = x$

nous pourrons écrire :

$$\varphi(\theta_1 x) = e^{-x} \left[1 + \frac{1}{1} x + \frac{1}{1.2} x^2 + \dots + \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} \right]$$

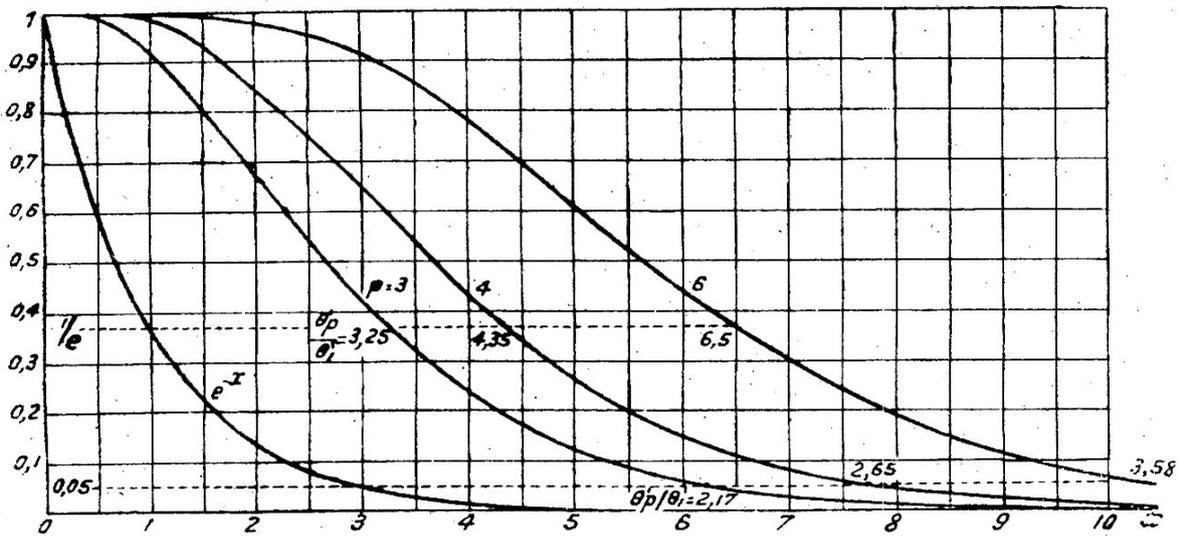


Fig. 3.

et le temps nécessaire pour réduire le courant à une fraction α de sa valeur initiale se déduira des solutions x_p et x_1 des équations

$$\begin{aligned} \varphi(\theta_1 x) &= \alpha \text{ pour le système} \\ e^{-x} &= \alpha \text{ pour le circuit simple.} \end{aligned}$$

Les durées θ_p et θ_1 de chute du courant de 1 à α seront dans le même rapport que x_p et x_1 .

Sur la figure 3, on a tracé les courbes

$$y = e^{-x} \quad \text{et} \quad y = \varphi(\theta_1 x) \quad \text{pour } p = 3, 4, 6.$$

On voit que le rapport θ_p/θ_1 dépend essentiellement de l'ordonnée α choisie; il varie de 1 pour $\alpha = 0$, à l'infini pour $\alpha = 1$; on a en particulier :

	trois circuits	quatre circuits	six circuits
$\alpha = 1/e$	3,25	4,35	6,5
$\alpha = 0,05$	2,17	2,65	3,6

Si l'on remarque en outre que les considérations du numéro précédent

amenaient à la valeur \sqrt{p} pour le rapport θ_p/θ_1 , on voit que *l'acception rappelée ci-dessus de la constante de temps conduit à des contradictions et qu'elle n'offre aucun intérêt pour caractériser les systèmes de circuits*; il serait préférable donc de ne pas employer cette expression en ce qui les concerne, car elle a au moins le défaut de prêter à confusion; il vaudrait mieux utiliser la *durée d'établissement*.

On peut, il est vrai, reprocher à la durée d'établissement la difficulté d'une définition précise : en toute rigueur elle est infinie et pour les besoins de la pratique, il faudrait fixer par convention la valeur de α pour laquelle on admettrait que le courant est effectivement établi ou évanoui. L'observation des courbes montre d'ailleurs que cela ne serait pas toujours suffisant, car dans certains cas, il n'y a pas lieu de comprendre dans cette durée la région de départ de la courbe qui est presque horizontale sur une certaine étendue; cette région ne produit pas de déformation des signaux, mais seulement un décalage, le même pour tous.

Remarquons encore que la forme 4 du facteur de sélectivité de p circuits ne représente convenablement les faits que pour de très petits désaccords. Si nous l'appliquons au cas où elle donnerait $\frac{I_{\max}}{I} = \sqrt{2}$, le terme $p\theta_1^2 \Delta\omega^2$ serait égal à 1; or le premier terme négligé dans le développement en série est $\frac{p(p-1)}{2} \theta_1^4 \Delta\omega^4$ dont le rapport au précédent est alors $\frac{p-1}{2p}$; pour $p = 4$, cela fait $3/8$ et un tel écart est tout à fait inadmissible. On verrait très facilement que dans le cas d'un seul circuit, l'erreur relative correspondant à $\frac{I_{\max}}{I} = \sqrt{2}$ serait seulement $\frac{d}{2}$.

9. — Facteur de sélectivité de deux circuits très fortement couplés.
— Soit encore deux circuits couplés de constante de temps commune θ . En se reportant à la formule 29 du numéro 13-c-III, on voit qu'au voisinage d'une pointe de résonance la sélectivité est :

$$S^2 \doteq 1 + \left[\frac{2(1 \pm k)}{d} \frac{\Delta\omega}{\omega_s} \right]^2$$

Mais on a :

$$d = \frac{R}{L\omega_s} = \frac{2}{\theta\omega_s}$$

On peut donc écrire :

$$S \doteq \sqrt{1 + [(1 \pm k)\theta]^2 (\Delta\omega)^2}$$

Dans le cas actuel les observations du numéro précédent ne s'appliquent

pas, comme on pourrait s'en assurer en examinant les approximations admises et l'on peut dire que dans le voisinage de ses pointes de résonance, le système de deux circuits très fortement couplés est équivalent à un circuit simple dont la constante de temps serait égale à celle de l'un des circuits, supposé isolé, multipliée par $(1 \pm k)$.

Le signe (+) s'applique au point S' de la figure 6-III, pour lequel $\omega' = \frac{\eta}{\sqrt{1+k}}$ et le signe (—) au point S'' correspondant à $\omega'' = \frac{\eta}{\sqrt{1-k}}$; la sélection est donc améliorée par rapport à un circuit simple, pour la plus basse des deux fréquences de couplage.

10. — Cas de deux circuits moyennement couplés. — Dans le cas où les deux circuits de constante de temps θ se trouvent au couplage critique ou à un couplage légèrement inférieur, le coefficient de sélectivité est donné par la formule générale du numéro 13-c-III :

$$S^2 = 1 + \left(\frac{n^2 - 1 - \xi^2}{2n} \right)^2$$

dans laquelle le terme du second degré est nul pour $n = 1$ et voisin de zéro pour des valeurs légèrement différentes. L'allure des courbes de résonance est alors très différente de celle des courbes des circuits simples, car le terme de quatrième puissance est prépondérant et il devient tout à fait impossible de trouver un circuit simple équivalent; on se trouve dans un cas analogue à celui examiné au numéro 8.

Au couplage critique le facteur de sélectivité prend la forme simple,

$$S^2 = 1 + \left(\frac{\theta}{\sqrt{2}} \Delta\omega \right)^4$$

valable, comme celle d'un circuit simple, sur une gamme de fréquence étendue.

11. — Facteur de sélectivité d'un circuit antirésonnant. — On rencontre fréquemment le type de circuits schématisé par la figure 4-a : Un circuit L, R, C est embroché en antirésonance dans un circuit 1 ne comportant qu'une résistance R_1 et sur lequel est appliquée la force électromotrice E. C'est le cas de certaines liaisons entre étages d'amplification, R_1 y est constitué par la résistance filament-plaque d'une lampe, et la différence de potentiel \mathcal{V} aux bornes du condensateur est utilisée pour commander la lampe suivante (fig. 4-b).

D'après le numéro 24-III, le circuit antirésonnant, de pulsation propre τ , est équivalent, pour le courant J_1 à une impédance \mathfrak{Z}'_1 donnée par :

$$\frac{1}{\mathfrak{Z}'_1} = \frac{1}{R'} - j \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right) \quad \text{avec } R' = \frac{L^2 \tau^2}{R}$$

On a donc :

$$E = (R_1 + \mathfrak{Z}'_1) J_1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{V} = E \frac{\mathfrak{Z}'_1}{R_1 + \mathfrak{Z}'_1}$$

\mathfrak{V} peut encore s'écrire :

$$\mathfrak{V} = E \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/\mathfrak{Z}'_1} = E \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R' - j \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right)}$$

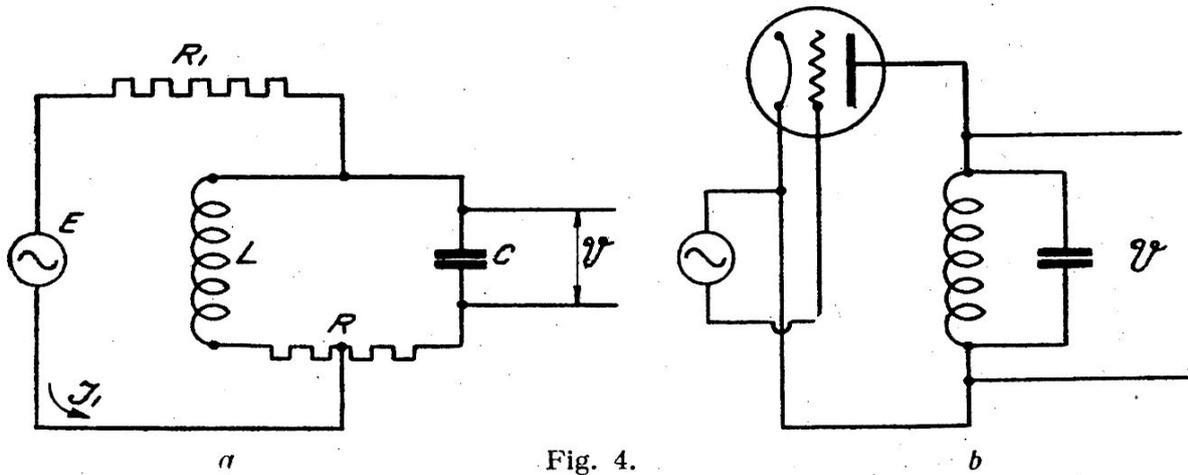


Fig. 4.

d'où, en posant :

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R''}$$

on tire :

$$|\mathfrak{V}|^2 = V^2 = \frac{(1/R_1)^2}{(1/R_1)^2 + (1/L\omega - C\omega)^2} E^2$$

et le coefficient de sélectivité est :

$$S^2 = 1 + (R')^2 (1/L\omega - C\omega)^2 \doteq 1 + \frac{4R_1^2}{L^2 \tau^4} (\Delta\omega)^2$$

Ramenons cette expression à celle qui s'applique à un circuit simple; pour cela, définissons une résistance R'' par la relation :

$$\frac{4R_1^2}{L^2 \tau^4} = \frac{4L^2}{R''^2}$$

S peut être alors considéré comme le facteur de sélectivité d'un circuit simple de résistance R'' ; mais la relation précédente donne :

$$R'' = \frac{L^2 \tau^2}{R_1} = \frac{L^2 \tau^2}{R'} + \frac{L^2 \tau^2}{R_1} = R + \frac{L^2 \tau^2}{R_1}$$

Or d'après le numéro 21-III, $\frac{L^2 r_1^2}{R_1}$ est la résistance qui, placée en série dans un circuit simple produirait le même effet qu'une résistance R_1 en dérivation sur son condensateur. On peut donc dire que le système défini par la figure 4-a donne la même sélectivité que le circuit antirésonnant considéré comme circuit simple, mais amorti par la mise en parallèle aux bornes de son condensateur de la résistance R_1 (fig. 5); ce procédé n'est donc intéressant que si cette résistance est très forte, comme celle d'une lampe.

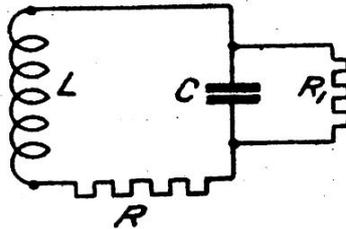


Fig. 5.

12. — Échelles logarithmiques. — Décibel. — Quand on n'est intéressé que par une gamme de fréquence relativement étroite, la courbe de résonance tracée en portant en ordonnées les valeurs de $1/S$ constitue la représentation la plus commode. Mais ainsi que nous l'avons fait remarquer, les problèmes que pose la sélectivité exigent la connaissance de la courbe dans une gamme très étendue; S prend alors des valeurs considérables et il peut être nécessaire de représenter correctement cette quantité quand elle atteint 10^3 et même davantage. Dans ces conditions le tracé précédent devient inutilisable et on a recours aux échelles logarithmiques.

Ces échelles ont d'abord été employées pour représenter les accroissements de puissance obtenus avec les amplificateurs ou les atténuations qui résultent de la propagation des ondes. En désignant par W_0 la puissance initiale et par W_a la puissance amplifiée, on a pris comme terme de comparaison le nombre

$$N = \log \frac{W_a}{W_0}.$$

Cette notation, tout en réduisant l'échelle des ordonnées, a l'avantage de faciliter le calcul de plusieurs amplifications successives; si une première amplification donne un nombre N_1 et une seconde un nombre N_2 , l'amplification totale est

$$N_T = N_1 + N_2.$$

Cette propriété a conduit à la notion de *niveau* ; si l'on prend pour repère la puissance initiale W_o , on dit que le niveau de W_a est N .

S'il y a atténuation au lieu d'amplification, comme dans la propagation des ondes, la même notation est évidemment utilisable, à cela près que les niveaux deviennent négatifs.

Le nombre N varie naturellement avec le système de logarithmes employé ; le plus utilisé en radioélectricité est le système décimal et l'unité de niveau est le Bel, ou pratiquement le *Décibel*. Le niveau est alors défini par la relation

$$(7) \quad N = 10 \log_{10} \frac{W_a}{W_o}$$

Si N est égal à $+5$, on dit que l'amplification est de 5 décibels ou que le niveau est $+5$; si $N = -5$, on dit que l'atténuation est de 5 décibels ou que le niveau est -5 .

Dans bien des cas, l'élément qui se prête le plus facilement aux mesures destinées à la recherche d'une amplification ou d'une atténuation n'est pas la puissance, mais le courant ou la tension, ou encore le champ s'il s'agit de la propagation d'une onde dans l'espace. Comme les énergies sont proportionnelles aux carrés de ces éléments, la relation 1 donne :

$$(8) \quad N = 20 \log_{10} \frac{I_a}{I_o}$$

Le tableau suivant donne pour quelques valeurs de N exprimé en décibels, les rapports I_a/I_o et W_a/W_o . Il est indispensable d'avoir toujours présent à l'esprit, comme points de repère, quelques-unes de ces valeurs, par exemple : 6, 20, 40, 60 décibels correspondent à des rapports I_a/I_o égaux à 2, 10, 100, 1000.

N décibels	1	3	6	10	20	30	40	50	60
I_a/I_o	1	1,4	2	3,16	10	31,6	100	316	1000
W_a/W_o	1	2	4	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6

Dans les transmissions sur câbles, on emploie souvent une autre unité, le *Néper* ou *Napier* défini par

$$N' = \log_e \frac{I_a}{I_o} = 2,303 \log_{10} \frac{I_a}{I_o}$$

L'élément de comparaison n'est plus ici la puissance, mais l'intensité. On a évidemment

$$N' = \frac{1}{2} \log_e \frac{W_a}{W_o} = 1,151 \log_{10} \frac{W_a}{W_o}$$

Un décibel est donc équivalent à 0,1151 néper et un néper à 8,686 décibels.

