

Trans. IT-4/4

MINISTÈRE DE LA GUERRE

DIRECTION CENTRALE DES TRANSMISSIONS

Instruction Technique des Transmissions n°4

THÉORIE DES RADIOCOMMUNICATIONS

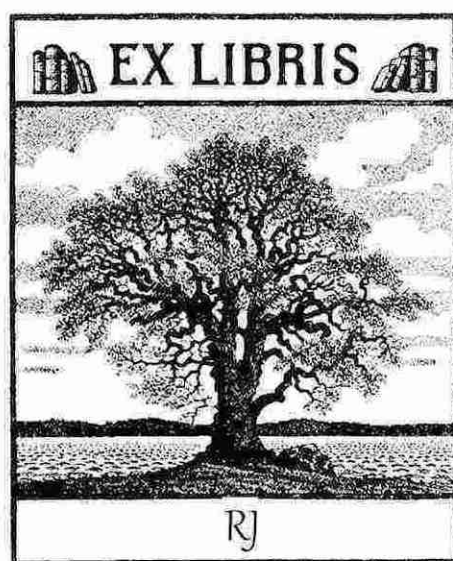
QUATRIÈME VOLUME

Chapitre VII

Génération et
propagation des
ondes électro-
magnétiques.

(Rédaction provisoire)

Paris
Août 1947



Numérisé en Juin 2025 par Serge Laffont, 300dpi

Avant-propos

du premier Volume

La présente Théorie des Radiocommunications contient l'exposé des connaissances de base nécessaires à la compréhension des phénomènes qui interviennent dans les Radiocommunications, et en particulier dans les appareils émetteurs et récepteurs.

Elle contient donc l'exposé des principes généraux qui régissent ces phénomènes en insistant toutefois, principalement, sur leur côté qualitatif et leur aspect physique.

Par contre, on a laissé de côté toute description détaillée d'appareils ou d'installations particulières ; ces descriptions feraient, en effet, double emploi avec les "notices techniques" relatives à ces matériels et, d'autre part leur liste risquerait de devenir rapidement périmée ou tout au moins incomplète.

D'une manière générale, il a été fait un large usage des représentations graphiques (et en particulier de la représentation vectorielle des courants alternatifs).

Certains phénomènes, cependant, ne peuvent être expliqués sans le secours de démonstrations ou de développements mathématiques. Pour que ces derniers ne risquent pas d'apporter des difficultés à la compréhension générale des phénomènes expliqués, un chapitre préliminaire (numéroté I_a) a été consacré à un rappel des éléments de mathématiques sur lesquels on devra s'appuyer par la suite.

D'autre part, la présente théorie des radiocommunications s'appuie constamment sur des notions d'électricité générale ; un deuxième chapitre préliminaire (n° II_a) a donc été affecté à un rappel des notions d'électrotechnique indispensables.

Enfin, un troisième chapitre préliminaire (n° III a) a été réservé à la représentation vectorielle des courants alternatifs, ainsi qu'à la notation imaginaire laquelle n'est d'ailleurs que la traduction en langage algébrique de la représentation vectorielle elle-même.

Ces trois chapitres préliminaires contiennent la base de ce qu'il est indispensable de connaître pour pouvoir étudier avec un bon rendement les chapitres suivants. On ne devra donc pas hésiter à sacrifier le temps nécessaire pour assimiler, si elles ne sont pas déjà connues, ces notions de base indispensables; le temps ainsi passé sera récupéré par la suite et les résultats obtenus gagneront en qualité.

À la moindre difficulté éventuellement rencontrée par la suite dans l'étude des chapitres spécifiquement consacrés aux radiocommunications, il ne faudra pas hésiter à se reporter aux bases contenues dans les trois chapitres préliminaires, opération qui sera d'ailleurs facilitée, dans la plupart des cas, par des renvois appropriés intercalés dans le texte lui-même.

En fait, outre ces notions indispensables qui sont d'une application constante, on a été amené à incorporer dans les chapitres I a II a III a, un certain nombre de renseignements qui, se rapportant à des questions très particulières, ne sont pas immédiatement indispensables pour entreprendre l'étude de la théorie des radiocommunications proprement dites. Les numéros de ces paragraphes seront munis d'un astérisque pour les signaler au lecteur et lui permettre de les laisser éventuellement de côté, en attendant d'être expressément invité à y revenir par les renvois correspondants.

La présente théorie des radiocommunications comprend, outre les trois chapitres préliminaires I a, II a, III a dont il vient d'être question, les neuf chapitres principaux suivants :

- Chapitre I : Généralités sur les radiocommunications.
- Chapitre II : Les circuits électriques.
- Chapitre III : Les tubes électroniques.
- Chapitre IV : Les appareils émetteurs.
- Chapitre V : Les appareils récepteurs.
- Chapitre VI : Les lignes de transmission.
- Chapitre VII : Le champ électromagnétique et propagation des ondes.
- Chapitre VIII : Les aériens d'émission.
- Chapitre IX : Les aériens de réception, radiogoniométrie, et radioquidage.

En réalité, tous les paragraphes constituant les chapitres I à IX ne présentent pas une importance égale. Pour permettre de partager l'étude de la présente théorie des radiocommunications en deux étapes successives, on a prévu de signaler d'une manière particulière (caractères plus petits) les paragraphes et parties de paragraphes qui peuvent être provisoirement réservés pour la seconde des deux étapes considérées.

A ces différents chapitres, s'en ajoute un dixième groupant diverses données numériques, tables de fonctions, tableaux de coefficients, et formules diverses utiles. Ce chapitre n'a évidemment pas pour objet de remplacer les formulaires radio-techniques spécialisés, autrement plus complets, que le lecteur pourra toujours utilement consulter pour résoudre les applications numériques de la pratique.

Enfin l'ouvrage comportera un répertoire alphabétique des termes techniques employés, répertoire qui indiquera les numéros des principaux paragraphes où sont cités ces expressions, en distinguant (par l'emploi de caractères gras) ceux de ces paragraphes qui traitent plus spécialement ou plus complètement des sujets indiqués ; ainsi le lecteur pourra-t-il trouver rapidement la réponse à une question particulière bien déterminée qui pourrait se présenter à lui par la suite.

Chapitre VII

Génération et propagation des ondes électromagnétiques

Sommaire du Chap. VII

Génération et propagation des ondes.

§ n°	A. <u>Etude du champ électromagnétique</u> .	Page n°
1	Action à distance des courants électriques.	2
4	Courants de déplacement.	3
7	Expression du courant de déplacement.	5
15	Application aux formules de l'électromagnétisme des courants lents.	
20	Equations de Maxwell.	10
30	Equations de continuité	14
31	Equations de Maxwell dans les milieux isolants ne contenant pas de charges libres.	15
34	Propagation des ondes électromagnétiques.	16
37	Propagation en milieu isolant.	16
40	Indice de réfraction.	20
51	Propagation par ondes sphériques.	21
52	Ondes planes.	21
53	Surfaces d'ondes de formes quelconques.	22
54	Rayons électromagnétiques.	22
57	Ondes sinusoïdales.	22
58	Longueur d'onde.	23

60	Ondes planes, en milieu parfaitement isolant.	24
63	Symétrie des courbes représentatives des variations du champ en fonction du temps et en fonction de la distance z .	27
71	Cas des ondes planes sinusoïdales.	31
72	Ondes planes sinusoïdales polarisées rectilignement.	32
73	Ondes planes non sinusoïdales polarisées rectilignement.	33

Ondes planes sinusoïdales.

74	Double périodicité dans les ondes planes sinusoïdales.	33
76	Vérification directe des équations de Maxwell dans le cas d'une onde plane sinusoïdale polarisée rectilignement.	35
79	Impédance d'espace.	40
80	Expressions imaginaires du champ électrique et du champ magnétique.	42
81	Interférences d'ondes planes sinusoïdales polarisées verticalement.	46
84	1 ^{er} Cas : les deux champs E_1 et E_2 sont égaux.	47
91	Ondes stationnaires.	51
93	Etude du champ magnétique.	53
101	2 ^e Cas : les champs E_1 et E_2 sont inégaux.	57
105	Ondes de formes quelconques.	59
111	Les ondes planes en milieux non parfaitement isolants.	60
114	Cas des conducteurs métalliques.	62
117	Expressions de l'impédance d'espace.	64

Comportement des ondes électromagnétiques en présence de deux milieux de constantes différentes.

121	Continuité de certaines composantes de $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ et $\vec{j}$ à la surface de séparation des deux milieux.	66
-----	---	----

123	Cas d'une onde plane polarisée rectilignement .	67
124	1 ^{er} Cas : Le second milieu est parfaitement conducteur .	68
131	2 ^e Cas : Le second milieu est parfaitement isolant .	72
132	a) : Le champ électrique est situé dans le plan d'incidence .	
133	b) : Le champ électrique est perpendiculaire à ce plan .	74
137	3 ^e Cas : Le second milieu est semi-conducteur .	76
138	Coefficient imaginaire de réflexion .	76
161	Energie rayonnée - Vecteur de Poynting .	82

B. Production des ondes hertziennes Rayonnement des antennes élémentaires

171	Méthode générale pour la détermination du champ d'un conducteur de forme quelconque .	87
181	Principe des images électriques .	91
185	Possibilités d'application du principe des images au cas du sol .	93
191	Décomposition d'un élément de conducteur en ses projections suivant 3 axes .	95

Champ d'un doublet électrique .

201	Définition .	97
204	Méthodes de calcul du champ en un point (r, φ, θ) .	98
206	Méthode des potentiels retardés .	99
221	Formule du doublet électrique .	102
230	Champ à grande distance .	106
235	Valeur imaginaire du champ électrique E .	109
241	Diagrammes de rayonnement du doublet électrique .	110
251	Signes de force électriques et magnétiques du doublet électrique	113
254	Signes de force magnétiques du doublet électrique .	115
255	Signes de force électriques du doublet électrique .	116

261	Energie rayonnée par le doublet électrique.	120
266	Puissance rayonnée dans une zone sphérique de hauteur $d\theta$.	122
267	Puissance totale rayonnée par le doublet électrique.	123
271	Résistance de rayonnement du doublet électrique.	125
273	Expressions du champ E et de l'amplitude E en fonction de la puissance rayonnée $\bar{W}$.	126
276	Rayonnement d'un doublet vertical placé au contact d'un plan horizontal indéfini et parfaitement conducteur.	128
281	Rayonnement d'une paire de doublets parallèles alimentés avec des courants I_1 et I_2 de même amplitude et de même phase.	130
285	Cas où les courants I_1 et I_2 dans les deux doublets ne sont pas en concordance de phase.	134
286	Coefficient caractéristique.	135
289	Diagrammes de rayonnement.	136
291	Etude de la surface représentative du coefficient caractéristique.	137
311	Rayonnement d'un doublet vertical, de longueur l , situé à une hauteur h au-dessus d'un plan horizontal parfaitement conducteur.	145
313	Coefficient caractéristique.	146
315	Diagrammes de rayonnement.	147
321	Energie rayonnée ; résistance de rayonnement.	149
331	Rayonnement d'un couple de deux doublets identiques situés dans le prolongement l'un de l'autre, à la distance $2h$, et alimentés en phase.	153
333	Cas où les deux doublets sont alimentés avec une différence de phase 2δ .	154
334	Diagrammes de rayonnement.	155
341	Rayonnement d'un couple de 2 doublets perpendiculaires à la droite qui joint leurs milieux et déphasés d'un angle 2δ .	157
346	Diagrammes de rayonnement.	159
348	Rayonnement dans le plan horizontal.	160

351	Rayonnement suivant un cône de révolution autour de la verticale oz et de demi-angle au sommet θ donné.	161
356	Rayonnement dans un plan méridien quelconque.	164
371	Rayonnement d'un doublet horizontal placé à la hauteur h au-dessus d'un plan horizontal parfaitement conducteur.	168
375	Coefficient caractéristique.	171
376	Diagrammes de rayonnement.	172
381	Résistance de rayonnement d'un doublet horizontal au-dessus du plan horizontal parfaitement conducteur.	176

Champ du doublet magnétique.

403	Expressions du champ électrique et du champ magnétique.	180
407	Résistance de rayonnement du doublet magnétique.	182
409	Influence du sol sur un doublet magnétique vertical.	184
425	Champ d'un doublet (électrique ou magnétique) oblique, à la hauteur h au-dessus d'un plan horizontal supposé parfaitement conducteur.	186
427	Cas du doublet électrique.	186

Autres représentations des diagrammes de rayonnement.

435	Diagrammes de rayonnement rapportés à une puissance rayonnée donnée.	188
439	Echelles absolues.	190
440	Diagrammes en coordonnées cartésiennes.	190

C. Propagation des ondes radioélectriques.

501	Généralités .	191
	I . Propagation de l'onde de surface .	
513	Influence des caractéristiques du sol : Constante diélectrique et conductibilité .	196
514	Cas des petites distances . Théorie de Sommerfeld .	197
516	Distance numérique p .	197
517	Constante de phase b .	198
520	Cas particuliers .	200
523	Cas des grandes distances .	202
531	Pénétration de l'onde de surface dans le sol .	207
533	Inclinaison de la surface d'onde .	207
	II . Propagation de l'onde d'espace .	
541	Etude du rayon direct et du rayon réfléchi par le sol .	209
542	Rayon direct . Propagation troposphérique .	209
543	Propagation dans un milieu de constante diélectrique variable .	210
565	Etude du rayon réfléchi par le sol .	223
566	Composition du rayon direct et du rayon réfléchi par le sol .	223
567	Influence de la hauteur des aérions au-dessus du sol	224
	III . Propagation de l'onde ionosphérique .	
581	Ionisation de l'atmosphère . Caractéristiques .	226
583	Degré d'ionisation . Vitesse de désionisation .	227
587	Couches ionisées .	228
588	Couches E et F .	229
594	Couche D .	231
595	Couche E sporadique !	231
596	Autres variations anormales de l'ionosphère .	232

Propagation des ondes électromagnétiques en milieu ionisé .

601	Constante diélectrique d'un milieu ionisé .	233
606	Vitesse de groupe et vitesse de phase .	236
631	Influence du champ magnétique .	239
632	Mouvement d'un électron soumis simultanément à un champ électrique alternatif et à un champ magnétique fixe - Gyrofréquence .	240
633	Cas des fréquences supérieures à la gyrofréquence .	243
635	Cas des fréquences inférieures à la gyrofréquence .	243
638	Rôle des molécules gazeuses restantes .	245
639	Variation de l'indice de réfraction .	246
640	Absorption des ondes dans le milieu ionisé .	247
641	Affaiblissement de l'onde dans le milieu ionisé .	248
642	Influence du champ magnétique sur l'absorption .	248
651	Trajets suivis par les ondes dans l'ionosphère .	249
653	Hauteurs virtuelles et fréquences critiques .	252
657	Structure de l'ionosphère .	254
661	Variations des hauteurs virtuelles et des fréquences critiques avec le temps .	256
664	Variations de l'ionisation en fonction des coordonnées géographiques .	259
667	Caractéristiques de la couche E sporadique .	268
681	Modes de propagation des ondes ionosphériques .	272
682	Distance de "saut" ou distance de "bond" .	274
685	Zones de silence .	276
686	Fréquences maxima utilisables .	277
688	Utilisation pratique des cartes donnant les f. m. u. .	280
692	Prédictions de f. m. u. plusieurs mois à l'avance .	284
692 ^{bi}	Variations des f. m. u. autour des moyennes mensuelles .	285
693	Fréquence optimum de trafic (f. o. t) .	285
694	Fréquences minima utilisables .	286

700	<i>Affaiblissements des ondes ionosphériques.</i>	
	<i>Détermination du champ reçu.</i>	286
701	<i>Fluctuation du champ reçu. Fading des ondes ionosphériques.</i>	287
703	<i>Champ en l'absence d'absorption ionosphérique.</i>	289
704	<i>Absorption dans l'ionosphère.</i>	290
707	<i>Détermination du coefficient d'absorption de l'ionosphère.</i>	293
713	<i>Champs nécessaires à la réception.</i>	302
715	<i>Bruits (ou parasites) atmosphériques.</i>	303
716	<i>Détermination des champs minima nécessaires.</i>	306
717	<i>Détermination des fréquences minima utilisables.</i>	312
721	<i>Trajet empruntant la zone des aurores boréales.</i>	312
730	<i>Propagation par la couche E sporadique.</i>	316
731	<i>Autres propagations anormales. Réflexions diffuses.</i>	317
732	<i>Les orages ionosphériques.</i>	318
733	<i>Perturbations à début brusque.</i>	319
734	<i>Périodes prolongées d'absorption des couches basses.</i>	320

D. Les guides d'ondes.

751	<i>Définition des guides d'ondes.</i>	321
	<i>Les guides d'ondes à section rectangulaire.</i>	
755	<i>Mode TE.</i>	323
756	<i>Fréquences de coupure.</i>	323
757	<i>Vitesses de propagation.</i>	324
781	<i>Mode TM.</i>	332
791	<i>Expressions des composantes du champ électrique et du champ magnétique dans les guides rectangulaires.</i>	334
795	<i>1^{er} : Ondes du mode TE.</i>	336
811	<i>2^{er} : Ondes du mode TM.</i>	342

821	Vitesse de propagation .	344
824	Impédance du guide rectangulaire .	346
Atténuation des ondes dans les guides rectangulaires		
832	a) Cas particulier de la ligne à double ruban (plans parallèles) .	347
833	Méthode générale :	349
835	Coefficient de surtension .	352
841	Amortissement dans le cas du mode TE .	356
845	Amortissement dans le mode TM .	358
847	b) Cas général des guides à section rectangulaire .	359
Les guides d'ondes circulaires et les lignes coaxiales .		
A . Cas particulier des lignes coaxiales .		
862	Méthode générale .	362
871	Le mode TEM dans la ligne coaxiale .	368
873	Impédance caractéristique .	369
B . Cas des guides d'ondes à section circulaire .		
881	Equations générales .	370
885	Structures du champ électromagnétique .	372
901	Mode TE_{11} .	378
902	Mode TM_{01} .	379
904	Mode TM_{0m} .	381
905	Mode TE_{0m} .	381
907	Les modes TE_{1m} et TM_{1m} .	383
911	Les modes TE_{2m} et TM_{2m} .	385
914	Les modes d'indices supérieurs .	386
921	Atténuation dans les guides à section circulaire .	387

Réflexions dans les guides d'ondes.

931	Réflexion à l'extrémité d'un guide ouvert ou fermé.	391
933	Influence des fentes dans les parois.	391
934	Influence des grilles intercalées dans les guides	392
937	Effets des changements de caractéristiques du guide.	394
938	Utilisation des guides d'ondes.	394
939	Modes de couplage des guides d'ondes.	395
	Cas des guides rectangulaires	395
940	Cas des guides circulaires.	
951	Cornets et pavillons rayonnants	399
961	Volumes résonnants.	400
962	Cas des volumes parallélépipédiques.	401
965	Cas des volumes cylindriques.	403

A. Le champ électromagnétique

Le champ électromagnétique dont l'étude détaillée fait l'objet du présent chapitre, a déjà été défini et étudié au cours de chapitres précédents.

Le chapitre II_a (Rappel de notion d'Electricité, §§ 651 et 663) traitant l'aspect théorique du champ électromagnétique a déjà donné, en particulier, comme aboutissement de considérations purement théoriques, les équations fondamentales du champ électromagnétique, à savoir les équations de MAXWELL, lesquelles lient inextricablement entre eux le champ électrique d'une part et le champ magnétique d'autre part.

Au chapitre I (Généralités sur les Radiocommunications), les §§ 31 à 45 contiennent des notions d'ordre physique sur les ondes électromagnétiques en général et plus particulièrement sur celles qui sont utilisées pour les radiocommunications.

Dans ce qui va suivre nous reprendrons tout d'abord l'étude du champ électromagnétique par des considérations d'électrotechnique plus élémentaires en introduisant la notion de courant de déplacement dans les lois fondamentales de Faraday et d'Ampère.

Action à distance des courants électriques.

1 — Malgré l'apparence donnée par les expériences courantes de l'électromagnétisme ordinaire (action d'un courant sur un aimant, d'un courant sur un courant etc ...), l'action à distance des courants électriques n'est pas instantanée. Cette action se propage avec une vitesse finie qui est égale à celle de la lumière. C'est seulement en raison de l'extrême rapidité de cette propagation vis-à-vis de la grandeur des distances parcourues que les phénomènes avaient pu antérieurement être considérés comme instantanés.

2 — Cette propriété de se propager avec la vitesse de la lumière apparaît comme nécessaire lorsque l'on étudie l'action des courants et des champs rapidement variables. La capacité du conducteur intervient alors, et contrairement à ce qui se passe dans le cas du courant continu ou des basses fréquences, le courant, à un instant donné n'a plus la même valeur tout au long du circuit. Des filets de courant viennent se terminer le long du conducteur, où ils servent à entretenir les variations de la charge électrique de ces conducteurs.

Tel est, par exemple, le cas d'une antenne, où de toute évidence l'amplitude des courants mis en circulation va en diminuant jusqu'à zéro quand on se rapproche de l'extrémité isolée. Les filets de courant qui s'arrêtent en chemin servent à alimenter, en charges électriques, les divers points de l'antenne. On voit ici intervenir la "capacité" du petit élément considéré de l'antenne : quotient de la variation de charge par la variation correspondante de potentiel :

$$C = \frac{dq}{d\varphi}.$$

3 - Or les formules de l'électricité ordinaire ne traitent que le cas des circuits fermés où l'intensité à un instant donné, est la même tout au long de ces circuits, et où aucun filet de courant n'est interrompu en chemin. Pour ramener, à ces formules, l'étude des courants rapidement variables, il faut introduire une nouvelle espèce de courants destinée à fermer sur eux-mêmes les filets interrompus. Cet élément nouveau est le "courant de déplacement".