Cette notation s'applique naturellement à la représentation de la sélec-

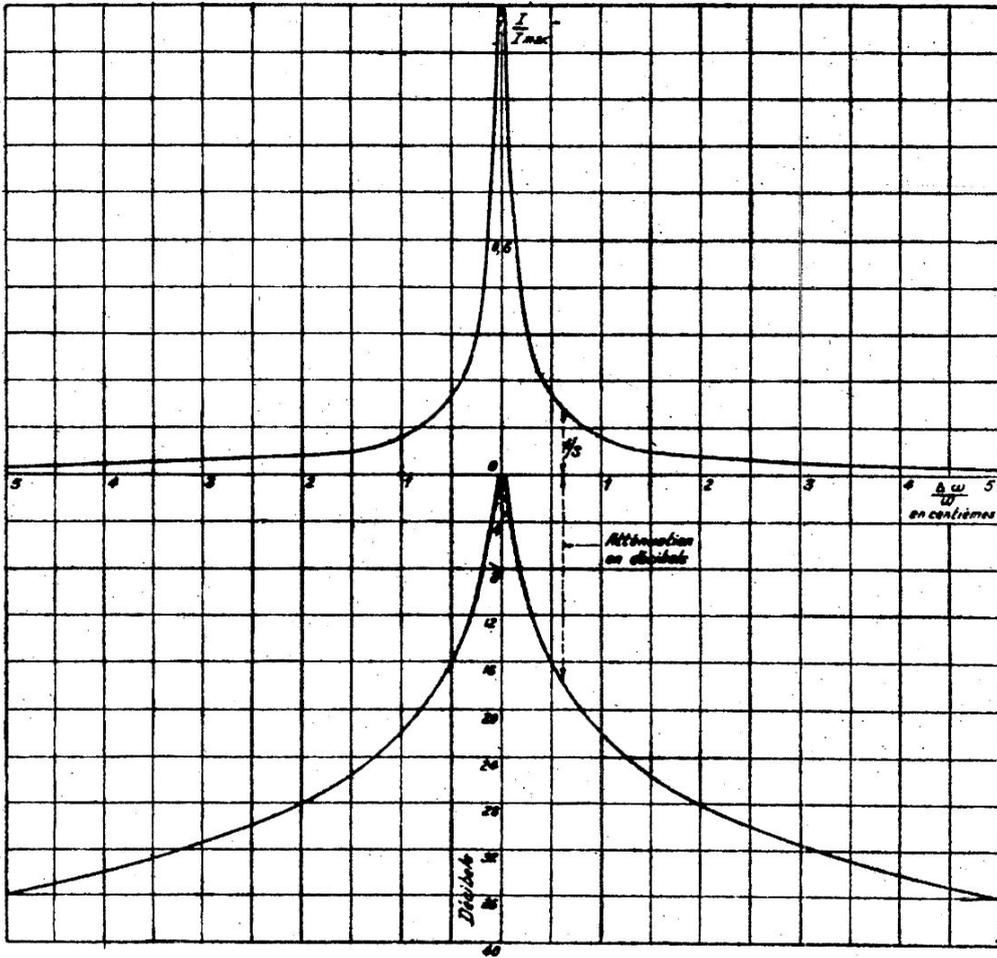


Fig. 6. — Courbes de sélectivité. — En haut les ordonnées sont I/I_{Max} , en bas elles sont $N = 20 \log_{10} I/I_{\text{Max}}$.

tivité; on prend comme repère l'intensité maxima correspondant à la fréquence de résonance et les niveaux relatifs aux autres fréquences sont négatifs. La figure 6 présente en regard la courbe de résonance d'un circuit simple de décrement $\delta = 1/200$, tracée en coordonnées ordinaires et sa courbe de sélectivité en décibels.

BIBLIOGRAPHIE

1. FAYARD (G.). — *Constante de temps et sélectivité.* — *Onde Élec.*, **13**, 1934, 225-231.
 2. ROCARD (Y.). — *Régimes transitoires et constantes de temps.* — *Onde Élec.*, **12**, 1933, 272-296.
-

CHAPITRE VI

Oscillations autoentretenues.

§ I. — GÉNÉRATION DES OSCILLATIONS ENTRETENUES.

1. — **Entretien des oscillations par une source continue.** — On connaît des exemples d'oscillations mécaniques entretenues par une force constante; c'est le cas du pendule d'une horloge par exemple. On dispose les mécanismes de telle sorte que le pendule, passant dans une position déterminée, reçoive une impulsion pendant laquelle le poids moteur travaille en s'abaissant; l'énergie perdue pendant une oscillation par suite des résistances est ainsi remplacée. Il y a avantage à produire cette impulsion au moment où le pendule atteint sa vitesse maxima, c'est-à-dire quand il passe par sa position d'équilibre, car à force égale, c'est dans ces conditions que l'on fournit le travail nécessaire dans le temps minimum, et que l'on apporte le moindre trouble à l'oscillation libre.

On pourrait imaginer un dispositif du même genre pour entretenir des oscillations électriques dans un circuit, le condensateur recevant par exemple une charge de compensation, chaque fois que sa tension serait maxima. La réalisation d'un tel dispositif ne serait néanmoins possible que pour de basses fréquences et pendant longtemps il a été impossible d'obtenir des oscillations successives toutes égales entre elles; on s'est contenté de produire des séries de trains amortis.

Les machines à vapeur fournissent un autre exemple d'entretien d'un mouvement alternatif par une force continue; si on leur adjoint un régulateur elles constituent un système oscillant dont la période est déterminée par les éléments de leurs organes. Ici ce ne sont plus des impulsions brèves qui sont communiquées à la masse en mouvement; grâce au jeu du tiroir ou des soupapes, la poussée est continue.

Les tubes électroniques donnent le moyen de constituer de véritables soupapes électriques, réglables à volonté, en ouverture et en phase, et qui permettent de réaliser des circuits générateurs d'oscillations en empruntant l'énergie utile à une source continue.

Leur étude fait l'objet d'ouvrages spéciaux [2, 3], mais il est utile de considérer ici les principes de leur fonctionnement de façon à compléter l'étude des circuits oscillants. Puisqu'ils sont susceptibles de maintenir en état d'oscillation entretenue, de fréquence déterminée, un circuit dissipateur

d'énergie, c'est que leur action équivaut à l'application sur le circuit d'une force électromotrice alternative de même fréquence; mais il existe une différence essentielle entre l'alimentation par un tube électronique et celle que l'on réalise au moyen d'un alternateur. Dans ce dernier cas, celui-ci impose sa fréquence aux oscillations du circuit qui, pour cette raison, sont dites contraintes; les éléments du circuit n'ont d'influence que sur l'amplitude des oscillations. Avec les tubes électroniques au con-

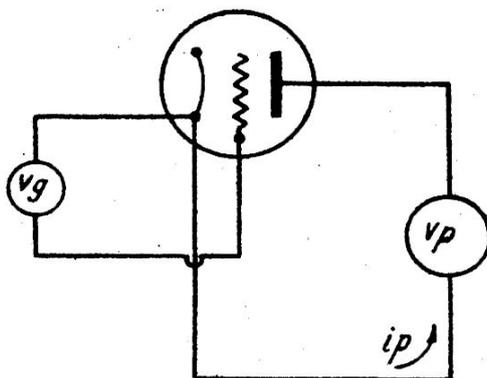


Fig. 1.

traire, la fréquence est indépendante de la source, ou à peu près, elle est presque entièrement fixée par les éléments du circuit.

2. — Caractéristique et tension composée ou totale d'un tube électronique. — Nous supposons ici que les propriétés des tubes électroniques sont connues, aussi rappellerons-nous simplement les principes nécessaires au but que nous avons en vue.

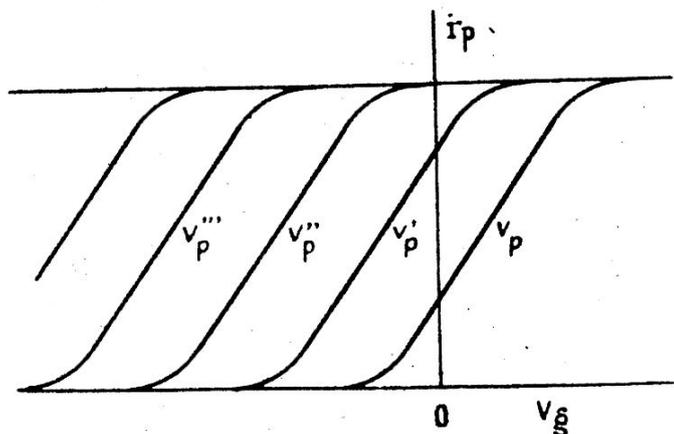


Fig. 2.

Les relations existant à un instant donné entre le courant plaque d'une lampe et les tensions appliquées à sa grille et à sa plaque peuvent être représentées par différentes caractéristiques; celles que l'on considère le plus souvent sont celles qui fournissent le courant i_p , en fonction

de v_g pour une tension plaque donnée v_p , elles ont l'allure indiquée sur la figure 2 et se déduisent assez exactement l'une de l'autre par une translation proportionnelle à la différence $v'_p - v_p$ des tensions plaque.

Dans ces conditions, on voit que leur ensemble répond à la relation

$$(1) \quad i_p = f(v_p + \mu v_g)$$

où μ est une constante. Le courant plaque ne dépend donc que de la somme

$$v_c = v_p + \mu v_g.$$

La quantité v_c est appelée *tension composée* ou totale; μ est le *coef-*

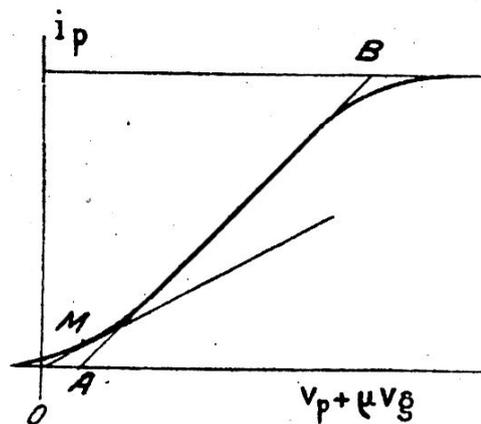


Fig. 3.

ficient d'amplification de la lampe, car une tension v_g appliquée à la grille produit le même effet qu'une tension μv_g appliquée à la plaque.

Si on prend v_c comme variable, toutes les caractéristiques de la figure 2 peuvent se remplacer par une seule, appelée *caractéristique composée* ou totale. Cette représentation est très commode, car elle permet de grouper toutes les propriétés de la lampe sur une seule courbe (fig. 3); en outre, quand v_p et v_g varient à la fois, comme il arrive presque toujours en fonctionnement alternatif, le point figuratif de l'état de la lampe reste sur la courbe, tandis qu'avec la représentation de la figure 2 il se déplace parmi les caractéristiques correspondant aux diverses tensions plaque.

La relation 1 n'est pas rigoureuse, mais elle est très voisine de la réalité, au moins tant que la tension grille ne prend pas de valeurs positives importantes. De même μ n'est pas absolument constant, mais il peut être considéré comme tel dans de nombreuses applications.

Les caractéristiques comportent toujours une partie sensiblement rectiligne qui joue un grand rôle dans la théorie élémentaire des lampes, car, en admettant que le point figuratif reste dans cette région, la relation 1 prend la forme très simple de l'équation de la droite AB :

$$R, i_p = v_c - w$$

ou (3) $R_i i_p = \mu v_g + v_p - w$
 w étant une constante.

3. — **Résistance intérieure et pente d'un tube électronique.** — Si au lieu de considérer le courant plaque total à un instant donné, on ne tient compte que de ses variations, comme en régime alternatif par exemple, la relation 3 devient

$$(4) \quad R_i i_p = \mu v_g + v_p$$

qu'on peut écrire en notations complexes en régime alternatif sinusoïdal

$$(4') \quad R_i J_p = \mu \mathcal{V}_g + \mathcal{V}_p.$$

Si la tension grille reste invariable, $v_g = 0$ et la relation 4 donne $R_i i_p = v_p$; cette équation montre que R_i est la résistance opposée au passage des variations du courant plaque quand la tension plaque varie

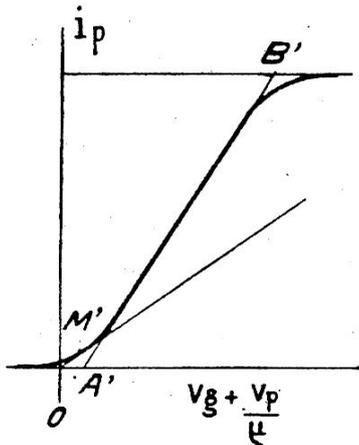


Fig. 4.

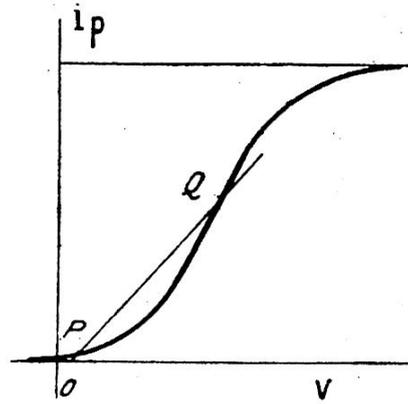


Fig. 5.

seule; c'est la *résistance intérieure* ou résistance filament-plaque. La pente de la droite AB est égale à $1/R_i$.

Au lieu de prendre pour variable la tension composée $v_p + \mu v_g$ on prend souvent $v_g + \frac{v_p}{\mu}$; la caractéristique composée que l'on obtient est alors identique à l'une des caractéristiques de la figure 2, elle est beaucoup plus inclinée que la précédente (fig. 4). La pente de la droite A'B' est la *pente de la lampe*.

Si la lampe fonctionne dans une partie courbe de la caractéristique, on peut encore appliquer la relation 4 pour des variations très faibles du courant, mais alors on doit prendre comme pente celle de la tangente au point moyen de fonctionnement M ou M'.

Cette même relation est encore sensiblement valable pour des variations importantes, allant de P en Q par exemple (fig. 5), mais à condi-

tion de prendre comme pente, celle de la droite PQ. On voit immédiatement que :

Chaque fois que la lampe fonctionne en dehors de la région rectiligne de sa caractéristique, la pente diminue et la résistance intérieure augmente.

4. — Rôle de la grille. — Dans les relations précédentes, v_p représente, bien entendu, l'ensemble de toutes les tensions existant dans le circuit de la plaque et pas seulement celles appliquées au moyen d'une source extérieure. Si par exemple, il existe dans le circuit plaque une impédance \mathfrak{Z}_p et une tension appliquée \mathfrak{V}_p (fig. 6) la relation 4' devient :

$$(5) \quad R_i \mathcal{J}_p = \mu \mathfrak{V}_g + \mathfrak{V}_p - \mathfrak{Z}_p \mathcal{J}_p.$$

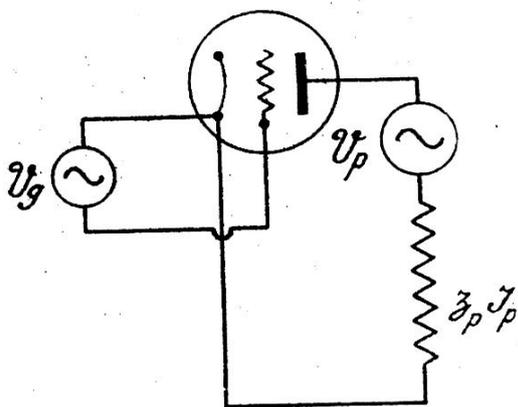


Fig. 6.

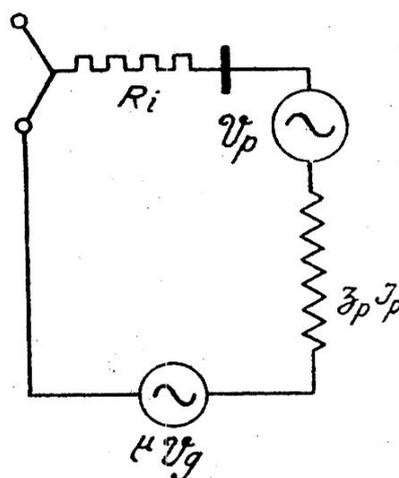


Fig. 7.

Cette relation peut s'interpréter en disant que

L'introduction d'une différence de potentiel v_g entre le filament et la grille équivaut à celle d'une force électromotrice μv_g dans le circuit plaque.

On peut alors considérer l'ensemble des circuits de la lampe comme un circuit simple, comportant une résistance R_i , une impédance \mathfrak{Z}_p et des forces électromotrices \mathfrak{V}_p et $\mu \mathfrak{V}_g$ (fig. 7).

La tension continue de plaque indispensable au fonctionnement ne figure naturellement pas dans les relations précédentes qui ne contiennent que des variations. Nous ne l'avons pas représentée sur les figures pour réduire celles-ci à leurs éléments essentiels.

D'un autre point de vue, moins précis mais peut-être plus suggestif, la grille peut être considérée comme une soupape placée sur le parcours du courant que la source continue de plaque tend à faire passer de la

plaque au filament, soupape qui se ferme quand la grille est négative et s'ouvre quand elle est positive.

5-a. — Génération d'oscillations par un tube électronique. — Grâce à l'existence du coefficient d'amplification, qui est de l'ordre d'une ou plusieurs dizaines d'unités, on voit qu'une faible action sur la grille entraîne des effets importants dans le circuit plaque. Si donc on réalise un couplage entre la grille et ce dernier, on conçoit qu'on pourra employer le courant qui y circule à se modifier lui-même et, si la phase de l'action due à ce couplage est convenable, on peut espérer obtenir l'entretien du mouvement.

De nombreux procédés existent pour y arriver; nous examinerons seulement l'un d'eux qui conduit le plus simplement au but que nous nous proposons¹.

Considérons l'ensemble représenté par la figure 8. Si un courant i cir-

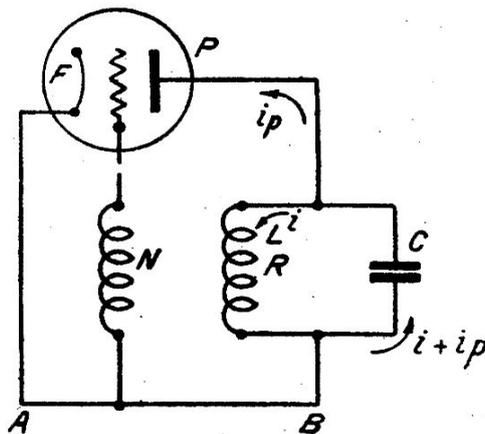


Fig. 8.

cule dans le circuit oscillant (L, R, C) il en résultera dans l'inductance de grille une force électromotrice $\left(-N \frac{di}{dt}\right)^2$; on peut alors faire abstraction de cette inductance et admettre qu'il existe dans le fil de plaque une force électromotrice $\left(-\mu N \frac{di}{dt}\right)$.

1. On trouve dans l'ouvrage de GUTTON l'étude de la plupart des procédés de couplage [3]; un article de BLONDEL et LAVANCHY en fournit une étude mathématique plus serrée [1]. La question générale de la génération des oscillations est traitée dans un article de LE CORBEILLER [4].

2. On écrit souvent cette force électromotrice $+ N \frac{di}{dt}$; le choix du signe est arbitraire (n° 6-c-III).

Comme le courant grille est toujours très faible par rapport à i (et peut même être nul si la grille est maintenue toujours négative par l'addition dans son circuit d'une pile de polarisation), ce qui se passe dans l'inductance de grille ne produira aucune autre action.

Considérons alors le système comme constitué par les deux circuits FABCPF et L,R,C couplés par la capacité C; nous aurons, en appelant v la tension du condensateur C :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_i i_p + v + \mu N \frac{di}{dt} = 0 \\ L \frac{di}{dt} + Ri + v = 0 \\ C \frac{dv}{dt} = i + i_p. \end{array} \right.$$

En portant dans la troisième équation la valeur de v tirée de la deuxième on a :

$$i_p = -C \left(L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} \right) - i$$

et en remplaçant dans la première équation v et i_p par leurs expressions en fonction de i , il vient :

$$(7) \quad L \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(R + \frac{L - \mu N}{R_i C} \right) \frac{di}{dt} + \left(1 + \frac{R}{R_i} \right) \frac{1}{C} i = 0.$$

Cette équation est identique à celle d'un circuit oscillant simple qui aurait une inductance L, une résistance

$$\left(R + \frac{L - \mu N}{R_i C} \right) \quad \text{et une capacité } C \frac{R_i}{R_i + R}.$$

Les oscillations libres du système seront donc de la forme :

$$i = I_0 e^{-at} \sin(\omega t + \varphi)$$

dans laquelle ω sera donnée sensiblement par :

$$(8) \quad \omega^2 = \left(1 + \frac{R}{R_i} \right) \frac{1}{LC}$$

et a exactement par :

$$(9) \quad \boxed{a = \frac{1}{2L} \left(R + \frac{L - \mu N}{R_i C} \right)}$$

R_i vaut toujours plusieurs milliers d'ohms alors que R est seulement de quelques ohms; la fréquence des oscillations sera donc très sensiblement celle du circuit L,C,R isolé.

Quant à l'amortissement, il présente cette particularité que son expres-

sion contient un terme qui se trouve à la disposition de l'opérateur, celui qui contient N . Or N peut prendre des valeurs très différentes (positives ou négatives suivant les sens relatifs d'enroulement des bobines en regard). Il est donc possible, si R n'est pas trop grand, d'annuler a ou de le rendre négatif; alors les oscillations libres du système seront entretenues ou croissantes.

Arrêtons-nous un instant sur ce dernier cas, il est évident que les oscillations ne peuvent pas croître indéfiniment; si le calcul nous y conduit c'est que nous n'avons mis dans nos équations qu'une partie de ce qui existe dans la réalité : les quantités μ et surtout R_i , ne pouvant être considérées comme constantes que pour de faibles oscillations, nos équations cessent d'être exactes dès que l'amplitude devient notable; en fin de compte, nous ne sommes renseignés que sur le début du phénomène, non sur son régime final. Quand l'amplitude augmente, le point représentatif de l'état de la lampe sort de la partie rectiligne de la caractéristique, R_i augmente (n° 3) et le terme $\frac{L - \mu N}{R_i C}$ décroît en valeur absolue jusqu'au moment où le coefficient d'amortissement s'annule; le générateur se trouve alors en régime permanent.

La fréquence de l'oscillation correspondant à une résistance initialement négative sera légèrement différente de celle trouvée pour une résistance nulle, car la capacité effective $C \frac{R_i}{R_i + R}$ dépend de R_i , mais la différence sera très faible.

5-b. — Condition limite d'entretien. — Résistance négative. —
On donne ce nom à la condition

$$R + \frac{L - \mu N}{R_i C} = 0$$

qui fournit la valeur minima du couplage N à partir de laquelle la lampe engendre des oscillations. Pour toute valeur inférieure à cette limite le circuit dérangé de sa position d'équilibre, y revient de lui-même comme un circuit sans lampe, mais il faut remarquer que son amortissement est diminué, les choses se passent comme si on avait supprimé une partie de la résistance. Pour cette raison la quantité $\frac{L - \mu N}{R_i C}$ est désignée sous le nom de *résistance négative*; c'est une notion commode que l'on introduit en maintes occasions en radioélectricité: non seulement elle facilite le langage, mais bien souvent elle suggère des analogies fertiles.

6. — **Influence de la phase de la réaction sur la fréquence.** — La génération des oscillations au moyen d'une lampe peut être examinée sous un jour un peu différent; considérons ce que devient l'équation 7 en régime permanent; nous pouvons écrire en notation complexe

$$\left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] \mathcal{J} = \left[-\frac{L - \mu N}{R_i C} + j \frac{R}{R_i} \frac{1}{C\omega} \right] \mathcal{J}$$

en ne conservant au premier membre que le produit de l'intensité par l'impédance normale du circuit oscillant L, R, C . Cette relation montre que les oscillations peuvent être envisagées comme entretenues par une force électromotrice de réaction, ayant pour expression la quantité figurant au second membre et agissant directement sur le circuit oscillant *lui-même*.

Avec d'autres montages que celui de la figure 8, on pourrait évidemment faire une transformation identique à la précédente, car en toutes circonstances, la réaction est certainement proportionnelle au courant \mathcal{J} , au moins tant que l'on reste dans le domaine linéaire. On aura donc en général

$$\left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] \mathcal{J} = (r + js) \mathcal{J}$$

ou encore

$$R - r + j \left[\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) - s \right] = 0.$$

Il y aura entretien d'oscillations si

$$(10) \quad r = R \quad \text{et} \quad L\omega - \frac{1}{C\omega} = s.$$

La quantité r est la valeur absolue de la résistance négative qui permet les oscillations; quant à la quantité s , on voit qu'elle donne lieu à une fréquence f différente de la fréquence de résonance f_r du circuit oscillant; f est supérieur ou inférieur à f_r suivant que s est positif ou négatif, ou encore suivant que la réaction est en avance ou en retard sur le courant. Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un générateur auto-entretenu oscille sur la fréquence de résonance de son circuit est que la réaction d'entretien soit en phase avec le courant dans ce circuit. Si la réaction est en avance, la fréquence est plus élevée, elle est plus basse dans le cas contraire.

D'autre part, comme s dépend en général des caractéristiques de la lampe, toute variation de ces dernières provoque une modification de la fréquence et on voit que :

La condition nécessaire et suffisante pour que la fréquence ne soit pas influencée par les modifications des caractéristiques de la lampe est que s soit indépendant de ces éléments.

Ce qui fait l'intérêt de ce dernier principe, c'est que la stabilité de la fréquence joue un rôle capital dans la technique des émetteurs; on voit qu'une solution approchée du problème de la stabilisation sera obtenue si s passe par un maximum ou un minimum pour les valeurs moyennes des éléments de la lampe pendant le fonctionnement.

Notons enfin que les principes précédents s'appliquent aussi bien aux oscillateurs mécaniques, aux pendules et aux diapasons par exemple, si l'on y remplace le courant dans le circuit électrique par la vitesse de la partie mobile.

7. — Génération des oscillations par un arc. — Considérons l'ensem-

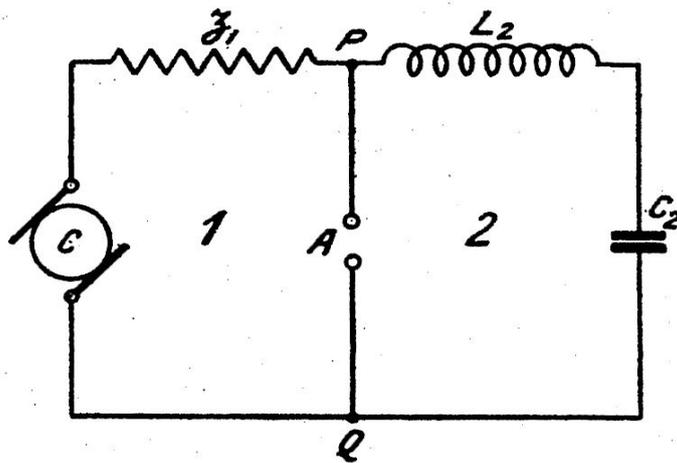


Fig. 9.

ble représenté sur la figure 9, constitué par deux circuits 1 et 2 ayant en commun l'intervalle A entre lequel la source du courant continu C est susceptible de faire jaillir un arc. Un tel système est capable d'engendrer des oscillations entretenues.

Pour en saisir le mécanisme, faisons momentanément abstraction du circuit 2 et relevons expérimentalement la courbe de la figure 10 qui relie les valeurs simultanées de la tension fournie par la source aux bornes de l'arc et du courant continu qui traverse ce dernier. Cette courbe présente cette particularité que *la tension augmente quand le courant diminue*.

Supposons maintenant que, indépendamment de la source C nous provoquions une variation du courant I; ce sera par exemple en chargeant le condensateur C_2 et en le laissant se décharger à travers l'arc.

Le point M se déplacera sur la courbe et provoquera une variation ∂V de la tension correspondant à la variation ∂I du courant; le rapport $\partial V / \partial I$, égal au coefficient angulaire de la tangente en M, sera négatif.

Mais $\frac{\partial V}{\partial I}$ c'est la résistance que l'arc oppose au passage de la variation ∂I ; la présence de l'arc dans le circuit 2 équivaut donc à l'existence d'une *résistance négative* dans ce circuit; on conçoit que, si cette résistance négative est supérieure en valeur absolue à la résistance réelle du circuit 2, des oscillations pourront y prendre naissance.

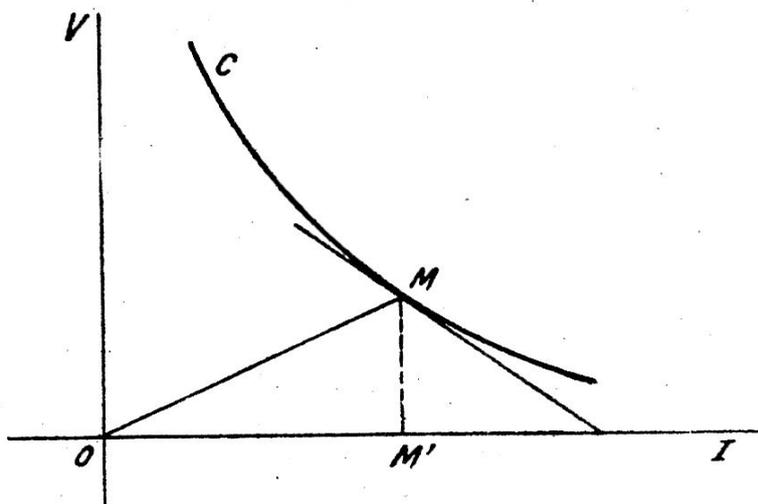


Fig. 10.

Il y a lieu d'insister cependant sur l'usage que nous faisons ici de la caractéristique de l'arc. Celle-ci a été observée dans un régime continu et il n'est pas certain que le courant que nous ajoutons à celui produit par la source C produise les mêmes effets et que le point figuratif de l'intensité et de la tension résultante se déplace encore sur la même courbe; ce résultat est cependant probable, au moins approximativement, la nature de la courbe étant la conséquence des phénomènes d'ionisation qui ont leur siège dans l'arc.

A la vérité, dans ces conditions, le point M ne suit pas exactement la caractéristique statique et, même, ses parcours dans les deux sens ne se font pas sur le même chemin, il décrit une courbe fermée, signe d'un phénomène d'hystérésis. Néanmoins l'expérience montre que les prévisions ci-dessus sont justifiées dans leurs principes et nous pouvons admettre l'existence d'une résistance négative. Il devient alors très simple de déterminer les conditions d'oscillations du circuit 2.

Nous rencontrons cependant ici les mêmes difficultés qu'avec les tubes

électroniques. La caractéristique C n'étant pas une droite, la résistance négative de l'arc est variable à chaque instant et pour rester dans le domaine des équations linéaires à coefficients constants, nous devons nous limiter aux oscillations assez faibles pour que l'arc parcouru par le point M puisse être considéré comme une portion de la tangente en M .

En appelant $(-R_a)$ la résistance négative de l'arc et \mathfrak{Z}_1 l'impédance totale du circuit 1, l'impédance du circuit 2 entre P et Q sera $\left(-\frac{R_a \mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_1 - R_a}\right)$ et l'impédance totale du circuit aura pour expression :

$$\mathfrak{Z}_2' = \mathfrak{Z}_2 - \frac{R_a \mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_1 - R_a}$$

On obtiendra les conditions limites d'entretien en annulant séparément ses parties réelle et imaginaire.

L'impédance \mathfrak{Z}_1 comporte en général une forte inductance, dite de blocage, qui évite l'effet de shunt que cette source et ses connexions établiraient sur l'arc pour les courants alternatifs; si L_1 est cette inductance, la fréquence sera déterminée sensiblement par la relation :

$$L_2 \omega - \frac{1}{C_2 \omega} + \frac{R_a^2}{L_1 \omega} = 0.$$

Comme dans le cas du tube électronique, cette fréquence sera encore sensiblement la même que celle du circuit 2 isolé.

Quant à la condition d'entretien, obtenue en annulant la partie réelle de \mathfrak{Z}_2' , elle sera très sensiblement

$$R - R_a = 0.$$

Si cette dernière relation est remplacée par une inégalité et que $R - R_a$ soit négatif, il y aura naturellement encore entretien; l'amortissement sera négatif et les oscillations croîtront. Mais quand le point M se promène sur un arc étendu de la courbe C les valeurs instantanées de R_a changent; elles décroissent à droite et croissent à gauche; l'amplitude des oscillations augmentera jusqu'à ce que la valeur moyenne de R_a devienne égale à R . Il ne faut, bien entendu, apporter aucun sens précis à l'expression de valeur moyenne que nous venons d'employer; c'est un terme utilisé dans le sens du langage vulgaire pour caractériser seulement l'allure du phénomène; la solution exacte de cette question de limitation de l'amplitude ne pourrait résulter que de la solution d'une équation à coefficients variables, à supposer que l'on connaisse la forme exacte de la caractéristique dynamique.

§ II. — OSCILLATIONS DE RELAXATION.

8. — **Oscillation des circuits à résistance négative.** — Nous venons d'être conduit à la notion de résistance négative, remarquons tout de suite que toutes les formules établies dans les précédents chapitres pour un circuit à résistance positive sont valables quand la résistance est négative; ces formules résultent en effet de l'équation

$$(11) \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + 2a \frac{di}{dt} + \eta^2 i = 0 \quad \text{avec} \quad a = \frac{R}{2L}, \quad \eta^2 = \frac{1}{CL}$$

où l'on peut donner à a des valeurs supérieures ou inférieures à zéro.

La solution générale est de la forme

$$(12) \quad i = I e^{-at} \sin \eta' t \quad \text{avec} \quad \eta' = \sqrt{\eta^2 - a^2}.$$

Dans les deux cas, pour une valeur absolue donnée de a , la valeur η' de la période propre reste la même et le courant suit la loi exponentielle; d'autre part, le phénomène cesse d'être oscillatoire pour la même valeur absolue de a : $a = \eta$.

Ces analogies mathématiques correspondent cependant à des différences physiques très importantes : ce n'est pas seulement que le courant croît ou décroît suivant le cas, mais dans le cas de la résistance négative, la loi exponentielle ne peut représenter le courant que pendant un temps limité. L'accroissement indéfini de ce courant est en effet impossible et cela indique que la résistance ne peut pas rester constante, que les conditions qui la produisent doivent se modifier avec le temps sous l'influence même de l'amplitude. Le coefficient a ne peut donc être négatif qu'au début d'un phénomène, on est assuré qu'à un certain moment, il deviendra nul ou négatif et l'équation 11 ne sera plus une équation à coefficients constants, on se trouvera en présence de problèmes beaucoup plus difficiles.