Les courants de déplacement.

4 - Prenons le cas d'une antenne et de son contrepoids alimentés par une source S fournissant une tension variable à haute fréquence. Si l'ensemble est symétrique et disposé loin du sol, les lignes de forces qui partent d'un élément AB , se ferment sur l'élément symétrique $A'B'$ du contrepoids (fig. 1).

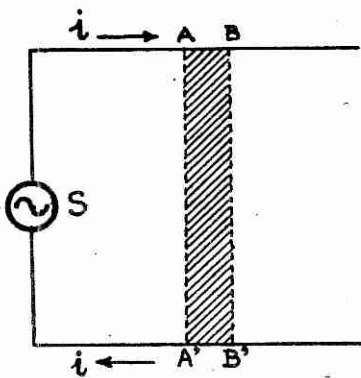


Fig. 1

À un instant donné, de même que des filets de courant se terminent en AB , venant de la source de courants de haute fréquence S , de même des filets de courants symétriques partent de $A'B'$ pour

rentrer dans la source S .

Le circuit parcouru par le courant i pourrait être considéré comme fermé si un courant égal i se propageait de AB à $A'B'$ en suivant les lignes de force du champ électrique.

5 - Considérons l'ensemble AB et $A'B'$ comme un condensateur et examinons ce qui se passe dans son diélectrique.

Ce qui distingue les corps conducteurs diélectriques (ou isolants) c'est le fait que les électrons au lieu d'être libres

de se déplacer dans le corps sous l'action d'un champ électrique et de passer sans difficulté d'un atome à un autre (sous réserve des frottements dont l'effet apparaît sous la forme de la loi d'Ohm) les électrons des corps isolants demeurent constamment rappelés vers leur position de repos par une force élastique d'autant plus grande que le déplacement de l'électron est plus grand.⁽¹⁾

La conséquence est immédiate ; alors que dans le conducteur un champ électrique constant produit un mouvement d'électrons, qui persiste aussi longtemps qu'est appliquée la force électromotrice, dans l'isolant, au contraire, le déplacement d'électrons se produit seulement au moment où la tension est appliquée et aucun déplacement nouveau n'intervient tant que la tension (ou différence de potentiel) reste la même. Or tout déplacement d'électrons peut être considéré comme un courant dont l'intensité, à travers un élément de surface donné, est égale au quotient de la charge électrique qui a traversé cette surface, par le temps correspondant :

$$i = \frac{dq}{dt} .$$

C'est ce déplacement élastique des électrons qui constitue ce que l'on appelle le courant de déplacement et qui ferme, en quelque sorte, le circuit entre AB et A'B'.

6 — On voit immédiatement que ces courants ne peuvent exister que lorsque les tensions appliquées sont variables. Pour avoir un courant de déplacement d'intensité et de sens constants, il faudrait appliquer au diélectrique une tension indéfiniment croissante. On voit aussi qu'une tension alternative doit donner un courant de déplacement lui-même alternatif, et que ce courant sera d'autant plus important que la tension sera plus rapidement variable.

(1) Voir Chap II₂ - § 53.

Expression du courant de déplacement.

7 — Pour évaluer la grandeur du courant de déplacement, considérons le condensateur plan élémentaire constitué au moyen de deux surfaces élémentaires AB et A'B' égales à dS , séparées par une lame diélectrique de constante K et d'épaisseur h (fig. 2)

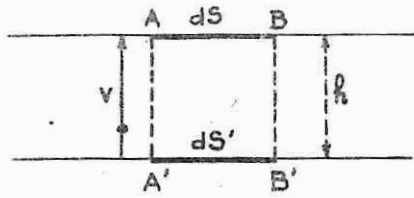


Fig. 2

Soit v la valeur de la différence de potentiel à l'époque t entre les armatures AB et A'B' ; la charge dq qui arrive en AB pendant le temps dt est $dq = idt$. Elle fait varier la différence de potentiel v d'une quantité dv donnée par la relation $dq = C dv$.

La capacité C est donnée par la formule (Chap. II_a - § 81) :

$$C = \frac{K d S}{4 \pi h h}$$

où K est la constante diélectrique du milieu, et h la constante de la formule de Coulomb. Dans le système d'unités C.G.S électrostatiques on a par définition $h = 1$ et par conséquent :

$$C = \frac{K d S}{4 \pi h}$$

Conservons la première expression de C , indépendante du système d'unités choisies. Nous en concluons que :

$$idt = \frac{K d S}{4 \pi h h} dv$$

Désignons par ϵ la valeur du champ électrique entre AB et A'B'. Ce champ est uniforme puisqu'il s'agit d'un condensateur plan. On a par définition :

$$v = h \epsilon$$

et : $dv = h d\varepsilon$

d'où :

$$i dt = \frac{K dS}{4 \pi h} d\varepsilon ,$$

et l'expression du courant de "déplacement" cherché :

$$i = \frac{K dS}{4 \pi h} \frac{d\varepsilon}{dt} .$$

8 - Enfin, en faisant intervenir la densité de courant $j = \frac{i}{dS}$ il vient, pour la densité du courant de déplacement l'expression :

$$j = \frac{K}{4 \pi h} \frac{d\varepsilon}{dt} .$$

La densité du courant de déplacement est égale au produit par $\frac{K}{4 \pi h}$ de la dérivée du champ électrique par rapport au temps, c'est-à-dire la vitesse de variation du champ électrique.

9 - Quant à la direction du courant de déplacement dans le diélectrique, elle coïncide avec celle du champ électrique au même point. Les vecteurs champ électrique $\vec{E}$ et courant de déplacement $\vec{j}$ en un même point sont donc reliés par la relation géométrique :

$$\vec{j} = \frac{K}{4 \pi h} \frac{d\vec{E}}{dt} .$$

où $\frac{d\vec{E}}{dt}$ est le vecteur dérivée, par rapport au temps, du vecteur $\vec{E}$ (voir Chap. I, § 277).

10 - Lorsque le champ électrique E est un champ qui varie sinusoïdalement, on voit immédiatement que le courant de déplacement, dans un condensateur donné, est proportionnel à la

fréquence

11 - Dans ce qui précède nous nous sommes servis des électrons du milieu diélectrique pour établir l'expression du courant de déplacement. La théorie montre que les courants de déplacement doivent être considérés comme existant aussi dans le vide; leur valeur est alors obtenue en faisant $K = 1$ dans l'expression générale de j donnée plus haut.

Introduction des courants de déplacement dans les formules de l'électromagnétisme ordinaire.

15 - C'est en introduisant les courants de déplacement dans les formules de l'électromagnétisme ordinaire que MAXWELL a établi les lois de l'électromagnétisme des courants rapidement variables.

On a vu au Chap. II_a que l'électromagnétisme ordinaire (ou des courants qui varient relativement lentement) était régi par les deux lois fondamentales suivantes :

1^{re} : la loi de Faraday ou la loi de l'induction (Chap. II_a . § 551) selon laquelle :

« La force électromotrice totale, le long d'un circuit fermé (c'est-à-dire le travail du champ électrique sur la charge $+1$ parcourant une fois ce circuit) est, au coefficient $-\frac{1}{c}$ près, égale à la dérivée par rapport au temps, du flux d'induction magnétique passant à travers le circuit ».

2^{re} : la loi d'Ampère ou loi de l'électromagnétisme (Chap. II_a - § 284) selon laquelle :

« La force magnéto-motrice totale le long d'un contour

fermé (c'est-à-dire le travail du champ magnétique sur une masse magnétique +1 parcourant une fois ce contour) est égale au produit par $4\pi a$ de la somme des intensités de courants passant à travers ce contour ».

Dans ces formules a représente le coefficient de la formule de Laplace, coefficient qui est d'ailleurs égal à l'unité dans les systèmes courants d'unités électriques et magnétiques. (Chap. II_a - § 252), et k' le coefficient de la formule de Coulomb pour les actions magnétiques

16 - La loi de l'induction s'écrit (Chap. II_a - § 553):

$$e = - \frac{a}{k'} \frac{d\varphi}{dt},$$

où φ est le flux d'induction instantané traversant le circuit.

Appliquons cette loi à un petit circuit élémentaire de surface $d\Sigma$, et de contour C .

D'une part la force électromotrice e est égale à la circulation du vecteur champ électrique $\vec{E}$ le long du contour C :

$$e = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

ou bien :

$$e = \int_C \varepsilon_t \cdot ds,$$

ε_t étant la valeur algébrique de la composante tangentielle de $\vec{E}$ sur le contour C .

D'autre part, le théorème de STOKES (Ch. I_a - § 312) nous apprend que la circulation de ce vecteur est égale au flux du rotationnel du même vecteur à travers le contour :

$$\int_C \varepsilon_t ds = \iint_{\Sigma} (\overrightarrow{\text{rot } \vec{E}})_N d\Sigma.$$

La loi de Faraday peut donc s'écrire :

$$\iint_{\Sigma} (\overrightarrow{\text{rot } \vec{E}})_N d\Sigma = -\frac{a}{k'} \frac{d\varphi}{dt}$$

ou

$$\iint_{\Sigma} (\overrightarrow{\text{rot } \vec{E}})_N d\Sigma = -\frac{a}{k'} \frac{d}{dt} \left[\iint_{\Sigma} b_N d\Sigma \right]$$

en désignant par b_N la valeur algébrique de la composante normale $\vec{b}_N$ du vecteur induction $\vec{b}$.

Cette relation étant indépendante de la surface Σ et du contour C qui limite cette surface, elle entraîne forcément la suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot } \vec{E}} = -\frac{a}{k'} \frac{d\vec{b}}{dt}$$

Si le milieu possède une perméabilité uniforme μ , on a la relation vectorielle $\vec{b} = \mu \vec{h}$, et par suite :

$$\overrightarrow{\text{rot } \vec{E}} = -\mu \frac{a}{k'} \frac{d\vec{h}}{dt}$$

17 — La loi d'Ampère s'écrit :

$$\oint = 4\pi ai,$$

étant le courant total qui traverse le contour considéré.

Appliquons, de même, cette loi à un petit contour élémentaire de surface $d\Sigma$ et de contour C .

La force magnétomotrice est, par définition, égale à la circulation du vecteur champ magnétique $\vec{h}$ le long du contour C :

$$\oint = \int_C \vec{h} \cdot d\vec{s},$$

$$\text{ou } \oint = \int_C h_t ds,$$

h_t étant la composante tangentielle du champ $\vec{h}$ le long du contour C .

D'après le théorème de STOCKES on a encore

$$\int_C h_t ds = \iint_{\Sigma} (\overrightarrow{\text{rot } h})_N d\Sigma ,$$

ce qui permet d'écrire, finalement, la loi d'Ampère sous la forme :

$$\iint_{\Sigma} (\overrightarrow{\text{rot } h})_N d\Sigma = 4 \pi a i .$$

18 - Appelons j le vecteur densité de courant ; le flux de ce vecteur à travers la surface Σ représente le courant i à travers le contour considéré :

$$i = \iint_{\Sigma} j_N d\Sigma$$

La loi d'Ampère peut donc s'écrire :

$$\iint_{\Sigma} (\overrightarrow{\text{rot } h})_N d\Sigma = 4 \pi a \iint_{\Sigma} j_N d\Sigma .$$

et par conséquent :

$$\overrightarrow{\text{rot } h} = 4 \pi a \overrightarrow{j}$$

Les équations de Maxwell .

20 - Introduisons le courant de déplacement dans les deux lois fondamentales de FARADAY et d'AMPÈRE . La première n'est pas modifiée, mais, dans la seconde, il faut considérer que j représente la somme du courant de conduction ordinaire et du courant de déplacement . En désignant par σ la conductibilité électrique du milieu intéressé, il vient donc :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} + \frac{K}{4\pi h} \frac{d\vec{E}}{dt}$$

Les deux lois fondamentales de FARADAY et d'AMPÈRE s'écriront donc :

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{a}{h'} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{h} = 4\pi a \sigma \vec{E} + \frac{aK}{h} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Comme il a été dit au Chap. III_a (§ 252) le facteur $\frac{hh'}{a^2}$ est égal au carré c^2 de la vitesse de la lumière dans le vide. Les deux équations ci-dessus pourront donc finalement se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{a}{h'} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{h} = 4\pi a \sigma \vec{E} + \frac{K}{c^2 a} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Ces deux équations, auxquelles on joindra ultérieurement (§ 30) deux équations dites de "continuité" savoir :

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = 4\pi h \rho \\ \text{div } \vec{h} = 0 \end{cases}$$

sont désignées sous le nom d'équations de MAXWELL.

22 — Dans le système d'unités C.G.S électromagnétiques (Ch. II_a - § 758), le seul que nous emploierons à l'avenir, on a $a=1$, $h'=1$, et $h=c^2$. Les quatre équations précédentes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\mu \frac{d\vec{h}}{dt} \\ \text{rot } \vec{h} &= 4\pi \sigma \vec{E} + \frac{K}{c^2} \frac{d\vec{E}}{dt} \\ \text{div } \vec{E} &= 4\pi c^2 \rho \\ \text{div } \vec{h} &= 0 \end{aligned}$$

Analytiquement, les deux premières équations, qui sont des équations vectorielles, se traduisent par 6 équations algébriques, où entrent les trois composantes ϵ_x ϵ_y ϵ_z du champ $\vec{E}$ et les trois composantes h_x h_y h_z du champ magnétique $\vec{h}$, suivant les trois axes de coordonnées. Ces 6 équations sont les suivantes (voir Chap. I_a - § 298 - 2°) :

$$\text{Pour la 1}^{\text{re}} \text{ équation vectorielle : } \begin{cases} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial h_x}{\partial t} & (\text{composante suivant } ox) \\ \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial h_y}{\partial t} & (\text{composante suivant } oy) \\ \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial h_z}{\partial t} & (\text{composante suivant } oz) \end{cases}$$

$$\text{Pour la 2}^{\text{e}} \text{ équation vectorielle : } \begin{cases} \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} = 4\pi \sigma \epsilon_x + \frac{K}{c^2} \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t} & (\text{suivant } ox) \\ \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} = 4\pi \sigma \epsilon_y + \frac{K}{c^2} \frac{\partial \epsilon_y}{\partial t} & (\text{suivant } oy) \\ \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} = 4\pi \sigma \epsilon_z + \frac{K}{c^2} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial t} & (\text{suivant } oz) \end{cases}$$

23 - Quant aux équations de continuité elles s'écrivent respectivement (Chap. I_a - § 298) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_z}{\partial z} &= 4\pi c^2 \rho \\ \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

24 - Les deux premières équations vectorielles ci-dessus (ou bien les 6 équations analytiques correspondantes) montrent l'interdépendance du champ électrique et du champ magnétique dans l'espace.

Par la première équation vectorielle : $\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}$, se trouvent, en effet, reliées entre elles :

- d'une part, la loi de variation, dans l'espace, du champ électrique $\vec{E}$, à un instant donné et en un point donné,
- d'autre part, la loi de variation, dans le temps, du champ magnétique $\vec{h}$ au même point et au même instant.

Réciproquement, la deuxième équation :

$$\text{rot } \vec{h} = 4 \pi \sigma \vec{E} + \frac{K}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ relie ensemble :}$$

- d'une part, la loi de variation, dans l'espace, du champ magnétique $\vec{h}$, à un instant et en un point donné,
- d'autre part, la grandeur du champ électrique ; et sa loi de variation dans le temps, au même point et au même instant.

25 - La première équation vectorielle montre que toute variation du champ magnétique donne naissance à un champ électrique tourbillonnaire. Inversement, la seconde équation montre que toute variation du champ électrique donne naissance à un champ magnétique.

26 - On voit que toute modification du champ magnétique ou du champ électrique en un point de l'espace entraîne la modification de l'état des points voisins ; ceux-ci agissent de la

même façon pour leur propre compte, et ainsi de suite, en sorte que, finalement, la perturbation initiale s'étend de proche en proche à tout l'espace. Il y a propagation de la perturbation électromagnétique.

27 - De ce qui précède, il résulte qu'il n'est pas possible de modifier un champ électrique ou un champ magnétique existant, sans produire une onde électromagnétique, onde qui sera d'ailleurs d'autant plus intense que la modification sera opérée avec une rapidité plus grande.

Un champ électrique ou un champ magnétique constant, à moins que l'opération n'ait lieu infiniment lentement, ne peut être établi, ou supprimé, sans qu'il y ait production d'une onde électromagnétique. Cette onde est la conséquence de la période transitoire du phénomène.

Equations de continuité.

30 - Les deux premières équations vectorielles de Maxwell du § 20 ci-dessus, ne suffisent pas à définir les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$. Comme ces vecteurs représentent respectivement le champ électrique et le champ magnétique, il faut nécessairement que ces vecteurs satisfassent aux deux conditions déjà rencontrées au Chap. II, § 74 et § 451, savoir :

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4 \pi c^2 p, \text{ (en unités électromagnétiques C.G.S.)}$$

$$\text{et } \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

La première de ces deux équations exprime que la divergence du vecteur induction électrique $\vec{D} = K \vec{E}$ est égale au produit par $4 \pi c^2$ de la densité spatiale de la charge électrique au point considéré. C'est la traduction, en notation vectorielle, du

théorème de GAUSS (Chap. II_a - § 21) qui dit que le flux d'induction électrique sortant d'une surface fermée est égal au produit par $4 \pi c^2$ de la somme des charges contenues à l'intérieur de ladite surface fermée

La seconde des deux équations, de même forme, traduit simplement le fait qu'il n'existe pas de masses magnétiques libres (expérience de l'aimant brisé). Elle s'écrit aussi $\text{div } \vec{h} = 0$, puisque le vecteur induction magnétique $\vec{b}$ est relié au champ $\vec{h}$ par la relation $\vec{b} = \mu \vec{h}$.

Les deux équations :

$$\begin{cases} \text{div } \vec{b} = 4 \pi c^2 \rho \\ \text{div } \vec{h} = 0 \end{cases}$$

sont appelées les "équations de continuité". Analytiquement elles s'écrivent (Chap. I_a - § 298) :

$$\begin{cases} K \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} \right) = 4 \pi c^2 \rho \\ \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Equations de Maxwell dans les milieux isolants ne contenant pas de charges libres.

31 — Dans les milieux isolants où il n'y a pas de charges électriques libres, la conductibilité σ et la densité spatiale ρ sont nulles. Ses quatre équations vectorielles générales prennent une forme plus simple :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{E} &= - \mu \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \\ \vec{\text{rot}} \vec{h} &= \frac{K}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{h} = 0$$

Propagation des ondes électromagnétiques.

34 - Résolvons par rapport à l'une ou à l'autre des deux inconnues $\vec{E}$ ou $\vec{h}$, le système constitué par les deux premières équations vectorielles :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{h} = 4\pi\sigma \vec{E} + \frac{\kappa}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Pour cela écrivons, d'une part, l'égalité des rotationnels des deux membres de la première équation ; il vient :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \right) \\ &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{h}). \end{aligned}$$

D'autre part, écrivons l'égalité des dérivées des deux membres de la seconde équation par rapport au temps :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{h}) = 4\pi\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\kappa}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

En combinant les deux résultats obtenus, il vient :

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = 4\pi\sigma\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\kappa\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

35 - Or, d'après le Chap. III_a - § 302, on a la relation fondamentale :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \cdot \operatorname{div} \cdot \vec{E} - \Delta \vec{E}$$

où $\overline{\Delta \mathbf{E}}$ désigne le laplacien de $\overline{\mathbf{E}}$, à savoir le vecteur de composantes $\Delta \mathbf{E}_x$, $\Delta \mathbf{E}_y$, $\Delta \mathbf{E}_z$ définies par les expressions :

$$\Delta \mathbf{E}_x = \frac{\partial^2 \mathbf{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_x}{\partial z^2}, \quad \Delta \mathbf{E}_y = \frac{\partial^2 \mathbf{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_y}{\partial z^2}$$

$$\text{et } \Delta \mathbf{E}_z = \frac{\partial^2 \mathbf{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_z}{\partial z^2}.$$

Dans le cas actuel, d'après la première équation de continuité, on a :

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{4 \pi c^2 \rho}{K}$$

et par conséquent :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \cdot \text{div } \mathbf{E} = \frac{4 \pi c^2}{K} \overrightarrow{\text{grad}} \rho.$$

D'où finalement :

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \frac{4 \pi c^2}{K} \overrightarrow{\text{grad}} \rho - \overline{\Delta \mathbf{E}}.$$

Grâce à quoi l'équation finale du § 34 ci-dessus se met sous la forme :

$$\frac{K \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \overline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} + 4 \pi \sigma \mu \frac{\partial \overline{\mathbf{E}}}{\partial t} = \overline{\Delta \mathbf{E}} - \frac{4 \pi c^2}{K} \overrightarrow{\text{grad}} \rho.$$

Dans le cas où le milieu ne contient pas de charges électriques libres ($\rho = 0$) cette équation s'écrit, plus simplement :

$$\frac{K \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \overline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} + 4 \pi \sigma \mu \frac{\partial \overline{\mathbf{E}}}{\partial t} = \overline{\Delta \mathbf{E}}.$$

C'est cette équation différentielle du second ordre qui régit la distribution du champ électrique dans l'espace et dans le temps.

36 — On aurait pu aussi bien résoudre par rapport à $\vec{h}$ le système des deux équations de Maxwell. Opérant de la même manière que pour $\vec{E}$, on serait arrivé au résultat suivant :

$$\frac{K\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{h}}{\partial t^2} + 4\pi\sigma\mu \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = \vec{\Delta h}.$$

$\vec{\Delta h}$ désignant le laplacien de $\vec{h}$, à savoir le vecteur de composantes :

$$\Delta h_x = \frac{\partial^2 h_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_x}{\partial z^2}, \quad \Delta h_y = \frac{\partial^2 h_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_y}{\partial z^2}$$

$$\text{et } \Delta h_z = \frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial z^2}.$$

On voit que la même équation différentielle régit les variations des deux champs $\vec{E}$ et $\vec{h}$ dans l'espace et dans le temps. C'est cette équation qui définit la propagation de l'onde électromagnétique.