Parmi tous les cas qui peuvent se présenter, celui où a commence par être supérieur à η en valeur absolue est particulièrement intéressant. S'il en est ainsi, *il n'y a plus d'oscillations quand a est positif, mais il est facile de voir qu'il peut s'en produire quand a est initialement négatif.* Dans ce cas, en effet, le courant commence par croître exponentiellement; puis un changement survient, a se rapproche de zéro; s'il atteint des valeurs positives, le courant décroît, l'amortissement redevient négatif; une nouvelle croissance se produit et le même processus se renouvelle indéfiniment.

Les oscillations ainsi obtenues peuvent être très différentes des oscillations sinusoidales, elles le sont d'autant plus que la valeur absolue

initiale de a est grande; Van der Pol qui les a étudiées systématiquement [6] leur a donné le nom d'oscillations de relaxation, nous en verrons la raison au numéro 11.

Pour montrer comment on passe continûment d'oscillations sinusoïdales à des oscillations de relaxation nettement caractérisées, nous allons examiner un cas simple, mais auparavant, nous établirons l'équation d'un circuit dans lequel la résistance est en parallèle sur l'inductance et la capacité, au lieu d'être en série; c'est en effet sur un système de ce genre que nous raisonnerons pour plus de simplicité.

9. — **Équations aux oscillations d'un circuit dont la résistance est en dérivation.** — Désignons par i le courant passant dans l'inductance

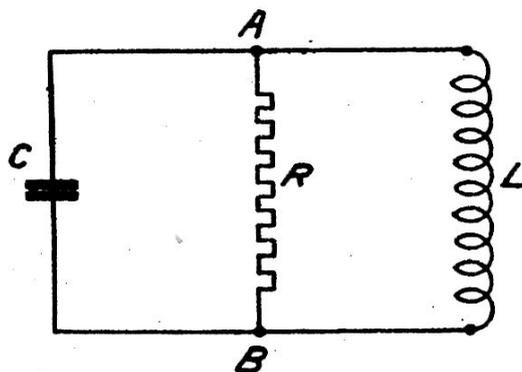


Fig. 11.

L (fig. 11) et par v la tension aux bornes du condensateur. En écrivant que la somme des courants aboutissant au point A est nulle, nous obtenons

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + i = 0$$

d'où

$$C \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{di}{dt} = 0$$

et comme

$$L \frac{di}{dt} = v$$

l'équation en v est

$$(13) \quad \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{CR} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} = 0$$

dont les coefficients ne diffèrent de ceux de l'équation qui donne le courant dans un circuit à résistance en série que par la substitution de $\frac{1}{CR}$ à $\frac{R}{L}$: nous poserons encore

$$\frac{1}{CR} = 2a$$

et l'équation du système sera

$$(14) \quad \frac{d^2 v}{dt^2} + 2a \frac{dv}{dt} + r_1^2 v = 0$$

de forme identique à celle qui convient au cas d'une résistance en série¹. On notera que CR et L/R sont les constantes de temps de la capacité et de l'inductance.

10. — Oscillations d'un circuit à résistance variable. — Oscillations de relaxation. — Le problème traité au numéro 5 nous offre un type de circuit dont la résistance varie avec l'amplitude des oscillations, car nous savons que la résistance intérieure R_i de la lampe est fonction de cette amplitude; mais dans ce cas, la capacité effective est également

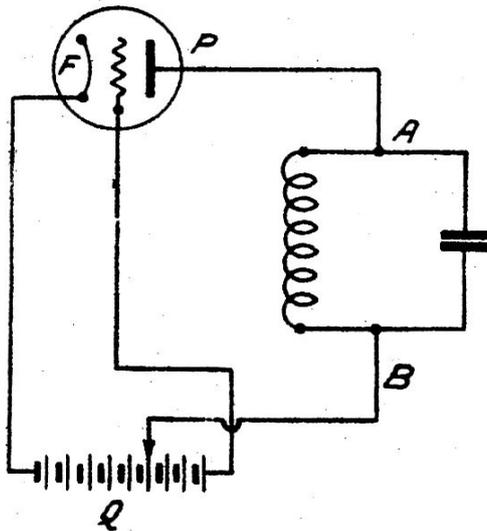


Fig. 12.

variable; pour avoir un type plus simple, nous choisirons celui auquel on parvient en plaçant un dynatron en dérivation sur un circuit oscillant (fig. 12).

Le dynatron est un tube électronique dont la grille est portée à une tension plus élevée que la plaque; si l'on fait varier la tension plaque, le

1. Remarquons en passant que cette analogie entre les équations des deux systèmes série et parallèle est un cas particulier du principe de dualité qui s'énonce ainsi : Étant donné un système 1, considérons un système 2 obtenu en remplaçant les inductances par des capacités et inversement et en mettant en parallèle les éléments qui se trouvaient en série et inversement; le mouvement de l'électricité dans le système 2 est régi par la même équation que dans le premier, à condition d'y remplacer les courants par des tensions, les capacités par des inductances, les résistances par des conductances et inversement [5].

courant plaque présente l'allure indiquée par la figure 13'. Dans toute la partie MM' de la courbe, le rapport $\frac{dv}{di} = \text{tg } \varphi$ est négatif; il est positif au-delà. Le circuit APFQB constitue donc pour les variations de courant une résistance variable, susceptible de prendre des valeurs positives ou négatives suivant l'amplitude de la tension dans l'inductance.

Choisissons comme position de repos le point d'inflexion M_0 de l'arc MM'; en désignant par v et i les variations du courant et de la tension à partir de ce point, c'est-à-dire la différence de potentiel aux bornes de la capa-

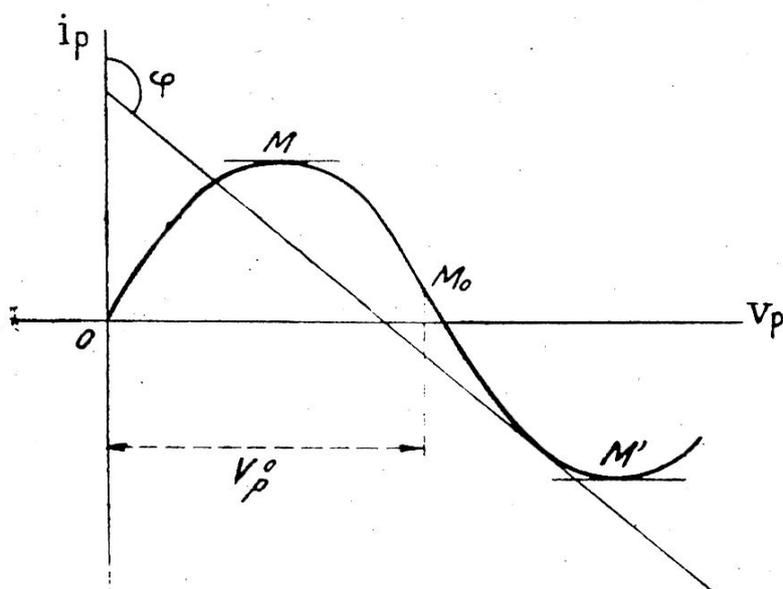


Fig. 13.

ité et le courant alternatif dans la résistance en dérivation, on peut représenter approximativement la relation qui les lie par

$$i = -C (\alpha v - \gamma v^3)$$

α et γ étant deux constantes d'où

$$\frac{1}{C} \frac{di}{dv} = \frac{1}{CR} = -(\alpha - 3\gamma v^2)$$

et l'équation aux oscillations est

$$(15) \quad \frac{d^2v}{dt^2} - (\alpha - 3\gamma v^2) \frac{dv}{dt} + \eta^2 v = 0.$$

Van der Pol a résolu cette équation par des procédés graphiques,

1. Nous renvoyons aux ouvrages sur les lampes pour l'explication de ce phénomène qui est dû à l'émission d'électrons secondaires.

nous renvoyons à son mémoire pour cette question purement mathématique qui nous entraînerait trop loin, mais nous indiquerons les résultats qu'il a obtenus et qui montrent à la fois la transformation continue de la forme des oscillations et l'allure des oscillations de relaxation [6].

Les courbes de la figure 14 correspondent aux trois valeurs $1/10$, 1 et 10 du rapport $\frac{\alpha}{\eta}$ qui n'est autre chose que le quotient par π du décrement

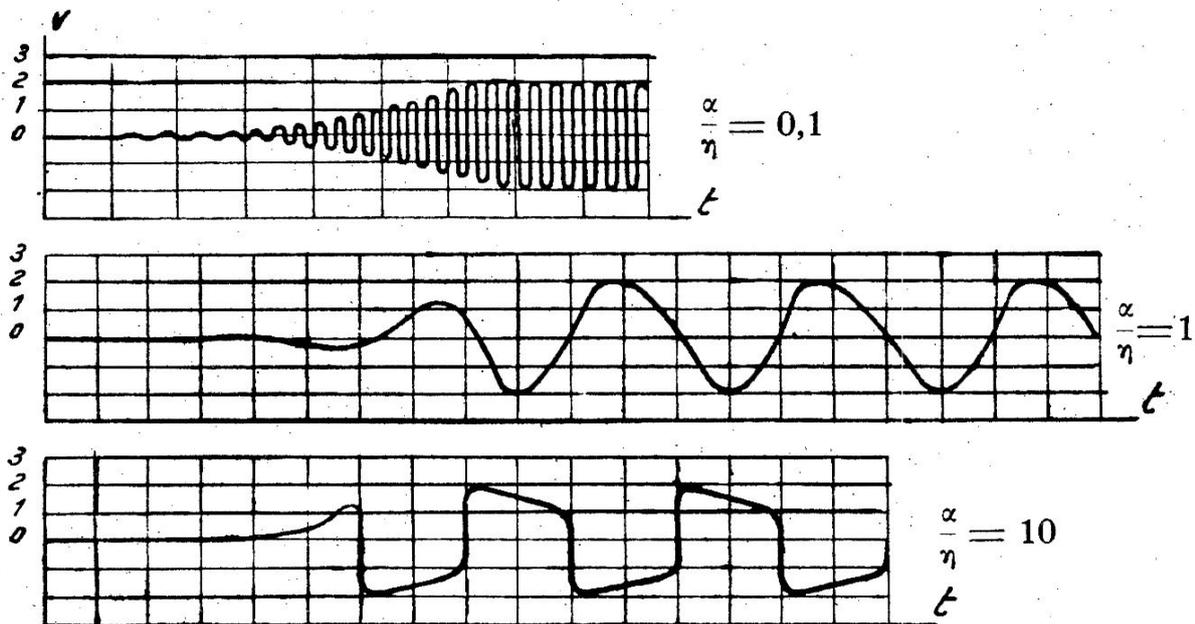


Fig. 14.

Nature des oscillations d'un circuit à résistance initiale négative pour les valeurs croissantes de cette dernière.

négatif initial, décrement négatif que l'on désigne sous le nom d'*incrément*.

On voit que dans le cas d'un faible incrément *initial*, les oscillations sont sinusoïdales comme pour les faibles décrets et qu'elles s'écartent de plus en plus de cette forme à mesure que l'incrément augmente. D'autre part, le régime permanent s'établit lentement quand l'incrément est faible, il est pratiquement atteint au bout d'une période quand l'incrément est très élevé.

Les expériences confirment entièrement ces conclusions théoriques.

11. — Période des oscillations de relaxation. — La résolution de l'équation 15 montre que pour les petites valeurs de l'incrément initial, la période est donnée par la relation $T = 2\pi\sqrt{LC}$, la même qui convient pour les faibles décrets.

Si l'incrément initial est très fort, la période est donnée par l'une ou l'autre des relations

$$T = KCR \text{ pour une résistance en série,}$$

$$T = K \frac{L}{R} \text{ pour une résistance en dérivation.}$$

Dans ces relations K est une constante et R la valeur absolue de la résistance négative initiale.

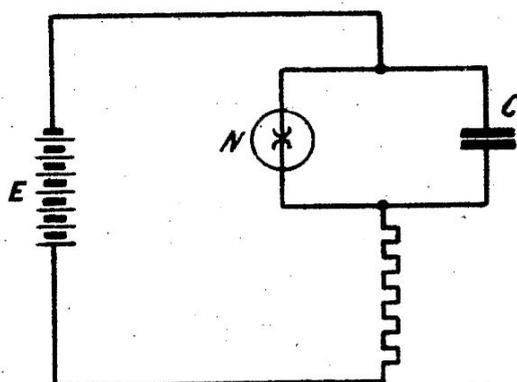


Fig. 15.

On voit que la période des oscillations de relaxation est caractérisée par la constante de temps du condensateur ou de l'inductance; ces coefficients sont désignés en anglais sous le nom de « relaxation times », d'où le nom donné aux oscillations.

Le cas que nous venons d'examiner est assez particulier, mais l'expérience montre que les résultats obtenus sont généraux.

12. — Oscillations de relaxation avec une lampe au néon. — Un autre générateur d'oscillations de relaxation, fertile en applications,

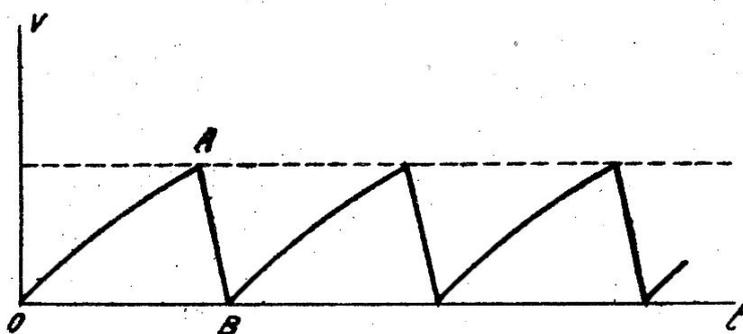


Fig. 16.

s'obtient au moyen d'une lampe au néon, montée comme sur la figure 15. La source continue E charge la capacité C à travers la résistance R ; si

la tension E a été choisie supérieure à la tension d'illumination E_i de la lampe, celle-ci s'éclaire au moment où la différence de potentiel aux bornes du condensateur devient égale à E_i . A ce moment le néon ionisé n'offre plus qu'une faible résistance et la capacité se décharge rapidement à travers la lampe, sa tension tombe à une faible valeur, la lampe s'éteint et le processus précédent se reproduit indéfiniment. Les oscillations présentent l'allure de la figure 16.

Ce dispositif est employé pour déplacer proportionnellement au temps la tache des oscillographes cathodiques ¹, mais dans ce cas on remplace souvent la résistance R par l'intervalle filament-plaque d'une diode qui permet d'obtenir une montée bien rectiligne de la différence de potentiel si la source E a été choisie assez élevée pour que la diode travaille constamment à saturation, le courant de charge reste alors constant tandis qu'il décroît avec une résistance ordinaire.

13. — Différences caractéristiques entre les oscillations sinusoïdales et de relaxation. — Les oscillations sinusoïdales et celles de relaxation sont les cas extrêmes qui correspondent à des décrets ou incréments très petits d'un côté, à des incréments très forts d'un autre côté; nous avons déjà constaté que leurs formes sont essentiellement différentes et que leurs périodes dépendent du produit LC pour les premières, du produit CR ou du quotient L/R pour les secondes; il existe une autre différence non moins importante :

La fréquence des oscillations sinusoïdales entretenues est peu sensible aux actions périodiques extérieures qui n'agissent que sur leur amplitude, maximum au moment de la résonance.

L'amplitude des oscillations de relaxation est très peu sensible aux actions

1. Dans l'oscillographe cathodique, le faisceau d'électrons issu de O passe entre deux paires de plaques A et B avant d'aller faire tache sur l'écran E . En appliquant

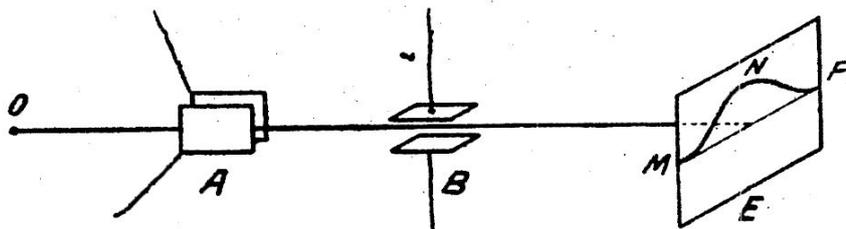


Fig. 17.

aux plaques A la différence de potentiel du condensateur du montage 15, on déplace la tache sur MP proportionnellement au temps. En appliquant en même temps aux plaques B la tension à étudier, la tache décrit une courbe MNP qui représente ses variations.

extérieures, on ne constate aucun phénomène de résonance; leur fréquence est au contraire facilement modifiée par de telles actions.

Dans ces oscillations, l'instant de renversement du courant est en effet déterminé par le changement de signe de la résistance qui dépend de l'amplitude du courant ou de la tension; le renversement se produit donc toujours pour la même amplitude. Quant à la période, elle est au contraire modifiée par l'addition d'une force électromotrice de fréquence différente; on peut en effet considérer cette force électromotrice comme s'ajoutant ou se retranchant à la résistance négative dont dépend la période.