Le premier membre de cette équation contient les dérivées première et seconde du champ par rapport au temps, tandis que le second contient les dérivées secondes du champ par rapport aux espaces.

Propagation en milieu isolant.

37 — Lorsque le milieu est isolant et ne contient pas de charges libres, le coefficient σ est nul dans l'équation finale du § 35 ; cette équation devient donc :

$$\frac{K\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\Delta E}.$$

Le terme en $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ a disparu ; l'équation obtenue est de la forme de l'équation générale qui régit la propagation d'un ébranlement en milieu élastique. Cette propagation se produit avec une vitesse uniforme, qui est égale à la racine carrée de l'inverse du coefficient de la dérivée seconde dans le premier membre :

$$v = \frac{c}{\sqrt{K\mu}}$$

38 - Lorsque l'on a simultanément $\mu = 1$ et $K = 1$, comme dans le vide (ou dans l'air) la vitesse v n'est autre que c , c'est-à-dire la vitesse de la lumière dans le vide :

39 - L'équation $\frac{K\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E}$ est la généralisation, aux trois dimensions de l'espace, de l'équation dite "des télégraphistes" déjà trouvée au Chap. VI - (§ 11) quand on a étudié la propagation sur les lignes. En effet, dans un espace à une dimension, réduit à l'axe des x , le laplacien $\Delta \vec{E}$ est constitué par le vecteur de composantes $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ c'est-à-dire $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}$. L'équation en $\vec{E}$

devient alors, dans cet espace à une dimension :

$$\frac{K\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}$$

On vérifie immédiatement que sa solution est de la forme :

$$\vec{E} = \vec{A} f\left(t - \frac{x}{v}\right) + \vec{B} g\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

où :

$$\begin{cases} v = \frac{c}{\sqrt{K\mu}}, \\ \vec{A} \text{ et } \vec{B} \text{ sont des constantes vectorielles,} \\ f \text{ et } g \text{ sont des fonctions scalaires quelconques.} \end{cases}$$

En effet :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{A} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \vec{B} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \vec{A} f'' + \vec{B} g''$$

d'autre part :

$$\frac{\partial^2 \vec{\epsilon}}{\partial x^2} = \vec{A} \frac{f''}{v^2} + \vec{B} \frac{g''}{v^2} ,$$

Il s'en suit que l'on a :

$$\frac{\partial^2 \vec{\epsilon}}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\epsilon}}{\partial x^2} \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{K\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\epsilon}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{\epsilon}}{\partial x^2}$$

Indice de réfraction .

40 - On appelle indice de réfraction d'un milieu, le rapport $\frac{c}{v}$ de la vitesse c des ondes dans le vide à la vitesse v des ondes dans le milieu considéré .

Étant donné que l'on a :

$$v = \frac{c}{\sqrt{K\mu}} ,$$

il vient :

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{K\mu} .$$

Dans les milieux dont la perméabilité μ est égale à l'unité (cas général) on a plus simplement :

$$n = \sqrt{K} .$$

Propagation par ondes sphériques.

51 - Supposons que la perturbation électromagnétique soit provoquée par une variation brusque du champ électrique (ou du champ magnétique) dans une toute petite région entourant l'origine O des coordonnées. Nous supposons aussi que le milieu est homogène et isotrope, c'est-à-dire qu'il possède les mêmes propriétés dans toutes les directions de l'espace. Nous admettrons enfin (on verra plus loin pourquoi - § 601) que les propriétés de l'espace sont les mêmes pour toutes les fréquences radioélectriques (et en particulier la constante diélectrique K).

Proposons-nous de voir ce qui se passe à une distance r , de l'origine O , distance qui soit grande par rapport aux dimensions du dispositif excitateur (bobine ou antenne). D'après ce que l'on a vu plus haut (§ 37) la perturbation du champ se propagera avec une vitesse $v = \frac{c}{\sqrt{K\mu}}$. Soit t_0 l'époque à laquelle s'est produite la perturbation électromagnétique en O . A l'époque t , la perturbation atteint les points situés à une distance $r = v(t - t_0)$. Ces points définissent une sphère de centre O et de rayon $r = v(t - t_0)$.

On dit alors que la perturbation se propage par ondes sphériques et la sphère de rayon r est la surface d'onde à l'époque t .

Ondes planes.

52 - A grande distance de l'origine O et si on ne considère que les points peu écartés d'un axe Oz fixe dans l'espace, les surfaces d'ondes sont assimilables à des plans. On dit que la perturbation se propage par ondes planes, et les surfaces d'ondes sont constituées par les plans perpendiculaires à la direction.

de propagation .

Surfaces d'ondes de formes quelconques.

53 - Au voisinage du dispositif émetteur il n'est plus possible de considérer celui-ci comme concentré en un point unique .

Chaque point de l'antenne ou du cadre émetteur rayonne pour son propre compte , et il faut prendre la résultante des différents champs élémentaires en un point pour obtenir le champ électromagnétique réel en ce point .

On conçoit que les surfaces d'ondes puissent revêtir des formes plus ou moins complexes et d'ailleurs malaisées à définir .

Rayons électromagnétiques .

54 - Les trajectoires orthogonales (voir Chap. I, § 297) des surfaces d'ondes constituent ce qu'on appelle , par analogie aux phénomènes optiques , les rayons électromagnétiques .

Dans le cas des ondes planes , ces rayons sont rectilignes et confondus avec les perpendiculaires aux plans d'ondes .

Ondes sinusoïdales .

57 - Lorsque la variation imprimée au champ électrique (ou magnétique) en O se déroule suivant une loi sinusoïdale de fréquence f , il en est de même des variations subies par le champ électromagnétique en un point quelconque de l'espace .

Sur une sphère de centre O et de rayon r donné, la phase , pour une composante donnée du champ électrique ou du champ magnétique est une constante . Les surfaces d'égales phases

constituent les surfaces d'ondes . Dans le cas où l'on s'est placé, ces surfaces sont des sphères ayant leur centre en 0 .

Longueur d'onde .

58 — Cette phase possède une même valeur bien déterminée φ non seulement en tous les points d'une certaine sphère de rayon R , mais encore sur les sphères de rayons $R - \lambda$, $R - 2\lambda$, etc ... $R + \lambda$, $R + 2\lambda$, etc ... à condition de désigner par λ l'espace parcouru par les ondes pendant une période des oscillations (sinusoïdales) mises en jeu .

Par définition , cette grandeur λ s'appelle la longueur d'onde . On a évidemment les relations :

$$\lambda = v T = \frac{v}{f} = 2 \pi \frac{v}{\omega}$$

en désignant respectivement par T , f et ω , la période, la fréquence et la pulsation des oscillations .

Les ondes planes en milieu parfaitement isolant.

60 - Nous examinerons plus en détails le cas des ondes planes. Le dispositif émetteur étant placé à l'origine O des

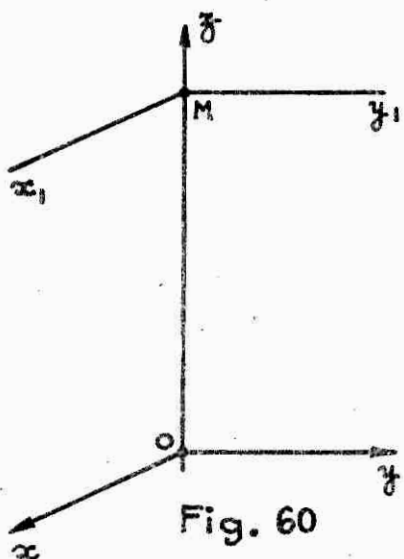


Fig. 60

coordonnées, nous allons étudier ce qui se passe au loin de l'origine en des points voisins de l'axe Oz (fig. 60). Les plans d'ondes, perpendiculaires à Oz , sont des plans parallèles au plan xOy . En tous les points de l'un de ces plans d'ondes, les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ gardent la même valeur. Leurs dérivées partielles par rapport à x et y sont donc nulles toutes les deux.

Écrivons les équations de Maxwell dans ces conditions particulières.

La première équation vectorielle $\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ est équivalente aux trois équations analytiques (§ 22 ci-dessus) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{array} \right.$$

Compte tenu de ce que les dérivées par rapport à x et à y sont nulles, ce système d'équations s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial h_x}{\partial t} \quad (1) \\ -\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial h_y}{\partial t} \quad (2) \\ 0 = -\mu \frac{\partial h_z}{\partial t} \quad (3) \end{array} \right.$$

De même la deuxième équation vectorielle $\text{rot } \vec{h} = \frac{K}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ donne les trois équations analytiques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial h_y}{\partial z} = \frac{K}{c^2} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} \quad (4) \\ \frac{\partial h_x}{\partial z} = \frac{K}{c^2} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} \quad (5) \\ 0 = \frac{K}{c^2} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} \quad (6) \end{array} \right.$$

61 - Les deux équations finales :

$$0 = \mu \frac{\partial h_z}{\partial t}$$

et $0 = \frac{K}{c^2} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t}$

expriment tout simplement que les composantes h_z et ε_z ne varient pas en fonction du temps. Le milieu étant supposé au repos avant l'arrivée de la perturbation, on en conclut que h_z et ε_z demeurent constamment nuls. D'où ce premier résultat, à savoir que les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{h}$ sont tous les deux contenus dans le plan perpendiculaire à Oz , c'est-à-dire dans le plan d'onde.

62 - Cherchons maintenant comment ces deux vecteurs sont disposés, l'un par rapport à l'autre, dans le plan.

Portons d'abord notre attention sur une composante donnée, par exemple ε_x et cherchons la loi qui régit ses variations dans le

temps et dans l'espace. Pour cela éliminons h_z des deux équations (2) et (4), il nous restera une équation en E_x . Dérivons l'équation (2) par rapport à z et l'équation (4) par rapport au temps, puis égalons les deux valeurs trouvées pour $\frac{\partial^2 h_z}{\partial z \partial t}$, il vient :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{c^2}{K\mu} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}.$$

On aurait trouvé des équations différentielles identiques en E_y , h_x et h_y , par exemple :

$$\frac{\partial^2 h_y}{\partial t^2} = \frac{c^2}{K\mu} \frac{\partial^2 h_y}{\partial z^2}.$$

Toutes ces équations sont de la même forme que l'équation dite des "cordes vibrantes" déjà trouvée au Chap. VI.

(§ 11) à l'occasion de l'étude de la propagation sur les lignes, comme il a d'ailleurs été rappelé au § 39 du présent chapitre.

On a vu que la solution de cette équation était de la forme :

$$E_x = f_1 \left(t - \frac{z}{v} \right) + f_2 \left(t + \frac{z}{v} \right)$$

où $v = \frac{c}{\sqrt{K\mu}}$, et où f_1 et f_2 sont des fonctions quelconques d'une variable.

Ces fonctions f_1 et f_2 seront, en pratique, définies par les conditions aux limites (comme au Chap. II § 11) et dans le cas qui nous occupe, par la forme même de la perturbation qui est à l'origine des ondes que nous étudions.

La solution particulière :

$$E_{x1} = f_1 \left(t + \frac{z}{v} \right)$$

représente, au contraire, une perturbation qui se propage dans le sens contraire, avec, d'ailleurs, la même vitesse; nous supposons qu'il n'existe pas d'autre source de perturbations autre que celle que nous avons placée à l'origine, et en particulier, pas de conducteurs

susceptibles d'être le siège de courants induits (par le champ incident) et susceptibles, par suite, de donner naissance à de nouvelles ondes électromagnétiques. Dans ces conditions le champ E_{x_2} qui se propage en revenant vers l'origine, n'existe pas et il reste une composante E_x de la forme :

$$E_x = f \left(t - \frac{z}{v} \right).$$

On obtient des expressions de même forme, c'est-à-dire des fonctions de la seule variable $\left(t - \frac{z}{v} \right)$ pour les composantes E_y , h_x , et h_y .

Symétrie des courbes représentatives des variations du champ en fonction du temps et en fonction de la distance z .

63 - Le fait que chaque composante du champ électromagnétique soit défini par une fonction de la variable $\left(t - \frac{z}{v} \right)$ seule, montre qu'une seule courbe peut suffire pour représenter graphiquement les variations de cette composante :

- d'une part en fonction du temps, en un point donné,
- d'autre part en fonction de la cote z , à une époque t donnée.

Il suffit pour cela :

- 1° : que l'on ait choisi des sens positifs opposés l'un à l'autre pour l'axe des temps et l'axe des espaces.
- 2° : que l'on ait choisi convenablement les échelles graphiques pour les variables t et z . Les échelles doivent être telles que les grandeurs t et z soient représentées par la même longueur graphique quand on a entre t et z la relation $t = \frac{z}{v}$.

Positions relatives des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{h}$ en un point M de l'espace.

64 — Nous venons de voir que la composante E_x avait pour expression :

$$E_x = f \left(t - \frac{z}{v} \right) .$$

On trouverait de même, pour la composante h_y :

$$h_y = g \left(t - \frac{z}{v} \right) .$$

En désignant par g' la dérivée de la fonction g par rapport à sa variable, on aura :

$$\text{d'une part : } \frac{\partial h_y}{\partial t} = g'$$

$$\text{d'autre part : } \frac{\partial h_y}{\partial z} = -\frac{1}{v} g'$$

$$\text{et par conséquent : } \frac{\partial h_y}{\partial z} = -\frac{1}{v} \frac{\partial h_y}{\partial t}$$

Remplaçons, dans l'équation (4), $\frac{\partial h_y}{\partial z}$ par $-\frac{1}{v} \frac{\partial h_y}{\partial t}$; il vient :

$$\frac{1}{v} \frac{\partial h_y}{\partial t} = \frac{K}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

et comme $v = \frac{c}{\sqrt{K\mu}}$:

$$\sqrt{K\mu} \frac{\partial h_y}{\partial t} = \frac{K}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$c \sqrt{\mu} \frac{\partial h_y}{\partial t} = \sqrt{K} \frac{\partial E_x}{\partial t} .$$

Intégrons les deux membres de cette équation. La constante d'intégration est nulle puisque l'on admet qu'il n'y a pas de champ continu (c'est-à-dire constant dans le temps en un

point donné). On aura donc la relation :

$$c \sqrt{\mu} h_y = \sqrt{K} \epsilon_x$$

On aurait trouvé, de même, à partir de l'équation (1) :

$$c \sqrt{\mu} h_x = -\sqrt{K} \epsilon_y$$

Il s'en suit donc :

$$\frac{\epsilon_x}{h_y} = -\frac{\epsilon_y}{h_x} = c \sqrt{\frac{\mu}{K}} .$$

Ces deux équations démontrent que les deux vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{h}$ relatifs à un point O_1 déterminé de l'espace, sont, à tout instant des vecteurs perpendiculaires l'un à l'autre, et que, dans le plan $x_1 O_1 y_1$, les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{h}$ occupent les mêmes positions relatives l'un par rapport à l'autre que les axes $O_1 x_1$ et $O_1 y_1$ (fig. 61).

65 — D'une manière plus précise, on voit que, dans le cas d'une onde plane :

- le champ électrique $\vec{E}$
- le champ magnétique $\vec{h}$
- la direction de propagation $\vec{v}$

forment, à tout instant, trois directions perpendiculaires, dont les positions relatives sont celles du trièdre tri-rectangle des axes de coordonnées.

Si $O_1 x_1$ est la direction du champ électrique, alors $O_1 y_1$ est celle du champ magnétique et $O_1 z_1$ celle de la propagation

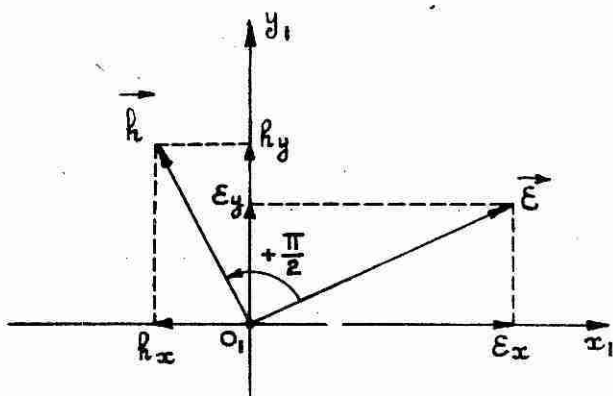


Fig. 61

(ou du rayon électromagnétique)

66 - Evaluons le rapport $\frac{E}{h}$ des grandeurs des deux champs. On a :

$$\frac{E_x}{h_y} = -\frac{E_y}{h_x} = \frac{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = \frac{E}{h} = c \sqrt{\frac{\mu}{K}} = C \frac{1}{c}.$$

Non seulement les deux champs $\vec{E}$ et $\vec{h}$ sont constamment perpendiculaires entre eux ; mais leurs grandeurs demeurent dans un rapport constant qui ne dépend que du milieu.

67 - Dans le cas particulier où ce milieu est le vide (ou l'air, en première approximation) on a simultanément $K=1$ et $\mu=1$, le rapport $\frac{E}{h}$ est égal à C . On a alors :

$$E = c h.$$

68 - La variation du champ $\vec{E}$, en un point donné, sera déterminée quand on connaîtra le lieu décrit, en fonction du temps, par l'extrémité de ce vecteur $\vec{E}$, dans le plan d'onde x_1, o_1, y_1 .

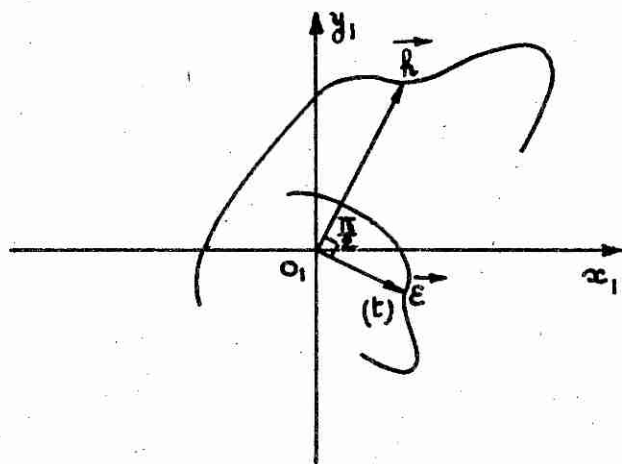


Fig. 62

Le champ $\vec{h}$ sera alors lui aussi, déterminé, puisque le vecteur $\vec{h}$ se déduit du vecteur $\vec{E}$, au même instant, par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ suivie d'une amplification ou d'une réduction dans le rapport

$$\frac{h}{E} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{K}{\mu}}.$$

Les courbes décrites par les extrémités de $\vec{E}$ et de $\vec{h}$ sont donc des figures homothétiques de rapport $\frac{1}{c} \sqrt{\frac{K}{\mu}}$, ayant leur centre d'homothétie en o_1 , mais dont la seconde a subi ensuite une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour du point o_1 (fig. 62).

Cas des ondes planes sinusoïdales.

71 — Lorsque les ondes sont sinusoïdales (§ 57 ci-dessus), les composantes ϵ_x , ϵ_y , h_x et h_y , en un point donné de l'espace, sont des fonctions sinusoïdales :

$$\epsilon_x = \epsilon_x \sin(\omega t - \varphi_{\epsilon_x})$$

$$\epsilon_y = \epsilon_y \sin(\omega t - \varphi_{\epsilon_y})$$

$$h_x = H_x \sin(\omega t - \varphi_{h_x})$$

$$h_y = H_y \sin(\omega t - \varphi_{h_y})$$

Les amplitudes ϵ_x , ϵ_y , H_x et H_y , ainsi que les phases φ_{ϵ_x} , φ_{ϵ_y} , φ_{h_x} , φ_{h_y} sont liées par les égalités du § 64 ci-dessus, égalités qui peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$h_y = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{K}{\mu}} \epsilon_x$$

$$h_x = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{K}{\mu}} \epsilon_y$$

On a donc :

$$H_y = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{K}{\mu}} \epsilon_x, \quad H_x = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{K}{\mu}} \epsilon_y, \quad \varphi_{h_y} = \varphi_{\epsilon_x} \text{ et } \varphi_{h_x} = \varphi_{\epsilon_y} + \pi$$

Les composantes ϵ_x et ϵ_y étant sinusoïdales, le lieu de l'extrémité du vecteur résultant $\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y$ sera, d'après ce que l'on a au Chap. III (§ 829), une ellipse de centre O_1 , et dont les axes auront, dans le cas général, une orientation quelconque par rapport aux axes de coordonnées.

D'après ce que l'on vient de voir (§ 68) le lieu de l'extrémité du vecteur h sera également une ellipse,

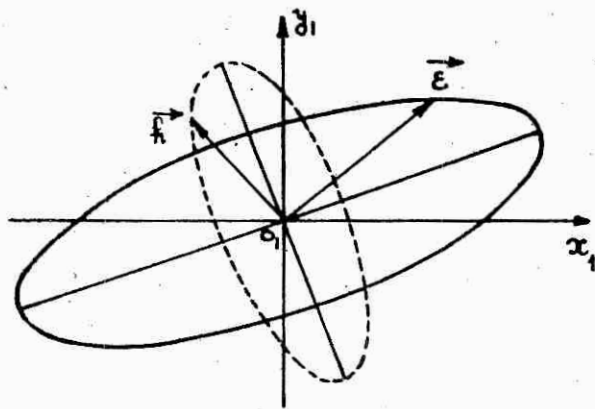


Fig. 63

de même centre et de même excentricité que la première, mais dont les axes homologues seront respectivement perpendiculaires aux premiers (fig. 63).

Ondes planes sinusoïdales polarisées rectilignement

72 - Il peut arriver que les ellipses décrites par l'extrémité des vecteurs champ électrique et champ magnétique soient infiniment aplaties, et simplement réduites à leurs grands axes (fig. 64). Les deux champs gardent alors des directions fixes dans l'espace, directions qui sont perpendiculaires l'une à l'autre.

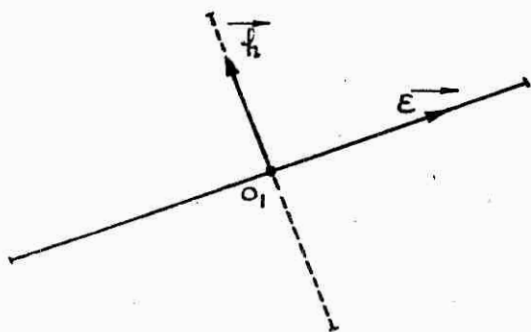


Fig. 64

Ayant fait choix de sens positifs $O_1 X_1$ et $O_1 Y_1$ sur ces deux directions, on pourra définir les deux vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{h}$ par leurs mesures suivant les axes $O_1 X_1$ et $O_1 Y_1$ ainsi déterminés. Ces mesures E et h sont des

grandeurs sinusoïdales qu'on peut écrire, à condition que l'angle $X_1 O_1 Y_1$ soit égal à $+\frac{\pi}{2}$ et non à $-\frac{\pi}{2}$:

$$E = \text{Mesure}_{\text{sur } O_1 X_1} \vec{E} = \epsilon \sin(\omega t - \varphi)$$

$$h = \text{Mesure}_{\text{sur } O_1 Y_1} \vec{h} = H \sin(\omega t - \varphi)$$

Entre les amplitudes ϵ et H on a la relation (d'après le § 66 ci-dessus) :

$$\frac{\epsilon}{H} = c \sqrt{\frac{\mu}{K}} .$$

ou bien, dans le vide :

$$\frac{\epsilon}{H} = c \quad \text{ou} \quad \epsilon = c H .$$

Ondes planes, non sinusoïdales, polarisées rectilignement

73. — On observera que des ondes planes polarisées rectilignement ne sont pas forcément, pour cette raison, sinusoïdales. Les grandeurs algébriques ϵ et h peuvent être des fonctions quelconques du temps, à condition, bien entendu, qu'elles satisfassent à chaque instant la relation :

$$\frac{\epsilon}{h} = c \sqrt{\frac{\mu}{K}}$$

ou bien, dans le cas où la propagation se fait dans le vide (ou dans l'air) :

$$\frac{\epsilon}{h} = c \quad \text{ou} \quad \epsilon = c h .$$

Ondes planes sinusoïdales.

Double périodicité des ondes planes sinusoïdales.

74. — Les quatre expressions du début du § 71 donnent les variations du champ électromagnétique en un point particulier de l'espace :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \epsilon_x \sin (\omega t - \varphi_1) \\ \epsilon_y = \epsilon_y \sin (\omega t - \varphi_2) \\ h_x = H_x \sin (\omega t - \varphi_2 + \pi) \\ h_y = H_y \sin (\omega t - \varphi_1) \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} H_y = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{K}{\mu}} \epsilon_x \\ H_x = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{K}{\mu}} \epsilon_y \end{array} \right.$$

Pour avoir le champ en un point courant, de coordonnées x, y, z , de l'espace, il faut d'après ce qu'on a vu au § 62 ci-dessus, remplacer la variable t par $(t - \frac{z}{v})$. On obtient ainsi le système suivant :

$$\begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_x \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) - \varphi_1 \right] \\ \epsilon_y = \epsilon_y \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) - \varphi_2 \right] \\ h_x = H_x \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) - \varphi_2 + \frac{\pi}{2} \right] \\ h_y = H_y \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) - \varphi_1 \right] \end{cases} \quad \text{toujours avec :} \quad \begin{cases} H_y = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{k}{\mu}} \epsilon_x \\ H_x = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{k}{\mu}} \epsilon_y \end{cases}$$

Ces équations montrent la double périodicité du phénomène :

- 1° : Périodicité dans le temps en un point donné.
- 2° : Périodicité dans l'espace à un instant donné.

En ce qui concerne cette dernière périodicité, on remarquera que la période du phénomène n'est autre que la longueur d'onde $\lambda = v T = \frac{v}{f} = 2\pi \frac{v}{\omega}$ qui a déjà été définie au § 58 ci-dessus.

75 - Cette double périodicité découle d'ailleurs immédiatement de ce qui a été dit au § 63 au sujet des ondes planes en général, à savoir que, moyennant un choix convenable des échelles graphiques et des sens positifs pour représenter les temps et les espaces, les variations d'une composante donnée (ϵ_x par exemple) du champ électromagnétique, dans le temps (en un point donné) et dans l'espace (à un instant donné) pourraient être représentées graphiquement par une seule et même courbe. Dans le cas des oscillations sinusoïdales cette courbe est une sinusoïde et l'on a, entre les périodes T et λ , le rapport inverse des échelles graphiques adoptées : $\frac{T}{\lambda} = \frac{1}{v}$ d'où $\lambda = v T$.

Vérification directe des équations de Maxwell dans le cas d'une onde plane polarisée rectilignement.

76 — Considérons de telles ondes planes. C'est comme on le verra plus loin (§ 124), la polarisation obligée pour des ondes planes dont la direction de propagation serait horizontale et qui voyageraient au dessus d'un sol parfaitement conducteur. Le champ électrique est alors vertical et le champ magnétique horizontal.

Pour cette raison, nous placerons les axes ox et oy dans le plan horizontal, et l'axe oz vertical, donc suivant la direction du champ électrique. La direction oy sera choisie parallèlement à la direction de propagation; d'après ce qui a été dit au § 65, nous serons dès lors assurés que le champ magnétique sera dirigé suivant le troisième axe ox (fig. 76).

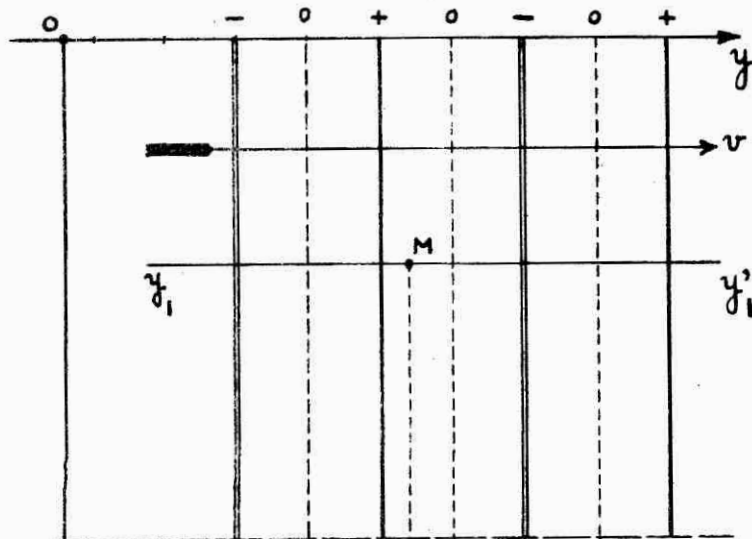


Fig. 77

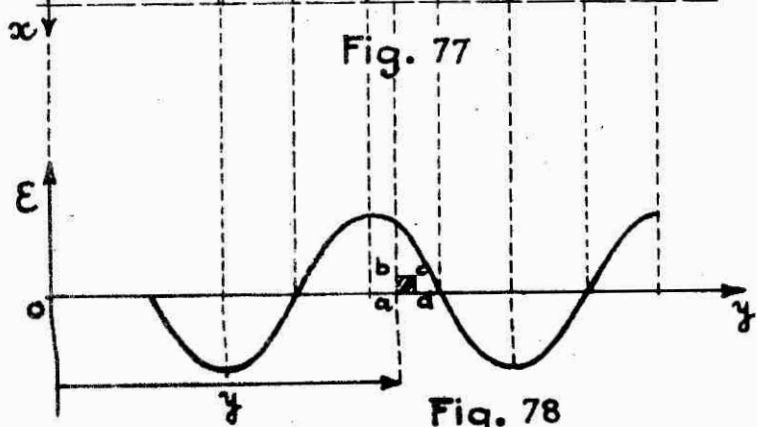


Fig. 78

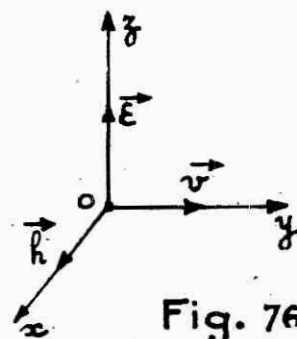


Fig. 76

Les différents plans d'ondes qui sont verticaux (et parallèles à xoz) coupent le plan horizontal xoy suivant des droites parallèles à ox . Ce plan xoy est celui de la fig. 77 qui donne la

position des ondes à une certaine époque t . Dans cette figure :

- Les droites en traits forts représentent les traces des plans d'ondes où la phase φ est successivement égale à $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, etc... . Ce sont donc les points où le champ E est maximum positif.

- Les droites en traits doubles représentent les traces des plans d'ondes $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, etc... . Ce sont les points où le champ est minimum et négatif.

- Les droites en traits interrompus représentent les traces des plans d'ondes $\varphi = 0$, π , 2π , etc... . Sur ces droites le champ E est nul.

La loi de variation du champ E (comme, d'ailleurs du champ h) le long d'une direction parallèle à Oy est donnée par la sinusoïde tracée sur la figure 78, en correspondance avec la figure 77.

77 - Démontrons que nous avons bien :

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}.$$

Pour cela, évaluons les composantes de $\text{rot } \vec{E}$ suivant les trois axes Ox , Oy et Oz .

Par définition, chacune de ces composantes est égale à la circulation, c'est-à-dire (voir Chap. I_a - § 312) le travail effectué par le vecteur $\vec{E}$ suivant le contour élémentaire unitaire porté par le plan perpendiculaire à la direction de la composante considérée.

Or il est deux directions de plans dans lesquelles le travail de E sera nul. Ce sont :

- 1° : le plan horizontal xOy puisque le vecteur $\vec{E}$, vertical, lui est constamment perpendiculaire.
- 2° : le plan d'onde xOz (contenant le vecteur $\vec{h}$)

puisque le champ électrique est uniforme (constant en direction grandeur et sens) dans chaque plan d'onde. La fig. 79 montre en effet que le travail effectué de (a) à (b) est égal et de signe contraire à celui effectué de (c) à (d), et que, par ailleurs, il est nul de (b) à (c) et de (d) à (a).

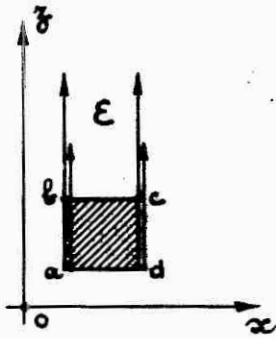


Fig. 79

Il reste donc à évaluer le travail du champ électrique dans le plan vertical perpendiculaire au plan d'onde, c'est-à-dire dans le plan vertical de propagation. Dès maintenant on est assuré que le vecteur $\text{rot } \vec{E}$ sera dirigé suivant la perpendiculaire à ce dernier plan, donc suivant la direction Ox .

Pour avoir sa grandeur, évaluons le travail de $\vec{E}$ le long du contour élémentaire $abcd$ ayant l'unité comme côté (fig. 78). La grandeur du champ électrique est :

$$E = \epsilon \sin \omega \left(t - \frac{y}{v} \right),$$

ou encore, puisque $\lambda = v \frac{2\pi}{\omega}$,

$$E = \epsilon \sin \left(\omega t - \frac{2\pi y}{\lambda} \right)$$

de même que le champ magnétique h a pour valeur :

$$h = H \sin \left(\omega t - \frac{2\pi y}{\lambda} \right) \text{ avec } H = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{K}{\mu}} \epsilon$$

La grandeur du travail effectué par $\vec{E}$ est égale à la variation de E (quand on passe de ab à cd) multipliée par la longueur $ab = cd$.

Or, cette longueur est prise égale à l'unité, on a donc :

$$\text{rot } \vec{E} = \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\epsilon \sin \left(\omega t - \frac{2\pi y}{\lambda} \right) \right] = -\frac{2\pi \epsilon}{\lambda} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi y}{\lambda} \right)$$

Évaluons $\frac{\partial h}{\partial t}$ au même point :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[H \sin \left(\omega t - \frac{2\pi y}{\lambda} \right) \right] = \omega H \cos \left(\omega t - \frac{2\pi y}{\lambda} \right)$$

Pour démontrer que $\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial h}{\partial t}$, il suffit de vérifier que l'on a :

$$\frac{2\pi \epsilon}{\lambda} = \mu \omega H$$

ce qui est immédiat puisque :

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega \sqrt{K\mu}}{c} \quad \text{et} \quad H = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{K}{\mu}} \epsilon.$$

78 — Les valeurs du champ électrique (comme celles du champ magnétique puisque $E = c \sqrt{\frac{\mu}{K}} h$), à une époque donnée, aux différents points du plan xy peuvent être représentées graphiquement par la surface dont l'équation est $E = F(x, y)$.

On aperçoit immédiatement que cette surface est formée de sillons réguliers, tous parallèles à la direction Ox , composant une suite de crêtes (coincidunt avec les lignes pleines de la fig. 78) qui alternent avec des creux (lignes doubles de la même figure).

La sinusoïde de la fig. 79 ne représente d'ailleurs pas autre chose que la coupe de cette surface par un plan vertical perpendiculaire aux plans d'ondes c'est-à-dire par un plan de propagation.

Lorsque le temps s'écoule, la surface toute entière se déplace avec la vitesse $v = \frac{c}{\sqrt{K\mu}}$ à la manière des vagues à la surface d'une nappe d'eau.

78^{bis} - Enfin la fig. 78^{bis} représente les lignes de force du champ électrique et du champ magnétique, à la même époque t que celle où la fig. 77 représentait l'onde plane considérée.

Les lignes de force électrique qui sont verticales (donc perpendiculaires au plan de la figure) n'apparaissent sur la figure que par leur coupe. Elles sont figurées par des points lorsque le champ est positif (c'est-à-dire dirigé vers le haut) et par des petits cercles quand le champ est négatif (c'est-à-dire dirigé vers le bas).

Les lignes de force magnétique sont des horizontales parallèles aux plans d'ondes. Elles sont représentées en traits interrompus sur la fig. 78^{bis}.

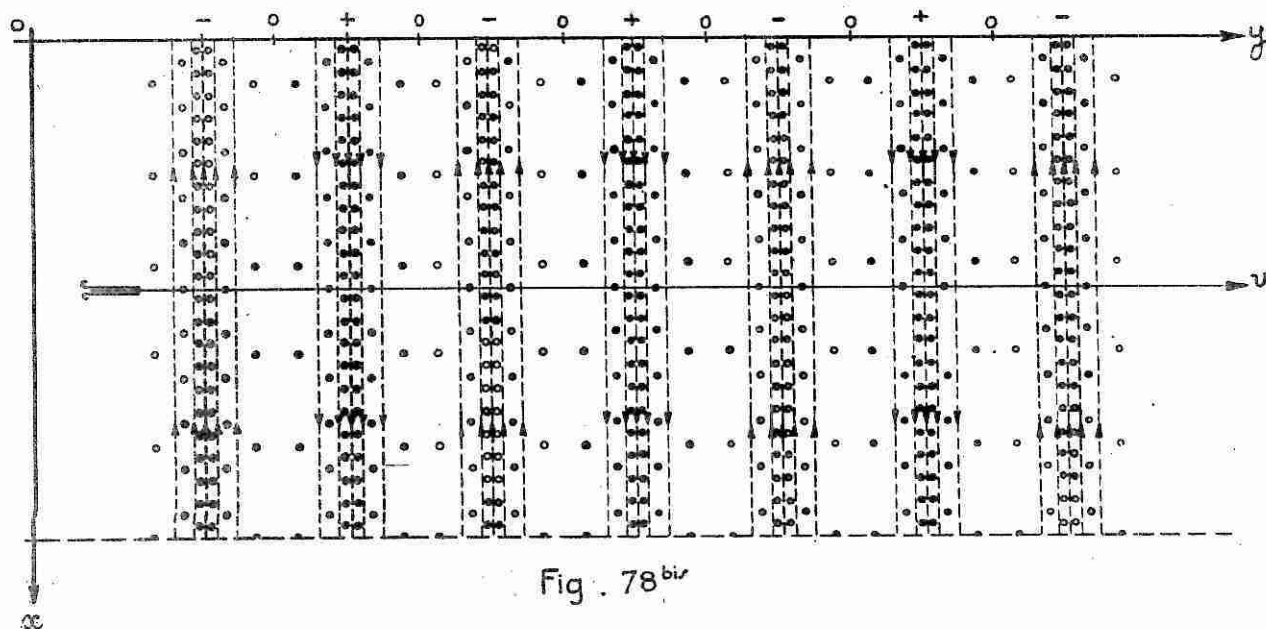


Fig. 78^{bis}

Impédance d'espace.

79 - Des formules du § 72 ci-dessus, on déduit que le rapport $\frac{E}{H}$ des deux champs d'une onde plane est égal à $c \sqrt{\frac{\mu}{K}}$. Ce rapport a les dimensions d'une résistance ou d'une impédance (voir Chap. II_a - § 758).

Par définition, on appelle impédance d'espace du milieu considéré le produit :

$$Z_0 = 4 \pi \times \frac{E}{H} = 4 \pi c \sqrt{\frac{\mu}{K}}$$

ou encore, dans l'air ou le vide :

$$Z_0 = 4 \pi c .$$

79^{bis} - Cette impédance n'est autre que l'impédance d'une ligne à deux conducteurs (fig. 79^{bis}) constituée, dans le milieu considéré, au moyen de deux rubans plats parallèles d'une largeur égale à l'unité, et écartés

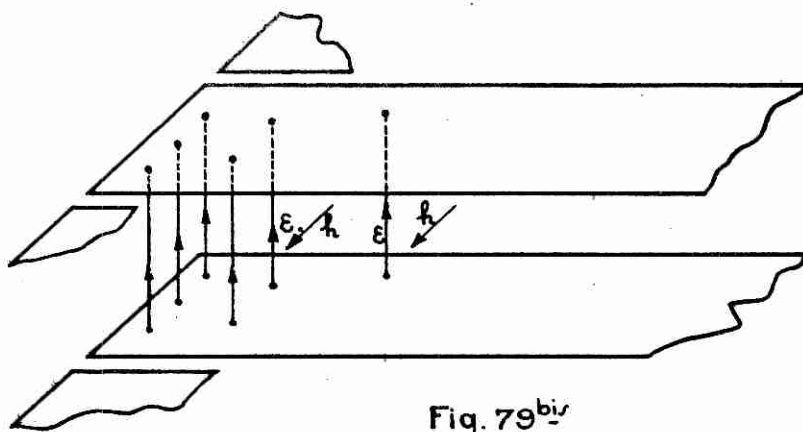


Fig. 79^{bis}

d'un intervalle égal aussi à l'unité. La ligne est supposée encadrée par d'autres lignes parallèles semblables, faisant en quelque sorte anneau de garde ; les lignes de force du champ électrique sont réduites aux perpendiculaires communes aux deux rubans conducteurs, et les lignes de force magnétiques sont constituées par les perpendiculaires aux lignes de force électrique (et aux lignes de courant).

L'impédance en un point d'une telle ligne est par définition :

$$Z = \frac{V}{I}$$

V étant la tension entre fils de ligne au point d'abscisse x et I le courant passant dans la ligne au même point.

D'une part, il est bien évident que l'on a :

$$V = E$$

puisque l'intervalle entre les deux conducteurs a été pris égal à l'unité.

D'autre part, cherchons la relation qui existe entre le courant I et entre le champ magnétique régnant dans l'intervalle des deux conducteurs de la ligne considérée.

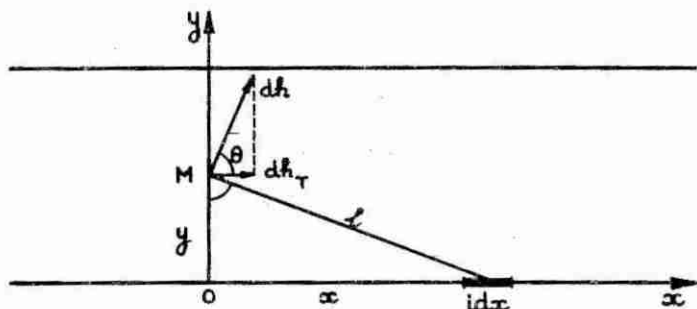


Fig. 79^{ter}

Prenons comme plan de la figure une section perpendiculaire aux lignes de courant (fig. 79^{ter}).

Un filet de courant de largeur dx et de longueur

indéfinie donne, d'après le Chap. II^a § 261, un champ $dh = \frac{2i dx}{l}$, l étant la distance du point considéré au filet de courant. Ce champ présente une composante parallèle aux conducteurs :

$$dh_T = dh \times \cos \theta = \frac{2i dx}{l} \times \cos \theta = \frac{2i dx}{l} \times \frac{y}{l} = 2i \frac{y dx}{l^2}$$

or $l^2 = x^2 + y^2$; d'où, au point de cote y , la composante issue du filet de courant de largeur dx :

$$dh_T = \frac{2i y dx}{l^2} = \frac{2i y dx}{x^2 + y^2} = 2i \frac{d \frac{x}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}},$$

et le champ total :

$$h = 2i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d \frac{x}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2i \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} \right]_{-\infty}^{+\infty} \\
 &= 2i \left[+\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] \\
 &= 2\pi i .
 \end{aligned}$$

Ce champ est doublé par la présence du second plan conducteur d'où finalement la valeur du champ, indépendante du point considéré entre les 2 plans de courant :

$$h = 4\pi i \quad \text{d'où} \quad i = \frac{h}{4\pi}$$

i étant, rappelons-le, la densité de courant dans le plan conducteur :

Son impédance $Z_0 = \frac{V}{I}$ est donc égale à $4\pi \times \frac{\varepsilon}{h}$, et comme on a la relation, dans le cas de l'onde plane (§ 60) $\frac{\varepsilon}{h} = c$, on a finalement pour impédance d'espace :

$$Z_0 = 4\pi \times c$$

soit en unités pratiques (voir Chap. II_a - § 760)

$$Z_0 = 4\pi \times 3 \cdot 10^{10} \times 10^{-9} = 376,6 \text{ Ohms} .$$

Expressions imaginaires du champ électrique et du champ magnétique .