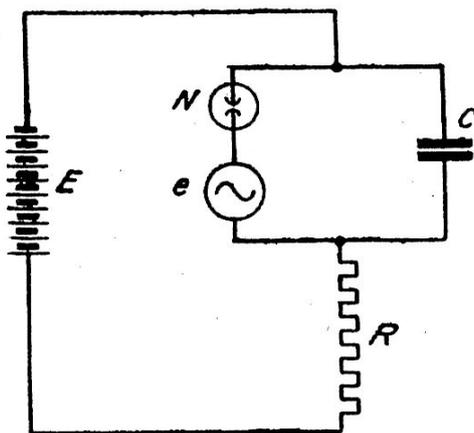


Fig. 18.

L'expérience vérifie ces conclusions; si dans le montage du tube au néon par exemple, on introduit une force électromotrice de fréquence f dans le circuit de la lampe et du condensateur (fig. 18), les oscillations de la lampe se synchronisent sur la fréquence f , tant que cette fréquence ne diffère pas trop de la fréquence propre du système.

14. — Démultiplication des fréquences. — Ayant monté l'expérience précédente, laissons fixe la fréquence de la force électromotrice ajoutée et augmentons la capacité du condensateur C ; nous verrons que cette modification n'a aucune influence sur la période de relaxation. Cependant quand C approchera du double de sa valeur initiale, nous constaterons tout d'un coup un saut de fréquence et la période des oscillations de relaxation doublera. La nouvelle fréquence $f/2$ se conservera pour de nouveaux accroissements de capacité, puis un nouveau saut aura lieu pour donner lieu à la fréquence $f/3$. En continuant ainsi on peut obtenir des démultiplications allant jusqu'à $f/200$.

Ce phénomène est utilisé en particulier pour la mesure précise des hautes

fréquences; en démultipliant beaucoup une fréquence élevée on peut arriver à alimenter un petit moteur synchrone entraînant un compteur de tours et compter ainsi effectivement le nombre de périodes écoulées dans un temps donné.

15. — Autres types d'oscillations de relaxation. — Le multivibrateur Abraham et Bloch est encore un générateur d'oscillations de relaxation; on en rencontre de nombreux exemples familiers dans le domaine mécanique: tels sont le grincement d'une porte, les claquements d'un pavillon sous l'effet du vent et ceux d'un tuyau d'eau, le trait ponctué que l'on obtient sur un tableau avec un morceau de craie que l'on pousse en sens inverse de la direction habituelle du tracé. Van der Pol a attiré l'attention sur les battements du cœur qui sont aussi de véritables oscillations de relaxation et il a construit avec des lampes au néon un modèle électrique du cœur sur lequel il peut reproduire tous les accidents correspondant aux maladies de cet organe [7]; il a également signalé l'existence de ce genre d'oscillations dans un grand nombre de phénomènes économiques et sociaux.

BIBLIOGRAPHIE

1. BLONDEL (A.) et LAVALANCHY (C.). — *Contribution à la théorie des audeurs générateurs. Conditions d'amorçage et degré d'amortissement de oscillations de faible amplitude.* — Rev. gén. d'Elect., **6**, déc. 1919, 875-893.
2. CHAFFEE (E. L.). — *Theory of Thermionic Vacuum Tubes. Fundamental Amplifiers. Detectors* — 1933 — McGraw-Hill Book Company. New-York et Londres.
3. GUTTON (C.). — *Les Lampes à trois Electrodes.* — 1929. — Presses universitaires. Paris.
4. LE CORBEILLER (PH.). — *Le mécanisme de la production des oscillations.* — Ond. Elect., **12**, 1933, 116-148.
5. SIRE De VILLAR (H.). — *La dualité en électrotechnique* — *Eclairage elect.*, **27**, 1901, 252.
6. VAN DER POL (B.). — *Oscillations sinusoïdales et de relaxation* — *Onde Elec.*, **9**, 1930, 245-256, 293-312. *La théorie non linéaire des oscillations électriques.* Proc. Instit. Rad. Engin., **22**, 1934, 1051-1087.
7. VAN DER POL (B.) et VAN DER MARCK (M. J.). — *Le battement du cœur considéré comme oscillation de relaxation* — *Onde Elec.*, **7**, 1928, 365-392.

CHAPITRE VII

Couplage des générateurs à lampe. — Synchronisation.

1. — **Conséquences du couplage des générateurs à lampe.** — Dans la plupart des cas, l'énergie produite par un générateur n'est pas dépensée dans son circuit même, mais dans un secondaire auquel il est couplé, et l'on conçoit que les réactions de ce circuit passif doivent apporter des modifications au fonctionnement du générateur. Ces réactions sont naturellement de même nature que celles du secondaire sur le primaire dans le cas de deux circuits passifs (n° 19-III), elles changent la réactance et la résistance effectives du générateur et provoquent par conséquent des variations de fréquence et d'intensité qu'il est indispensable de bien connaître pour l'établissement des émetteurs.

Quand il s'agit du couplage de deux générateurs, les réactions sont plus complexes, mais donnent lieu à des résultats analogues; un phénomène nouveau se présente néanmoins, c'est celui de la synchronisation des deux générateurs quand leurs fréquences propres sont suffisamment voisines. Cette synchronisation joue un rôle important dans les mesures, elle se trouve en outre à la base d'une technique nouvelle qui permet de faire fonctionner simultanément plusieurs émetteurs sur la même fréquence et qui offre à la radiodiffusion un moyen, peut-être plein d'avenir, de décongestionner largement l'éther.

§ I. — COUPLAGE D'UN GÉNÉRATEUR A UN CIRCUIT PASSIF.

2. — **Équations du système.** — Imaginons qu'au générateur du numéro 5-a-VI nous couplions un circuit passif et proposons-nous de chercher les conditions de fonctionnement. Pour cela nous remplacerons (fig. 1) le générateur par un circuit simple de self-induction L_1 , de résistance et de capacité

$$(1) \quad R_1 = R_1 + \frac{L_1 - \mu N}{R_1 C_1} \quad \text{et} \quad C_1 = C_1 \frac{R_1}{R_1 + R_1};$$

cette substitution est justifiée par la considération de l'équation 7 du numéro cité. Cela fait, écrivons l'expression de l'impédance du circuit équivalent aux circuits 1 et 2, relativement à l'intensité \mathcal{J}_1 , on a

$$\mathcal{Z}'_1 = (R_2 + \rho^2 R_2) + j(S_1 - \rho^2 S_2) \quad \text{avec} \quad \rho^2 = \frac{M^2 \omega^2}{R_2^2 + S_2^2}$$

Pour trouver les conditions dans lesquelles l'ensemble des deux circuits entrera en oscillations, il suffit évidemment d'annuler cette impédance, ce qui conduit aux deux relations

$$(2) \quad \begin{cases} S_1 - \rho^2 S_2 = 0 \\ R_1 + \rho^2 R_2 = 0. \end{cases}$$

Supposons fixés tous les éléments des deux circuits, sauf le couplage N , entre grille et plaque du générateur, il reste dans les équations précé-

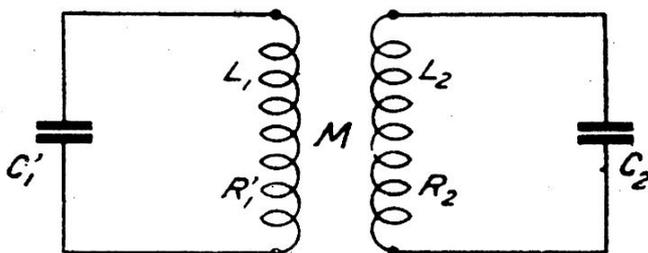


Fig. 1.

entes les deux inconnues N et ω ; si on les calcule et que l'on règle N à la valeur obtenue, le système oscillera avec la pulsation ω . La première équation ne contenant pas N nous donnera d'ailleurs immédiatement les valeurs sur lesquelles le système est *susceptible d'osciller*. Appelant γ_{11} et γ_{12} les pulsations de résonance des deux circuits, cette relation peut s'écrire

$$(3) \quad \frac{L_1 \left(1 - \frac{\gamma_{11}^2}{\omega^2}\right)}{L_2 \left(1 - \frac{\gamma_{12}^2}{\omega^2}\right)} = \frac{M^2 \omega^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2 \left(1 - \frac{\gamma_{12}^2}{\omega^2}\right)^2}$$

Nous allons en examiner les conséquences dans les deux cas suivants :

- a) Les éléments du générateur restent invariables et on change l'accord du circuit passif et le couplage; les variables sont γ_{12} et M ou $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$.
- b) Les éléments du circuit passif restent invariables et on change l'accord du générateur et le couplage; les variables sont γ_{11} et k .

Dans un cas comme dans l'autre, nous admettrons qu'on obtient les variations de γ_1 par celles des capacités et que la résistance R_2 reste invariable; cette dernière condition n'est pas rigoureusement satisfaite puisqu'il doit y avoir des variations de fréquence, mais celles-ci sont très faibles dans la pratique.

3 a. — Influence des variations d'accord du circuit passif. — Nous transformerons d'abord la relation 3 en posant :

$$(4) \quad x = \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2}, \quad y = \frac{\gamma_1^2}{\omega^2}, \quad \frac{R_2}{L_2 \gamma_1} = d = \frac{\delta}{\pi}$$

δ étant le décrément du deuxième circuit pour la pulsation γ_1 ; il viendra

$$(5) \quad \frac{1 - y}{1 - \frac{y}{x}} = \frac{k^2}{d^2 y + \left(1 - \frac{y}{x}\right)^2}$$

et nous allons étudier les variations de y en fonction de x . Nous verrons dans un moment que dans les cas de la pratique, un changement simple de l'origine des coordonnées ramène les quantités x et y à être sensiblement égales aux doubles des désaccords relatifs $\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_2}$ et $\frac{\gamma_1 - \omega}{\omega}$; ces coordonnées ont donc un sens physique très simple.

Si l'on remarque que la courbe, qui est du quatrième degré, a un point double à l'origine, on voit qu'une droite passant par ce point ne la coupera qu'en deux autres points, distincts de O, autrement dit les coordonnées x et y pourront se déduire facilement de la valeur du coefficient angulaire de cette droite. Posons donc

$$\frac{y}{x} = m \quad \text{et} \quad q = 1 - m$$

l'équation (5) deviendra

$$(6) \quad \frac{1 - y}{q} = \frac{k^2}{d^2 y + q^2}$$

d'où on déduit

$$(7) \quad 1 - y = \frac{q^2 + d^2}{2d^2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4k^2 d^2 q}{(q^2 + d^2)^2}} \right]$$

Dans la pratique, k^2 est suffisamment petit pour qu'on puisse développer le radical en ne conservant que les deux premiers termes de la série; l'expression 7 peut alors être remplacée par les deux suivantes ¹ :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - y = \frac{k^2 q}{q^2 + d^2} \\ 1 - y = \frac{q^2 + d^2}{d^2} - \frac{k^2 q}{q^2 + d^2} \end{array} \right.$$

qui permettent de construire la courbe facilement. On reconnaît que

1. En comparant la première des équations 8 à l'équation 6, il paraît y avoir incompatibilité entre elles; mais cela provient de ce que la quantité y est très voisine de 1 et la simplification que nous avons introduite la fait disparaître du dénominateur de 6.

l'une de ses branches, celle qui est représentée par la première équation, est asymptote à la droite

$$y = 1 - \frac{k^2}{1 + d^2}$$

c'est la branche intéressante pour la pratique. On voit encore que les dispositions des figures 2 et 3 peuvent se présenter; la première correspond au cas où k est supérieur à d , la seconde au cas où il lui est inférieur ¹.

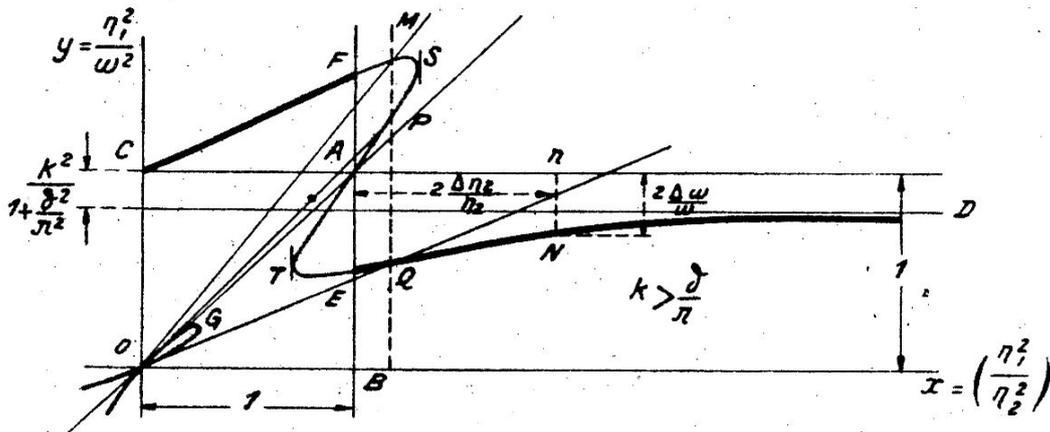


Fig. 2.

Variations de la fréquence $\omega/2\pi$ d'un générateur à lampe auquel on a couplé un circuit passif de fréquence variable $\eta_2/2\pi$. — Couplage serré.

1. En réalité, la courbe définie exactement par l'expression 7 présente des variations complexes de forme quand k varie dans le voisinage de d . Tout d'abord, quand k diminue, atteint la valeur d , la courbe a la forme de la figure 4-a, le point F de la figure 2 est venu se confondre avec A; ensuite, pour $k^2 = d^2 - \frac{d^4}{4}$ on obtient la forme 4-b, enfin pour une valeur un peu plus faible, on arrive à la forme 3. La valeur de k à partir

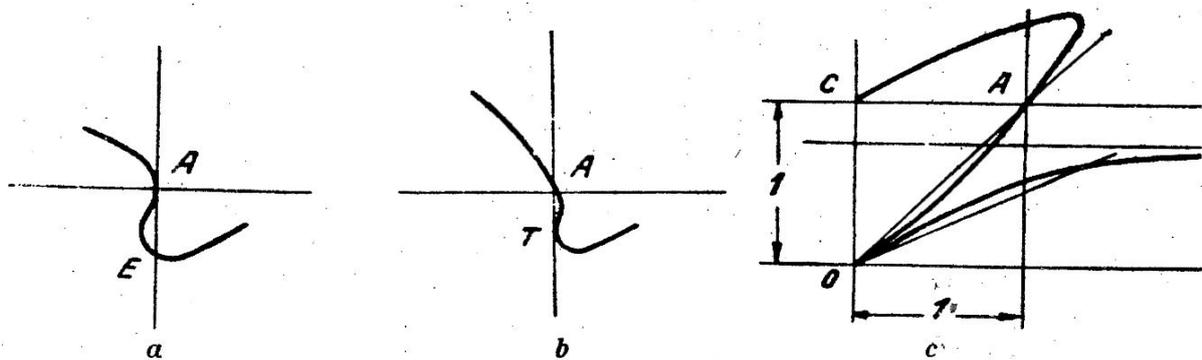


Fig. 4.

de laquelle on se trouve dans ce dernier cas est celle pour laquelle la tangente au point d'inflexion est verticale, elle n'a pas d'expression simple, mais elle est extrêmement voisine des deux précédentes de sorte qu'il est inutile de se préoccuper de ces allures intermédiaires qui n'ont aucune importance pratique.

D'autre part, quand k devient grand, les deux branches viennent se rejoindre pour donner le cas de la figure 4-c, qui n'a pas davantage d'intérêt pratique.

Pour tout couplage supérieur à d il existera donc des accords du secondaire pour lesquels le système sera *susceptible* d'osciller sur trois fréquences différentes. Une semblable possibilité existe même dans le cas où k est inférieur à d en raison de la petite boucle OG, mais nous verrons par la suite qu'il n'y a lieu de tenir compte de cette boucle dans aucun des deux cas.

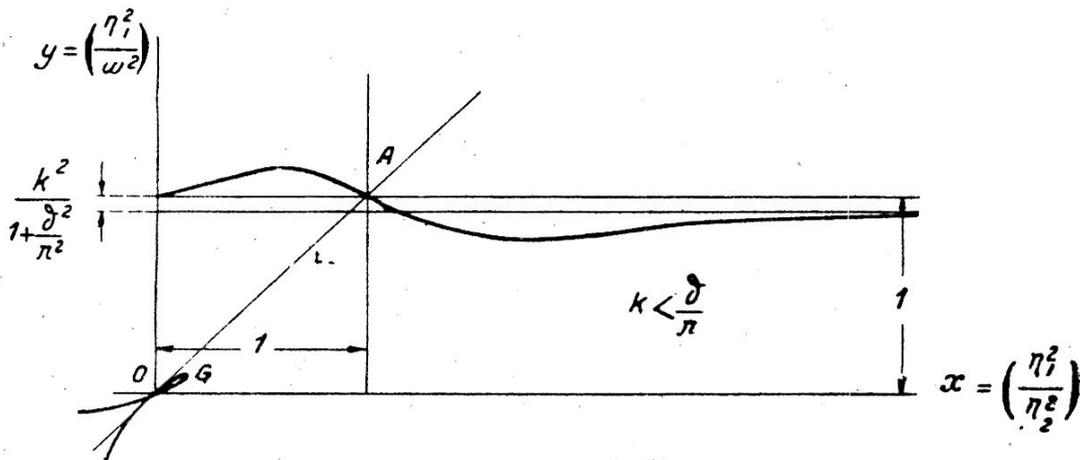


Fig. 3.