80 - Supposons l'onde plane polarisée verticalement de telle manière que le champ électrique coïncide avec ox et le champ magnétique avec oy . Cette onde se propage suivant oz .

Le champ $\vec{E}$ s'identifie à la composante $\vec{E}_x$ et le champ magnétique $\vec{h}$ à la composante $\vec{h}_y$.

Supposons cette onde sinusoïdale de pulsation $\omega = 2\pi f$. Soient E et H les valeurs imaginaires correspondant à E_x et h_y .

$$\mathcal{E} = \epsilon \mid \varphi \quad \text{et} \quad \mathcal{H} = H \mid \varphi \quad (I)$$

Nous savons que les amplitudes ϵ et H sont constantes, mais que la phase φ est fonction de la cote z .

Introduisons les valeurs imaginaires $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ dans les équations de Maxwell (§ 60). Par suite de la polarisation verticale de l'onde considérée, les équations de Maxwell se réduisent à deux seulement ($\mathcal{E}_x$ et h_y seuls sont différents de zéro).

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial h_y}{\partial t} \\ \frac{\partial h_y}{\partial z} = \frac{K}{c^2} \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} \end{cases} \quad (II)$$

Or les valeurs imaginaires de $\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z}$ et $\frac{\partial h_y}{\partial t}$ sont respectivement $j\omega \mathcal{E}$ et $j\omega \mathcal{H}$ (Chap. III_a - § 7). Les 2 équations de Maxwell s'écrivent donc :

$$\begin{cases} -\frac{d\mathcal{E}}{dz} = j\mu\omega \mathcal{H} \\ -\frac{d\mathcal{H}}{dz} = j\frac{K}{c^2}\omega \mathcal{E} \end{cases} \quad (III)$$

Si on compare les équations (II et III) aux équations analogues du Chap. VI - § 24 appliquées aux lignes sans pertes, on constate que :

- 1° : Le champ électrique $\mathcal{E}$ joue le rôle de la tension V entre les 2 fils de ligne.
- 2° : Le champ magnétique $\mathcal{H}$ joue le rôle du courant I .
- 3° : La perméabilité μ joue le rôle de la self par unité de longueur L_1 ; on se rappelle (Chap. II_a - § 266) que $4\pi\mu$ représente, en unités électromagnétiques, le coefficient de self-induction d'une tranche de 1 cm prise dans une bobine ayant 1 spire par cm et 1 cm² de section.
- 4° : le coefficient $\frac{K}{c^2}$ joue le rôle de la capacité C_1 par unité de longueur; on se rappelle que $\frac{K}{4\pi c^2}$ est la capacité, en unités électromagnétiques, du

condensateur plan construit sur un diélectrique ayant la forme d'un cube d'un centimètre de côté (faire $S=1$, $l=1$ dans la formule du Chap. II_a - § 51).

Enfin, en éliminant $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{H}$ dans le système d'équation (II), on trouve :

$$\text{ou } \left. \begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{E}}{dz^2} - \gamma^2 \mathcal{E} &= 0 \\ \frac{d^2 \mathcal{H}}{dz^2} - \gamma^2 \mathcal{H} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ avec } \gamma^2 = -\frac{K\mu}{c^2} \omega^2.$$

Ces équations montrent que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ ont les formes suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{\pm \gamma z} \\ \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 e^{\pm \gamma z} \end{cases}$$

avec $\gamma = j \omega \frac{\sqrt{K\mu}}{c}$, d'est-à-dire :

$$\begin{cases} \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{\pm j \omega \frac{\sqrt{K\mu}}{c} z} \\ \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 e^{\pm j \omega \frac{\sqrt{K\mu}}{c} z} \end{cases}$$

$\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{H}_0$ sont les valeurs imaginaires que possèdent les champs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ à l'origine des coordonnées ($z=0$) :

80^{bis} - Si l'on considère que $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{H}_0$ sont représentés par des vecteurs tournants à la vitesse ω :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_0 = \mathcal{E} e^{j\omega t} \\ \mathcal{H}_0 = \mathcal{H} e^{j\omega t} \end{cases},$$

on voit que l'expression des vecteurs tournants $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ sera :

$$\begin{cases} \mathcal{E} = \mathcal{E} e^{j\omega t \pm \gamma z} \\ \mathcal{H} = \mathcal{H} e^{j\omega t \pm \gamma z} \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} \mathcal{E} = E e^{j\omega \left(t \pm \frac{\sqrt{K\mu}}{c} z \right)} \\ \mathcal{H} = H e^{j\omega \left(t \pm \frac{\sqrt{K\mu}}{c} z \right)} \end{cases},$$

expression qui montre que les champs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ se propagent avec une vitesse v telle que :

$$t \pm \frac{\sqrt{K\mu}}{c} vt = 0$$

ou
$$v = \frac{c}{\sqrt{K\mu}} .$$

Interférences d'ondes planes polarisées verticalement

81 - Lorsque des ondes électriques provenant de diverses sources parviennent simultanément dans le même espace, le champ électromagnétique résultant en un point donné et à un instant donné est égal à la somme géométrique des champs composants au même point et au même instant. La résultante obtenue présente dans le cas général un aspect complexe difficile à analyser.

Nous étudierons ce qui se passe dans le cas de deux ondes planes sinusoïdales de même fréquence se propageant horizontalement et polarisées suivant la verticale.

82 - Nous avons étudié au cours du Chap. III_a - (§ 9) la superposition de deux courants alternatifs sinusoïdaux de même pulsation ω . Le résultat est un courant sinusoïdal de même pulsation ω , dont on sait déterminer l'amplitude et la phase, au moyen d'une construction géométrique simple.

Au cours du Chap. VI, consacré aux lignes, nous avons étudié la superposition de deux ondes sinusoïdales se propageant en sens inverses sur une ligne. On obtient alors des ondes dites "stationnaires".

L'étude qui suit peut être considérée comme une nouvelle extension du problème de la superposition de deux ondes sinusoïdales.

83 - Désignons par α l'angle que font entre elles les directions de propagation des deux ondes planes incidentes. Les vecteurs champ électriques $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ étant verticaux tous les deux, leur composition se fera algébriquement et le champ résultant sera vertical également. En d'autres termes, le champ

électrique résultant sera polarisé verticalement dans tout l'espace.

À l'inverse les directions des vecteurs champs magnétiques $\vec{h}_1$ et $\vec{h}_2$ feront, en tous points, des angles égaux à α . Le champ magnétique résultant sera donc, dans le cas général, un champ elliptique.

Deux cas doivent être distingués selon que les 2 champs incidents ont la même amplitude ou des amplitudes différentes.

1^{er} Cas : les deux champs composants sont égaux, $E_1 = E_2$
(et par conséquent $H_1 = H_2$)

a) Étude du champ électrique.

84 - Examinons d'abord comment se composent les champs électriques $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$.

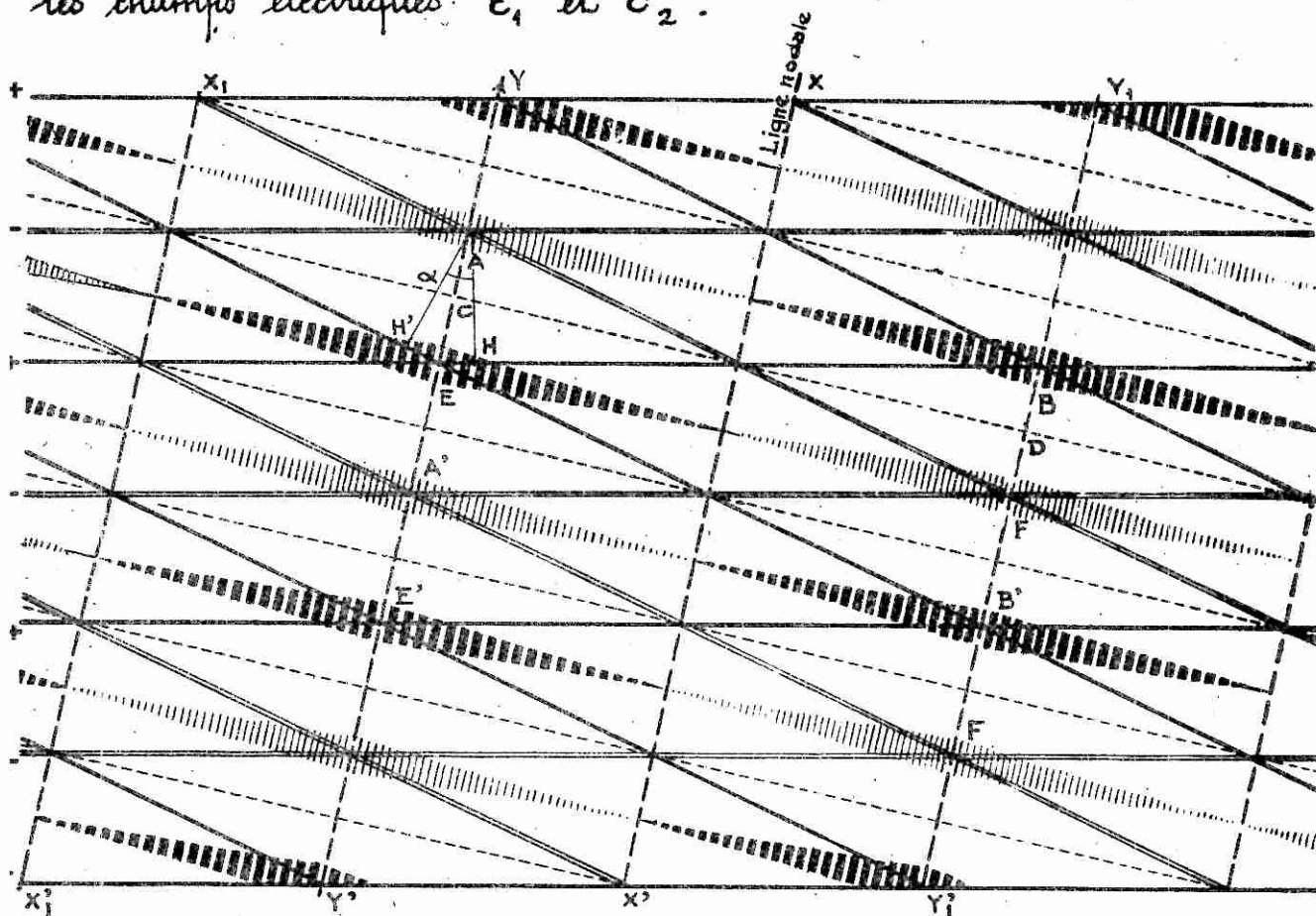


Fig. 84

La surface représentative du champ résultant $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, au lieu de se montrer sous l'aspect d'une succession

de crêtes et de dépressions parallèles régulières (c'est-à-dire ayant partout le même profil), apparaît cette fois comme un ensemble régulier (en forme de damier plus ou moins étiré) de bosses et de creux. Les maxima et minima de la surface correspondent respectivement d'une part aux points d'intersection des lignes d'ondes définies par les maxima des deux champs incidents $E_1 = E_2 = +\epsilon$, et d'autre part aux points d'intersection des lignes d'ondes minima ($E_1 = E_2 = -\epsilon$).

On trouve, cette fois, non plus une seule direction de lignes droites de champ nul (lignes en traits interrompus de la fig. 84) mais deux directions perpendiculaires qui sont les bissectrices des angles formés par les directions de propagation des ondes incidentes.

Ces deux ensembles de lignes dessinent des rectangles dont les sommets se trouvent aux points d'intersection des droites de champs nuls de l'une ou l'autre onde incidente.

85 - Lorsque l'angle α est petit, les rectangles sont très allongés dans le sens des plans d'ondes incidentes. La surface représentative de E présente encore l'aspect de longs sillons et de longs creux parallèles, mais la profondeur de ceux-ci varie d'un point à un autre, jusqu'à s'annuler, et à changer de signe, les creux se substituant à des bosses et inversement.

86 - Lorsque l'angle α est égal à $\frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire lorsque les ondes incidentes sont perpendiculaires, les rectangles sont devenus des carrés et la surface présente la symétrie d'un quadrillage régulier.

87 - Si l'angle α continue d'augmenter, on obtient à nouveau une série de rectangles mais le grand côté est

dirigé cette fois perpendiculairement à la direction primitive.

88 — Lorsque le temps s'écoule, on vérifie aisément que l'ensemble de la surface représentative se déplace en bloc d'un mouvement de translation parallèle aux directions $X'X$ ou $Y'Y$. La vitesse v' du déplacement est proportionnelle au côté AE du rectangle considéré précédemment. v étant la vitesse des ondes incidentes on a :

$$\frac{v}{v'} = \frac{AH}{AE} = \cos \frac{\alpha}{2}$$

donc :

$$v' = \frac{v}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

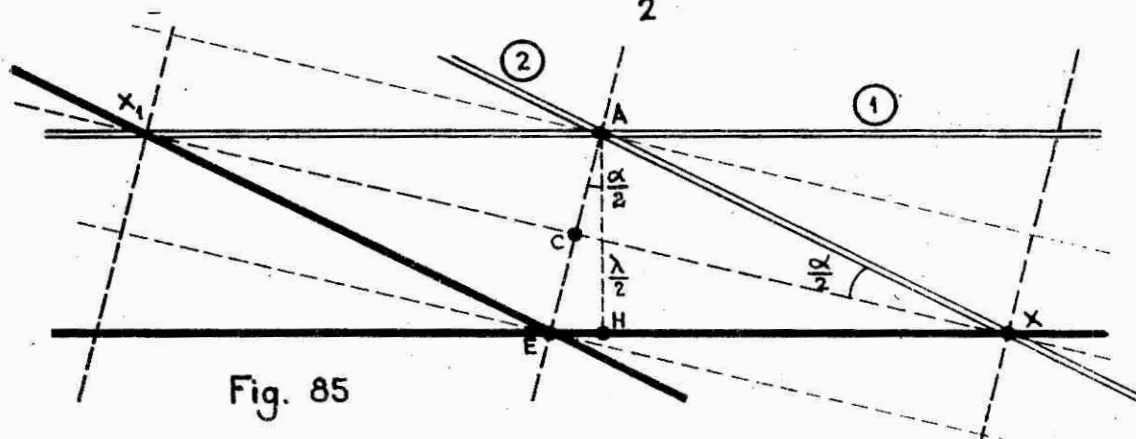


Fig. 85

Cette vitesse v est ce qu'on appelle une vitesse de phase, parce qu'elle représente la vitesse avec laquelle se propage une phase donnée du phénomène sinusoïdal. Elle ne doit surtout pas être confondue avec la vitesse de groupe, avec laquelle se propage un signal (par exemple un point télégraphique) ou l'énergie. Cette dernière vitesse est obligatoirement inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide (Théorie de la relativité - Chap. II_a - § 681).

On reviendra d'ailleurs ultérieurement sur cette distinction, à l'occasion de la propagation des ondes électromagnétiques en milieux ionisés (§ 606 ci-après).

89 — Si on considère les phénomènes dans une étroite bande de terrain parallèle à la direction $X'X$, tout se passe comme si l'on avait affaire à une onde sinusoïdale se propageant dans la direction $X'X$ et dont la pulsation serait évidemment la même que celle des ondes incidentes, mais dont la longueur d'onde λ' , par contre, serait proportionnelle à v' . On a bien, en effet, $\lambda' = AA' = \frac{\lambda}{\cos \frac{\alpha}{2}}$.

90 — On observera enfin que les directions parallèles à $X'X$ représentent les lieux des points de l'espace où les champs E_1 et E_2 présentent une différence de phase donnée. Sur les droites telles que $X'X$, cette différence de phase est égale à π ; c'est pourquoi le champ résultant y est constamment nul; sur les droites $Y'Y$ cette différence de phase est nulle, et le champ résultant y possède la plus grande amplitude. Ce sont les lieux des maxima et des minima de la surface représentative du champ $E = E_1 + E_2$.

L'intervalle qui sépare deux lignes nodales XX' consécutives est (fig. 85) :

$$X_1X = 2CX = 2 \frac{AC}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{AE}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{\lambda'}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{\lambda}{2 \cos \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Ondes stationnaires .

91 — Imaginons que l'angle α , continuant d'augmenter, devienne égal à 180° . Les rectangles formés par les lignes de champ nul se sont allongés indéfiniment dans le sens perpendiculaire à la direction commune de propagation des deux ondes incidentes .

La longueur d'onde apparente $\lambda' = \frac{\lambda}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ est devenue infinie (en même temps d'ailleurs que la $\cos \frac{\alpha}{2}$ vitesse de phase v'), en sorte que, tout au long d'une droite parallèle à XX' (ou perpendiculaire à la direction de propagation), le champ électrique résultant, à un instant donné, possède la même valeur. En tous les points de l'espace le champ résultant varie sinusoïdalement et en phase (à π près). Seule son amplitude varie; nulle le long des droites XX' , cette amplitude est maximum (et en opposition) d'une part suivant les axes YY' , d'autre part suivant les axes Y_1Y_1' .

Au lieu de considérer que la surface représentative se déplace avec une vitesse infinie dans le sens XX' , il est préférable de considérer simplement qu'elle se déforme sur place, tous ses points exécutant en phase des mouvements sinusoïdaux. L'amplitude elle-même de ces mouvements suit une loi sinusoïdale le long d'une direction quelconque du plan, pourvu que cette direction ne soit pas confondue avec une parallèle à XX' , auquel cas cette amplitude est une constante pouvant d'ailleurs être nulle (voir les droites XX' elles-mêmes).

92 — A un instant donné t , les amplitudes du champ électrique résultant sont maxima dans tout le plan, et la surface présente le même aspect que celui d'une onde unique se propageant dans le sens de l'une ou de l'autre onde incidente,

mais d'amplitude double. Un instant après, le champ diminuant, les crêtes et les creux diminuent d'amplitude, sans se déplacer, puis à l'époque $t_1 + \frac{T}{4}$, le champ s'annule de partout à la fois, la surface se confond avec le plan de cote $\varepsilon = 0$. Ensuite, les champs changeant de sens tous en même temps, des creux se forment là où étaient les crêtes et réciproquement, jusqu'à ce que le maximum du relief soit atteint à l'époque $t + \frac{T}{2}$. Après quoi, les crêtes et les creux diminuent à nouveau et ainsi de suite, la surface se retrouvant identique à elle-même à des intervalles de temps séparés par des intervalles de temps égaux à une période T , ou à un nombre entier quelconque de périodes. On est en présence de ce qu'on appelle des ondes stationnaires.

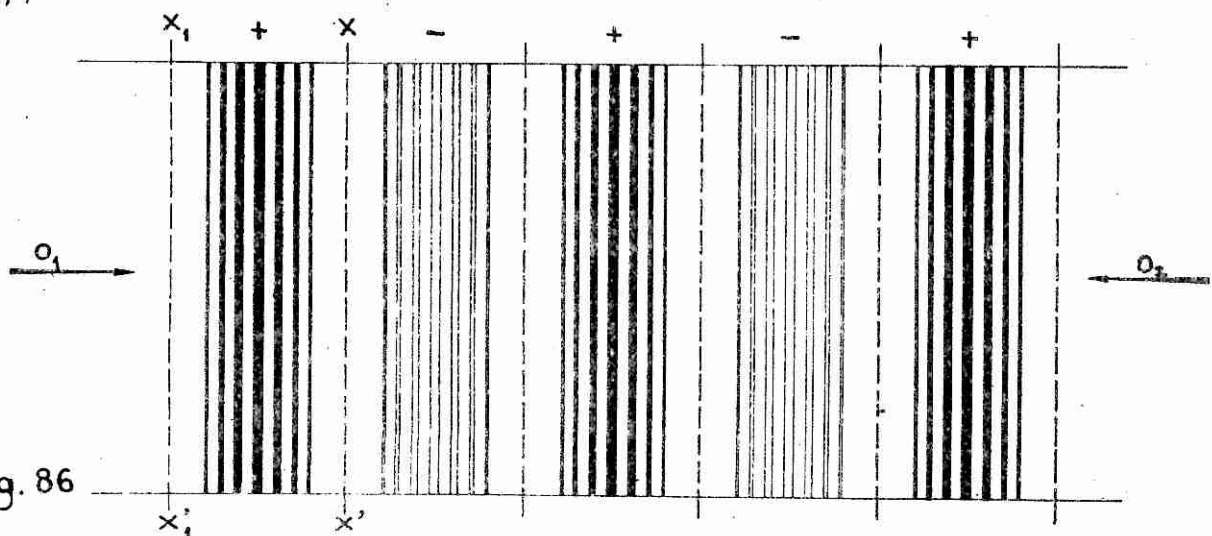


Fig. 86

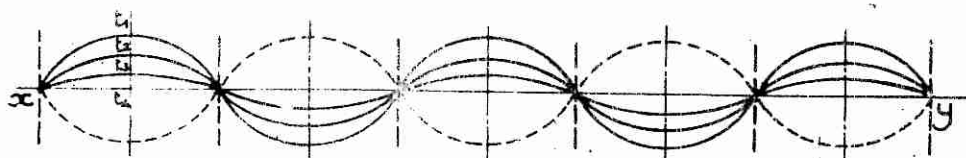


Fig. 87

La fig 86 représente l'aspect de la surface à l'époque t_1 considérée ci-dessus, tandis que la fig. 87 représente les coupes de cette surface par un plan vertical parallèle à la direction de propagation des ondes incidentes, non seulement à l'époque t_1 mais encore à différentes époques successives t_2 , t_3 , etc ...