Variations de la fréquence $\omega/2\pi$ d'un générateur à lampe auquel on a couplé un circuit passif de fréquence variable $\eta_2/2\pi$. Couplage lâche.

Remarquons enfin qu'en plaçant l'origine des coordonnées au point A, on aura :

$$x' = \overline{An} = x - 1 \div 2 \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_2} \quad y' = \overline{nN} \div 2 \frac{\eta_1 - \omega}{\omega}$$

ce qui vérifie ce que nous avons annoncé plus haut au sujet du sens concret simple des variables choisies ¹.

3-b. — Stabilité des oscillations possibles. — Dans le numéro précédent, nous avons souligné le fait que les pulsations trouvées ne représentent que des oscillations *susceptibles* d'exister ; nous allons voir que les trois solutions obtenues sont de natures différentes; l'une d'entre elles ne correspond à aucune possibilité physique; des deux autres, l'une correspond à une oscillation stable, l'autre à une oscillation instable.

Pour le montrer, remarquons que les éléments R'_1 et S'_1 du circuit 1

1. Si on néglige la résistance R_2 du circuit passif, la courbe dégénère en une hyperbole admettant OA et CA comme asymptotes.

associé à une lampe, sont des constantes tout comme celles d'un circuit normal, avec cette seule différence que la résistance R'_1 peut devenir négative. On peut donc, du point de vue théorique, traiter les circuits 1' et 2 comme nous l'avons fait des circuits ordinaires dans le chapitre iv, n° 2; l'étude mathématique est identique.

Il résulte de là que le système, dérangé de sa position d'équilibre puis livré ensuite à lui-même, donnera naissance à *deux* oscillations dont les périodes et amortissements seront donnés par les solutions de l'équation en γ :

$$(9) \quad (1-k^2)\gamma + 2(a'_1+a_2)\gamma^3 + (\tau_1'^2 + \tau_2^2 + 4a'_1a_2)\gamma^2 + 2(a'_1\tau_2^2 + a_2\tau_1'^2)\gamma + \tau_1'^2\tau_2^2 = 0.$$

Si nous avons préparé le circuit 1' de manière que la seconde des équations 2 soit satisfaite pour une solution ω' de la première, les quantités $(\pm j\omega')$ seront une des solutions de (9) et une des deux oscillations aura la pulsation ω' avec un amortissement nul.

Cela est physiquement évident puisque \mathfrak{S}'_1 , étant nul pour ces valeurs, l'oscillation est possible. Si l'on veut considérer la question du point de vue mathématique, il suffit de se reporter à la formation de l'équation (9) et à celle de \mathfrak{S}'_1 (n° 19-III), on constatera que le numérateur de \mathfrak{S}'_1 n'est autre que le résultat de la substitution de $(j\omega)$ à γ dans l'équation (9).

La seconde oscillation du système sera fournie par l'autre groupe de racines complexes de l'équation en γ ; seulement, comme dans le cas actuel R'_1 est négatif, l'amortissement de cette seconde oscillation pourra être positif ou négatif.

Soit $(-a'' \pm j\omega'')$ cet autre groupe de racines; le courant sera de la forme :

$$i_2 = P' \sin \omega' t + P'' e^{-a'' t} \sin (\omega'' t + \varphi).$$

Si a'' est positif, l'oscillation ω'' disparaîtra bientôt et l'oscillation ω' persistera seule dans le circuit. Si a'' est négatif, l'oscillation ω'' prendra bientôt une amplitude considérable par rapport à laquelle l'autre sera négligeable. Pratiquement ω' disparaîtra complètement, et ω'' seule subsistera avec l'amplitude maxima que permettent les caractéristiques du tube. On conçoit aisément que l'existence d'une oscillation puissante arrête complètement une faible oscillation de fréquence assez peu différente dans un circuit à lampe, car l'accroissement des intensités diminue la pente moyenne de la lampe et la forte oscillation amène cette pente à une valeur pour laquelle la condition d'entretien qui est propre à la

plus faible n'est plus remplie ¹. Ajoutons que la pulsation qui subsistera sera naturellement une de celles qui correspondent aux points M, P ou Q, car celles-là seules sont possibles.

Cherchons maintenant quel est le signe de a'' suivant que ω' est donnée par l'un ou l'autre des trois points précédents. Si les deux groupes de racines de l'équation (9) sont $\pm j\omega'$ et $(-a'' \pm j\omega'')$, la somme des quatre racines est $(-2a'')$ et l'on aura

$$2a'' = \frac{2(a'_1 + a_2)}{1 - k^2}.$$

Le signe de a'' sera donc celui de $(a_1 + a_2)$; or la deuxième équation 2

$$R'_1 + \rho^2 R_2 = 0$$

est satisfaite par ω' et d'après la relation 3

$$\rho^2 = \frac{M^2 \omega^2}{Z_2^2} = \frac{L_1}{L_2} \frac{1 - y}{1 - \frac{y}{x}}$$

on a donc

$$a'_1 + x \frac{1 - y}{x - y} a_2 = 0$$

et

$$a'_1 + a_2 = a_2 \left(1 - x \frac{1 - y}{x - y} \right) = - a_2 y \frac{x - 1}{x - y}$$

L'oscillation de pulsation ω'' subsistera donc si $\frac{x - 1}{x - y}$ est négatif, c'est-à-dire si elle correspond au point Q; elle disparaîtra si elle correspond à M ou P. On raisonnerait de même sur des points à gauche de BA et l'on voit que :

Il ne peut y avoir d'oscillations stables que sur les fréquences correspondant aux régions CF et ED de la courbe.

4. — Phénomène d'entraînement. — Avant d'aller plus loin précisons encore le sens qu'il faut attribuer aux qualificatifs stable et instable employés dans un numéro précédent. L'instabilité ne doit pas être considérée dans le sens absolu, correspondant par exemple à l'état d'équilibre

1. S'il s'agissait d'oscillations de fréquences très différentes, dans le rapport 100 par exemple, ce raisonnement serait en défaut, car il pourrait y avoir entretien des oscillations de la fréquence la plus élevée pendant que le point figuratif de l'oscillation de basse fréquence parcourt la partie rectiligne de la caractéristique et laisse à la pente sa valeur normale; un entretien périodique de la haute fréquence serait donc possible. La possibilité de l'existence simultanée de deux oscillations de fréquences très différentes est vérifiée dans ce cas par l'expérience.

d'un crayon reposant verticalement sur sa pointe et que le moindre dérangement renverserait.

Ce que nous avons dit signifie seulement que si le système part du repos, comme au moment où on allume la lampe, la fréquence sur laquelle il oscillera sera celle dite stable, correspondant à une des branches CF ou ED; et cela parce que l'oscillation la plus puissante étouffera — dans l'œuf si l'on peut dire — la plus faible.

Mais, si par un procédé quelconque, on réussit à produire une oscillation ω' correspondant à l'arc FAE et à l'amener à un degré de puissance notable, sans qu'une des oscillations dites stables ω'' ait été excitée, le circuit continuera à osciller sur ω' . Cet état de choses se conservera jusqu'au moment où un trouble important, apporté au système pourra faire naître une oscillation libre ω'' assez puissante pour l'emporter rapidement sur ω' .

Or il est facile de remplir ces conditions pour les portions FS et ET de l'arc FAE; il suffit de mettre le système en oscillation sur la branche CF par exemple et de l'amener doucement par variation de η_2 sur l'arc FS; on ira d'autant plus loin que l'on manœvrera avec plus de précautions et que l'on soustraira davantage le système aux influences extérieures.

Le même raisonnement tenu au numéro précédent pour montrer comment, quand on part du repos, l'oscillation la plus rapidement croissante arrive à étouffer l'autre, s'applique ici pour comprendre que l'oscillation ω'' ne peut pas s'établir quand ω' est déjà puissante; ces mêmes considérations montrent aussi que le saut de fréquence se fera d'autant plus tôt que la condition d'entretien sera largement remplie, car la résistance négative correspondant à la fréquence stable sera plus forte et l'oscillation sur cette fréquence prendra plus tôt une valeur importante.

Le procédé précédent ne permet pas, bien entendu, d'obtenir des oscillations sur les fréquences fournies par les points des arcs SAT ou de la boucle G, qui, physiquement, ne présentent donc aucun intérêt.

5. — Décrochage des oscillations. — Conditions des applications. — Mesures. — Dans les raisonnements du n° 3, nous avons supposé que la condition limite d'entretien était constamment remplie, c'est-à-dire que la résistance effective du système, $R'_1 + \zeta^2 R_2$, était maintenue nulle par une manœuvre convenable de la réaction dans le générateur; si, après avoir assuré la condition $R'_1 + \zeta^2 R_2 = 0$, on laisse à cette réaction une valeur constante, on décrochera les oscillations en modifiant la fréquence propre du circuit passif de façon à l'approcher de celle du générateur, car

on augmentera ρ et la résistance effective deviendra positive; en la modifiant en sens inverse la condition d'entretien se trouverait au contraire plus largement remplie. Dans les applications des phénomènes que nous venons d'étudier, la condition limite est toujours dépassée et, sans toucher à la réaction dans le générateur, on peut faire varier la fréquence propre du circuit passif dans les deux sens sans arrêter les oscillations; on voit cependant que si le couplage est assez fort, il doit arriver un moment où le décrochage se produit et cela d'autant plus tôt que la condition d'entretien est moins largement remplie à l'origine.

De ce que la condition limite est dépassée dans les applications, il résulte aussi que pour obtenir les fréquences au moyen des formules précédentes, il faudrait introduire dans R_1 la valeur moyenne de la pente de la lampe qui correspond à l'amplitude actuelle des oscillations; si on se sert de la pente normale de la lampe, celle de la partie rectiligne de la caractéristique, les résultats seront seulement approchés.

Il faut aussi remarquer que tous les résultats de l'expérience différeront légèrement, pour cette raison, de ceux de la théorie, qui, en conséquence, ne pourront pas être utilisés pour des applications de haute précision. En particulier on emploie parfois le couplage d'un circuit passif pour mesurer la fréquence d'un générateur; on couple faiblement un circuit passif à ce générateur, la fréquence émise est modifiée; mais en faisant varier la fréquence du circuit passif, on peut retomber sur la fréquence initiale¹ au moment où la période propre du circuit passif devient égale à celle du générateur dans son premier état d'isolement ($x = y = 1$). Si le circuit auxiliaire est un fréquencemètre, il indique immédiatement la fréquence cherchée. Cette méthode est extrêmement sensible, mais, pour les raisons ci-dessus, elle peut donner lieu à des erreurs incompatibles avec la très haute précision exigée aujourd'hui dans les mesures de fréquence; il faut compter sur des écarts relatifs de l'ordre de 10^{-4} . Colebrook a indiqué une correction améliorant les résultats [3], mais il est impossible de tenir compte de tous les éléments en jeu dans la question et d'apprécier avec sûreté l'ordre d'approximation.

6. — Variations relatives des intensités. — Pour compléter cette étude, nous allons étudier le rapport des intensités au primaire et au

1. Pour repérer la fréquence initiale on peut faire battre les oscillations du générateur dans un récepteur avec celles d'un autre émetteur de fréquence voisine; le retour à la même note de battement indique le retour à la haute fréquence initiale.

secondaire quand η_2 varie. On sait (n° 9-III) qu'il est égal au rapport de transformation $\rho = \frac{M\omega}{Z_2}$. Nous aurons donc :

$$\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 = \frac{M^2\omega^2}{R_2^2 + S_2^2}$$

Quand M est très petit, les réactions du secondaire sur le primaire sont négligeables et les résultats obtenus peuvent être considérés comme donnant effectivement les variations de I_2 à une échelle arbitraire. Mais ce n'est pas le cas quand k est supérieur à d et qu'il existe plusieurs oscillations possibles; nous allons voir en effet que le rapport I_2/I_1 , peut alors dépasser l'unité.

Il faut encore remarquer que, dans les expériences de contrôle, les intensités I_1 et I_2 ne correspondent pas exactement aux conditions limites d'entretien mais à un couplage grille-plaque N supérieur à la limite; il est en effet nécessaire que la condition d'entretien soit assurée sur toute la gamme des fréquences parcourues; ces expériences pourront donc présenter un petit désaccord quantitatif avec les résultats du calcul, mais l'allure des phénomènes restera la même.

Grâce à la relation 3, l'expression de ρ^2 peut s'écrire

$$\rho^2 = \frac{M^2\omega^2}{Z_2^2} = \frac{L_1}{L_2} \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$$

ou d'après la première formule 8

$$\rho^2 = \frac{L_1}{L_2} \frac{k^2}{q^2 + d^2} \quad \text{avec} \quad q = 1 - \frac{y}{x}$$

Nous poserons

$$\rho^2 = \frac{L_1}{L_2} u$$

et nous étudierons les variations de

$$u = \frac{L_2}{L_1} \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2$$

Comme la variable est η_2 c'est-à-dire x , nous exprimerons également x en fonction de q

$$x = \frac{y}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \left(1 - \frac{k^2 q}{q^2 + d^2}\right)$$

Il est alors facile de tracer la courbe représentative de u en fonction de x (fig. 5).

1^{er} cas. — $k < d$. La courbe correspondante est dessinée en trait fin, elle n'offre aucune particularité; si k/d est assez petit, on peut la consi-

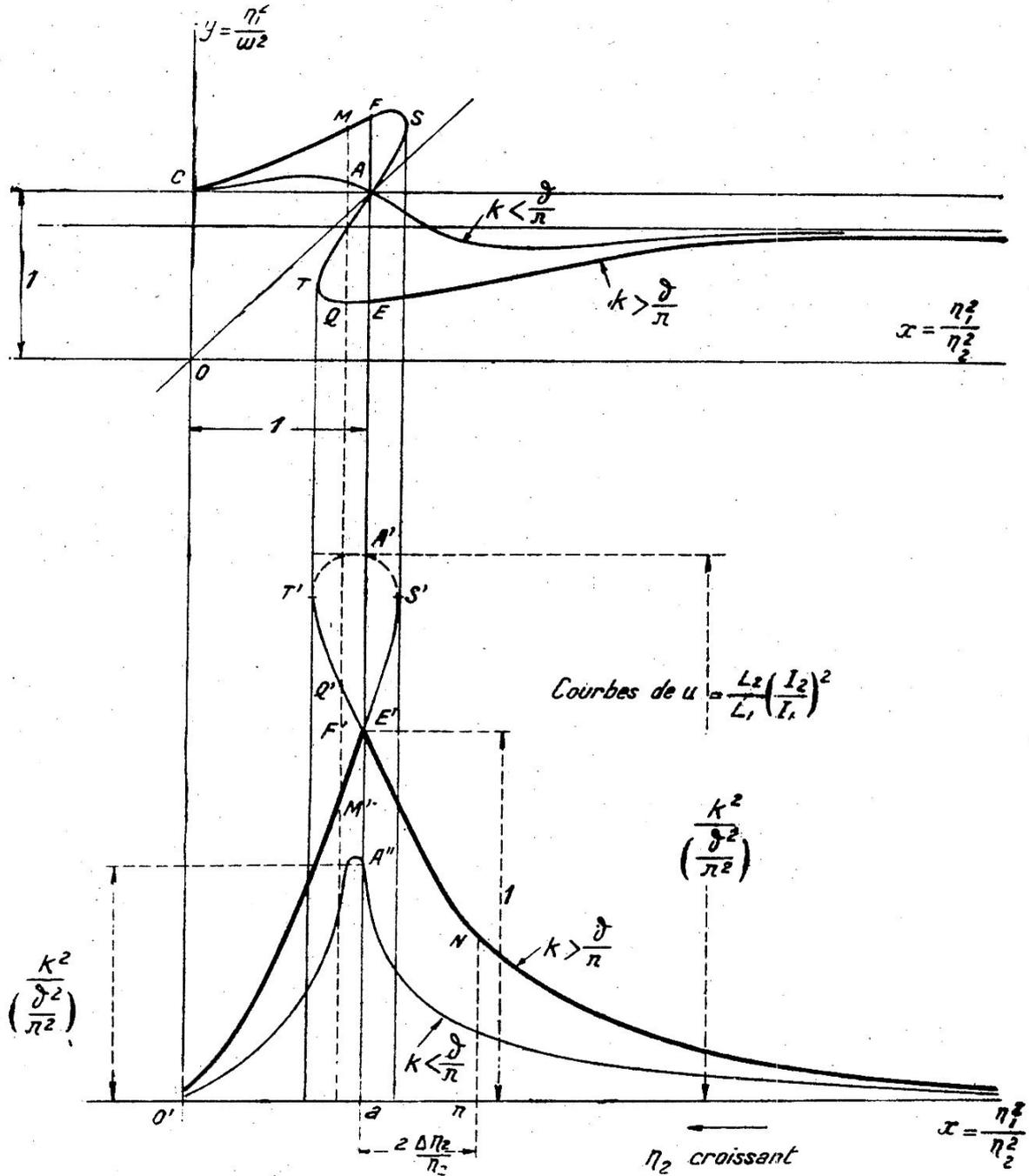


Fig. 5.