Étude du champ magnétique .

93 - Les champs magnétiques incidents $\vec{h}_1$ et $\vec{h}_2$ étant horizontaux, il en est de même du champ résultant $\vec{h} = \vec{h}_1 + \vec{h}_2$, mais, comme il a été dit au § 83 ci-dessus, la direction de cette résultante est quelconque dans le plan horizontal. En un point donné, quand le temps s'écoule, cette résultante passe successivement par toutes les directions du plan; le champ est elliptique.

Il n'est plus possible, cette fois, de représenter les variations du champ dans l'espace par une surface, puisque ce champ est défini maintenant par deux paramètres : la grandeur et la direction (ou bien les composantes suivant deux axes); il faudrait deux surfaces et non une.

Le champ résultant $\vec{h} = \vec{h}_1 + \vec{h}_2$ définit un troisième champ de vecteurs, champ qui est lui-même variable en

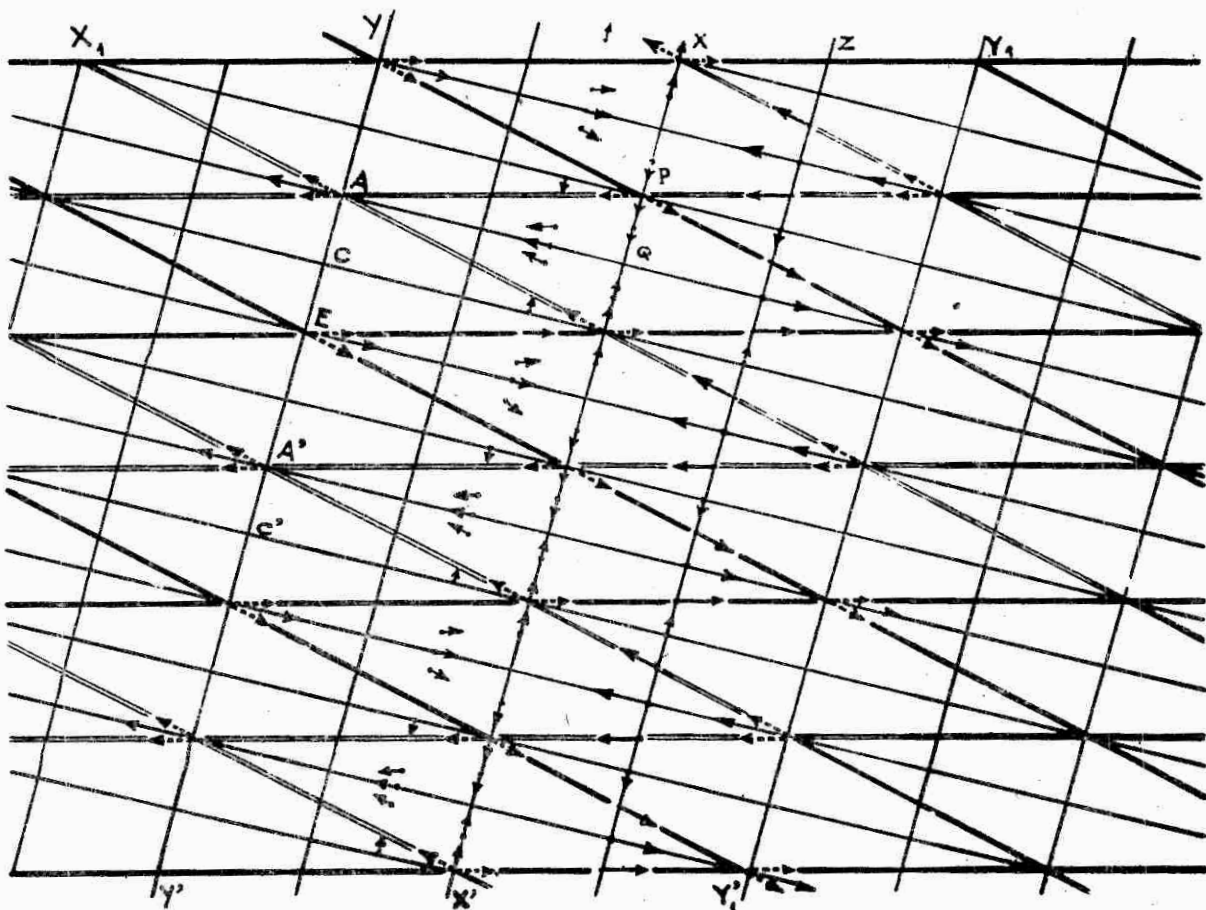


Fig. 93

fonction du temps.

Nous allons voir que tout se passe comme si l'on avait affaire à un champ de vecteurs invariables qui se déplacerait en bloc dans l'espace, comme se déplaçait la surface représentative du champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

La composition des vecteurs $\vec{h}_1$ et $\vec{h}_2$, en divers points de l'espace, à l'époque t , est représentée par la fig. 93 où les ondes incidentes sont supposées occuper les mêmes positions que dans la fig. 84 relative à l'étude du champ électrique. Les flèches en trait plein représentent la résultante $\vec{h}$ obtenue. On voit que celle-ci occupe bien une direction quelconque du plan.

94 - Quand le temps s'écoule, tout se passe comme si la figure obtenue se déplaçait suivant un mouvement de translation parallèle à XX' comme la fig. 84. Il s'en suit qu'en un point donné, la résultante $\vec{h}$ "tourne" autour de ce point, et le champ est elliptique.

95 - Il est cependant des points où le champ magnétique reste polarisé rectilignement.

Ce sont d'abord les axes YY' , $Y_1 Y'_1$ etc... qui sont les lignes d'amplitudes maxima du champ électrique résultants. Suivant ces lignes, le champ magnétique est polarisé perpendiculairement aux axes NN' , c'est-à-dire perpendiculairement à la vitesse apparente $v' = \frac{v}{\cos \frac{\alpha}{2}}$.

96 - Ensuite ce sont les axes XX' , $X_1 X'_1$,... eux-mêmes, où le champ électrique demeure constamment nul. Suivant ces axes le champ magnétique est polarisé perpendiculairement à la direction précédente, c'est-à-dire qu'il est polarisé parallèlement à la direction XX' .

Il peut paraître surprenant qu'il existe un champ magnétique en des points où le champ électrique est constamment nul. Cela tient à ce qu'il n'est pas nul aux points infiniment voisins, et on peut d'ailleurs vérifier, par une méthode analogue à celle du § 76 que les champs $\vec{E}$ et $\vec{h}$, en ces points singuliers, satisfont bien à la deuxième équation de Maxwell :

$$\text{rot } \vec{h} = \frac{K}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

$\vec{E}$ étant nul, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est nul également ; $\text{rot } \vec{h}$ doit donc aussi être nul. Or, on trouve, en évaluant le travail de $\vec{h}$ le long de trois contours élémentaires perpendiculaires aux axes de coordonnées que les trois composantes de $\text{rot } \vec{h}$ suivant les axes de coordonnées sont bien nulles toutes les trois.

98 - Le champ magnétique résultant est encore polarisé rectilignement sur les droites AB, CD, EF, etc... où nous avons vu que l'amplitude du champ électrique était ou bien maximum, ou bien minimum. En ces points la polarisation du champ magnétique est dirigée suivant la perpendiculaire à XX' , c'est-à-dire perpendiculairement à la direction de la polarisation aux points situés sur XX' (§ 96 ci-dessus)

99 - On voit, en définitive que le terrain se trouve divisé en tranches successives par les lignes parallèles telles que XX' YY' , lignes suivant lesquelles le champ est alternativement polarisé suivant la direction de propagation apparente (c'est-à-dire celle de XX' et YY') ou suivant la direction perpendiculaire. A l'intérieur de ces tranches le champ est elliptique et la grandeur relative des axes dépend de la distance à laquelle se trouve le point considéré par rapport aux axes XX'

et YY' qui limitent cette tranche. Quant au sens de description de l'ellipse, il change quand on passe d'une tranche à la suivante.

100 - Enfin la fig. 94 représente les lignes de forces magnétiques à un instant t , le même d'ailleurs que celui auquel ont été représentés le champ électrique dans la fig. 84 et le champ magnétique dans la fig. 93.

Ces lignes de forces sont toutes horizontales et la figure s'applique à un plan horizontal quelconque. Ces lignes de forces sont maintenant des courbes fermées; elles se déplacent en bloc parallèlement à la direction xx' , et on comprend pourquoi, en un point donné de l'espace, le champ observé, quand le temps s'écoule, est un champ elliptique.

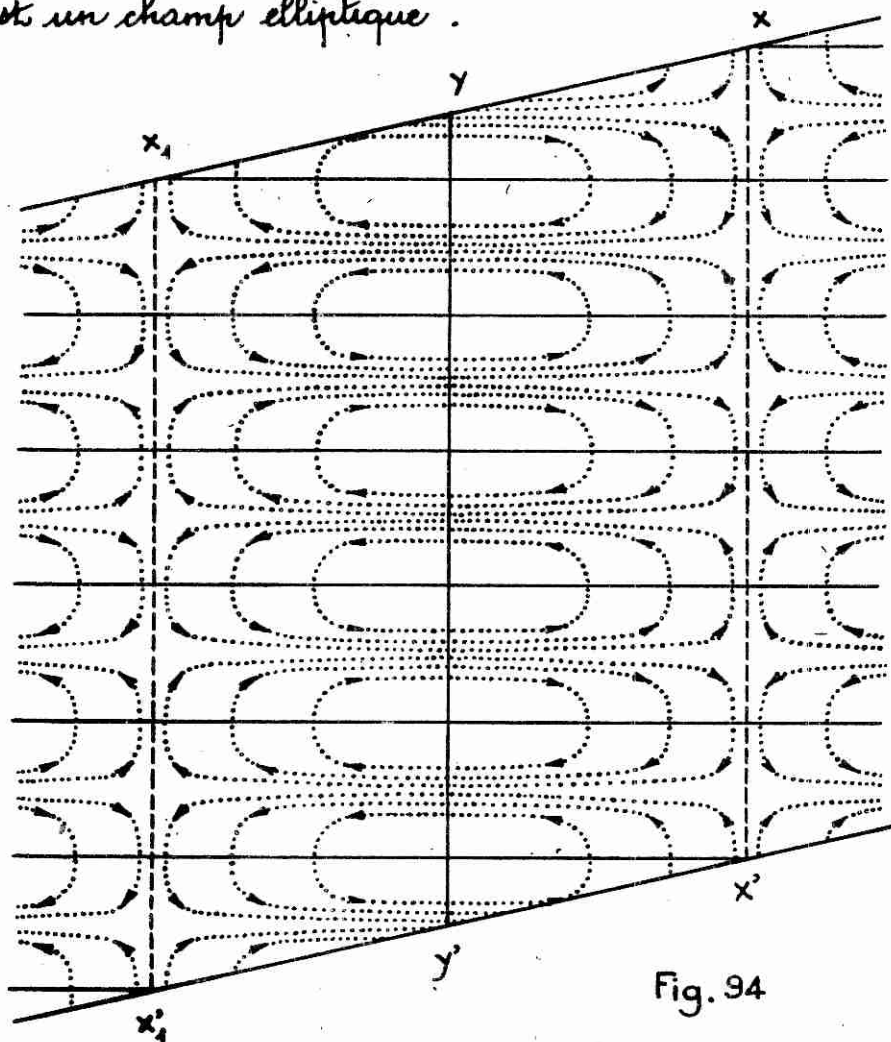


Fig. 94

2^e Cas : les deux champs composants sont inégaux.

101 - Nous supposons que ϵ_1 est supérieur à ϵ_2 . On aura donc aussi : $H_1 > H_2$. On se rend compte immédiatement que la distribution des champs $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ et

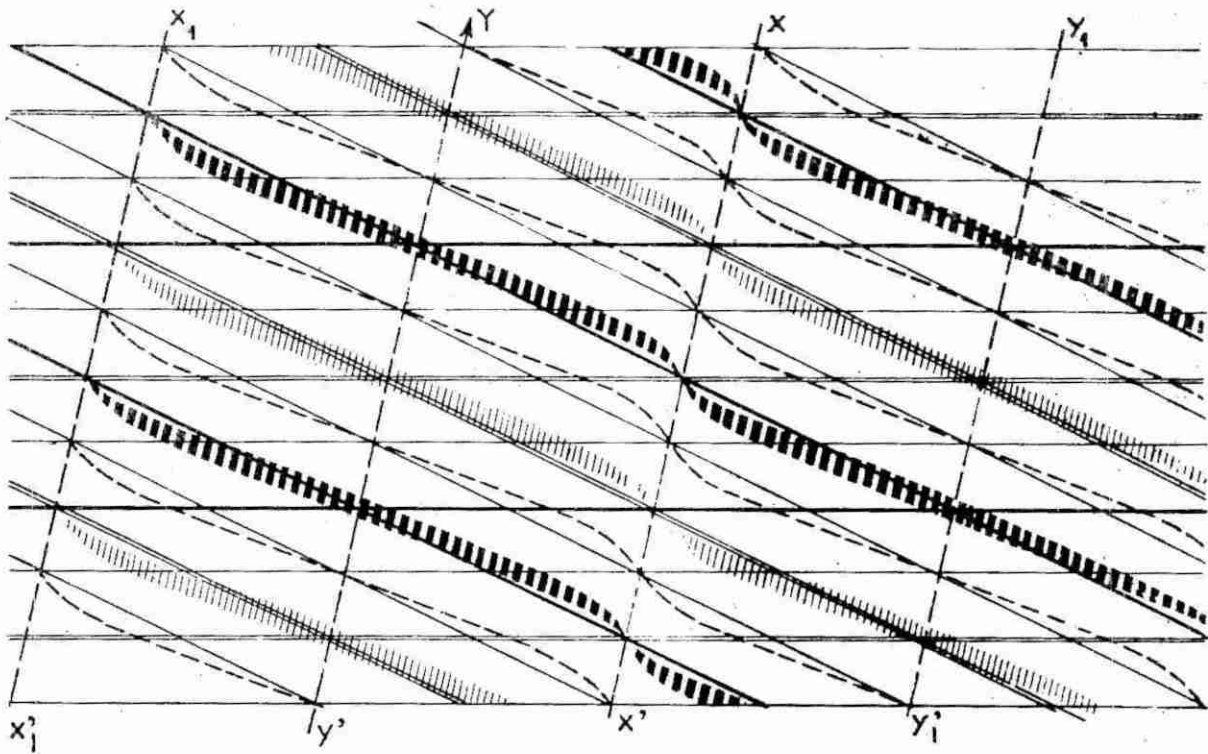


Fig. 101

$h = h_1 + h_2$ est intermédiaire entre les deux cas extrêmes où les champs sont égaux (1^{er} cas examiné) et celui où le champ $\vec{E}_1$, h_1 existerait seul.

102 - Le champ électrique résultant est encore défini par une surface qui se déplace, quand le temps varie, parallèlement à la direction MM' comme dans le cas précédent, mais la forme de la surface est différente. Celle-ci présente l'aspect d'ondulations sinusoïdales dont chacune est composée elle-même d'une suite alternée de creux et de crêtes, comme le représente la fig. 101

103 - En ce qui concerne le champ magnétique, on constate que les lignes MM' sont encore des lieux de points où le champ magnétique est polarisé rectilignement. En effet, les vecteurs $\vec{h}_1$ et $-\vec{h}_2$, inégaux, cette fois et faisant entr'eux un angle égal à α , sont constamment en phase.

Il en est de même le long des lignes NN' où ce sont les vecteurs $\vec{h}_1$ et $\vec{h}_2$ eux-mêmes qui sont en phase.

- Ondes de structures et de formes quelconques.

105 - Les ondes planes polarisées rectilignement (ou même elliptiquement dans le plan d'onde) constituent la forme normale pour des ondes qui se propagent dans l'espace libre lorsqu'elles proviennent d'un émetteur éloigné et lorsque le milieu est homogène.

Ces structures d'ondes qui ne comportent pas de composante (électrique ou magnétique) perpendiculaire au plan d'onde ne sont pas les seules qui sont susceptibles de se présenter.

On trouvera plus loin des exemples d'ondes ayant une composante perpendiculaire au plan de propagation ; c'est, en effet, le cas qui se présente :

- au voisinage d'un sol imparfaitement conducteur (§ 533).
- dans les guides d'ondes (§ 751).

106 - D'autre part, il a déjà été dit au § 52 ci-dessus que l'onde plane n'était que le cas limite d'une onde sphérique de grand rayon. Il est évident que les surfaces d'ondes peuvent, en dehors de ces deux cas revêtir des formes extrêmement diverses, notamment à proximité des émetteurs, ou au voisinage de corps conducteurs quelconques.

Les ondes planes en milieu non parfaitement isolant.

111 - Comme au § 80, nous étudierons les solutions sinusoïdales de pulsation $\omega = 2\pi f$, en supposant, *a priori*, le champ électrique dirigé suivant Ox et le champ électrique suivant Oz .

La conductibilité σ du milieu n'étant plus nulle il nous faut reprendre les expressions complètes des équations de Maxwell telles qu'elles ont été écrites au § 20 ci-dessus, à savoir; compte tenu de l'hypothèse précédente sur l'orientation des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$, il reste:

$$\begin{cases} \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial h_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial h_y}{\partial z} = 4\pi\sigma \epsilon_x + \frac{K}{c^2} \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t} \end{cases}$$

Introduisons les valeurs imaginaires, en nous rappelant que la valeur imaginaire de $\frac{\partial h_y}{\partial t}$ est $j\omega \mathcal{H}$ et que celle de $\frac{\partial \epsilon_x}{\partial t}$ est $j\omega \mathcal{E}$. Il vient

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{E}}{dz} = -j\omega\mu \mathcal{H} \\ -\frac{d\mathcal{H}}{dz} = 4\pi\sigma \mathcal{E} + j\omega \frac{K}{c^2} \mathcal{E} \end{cases}$$

ou encore, comme au Chap. VI - § 24,

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{E}}{dz} = -j\omega\mu \mathcal{H} \\ -\frac{d\mathcal{H}}{dz} = \left(4\pi\sigma + j\omega \frac{K}{c^2}\right) \mathcal{E} \end{cases}$$

112 - Cette dernière équation est à rapprocher de l'équation :

$$-\frac{d\mathcal{I}}{dt} = (G + j\omega c) \mathcal{V} \quad \text{du Chap. VI - § 24.}$$

Dans le cas actuel, $4\pi\sigma + j\omega \frac{K}{c^2}$ représente, au coefficient $\frac{1}{4\pi}$ près, l'admittance imaginaire qui se présente entre deux faces opposées d'un cube de 1 cm de côté découpé dans le milieu considéré (fig. 111). Cette admittance est en effet :

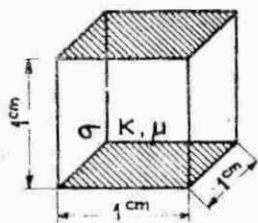


Fig. 111

$$A = \sigma + j\omega \frac{K}{4\pi c^2}$$

113 - Des équations finales du § 111 nous tirons :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \mathcal{E}}{dz^2} + \left(4\pi\sigma + j\omega \frac{K}{c^2} \right) \times \left(j\omega \mu \right) \mathcal{E} = 0 \\ \frac{d^2 \mathcal{H}}{dz^2} + \left(4\pi\sigma + j\omega \frac{K}{c^2} \right) \times \left(j\omega \mu \right) \mathcal{H} = 0 \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que ces champs sont de la forme

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{\pm \gamma z}$$

$$\begin{aligned} \text{en posant : } \gamma &= \sqrt{j\omega \mu \left(4\pi\sigma + j\omega \frac{K}{c^2} \right)} \\ &= \sqrt{-\omega^2 \frac{K\mu}{c^2} + 4\pi j\omega \sigma \mu} \\ &= j\omega \sqrt{\frac{K\mu}{c^2} - \frac{4\pi j\sigma \mu}{\omega}} \end{aligned}$$

Nous constatons que la constante de propagation γ n'est plus une imaginaire pure comme au § 80, mais qu'elle comporte une partie réelle produisant un amortissement des amplitudes E et H au cours de la propagation.

En posant $\gamma = \beta + j\alpha$, la partie réelle β donnera l'amortissement du champ

$$E = E_0 e^{-\beta z}$$

- et la partie imaginaire, la vitesse de propagation ou la longueur d'onde dans le milieu par la relation : $\alpha \lambda = 2\pi$.

Cas des conducteurs métalliques.

114 - Considérons les deux termes sous radical de la dernière expression de γ : Il est facile de vérifier sur des exemples numériques, que, dans le cas des métaux, le terme $\frac{K\mu}{c^2}$ est négligeable devant le coefficient de j du terme $\frac{4\pi j \sigma \mu}{\omega}$.

S'expression de γ peut alors s'écrire, plus simplement :

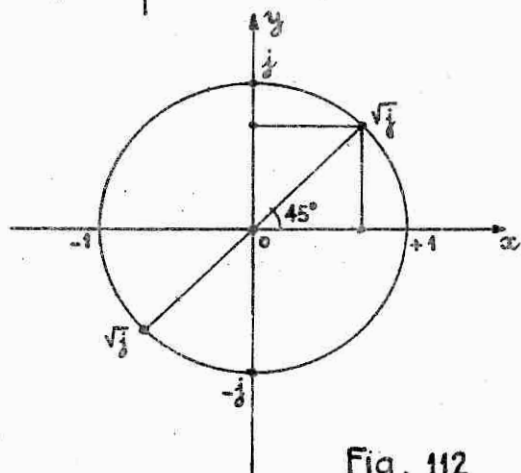


Fig. 112

$$\gamma = j \omega \sqrt{-\frac{4\pi j \sigma \mu}{\omega}}$$

$$= \sqrt{4\pi j \omega \sigma \mu}$$

$$\text{or } \sqrt{j} = (1+j) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{fig. 112})$$

d'où finalement :

$$\gamma = (1+j) \sqrt{2\pi \omega \sigma \mu}$$

En d'autres termes, si on explicité la partie réelle et la partie imaginaire de γ en posant $\gamma = \beta + j\alpha$, on a :

β étant la constante d'amortissement,
 α la constante de longueur d'onde :

$$\alpha = \sqrt{2\pi \omega \sigma \mu}$$

$$\beta = \sqrt{2\pi \omega \sigma \mu}$$

115 - L'expression de β montre que les champs E (et H) s'amortissent suivant la loi exponentielle :

$$E = E_0 e^{-\beta z} = E_0 e^{-\sqrt{2\pi \omega \sigma \mu} z}$$

Une application numérique montrerait que cet affaiblissement est extrêmement rapide, et par conséquent, que les champs E et H pénètrent très peu dans les corps métalliques.

La distance δ à laquelle le champ est réduit dans la proportion de 1 à $\frac{1}{e}$ est donné par l'équation :

$$\frac{E_0}{E} = e^{\sqrt{2\pi\omega\sigma\mu} \delta} = e$$

$$\text{ou} \quad \sqrt{2\pi\omega\sigma\mu} \delta = 1$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega\sigma\mu}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\sigma f}}$$

C'est la profondeur de pénétration dont il a déjà été question au Chap. II, § 844 (skin-effect).

116 - L'expression de la constante de longueur d'onde α :

$$\alpha = \sqrt{2\pi\omega\sigma\mu}$$

indique que les ondes se propagent avec une vitesse v_1 , telle que l'on ait la relation :

$$\alpha \lambda = 2\pi$$

$$\alpha v_1 = 2\pi f$$

$$\text{ou} \quad v_1 = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{\omega}{\sqrt{2\pi\omega\sigma\mu}} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma\mu}}$$

Il est facile de voir, sur des applications numériques, que cette vitesse v_1 est toujours beaucoup plus faible que c .

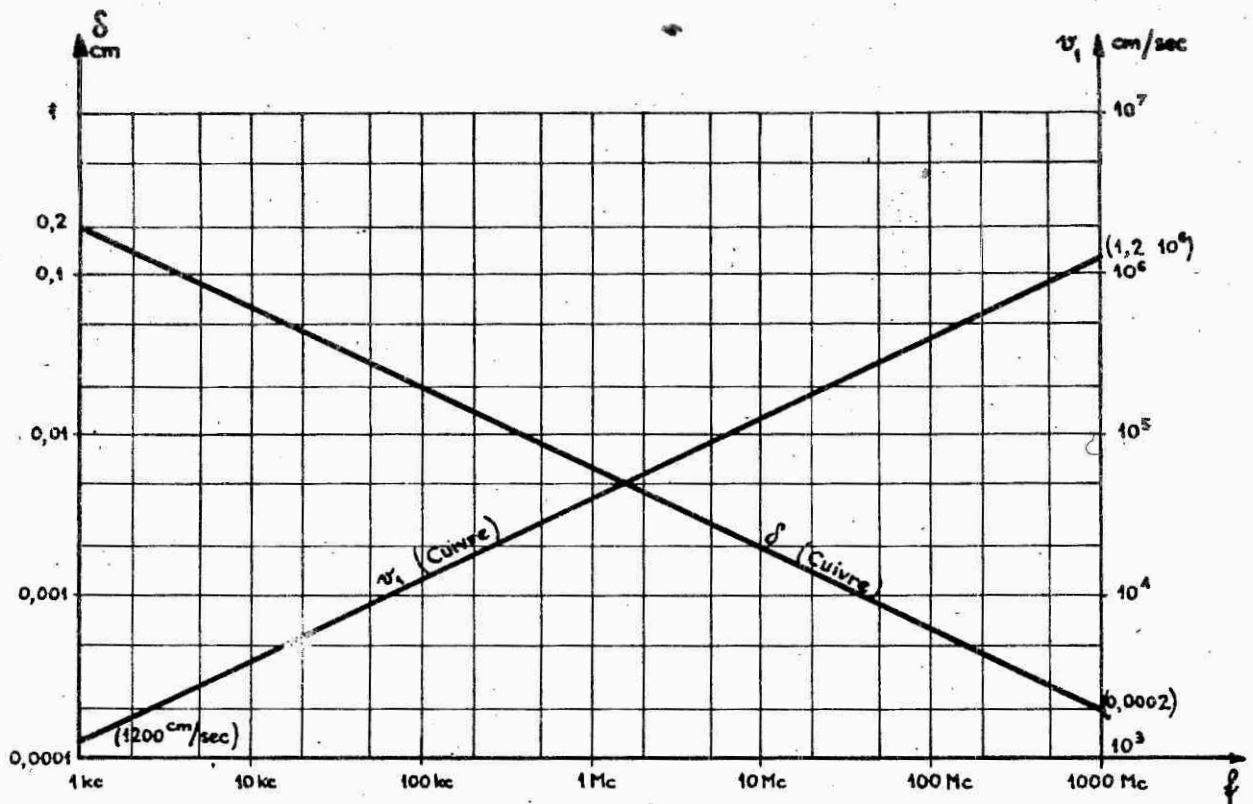


Fig. 113

La fig. 113 indique, pour quelques métaux particuliers, les variations de δ et de v_1 , quand f varie de 1 kilocycle à 1000 mégacycles.

Expression de l'impédance d'espace.

117 - Celle-ci est définie comme au § 79^{bis} par le produit $4\pi \frac{\epsilon}{\mathcal{H}}$. Par un calcul analogue à celui du Chap. VI - § 29, on trouve pour expression de Z :

$$Z = 4\pi \sqrt{\frac{j\omega\mu}{4\pi\sigma + j\frac{\omega K}{c^2}}}$$

ou, encore dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, $\left(\frac{\omega K}{c^2} \ll 4\pi\sigma\right)$,

$$Z = 4\pi \sqrt{\frac{j\omega\mu}{4\pi\sigma}} = \sqrt{\frac{4\pi j\omega\mu}{\sigma}}$$

$$Z = \sqrt{j} \sqrt{\frac{4\pi\omega\mu}{\sigma}}$$

$$= (1+j) \sqrt{\frac{2\pi\omega\mu}{\sigma}}$$

Comparons cette impédance à celle d'un milieu parfaitement isolant. On a vu au § 79^{bi} que l'on avait :

$$Z_0 = 4\pi c \sqrt{\frac{\mu}{K}}$$

Z peut s'écrire, en faisant apparaître l'expression de Z_0 :

$$Z = (1+j) 4\pi c \sqrt{\frac{\mu}{K}} \times \sqrt{\frac{2\pi\mu\omega}{\sigma}} \times \frac{1}{16\pi^2 c^2} \frac{K}{\mu}$$

$$Z = (1+j) Z_0 \times \sqrt{\frac{\omega K}{8\pi\sigma c^2}}$$

De cette formule, nous tirons les conclusions suivantes. Le rapport $\frac{E}{H} = \frac{1}{4\pi} Z$ est d'autant plus faible, comparativement à la valeur qu'il possède dans le vide ($\frac{E}{H} = c$), que le rapport $\frac{\omega K}{\sigma}$ est lui-même plus

Le champ électrique disparaît progressivement quand la conductibilité σ du milieu augmente. A la limite ($\sigma = \infty$) le champ s'annule tandis que le champ magnétique demeure.

D'autre part, contrairement à ce qui se passait dans l'air (ou dans le vide), les champs E et H ne sont plus en phase. On a :

$$\begin{aligned} \text{Phase de } E - \text{Phase de } H &= \text{Arg } Z \\ &= \text{Arg } (1+j) \\ &= 45^\circ. \end{aligned}$$

Le champ magnétique est déphasé de 45° en arrière, par rapport au champ électrique.

Propagation des ondes électromagnétiques en présence de deux milieux de constantes différentes.

121 - Soient K, μ, σ les constantes du premier milieu et K', μ', σ' les constantes du second milieu ; soit Σ la surface de séparation des deux milieux. En un point P de cette surface il existera pour le champ électrique, le champ magnétique et la densité du courant un premier système de grandeurs (vectorielles) $\vec{E}, \vec{h}, \vec{j}$ dans le premier milieu, et un second système de grandeurs $\vec{E}', \vec{h}', \vec{j}'$ dans le second, ces deux groupes de grandeurs se rapportant, en fait, à des points infiniment voisins de P et situés l'un dans le premier milieu, l'autre dans le second.

Il résulte du Chap. III_a, qu'il y a continuité, à la traversée de la surface Σ :

- 1° : de la composante tangentielle du champ électrique
($E_t = E'_t$).
- 2° : de la composante tangentielle du champ magnétique
($h_t = h'_t$).
- 3° : de la composante normale de la densité de courant
($j_n = j'_n$).

Il y a en outre continuité :

- 4° : de la composante normale de l'induction électrique
($K E_n = K' E'_n$).
- 5° : de la composante normale de l'induction magnétique
($\mu h_n = \mu' h'_n$).

122 - Une onde électromagnétique arrivant à la limite de séparation Σ des deux milieux donne, en général, naissance :

- 1° : à une onde dite réfléchie qui continue à se propager

dans le premier milieu .

2° : à une onde dite réfractée qui se propage dans le second milieu .

Cas d'une onde plane polarisée rectilignement .

123 - Les phénomènes se présentent d'une manière différente selon l'orientation du champ électrique et du champ magnétique de l'onde incidente vis-à-vis du plan de propagation, c'est-à-dire du plan défini par la direction de propagation de l'onde incidente et la normale au point P considéré sur la surface de séparation Σ .

Si nous supposons que la surface de séparation Σ est un plan horizontal, le plan de propagation se confond avec le plan vertical contenant le rayon incident .

Deux cas extrêmes peuvent se présenter :

1° : le champ électrique $\vec{E}$ est contenu dans le plan de propagation et, par suite, le champ magnétique $\vec{h}$ est horizontal et perpendiculaire au plan de propagation (fig. 121)

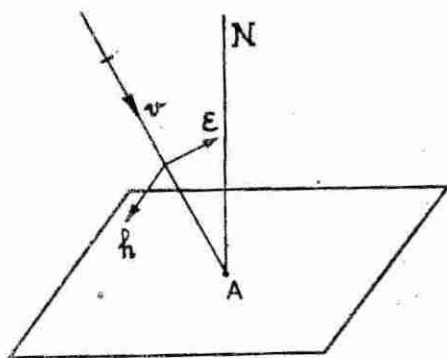


Fig. 121

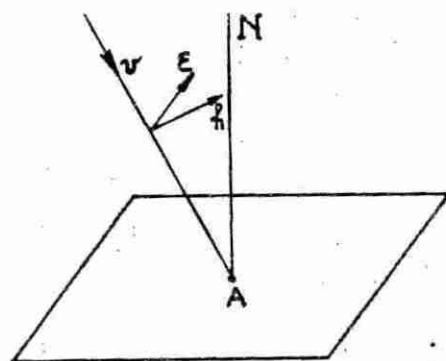


Fig. 122

2° : le champ magnétique $\vec{h}$ est situé dans le plan de propagation et c'est alors le champ électrique $\vec{E}$ qui est horizontal (fig. 122) .

Lorsque l'orientation des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ est intermédiaire entre les deux cas extrêmes ci-dessus considérés, on peut toujours décomposer chacun des deux champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ en deux composantes, dont l'une est contenue dans le plan de propagation et l'autre dans le plan perpendiculaire (donc horizontale). L'étude du problème est alors ramenée à celle des deux cas limites précédents.

Divers cas doivent également être examinés selon les caractéristiques des deux milieux.

Nous supposons que le premier milieu est l'air ou le vide $K = 1$, $\mu = 1$.

1^{er} Cas : le second milieu est parfaitement conducteur.

124 - Lorsque le second milieu est parfaitement conducteur (σ_2 infiniment grand), l'onde réfractée est supprimée. Cela résulte de la relation $\vec{j}_2 = \vec{\sigma}_2 \vec{E}_2$.

Le courant de conduction dans le second milieu ne pouvant acquies une densité $\vec{j}_2$ infinie, le champ $\vec{E}_2$ ne peut prendre d'autre valeur que la valeur nulle, puisque σ_2 est infini. L'onde réfléchie dans le premier milieu subsiste donc seule avec l'onde incidente.

On constate immédiatement, en outre, - qu'à la limite de séparation des deux milieux :

- 1° : le champ électrique (total) est normal à la surface de séparation.
- 2° : le champ magnétique (total) est tangent à cette surface.

La première constatation découle immédiatement du fait de la continuité, à la surface de séparation, de la composante

tangentielle du champ électrique (voir § 121, ci-dessus).

On peut remarquer aussi que si le champ électrique comportait une composante horizontale, à la surface du conducteur, il y provoquerait un courant superficiel infini puisque σ_2 est infini. D'autre part le travail du champ électrique $\vec{E}$ le long d'un contour fermé tracé sur la surface de séparation étant nul, il en est de même de la dérivée du champ $\vec{h}$ par rapport au temps, d'après la première loi de Maxwell, et par suite du champ $\vec{h}$ lui-même.

125 - Examinons d'abord le cas où l'onde incidente se propage horizontalement dans le premier milieu.

Les plans d'ondes sont alors des plans verticaux, orientés perpendiculairement à la direction de propagation.

D'après ce qui vient d'être dit, nous sommes assuré :

- 1^{re} : que le champ électrique est vertical.
- 2^{re} : que le champ magnétique est horizontal (et perpendiculaire à la direction de la propagation).

126 - Lorsque l'onde incidente possède une direction oblique par rapport à la surface de séparation Σ , on observe une onde réfléchie constituée par le champ électrique $\vec{E}''$ et le champ magnétique $\vec{h}''$. Si on désigne par $\vec{E}$ et $\vec{h}$ les deux champs de l'onde incidente, on est assuré d'après ce qui précède (§ 124) que :

- 1^{re} : la résultante de $\vec{E}$ et $\vec{E}''$ est verticale.
- 2^{re} : la résultante de $\vec{h}$ et $\vec{h}''$ est horizontale.

En effet, la composante tangentielle du champ électrique résultant est forcément nulle : $\vec{E}_T + \vec{E}_T'' = 0$, de même que la composante normale du champ magnétique résultant $\vec{h}_N + \vec{h}_N''$.

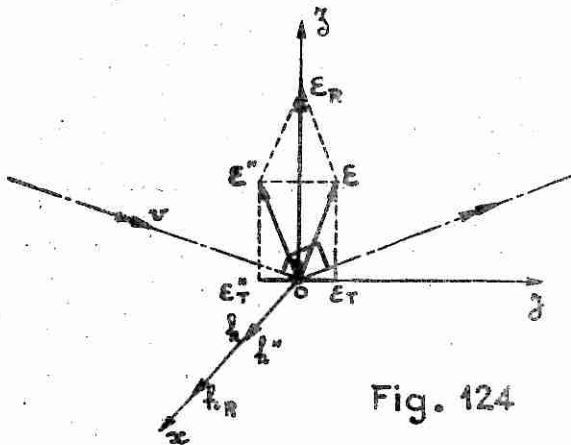


Fig. 124

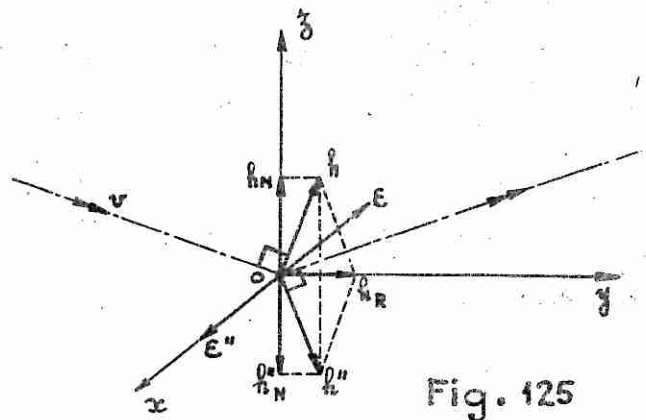


Fig. 125

La fig. 124 correspond au cas où le champ électrique $\vec{E}$ de l'onde incidente est contenu dans le plan de propagation (§ 123), tandis que la fig. 125 a été tracée dans l'hypothèse où ce champ est horizontal.

On voit que, dans le premier cas (fig. 124) le champ magnétique n'est pas modifié par l'opération de la réflexion, tandis que le champ électrique $\vec{E}''$ occupe une position symétrique de $\vec{E}$ par rapport à la normale à la surface de séparation.

Dans le second cas (fig. 125) le champ électrique voit sa direction changer brusquement de 180° , tandis que le champ magnétique $\vec{h}''$ est symétrique de $\vec{h}$ par rapport à l'horizontale, intersection du plan de propagation avec la surface de séparation des deux milieux.

127 - Pour obtenir le champ réel existant dans l'espace situé au dessus de la surface de séparation, c'est-à-dire dans le premier milieu, il faut prendre la résultante du champ incident $\vec{E}$, $\vec{h}$ et du champ réfléchi $\vec{E}''$, $\vec{h}''$. C'est une opération analogue à celle qui a déjà été exécutée au § 84 ci-dessus.

128 - Lorsque le champ électrique de l'onde incidente est contenu dans le plan de propagation (cas de la fig. 121) la composition des différents vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{E}''$, à un instant donné montre que le champ électrique peut avoir l'une quelconque des directions dudit plan de propagation. Quand le temps s'écoule, l'ensemble de la fig. 93 se déplace horizontalement, en sorte qu'en un point donné du premier milieu, le champ électrique sera, dans le cas général, un champ elliptique. Sur la surface de séparation des deux milieux, le champ électrique résultant est polarisé verticalement, tandis que l'amplitude du champ magnétique (lequel demeure polarisé horizontalement dans tout l'espace) est maximum. Cette même amplitude s'annule à la cote $z = \frac{\lambda}{4 \cos \alpha}$, α désignant l'angle d'incidence des ondes dans le premier milieu. La fig. 126 indique les variations du champ électrique résultant, dans le plan de propagation.

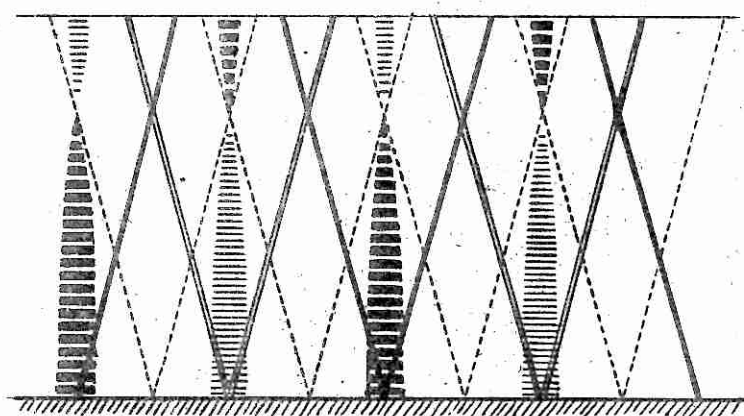


Fig. 126

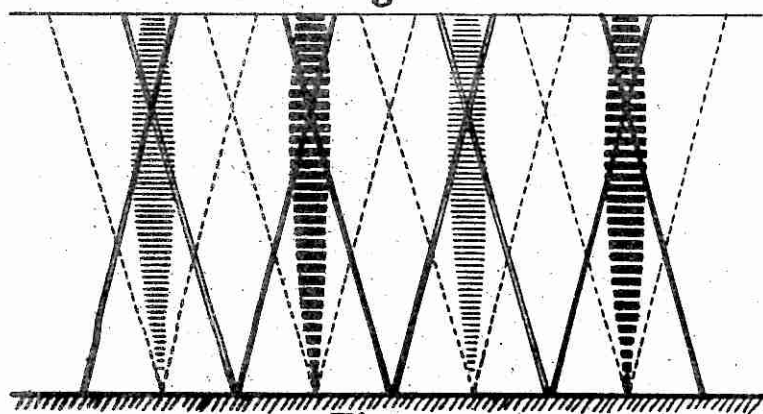


Fig. 127

129 - Au contraire, lorsque c'est le champ magnétique $\vec{H}$ qui est compris dans le plan de propagation, le champ électrique demeure polarisé horizontalement dans tout l'espace, mais son amplitude est nulle sur le plan de séparation des deux milieux. Cette amplitude est maximum à la cote $z = \frac{\lambda}{4 \cos \alpha}$ (fig. 127). Quant au champ magnétique, c'est, en général, un champ elliptique.

2^e Cas : le second milieu est parfaitement isolant.

131 - D'une manière plus générale, nous supposons que les deux milieux sont deux milieux parfaitement isolants, de constantes diélectriques et de perméabilités magnétiques différentes.

A. Le champ électrique est situé dans le plan d'incidence.

132 - Nous examinerons d'abord le cas où, comme dans la fig. 131, le champ électrique de l'onde incidente est compris dans le plan de propagation.

En chaque point O de la surface de séparation nous avons à considérer trois champs électriques et trois champs magnétiques :

- Dans le premier milieu $\left\{ \begin{array}{l} \text{les champs } \vec{E} \text{ et } \vec{h} \text{ de l'onde incidente.} \\ \text{les champs } \vec{E}'' \text{ et } \vec{h}'' \text{ de l'onde réfléchie.} \end{array} \right.$
- Dans le second milieu : le champ $\vec{E}'$ et $\vec{h}'$ de l'onde réfractée.