Variations du rapport I_2/I_1 de l'intensité I_2 induite dans un circuit passif couplé à un générateur à lampes dans lequel l'intensité est I_1 . — La courbe comportant une boucle correspond à un couplage fort; la courbe sans boucle à un couplage faible.

dérer comme représentant les variations de I_2 même. L'ordonnée correspondant au point A'' , pour lequel $\eta_2 = \omega = \eta_1$ et $q = 0$ est $\frac{k^2}{d^2}$; le maxi-

mum est légèrement à gauche, il ne diffère de $\frac{k^2}{d^2}$ que par un terme en $\left(\frac{k'}{d'}\right) k^2$.

2^e cas. — $k > d$. La courbe qui correspond à ce cas mérite un examen spécial : Quand, en partant de la droite, on fait croître γ_2 , la fonction u augmente; elle atteint la valeur 1 au point E' qui correspond au début du régime d'instabilité et continue à croître si on fait varier γ_2 assez lentement et qu'on abrite le système contre les perturbations extérieures. Mais il arrive un moment en Q' par exemple, où se produit un saut de fréquence; u tombe brutalement puis décroît ensuite régulièrement. En faisant décroître γ_2 on observerait des phénomènes analogues de l'autre côté de aA'.

Le régime correspondant à la zone d'instabilité n'est guère utilisable dans les applications, mais il est indispensable d'en connaître les phénomènes pour les éviter dans la pratique. C'est ainsi par exemple qu'on peut observer des sauts de fréquence de l'espèce ci-dessus dans le réglage de certains émetteurs à lampe couplés à une antenne.

Pour simplifier les calculs et l'exposition, pour nous placer aussi dans les conditions que l'on rencontre le plus souvent, nous avons produit les variations de γ_2 en modifiant la capacité C_2 du secondaire; mais on conçoit que les résultats obtenus sont plus généraux et, de fait, ils s'appliquent dans leurs grandes lignes à toute variation relative des fréquences propres des deux circuits sous quelque forme que cette variation soit obtenue.

7. — Influence des variations d'accord du générateur. — Supposons maintenant qu'on laisse invariable l'accord du circuit passif, et que l'on fasse varier celui du générateur; γ_2 sera fixe et γ_1 variable. On peut suivre une méthode identique à celle du cas précédent, mais comme la variable est cette fois γ_1 , on posera

$$x = \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2}, \quad y = \frac{\gamma_2^2}{\omega^2}, \quad d = \frac{R_2}{L_2 \gamma_2}$$

et l'équation de la courbe sera

$$\frac{1 - \frac{y}{x}}{1 - y} = \frac{k^2}{d^2 y + (1 - y)^2}$$

Comme x ne figure qu'au premier degré, il est inutile de passer par l'intermédiaire d'une variable auxiliaire et en résolvant l'équation par

rapport à x , on tracera très facilement la courbe (fig. 6), dont l'allure présente les mêmes caractéristiques que celle du cas précédent. Elle est asymptote à la droite OA et présente encore deux cas de figure suivant que k^2 est supérieur ou inférieur à $d^2 - \frac{d^4}{4}$, ou pratiquement à d^2 .

La discussion du problème physique serait identique à celle que nous venons de faire.

§ II. — SYNCHRONISATION DES GÉNÉRATEURS.

8. — **Description du phénomène de synchronisation.** — Considérons un générateur G (fig. 7) qui oscille librement sur une fréquence f_0 et appliquons-lui, entre filament et grille, une force électromotrice d'am-

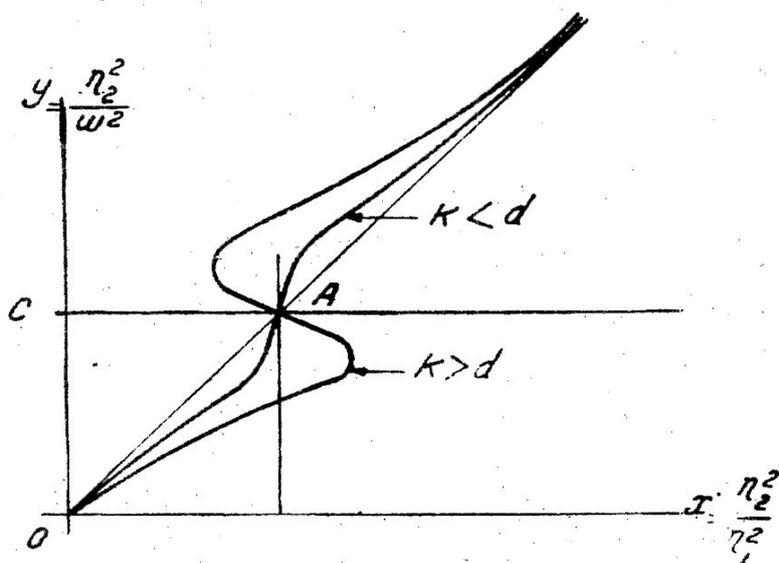


Fig. 6.

Variation de la fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$ d'un générateur couplé à un circuit passif, quand on fait varier la fréquence propre du générateur.

plitude E_s et de fréquence variable f_s ; cette force électromotrice sera produite par un second générateur G_s disposé de telle sorte qu'il ne subisse aucune action de la part de G; il sera constitué par exemple par un système identique à G, dont on aura amplifié les oscillations par une ou deux lampes supplémentaires et qu'on aura abrité par une cage d'où sortira seulement la boucle B_s très lâchement couplée à B.

Couplons en outre le circuit oscillant de G à un détecteur qui alimentera un téléphone ou un enregistreur. Cela fait, modifions lentement la fréquence f_s supposée d'abord inférieure à f_0 tout en déroulant la bande

d'enregistrement; dès que la différence $f_g - f_s$ sera devenue assez faible pour que l'enregistreur fonctionne, nous verrons apparaître une série d'ondulations à peu près sinusoïdales et de fréquence $f_g - f_s$; ce sont les

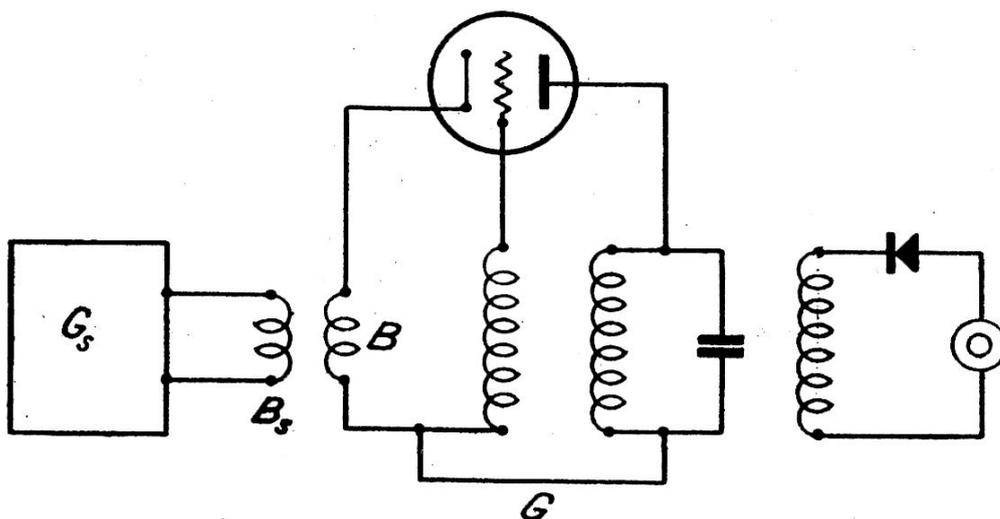


Fig. 7.

battements des deux ondes, analogues à ceux que nous avons rencontrés au numéro 3-IV. Mais cet état de choses ne se prolongera pas indéfiniment; quand $f_g - f_s$ sera devenu suffisamment petit, l'allure sinusoïdale se modifiera complètement (fig. 8), les ondulations s'élargiront d'un côté, se rétréciront de l'autre, puis, tout d'un coup, elles laisseront la place à un trait rectiligne pour réapparaître un peu plus loin, reproduisant en sens inverse les mêmes variations.

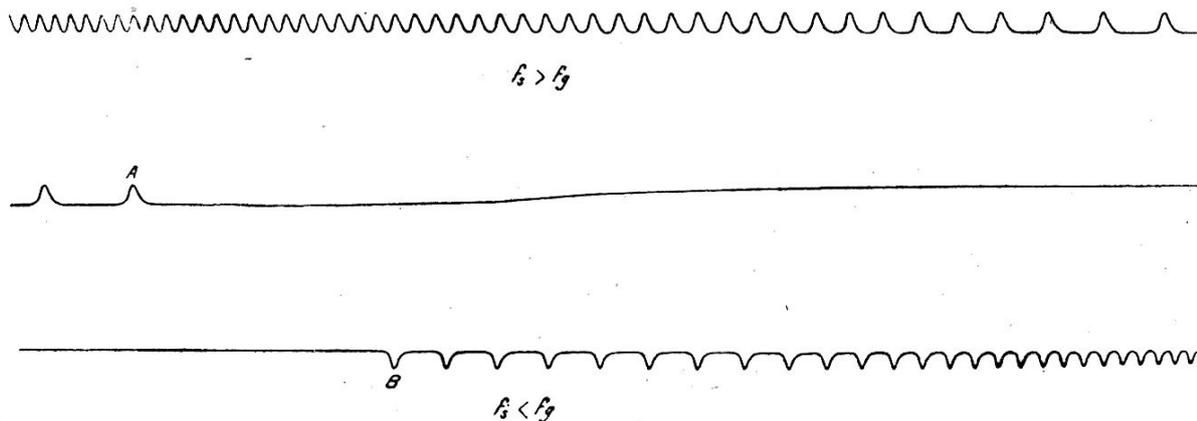


Fig. 8.

Enregistrement des battements et de la synchronisation (région AB) de deux générateurs couplés.

En remplaçant l'enregistreur par un téléphone, on commence par entendre un son musical, d'abord pur et de hauteur décroissante, mais

qui perd peu à peu sa pureté pour se transformer en un roulement puis en une série de chocs distincts, dont l'intervalle augmente jusqu'à atteindre une durée de l'ordre de la seconde; puis le téléphone reste silencieux sur une gamme de fréquence correspondant à la région AB de l'enregistrement, un nouveau choc a lieu en B et les mêmes phénomènes se reproduisent en sens inverse.

Les courbes en trait plein de la figure 9, indiquant la hauteur des sons, rendent compte de ce processus¹; les droites pointillées f_gA et f_gB ont pour ordonnées les valeurs absolues de $(f_g - f_s)$; on voit que *les notes de batte-*

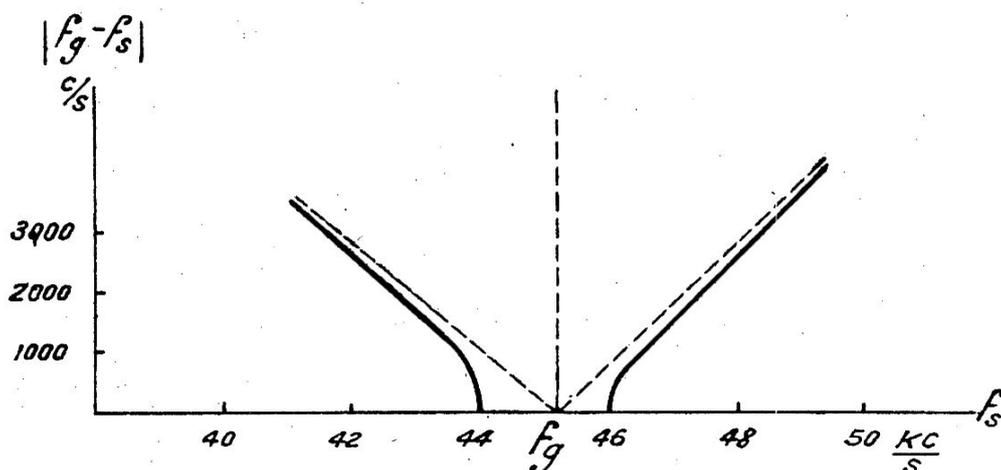


Fig. 9.

Fréquence des battements des deux générateurs couplés G et G_s. La fréquence propre de G est fixe et marquée en f_g ; celle de G_s varie; il y a synchronisation dans l'intervalle 44-46.

ment ont toujours une hauteur inférieure à la différence $(f_g - f_s)$ — la fréquence du générateur est attirée par celle du synchroniseur — et qu'il n'existe qu'une symétrie approchée des phénomènes par rapport à la fréquence du générateur soumis à la synchronisation.

En reproduisant les mêmes expériences avec des forces électromotrices d'amplitudes différentes, on constate que l'on obtient toujours une plage de synchronisation, quelque petit que soit E_s , mais que la largeur de la plage et la dissymétrie des courbes augmentent avec cette amplitude.

Il est évidemment facile de mettre en équations le problème de la synchronisation, mais ces équations ne sont pas linéaires et leur solution est très pénible, même en y introduisant des simplifications très impor-

1. L'enregistrement de la figure 8 nous a été communiqué par M. de Bellecize, les figures 9 et 12 sont tirées d'un mémoire très complet de M. Subra auquel nous faisons par la suite plusieurs emprunts [4].

tantes qui enlèvent à la question sa généralité. En revanche, on peut analyser qualitativement les phénomènes sur une représentation géométrique, en s'aidant de considérations physiques; c'est ce que nous allons faire.

9. — **Influence de la phase de la force électromotrice de synchronisation sur la fréquence du générateur.** — Remarquons d'abord que l'état du générateur G soumis à l'action du synchroniseur diffère en deux points principaux de celui qu'il possède en oscillations libres :

a) Une force électromotrice supplémentaire $E_s \sin \omega_s t$ appliquée à sa grille, s'ajoute à celle qui provient du jeu normal des réactions;

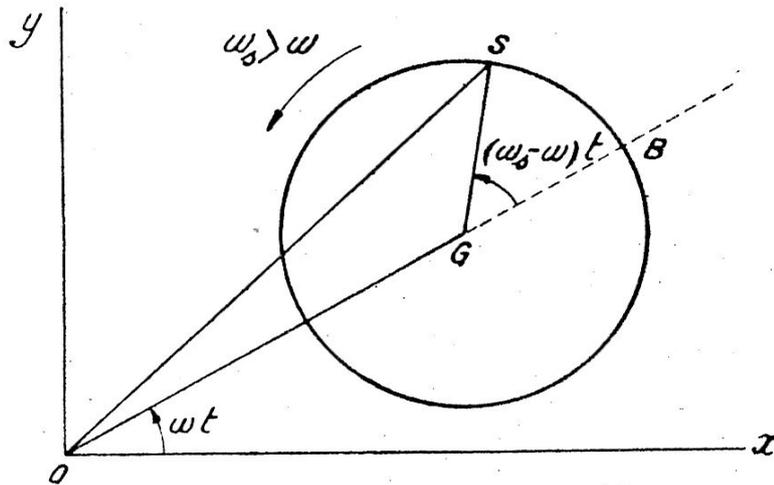


Fig. 10.

b) Du fait que E_s modifie le régime des oscillations, la réaction du circuit oscillant sur la grille et la fréquence prennent des valeurs différentes de celles qu'elles ont en oscillations libres.

Nous verrons tout à l'heure que le phénomène n'est plus sinusoïdal; admettons cependant pour un instant qu'il le soit et désignons par E_r l'amplitude de la tension grille de réaction et par f la fréquence, différente de f_s .

Dans ces conditions, on peut construire la figure 10 où $OG = E_r$ et $GS = E_s$; OS représentera la tension grille totale et \widehat{SOB} sa phase relativement à la tension de réaction. Si l'on suppose $\omega_s > \omega$, la rotation du point S sur le cercle de centre G aura lieu dans le sens de la flèche.

Cela posé, rappelons que la fréquence d'un générateur en régime permanent diffère de la fréquence propre de son circuit oscillant (n° 6-VI) chaque fois que la réaction qui entretient ses oscillations n'est pas en phase avec le courant; quand cette réaction comporte une composante en qua-

drature, la fréquence est supérieure à celle du circuit oscillant si cette composante est en avance, inférieure si elle est en retard; en outre, l'écart entre ces deux fréquences est d'autant plus grand que cette composante est forte.

Dans un générateur en oscillations libres, la réaction d'entretien ¹ est presque en phase avec le courant, nous admettrons qu'elle le soit rigoureusement pour simplifier l'exposition de ce qui suit; on se rendra facilement compte des légères modifications qu'entraînerait la présence d'une petite composante en quadrature.

Dans le cas actuel, la lampe est commandée par la tension totale de grille OS; les choses doivent donc se passer comme si la réaction en phase provenant des oscillations libres était remplacée par une réaction comportant une composante en quadrature, tantôt en avance, tantôt en retard. Le générateur ne peut donc pas se fixer à une fréquence invariable; il y a tendance à l'augmentation de la fréquence quand le point S se trouve sur le demi-cercle situé à gauche de OB, tendance à la diminution quand il est sur le demi-cercle à droite, et ces tendances sont d'autant plus marquées que l'angle SGB est plus voisin de 90°. Ces tendances produiront évidemment des variations de fréquence d'autant plus grandes que le point S séjournera plus longtemps sur chacun des demi-cercles, c'est-à-dire que $(\omega_s - \omega)$ sera plus petit.

Revenons maintenant sur la construction de la figure 10 pour laquelle nous avons admis que la fréquence du générateur perturbé par le synchroniseur était constante, nous voyons que cette hypothèse est inexacte; nous pouvons cependant justifier la construction en considérant qu'une oscillation de haute fréquence, prise à part, peut être tenue pour sinusoïdale et comme ayant une fréquence instantanée f , déduite de sa période. Cette fréquence varie au cours du temps et pour que la figure 10 soit correcte, il suffira d'y remplacer les expressions ωt et $(\omega_s - \omega)t$ représentant les valeurs des angles GOx et SGB par $\int_0^t \omega dt$ et $\omega_s t - \int_0^t \omega dt$; la vitesse de rotation de S sera $(\omega_s - \omega)$, ω étant cette fois variable. On remarquera de même que la longueur du vecteur OG varie périodiquement, car l'intensité dans le circuit oscillant change avec les positions relatives de OG et GS; cette variation peut se traduire par un déplacement du point O relativement au cercle G invariable.

1. Il faut prendre soin de bien donner à l'expression « réaction d'entretien » celui qui est défini au numéro 6-VI : force électromotrice considérée comme agissant sur le circuit oscillant lui-même.

10. — **Variations de la fréquence. — Synchronisation.** — Nous pouvons maintenant nous rendre compte de tous les phénomènes décrits au numéro 8. Reprenons sur la figure 11 la partie de la figure 10 utile à nos raisonnements et supposons d'abord $f_s > f_y$ et ces deux fréquences très écartées d'une le l'autre; la vitesse angulaire $(\omega_s - \omega)$ sera grande, une rotation complète de S comprendra un petit nombre de périodes de la haute fréquence et les tendances à des variations de fréquence n'auront pas le temps de se manifester nettement; la fréquence *instantanée* f restera très voisine de f_y et les battements auront à peu près la même allure que ceux de deux oscillations sinusoïdales de fréquences f_s et f_y .

La durée du demi-battement correspondant à la demi-circonférence

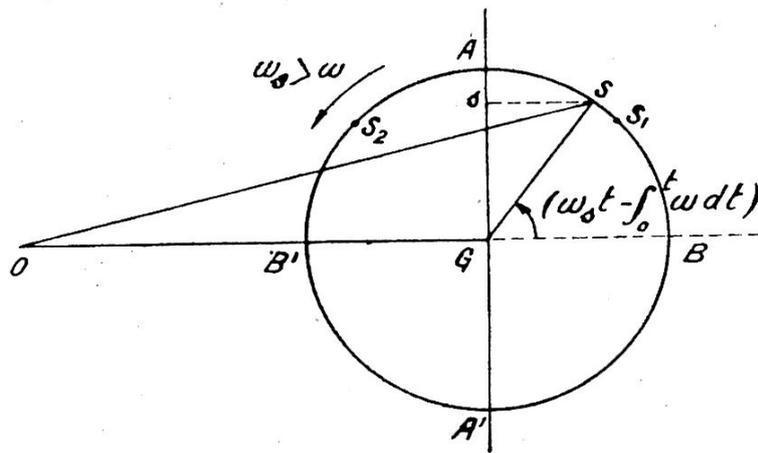


Fig. 11.

AB'A' sera cependant plus longue que celle du demi-battement correspondant à A'BA, car c'est dans le quadrant AB' que f atteint son maximum et par suite $(\omega_s - \omega)$ son minimum: on reconnaît cette particularité sur les ondulations de la figure 8. Après le passage de la zone de synchronisation les pointes se retourneront, car f atteindra son maximum dans le quadrant AB, la rotation ayant lieu en sens inverse.

Les longues alternances correspondant tantôt au minimum du courant tantôt à son maximum, il est naturel de trouver une dissymétrie dans la marche des phénomènes suivant que $f_s - f_y$ est positif ou négatif.

A mesure que f_s se rapproche de f_y , la durée d'une rotation de S augmente, la composante en quadrature Gs a plus de temps pour produire son effet, et la différence des deux demi-battements s'accroît.

A partir d'une valeur assez faible de $f_s - f_y$, la croissance de f le long de l'arc BAB' deviendra suffisante pour que $f_s - f$ s'annule; si ce résultat

est atteint pour un point situé à droite de A, le point S restera immobile ou exécutera de petites oscillations autour d'une position moyenne S_1 . Le générateur sera synchronisé, il n'y aura plus entre ses oscillations et celles du synchroniseur qu'une différence de phase.

Pour le voir, supposons que le point S dépasse le point S_1 vers la gauche, la composante en quadrature G_s augmentera et par suite aussi la valeur de f ; $(\omega_s - \omega)$ qui était nul deviendra négatif et S rétrogradera vers S_1 ; l'inverse se produirait en cas de déplacement à droite. Un raisonnement

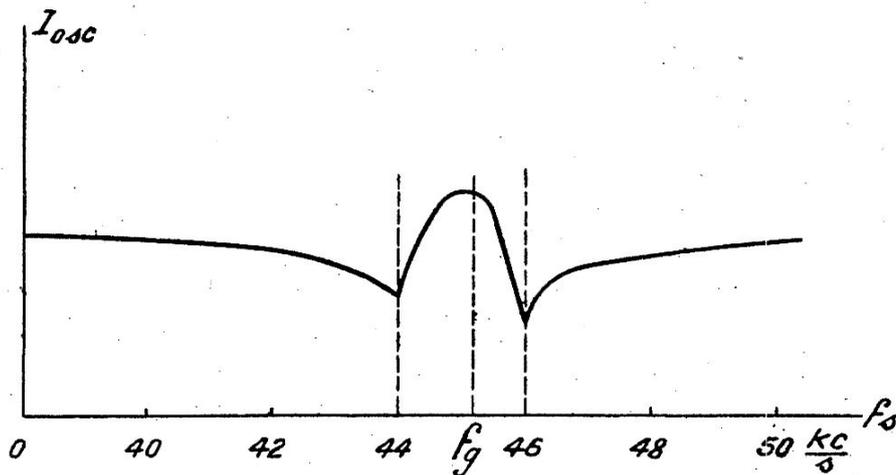


Fig. 12.

Variations de l'intensité dans le générateur G de fréquence propre constante f_g , sous l'influence des variations de la fréquence f_s du générateur G_s .

semblable montrerait qu'une égalité de fréquence réalisée en S_2 à gauche de A serait instable, elle occasionnerait seulement un séjour particulièrement long dans le voisinage de S_2 .

On trouverait de même que pour une fréquence f_s inférieure à f_g la synchronisation se produirait dans le quadrant BA' . Le demi-cercle $A'BA$ correspond donc à la zone de synchronisation. Si, comme nous l'avons supposé on est parti de valeurs de f_s supérieures à f_g , la synchronisation se produira d'abord en A, puis le point S_1 décrira le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre, il arrivera en B pour $f_s = f_g$, puis passera dans le quadrant inférieur et le décrochage aura lieu en A' .

On voit encore immédiatement qu'en augmentant l'amplitude E_s de la force électromotrice de synchronisation, on élargira la zone de synchronisation, car G_s augmentant, f atteindra plus rapidement la valeur f_g .

Il n'y a rien à changer à ce qui précède pour le cas où G_s serait plus grand que OG .

On remarquera enfin que les dispositifs précédents permettent non

seulement d'obtenir la synchronisation, mais encore de réaliser une différence de phase donnée entre les deux émissions synchronisées.

11. — Variations du courant dans le circuit oscillant du générateur. — En mesurant le courant du générateur G pour différentes valeurs de la fréquence de synchronisation, on trouve qu'il présente l'allure indiquée par la figure 12, obtenue en conservant une valeur bien constante à la tension synchronisante E_s ; le maximum correspond à $f_s = f_g$ et n'est autre chose que le courant de résonance. Il est intéressant de remarquer encore la dissymétrie de la courbe.

12. — Conséquences relatives aux mesures. — Pour trouver la différence de fréquence entre deux générateurs, on utilise souvent la méthode suivante : on fait battre leurs oscillations dans un récepteur jusqu'à obtenir une fréquence de battement acoustique et on mesure cette dernière. Les mesures ainsi effectuées sont extrêmement sensibles et donnent l'illusion de la précision, mais nous avons vu que la fréquence des battements est inférieure à la différence des hautes fréquences, si les générateurs réagissent l'un sur l'autre. On ne devra donc demander à cette méthode une grande précision que si l'on a pris toutes les précautions voulues pour éviter ces réactions, en constituant par exemple les deux générateurs comme le synchroniseur du numéro 8.

Un cas particulier de cette méthode est celui où on écoute les battements d'une émission avec les oscillations d'un fréquencesmètre générateur, et où on recherche l'accord correspondant à l'absence de battements; on admet qu'à ce moment les deux fréquences sont égales. D'après ce que nous avons dit, on peut faire des erreurs grossières à cause de la synchronisation et il est encore nécessaire de protéger particulièrement le fréquencesmètre contre l'action de l'émission à mesurer.

On emploie aussi parfois les battements de deux générateurs à haute fréquence pour obtenir des oscillations de fréquence acoustiques destinées aux mesures dans le domaine de ces fréquences. Sans précautions spéciales on doit craindre deux sources importantes d'erreurs : la fréquence des battements n'est pas bien définie, car elle change périodiquement; cette fréquence n'est pas égale à la différence des hautes fréquences.

Enfin, en faisant battre des signaux de fréquence f avec une hétérodyne, on peut obtenir la même fréquence acoustique φ pour deux fréquences de l'hétérodyne $f + \varphi$ et $f - \varphi$; il est important de noter que les intensités résultantes ne seront pas les mêmes dans les deux cas en raison de la dissymétrie signalée. Cette remarque peut trouver son application dans certaines mesures de rayonnement ou d'amplification.

13. — Emissions et réception synchrones. — Les phénomènes que nous venons d'étudier auront des applications pratiques très importantes :

Il est possible de faire travailler plusieurs émetteurs sur des fréquences rigoureusement égales. Ce procédé, déjà appliqué à des stations de radio-diffusion réparties sur un même territoire, permet de diffuser un même programme avec une meilleure répartition de l'énergie rayonnée et sans troubles réciproques¹. On pourra peut-être économiser ainsi un grand nombre de longueurs d'onde et il deviendra possible d'attribuer à chaque émission distincte une gamme de fréquence plus étendue au bénéfice de la qualité.

Dans une réception de téléphonie, on peut augmenter à volonté l'amplitude de l'onde porteuse en synchronisant sur elle un générateur local, ce qui conduit à des réceptions de qualité supérieure [1]. On pourra aussi, à l'émission, réduire l'énergie de l'onde porteuse en n'en conservant que ce qui est indispensable pour pouvoir synchroniser, dans le récepteur, le générateur local qui la ramènera à la valeur convenable; on économisera ainsi beaucoup de puissance.

BIBLIOGRAPHIE

1. DE BELLESCIZE (H.), *La réception synchrone*. — *Onde Électrique*, 11, 1932, 209-272.
2. DE BELLESCIZE (H.), *La synchronisation des courants de haute fréquence*. *Bulletin de la Société Française des Electriciens*, juillet 1933, 693-729.
3. COLEBROOK (F. M.), *The double beat method of frequency adjustment*. — *Experimental Wireless*, 8, 1931, 639-647.
4. SURRA (H.), *Étude de la synchronisation d'un auto-oscillateur et de son fonctionnement au voisinage du synchronisme*. — *Onde Électrique*, 11, juillet 1933, 353-385.

1. Cette question des troubles réciproques n'est cependant pas entièrement résolue, en raison des différences de phase que présentent plusieurs émissions synchronisées parvenant à un même récepteur. Ces différences proviennent de l'inégalité des phases dans les émetteurs et de l'inégalité des chemins parcourus par les ondes. Nous reviendrons sur cette question.

CHAPITRE VIII

Les circuits ouverts.

1. — **Définition du circuit ouvert.** — Tous les systèmes que nous avons considérés dans le chapitre précédent étaient constitués par un fil ne présentant d'autres interruptions que celles qui étaient créées par l'interposition de condensateurs; en négligeant ces intervalles, toujours petits, on pouvait les considérer effectivement comme fermés. Nous leur avons donné des propriétés particulièrement simples, nous avons supposé que le courant avait, à un instant donné, la même valeur sur toute la longueur du fil, ce qui revenait à admettre qu'aucune quantité d'électricité ne pouvait s'accumuler dans le fil et que toute celle qui, dans un temps donné, traversait une section de ce dernier traversait dans le même temps toute autre section; en un mot le fil n'avait pas de capacité. La propriété d'emmagasiner des charges électriques était rigoureusement réservée aux condensateurs.

Nous verrons bientôt que ces simplifications sont parfaitement légitimes, à condition de se limiter aux systèmes dont les dimensions et la longueur des fils employés est petite relativement à la longueur de l'onde qui correspond à la fréquence des oscillations. Mais il est évident que ce n'est là qu'un cas très particulier du mouvement de l'électricité dans des corps métalliques; on sait qu'on peut accumuler de l'électricité dans un conducteur quelconque et que les condensateurs permettent seulement, par leur disposition, de concentrer des charges importantes dans un objet de petites dimensions.

Si les dimensions des systèmes étudiés sont grandes, que ceux-ci constituent des circuits fermés ou non, on conçoit que les charges que peuvent prendre les fils eux-mêmes puissent jouer un rôle marqué; une étude moins particularisée est donc nécessaire.

Pour faire cette étude, il est commode de commencer par le cas de systèmes ne comprenant plus aucun condensateur, et dans lequel les charges n'existeront plus que sur les fils eux-mêmes. Il y a même avantage à considérer des systèmes dans lesquels les fils ne forment plus à la vérité de circuits, mais des lignes limitées ou non. C'est à des systèmes de ce genre que l'on donne le nom de *circuits ouverts*.

Ce sont eux que nous allons étudier dans ce chapitre, mais il nous arrivera à plusieurs reprises de disposer nos fils de telle sorte que leurs extrémités viendront se rejoindre. La raison qui classera de tels systèmes

dans le présent chapitre sera alors leurs grandes dimensions ou simplement la grande longueur de leurs fils par rapport à la longueur de l'onde.

2. — Difficultés de l'étude rigoureuse de ces circuits. — Nous avons étudié les problèmes des circuits fermés en appliquant les lois d'OHM ou de KIRCHHOFF entre deux points de ces circuits ou à des contours fermés; la première idée qui vienne à l'esprit pour traiter les questions relatives aux circuits ouverts est de généraliser la méthode précédente.

Mais ici le courant n'a plus la même valeur en tous les points du fil, car, chemin faisant, il abandonne des charges électriques en raison de la capacité du fil. On devra donc abandonner les équations relatives à des portions finies des circuits et les remplacer par des relations élémentaires qui exprimeront les liens existant sur un élément du fil entre les différentes variables.

De grosses difficultés se présentent immédiatement: Comment connaître la capacité d'un élément de fil? Quel sens faut-il attribuer à la force électromotrice de self-induction?

En toute rigueur, ces difficultés sont insurmontables, la méthode envisagée est inapplicable. Il faut abandonner les notions de capacité et surtout de self-induction, et partir des principes plus généraux condensés dans les équations de MAXWELL.

Malheureusement, si les équations du problème peuvent s'écrire très facilement en partant de ces principes, leur résolution présente des difficultés telles que c'est à peine si l'on peut en tirer quelques conséquences dans le cas le plus simple de lignes rectilignes de longueur finie ou infinie.

Pour obtenir des résultats quantitatifs approchés, utilisables dans les cas les plus importants de la pratique, on est alors revenu aux notions de capacité et de self-inductance, auxquelles on a cherché à donner un sens *approximatif* pour les appliquer aux éléments des circuits; c'est ce que nous allons examiner maintenant.

Les approximations consenties pour arriver à un résultat sont parfois extrêmement grossières et, qui plus est, il est souvent à peu près impossible de déterminer par le calcul leur ordre de grandeur; c'est par la comparaison entre les résultats auxquels on parvient dans les quelques cas qui peuvent être traités rigoureusement, que l'on peut se faire une idée de la valeur des méthodes simplifiées. *Bien entendu, c'est surtout l'expérience qui, jugeant comme toujours en dernier ressort, justifie l'emploi de ces méthodes.*

3. — Équations générales de l'électromagnétisme. — Nous nous contenterons d'écrire ces équations en renvoyant pour leur établissement