Les trois vecteurs $\vec{E}$, $\vec{E}'$ et $\vec{E}''$ sont contenus dans le plan de propagation que nous prendrons comme plan de la figure (fig. 131). Soient PO le rayon incident, OP' le rayon réfracté et OP'' le rayon réfléchi. Les champs magnétiques sont tous trois horizontaux et perpendiculaires au plan de propagation.

Les relations de continuité (§ 121) à la surface de séparation se traduisent par les égalités suivantes :

- Continuité de la composante horizontale du champ électrique :

$$\vec{E}_H + \vec{E}_H'' = \vec{E}_H'$$

- Continuité de la composante normale de l'induction électrique :

$$K (\vec{E}_N + \vec{E}_N'') = K' \vec{E}_N'$$

- Continuité de la composante normale de l'induction magnétique :

$$\mu (\vec{h}_N + \vec{h}_N'') = \mu' \vec{h}_N'$$

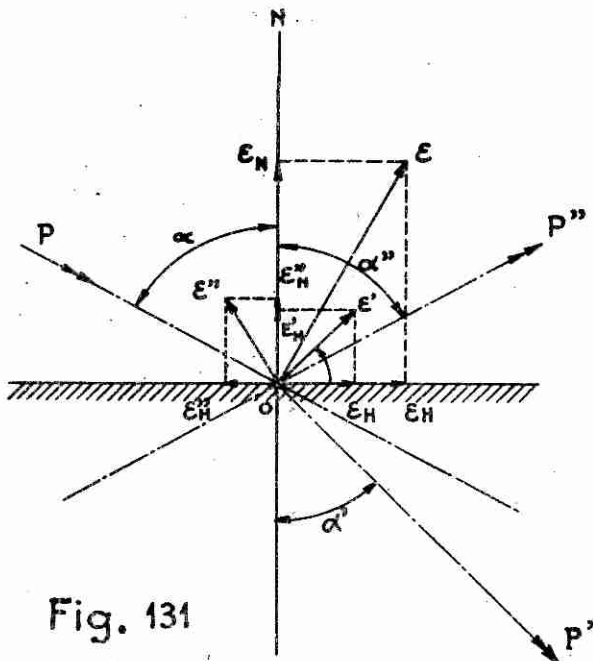


Fig. 131

- Continuité de la composante horizontale du champ magnétique :

$$\vec{h}_H + \vec{h}_H'' = \vec{h}_H'$$

Enfin entre les grandeurs ϵ et h , ϵ' et h' , ϵ'' et h'' on a les relations des ondes planes :

$$\frac{\epsilon}{h} = \frac{\epsilon''}{h''} = c \sqrt{\frac{\mu}{K}}$$

$$\frac{\epsilon'}{h'} = c \sqrt{\frac{\mu'}{K'}}$$

Ces diverses relations définissent la grandeur et la position des champs $\vec{E}$, $\vec{E}''$, $\vec{h}$ et $\vec{h}''$ constituant l'onde réfractée et l'onde réfléchie.

On démontre à partir de ces équations que l'angle d'incidence α , l'angle de réfraction α' et l'angle de réflexion α'' sont liés par les relations suivantes :

$\alpha = \alpha''$, c'est la loi de la réflexion.

$\sqrt{K\mu} \sin \alpha = \sqrt{K'\mu'} \sin \alpha'$, c'est la loi de la réfraction.

On constate aussi que la valeur relative du champ électromagnétique réfléchi, par rapport au champ incident, est fonction de l'angle d'incidence. Pour une certaine incidence, appelée incidence de Brewster, les champs $\vec{E}''$ et $\vec{h}''$ du rayon réfléchi s'annulent, toute l'énergie passe dans l'onde réfractée et l'onde réfléchie disparaît (fig. 132). Cette incidence est définie par l'équation $\tan \alpha = \sqrt{\frac{K'\mu'}{K\mu}}$, ou pratiquement $\tan \alpha = \sqrt{K'}$, lorsque l'on a $\mu = \mu' = K = 1$.

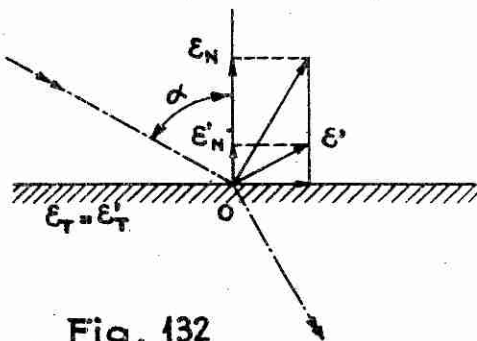


Fig. 132

Cette incidence α_0 partage le quadrant d'incidence en deux secteurs où le champ électrique $\vec{E}''$ est orienté dans des sens opposés l'un à l'autre. Pour

les incidences comprises entre la normale et l'incidence de Brewster le vecteur $\vec{E}''$ a le même sens que si la réflexion avait lieu sur une surface parfaitement conductrice, d'où le nom de réflexion métallique qui lui est donné (fig. 132). Pour les incidences plus rasantes que l'incidence de Brewster, le vecteur $\vec{E}''$ est dirigé dans le sens opposé; la réflexion est dite diélectrique (fig. 133).

Cette remarque a son importance en ce qui concerne le champ résultant dans le premier milieu (et en particulier au voisinage de la surface de séparation). Dans le premier cas examiné ($0 < \alpha < \alpha_0$) il faut ajouter la longueur E''_N à E_N , dans le second cas ($\alpha_0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) il faut retrancher E''_N de E_N (fig. 133).

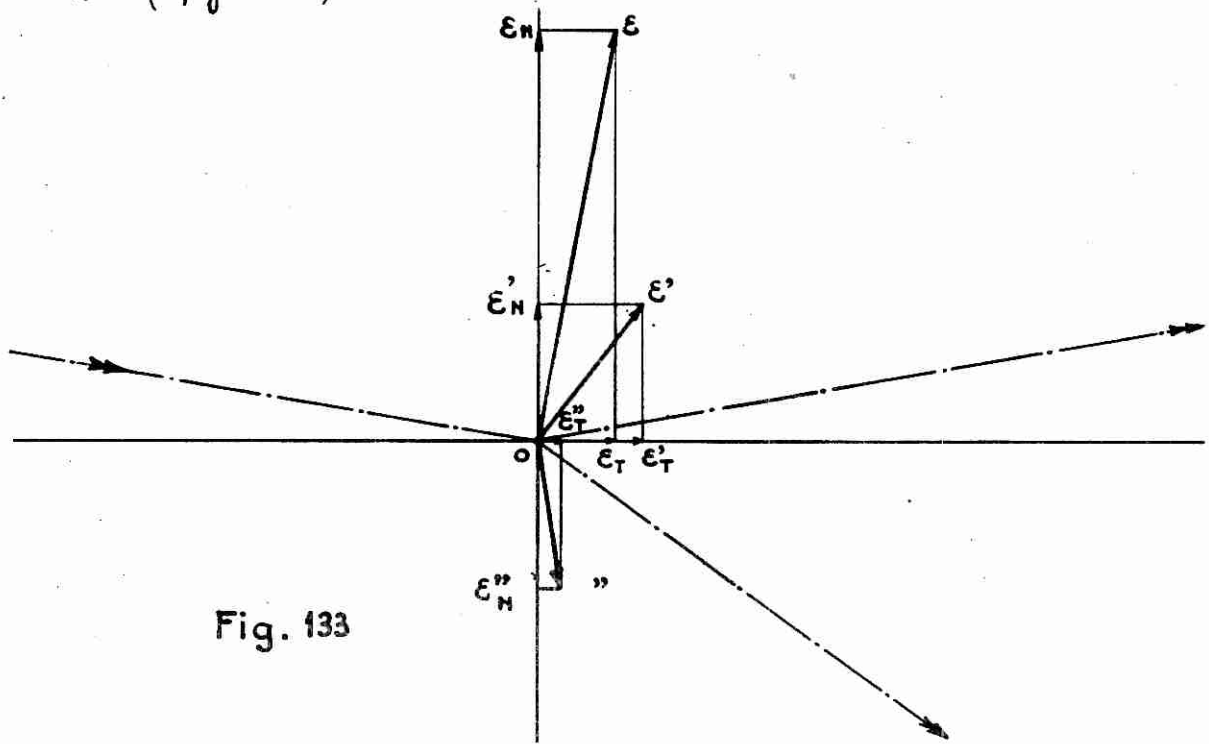


Fig. 133

B. Le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence.

133 - Si, au lieu d'être polarisé dans le plan d'incidence, le champ électrique est polarisé perpendiculairement, le raisonnement se conduit de la même manière, les champs $\vec{h}$, $\vec{h}'$ et $\vec{h}''$ prenant, dans les figures 131 à 133 la place des champs

$\vec{E}$, $\vec{E}'$ et $\vec{E}''$. La condition de continuité de la composante normale de l'induction magnétique aboutit à la relation :

$$\mu (h_N + h_N'') = \mu' h_N'$$

au lieu de :

$$K (\epsilon_N + \epsilon_N'') = K' \epsilon_N'$$

On a représenté sur la fig. 134 le cas particulier où l'on aurait $\mu = \mu'$ (mais $K \neq K'$ sinon, il n'y aurait pas deux milieux différents).

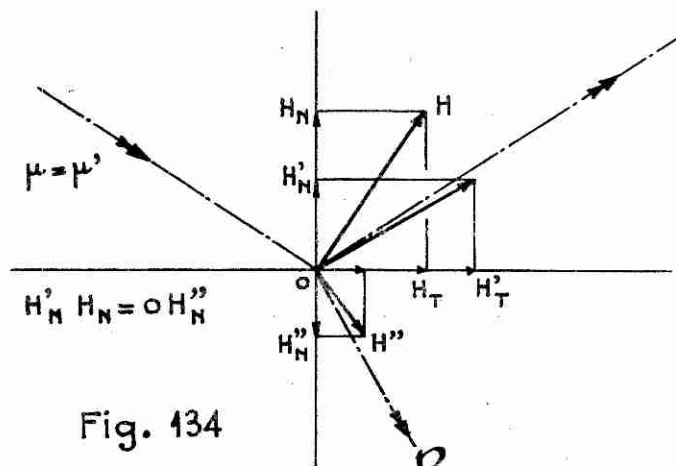


Fig. 134

Dans cette hypothèse, il n'y a plus d'incidence de Brewster, ou, plus exactement, celle-ci est confondue avec la direction normale au plan de séparation.

Remarque : Il convient de noter l'ana-

logie qui existe entre les phénomènes précédents et ceux qui se produisent à l'extrémité d'une ligne branchée sur une impédance différente de l'impédance caractéristique (Chap VI - § 185). On a vu que le courant et la tension incidente se décomposent alors en deux parties l'une qui pénètre dans l'impédance d'utilisation, l'autre qui est réfléchie dans la ligne.

3^e Cas : le deuxième milieu est semi-conducteur

137 - Lorsque la conductibilité du deuxième milieu est une grandeur finie, on se trouve dans un cas intermédiaire entre les deux cas extrêmes qui viennent d'être étudiés (σ infini et σ nul)

En effet, les deux cas précédemment examinés se caractérisaient par ce fait que les vecteurs $\vec{E}'$ et $\vec{h}'$ relatifs à l'onde réfractée, et les vecteurs $\vec{E}''$ et $\vec{h}''$ de l'onde réfléchie étaient exactement en phase avec le champ incident (vecteur $\vec{E}$ et $\vec{h}$); les équations liant ces différents vecteurs représentaient des relations instantanées valables quelle que soit l'époque t considérée, et la loi de variation des vecteurs $\vec{E}$ et de $\vec{h}$ ($\vec{h} = \frac{\epsilon}{c} \sqrt{\frac{K}{\mu}}$), et la fréquence en particulier.

Lorsque le deuxième milieu possède une conductibilité finie σ , cette concordance des phases n'existe plus. Des déphasages s'introduisent entre le champ réfracté et le champ incident d'une part, et d'autre part entre le champ réfléchi et le champ incident.

137^{bis} - Nous nous attacherons seulement, dans ce qui va suivre, à examiner ce que devient le champ réfléchi $\vec{E}''$ et $\vec{h}''$. Il nous suffira de déterminer $\vec{E}''$ puisque $\vec{h}''$ s'en déduit immédiatement.

Coefficient imaginaire de réflexion.

138 - La surface de séparation des deux milieux étant supposée horizontale, une onde incidente sinusoïdale, peut toujours être décomposée en deux ondes sinusoïdales, polarisées l'une verticalement (champ électrique dans le plan de propagation) l'autre horizontalement (champ électrique parallèle à la surface

de séparation

Soient $\underline{E}_T = E_T \underline{\varphi}_T$ et $\underline{E}_N = E_N \underline{\varphi}_N$, les valeurs imaginaires de la composante normale et de la composante horizontale du champ électrique incident.

On est amené à définir pour chacune de ces composantes un coefficient imaginaire de réflexion. C'est un nombre complexe :

- dont le module r est égal au rapport de l'amplitude E_T'' ou E_N'' (selon le cas) du champ électrique réfléchi à l'amplitude E_T ou E_N du champ incident.
- dont l'argument θ est égal au déphasage existant entre le champ réellement réfléchi et celui qui aurait été réfléchi si le deuxième milieu avait été parfaitement conducteur. On a vu au § 126 ci-dessus que cette dernière phase coïncide avec celle de l'onde incidente dans le cas de la polarisation dans le plan d'incidence, tandis qu'elle est décalée de π dans le cas d'une polarisation horizontale.

Les valeurs des coefficients (imaginaires) de réflexion sont données par les formules de Fresnel :

- Cas de la polarisation dans le plan d'incidence :

$$R_N = r_N \underline{\varphi}_N = \frac{K \cos \alpha - \sqrt{K - \sin^2 \alpha}}{K \cos \alpha + \sqrt{K - \sin^2 \alpha}}$$

- Cas de la polarisation horizontale :

$$R_T = r_T \underline{\varphi}_T = \frac{\sqrt{K - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha}{\sqrt{K - \sin^2 \alpha} + \cos \alpha}$$

Dans ces formules :

α désigne l'angle d'incidence des ondes (voir fig. 131)

$\mathcal{K}$ est le coefficient imaginaire $\mathcal{K} = K - 6j\sigma\lambda 10^{12}$

K étant la constante diélectrique du second milieu - le premier étant supposé être l'air -

σ la conductivité, en unités électromagnétiques, de ce deuxième milieu.

λ est la longueur d'onde du champ incident

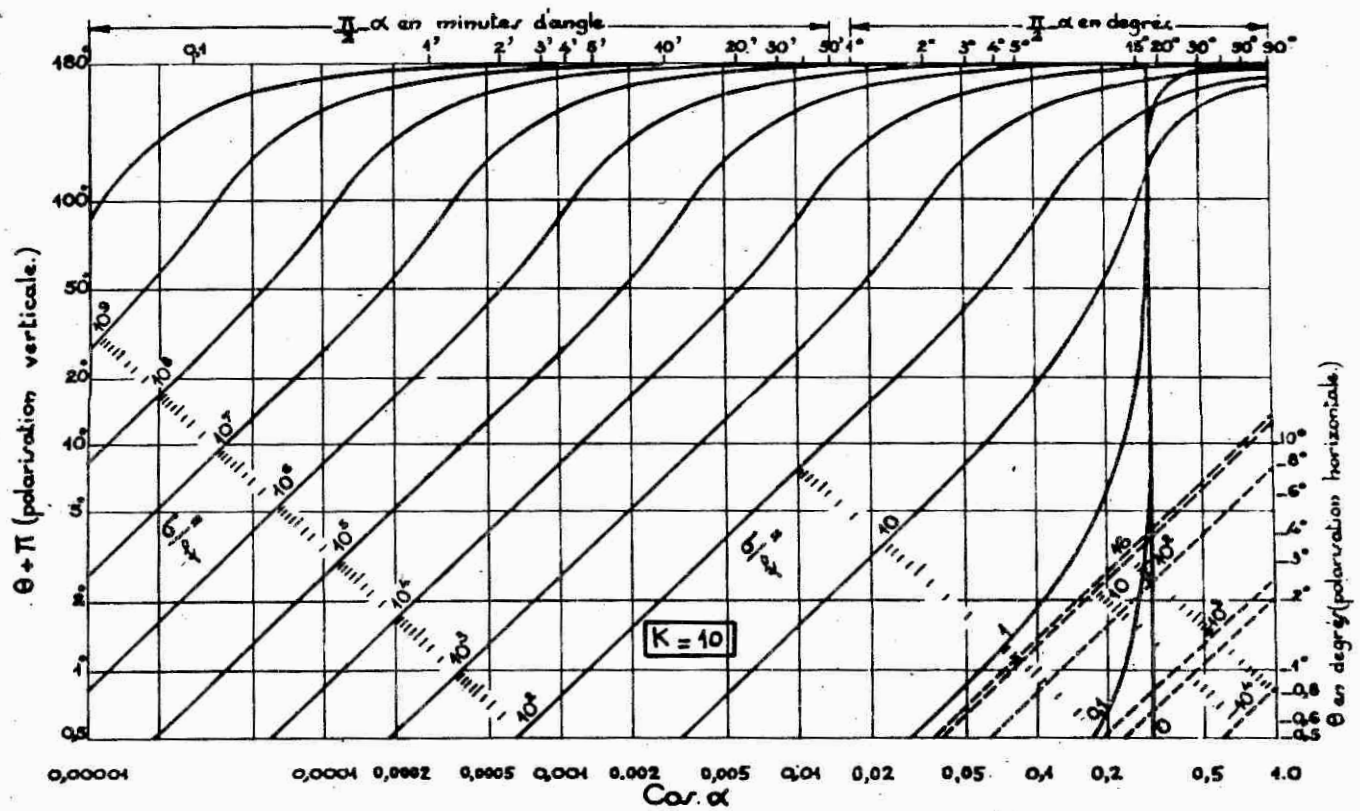
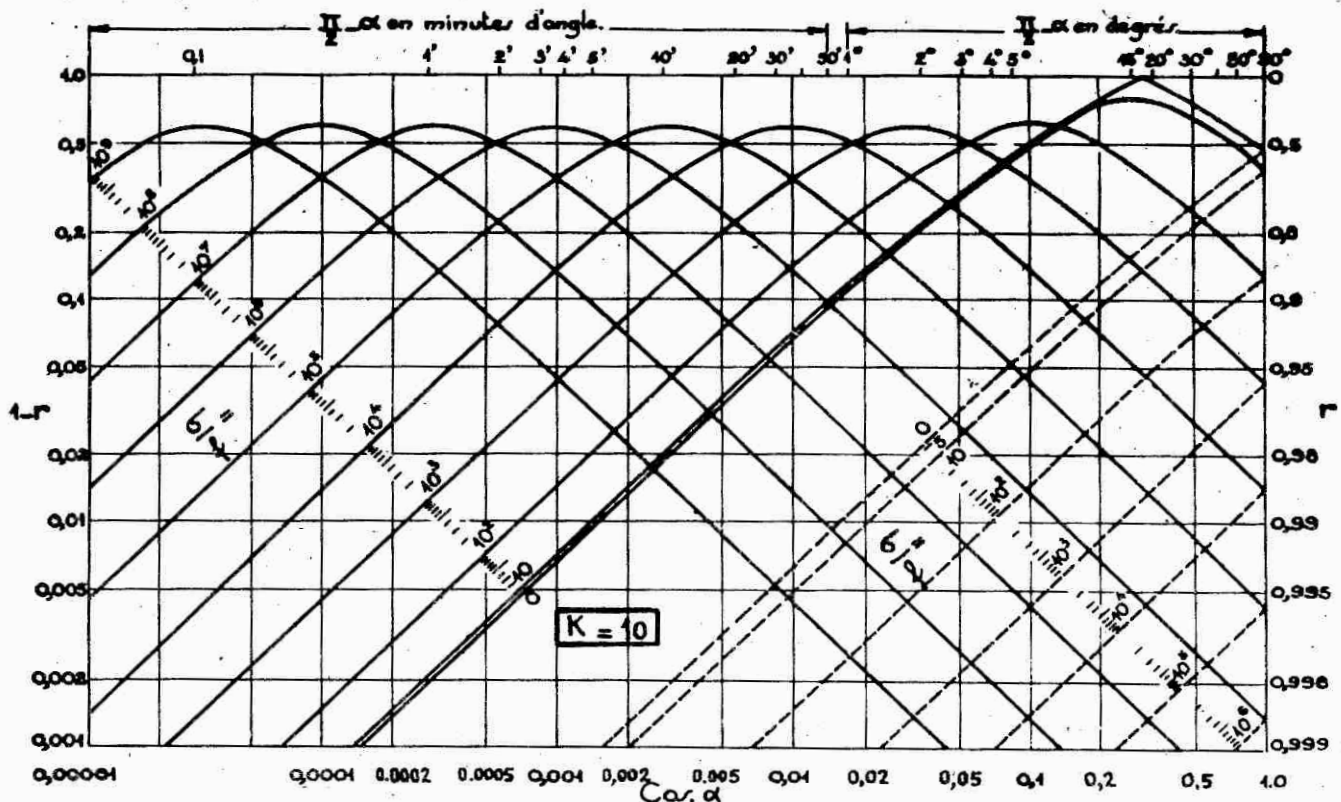
139 - On trouve dans les formulaires des abaques donnant le module r et l'argument θ de ces coefficients de réflexion, en fonction de l'angle d'incidence, pour diverses valeurs de la constante K et du produit $\sigma \times \lambda$ ou $\left(\frac{\sigma}{f}\right)$

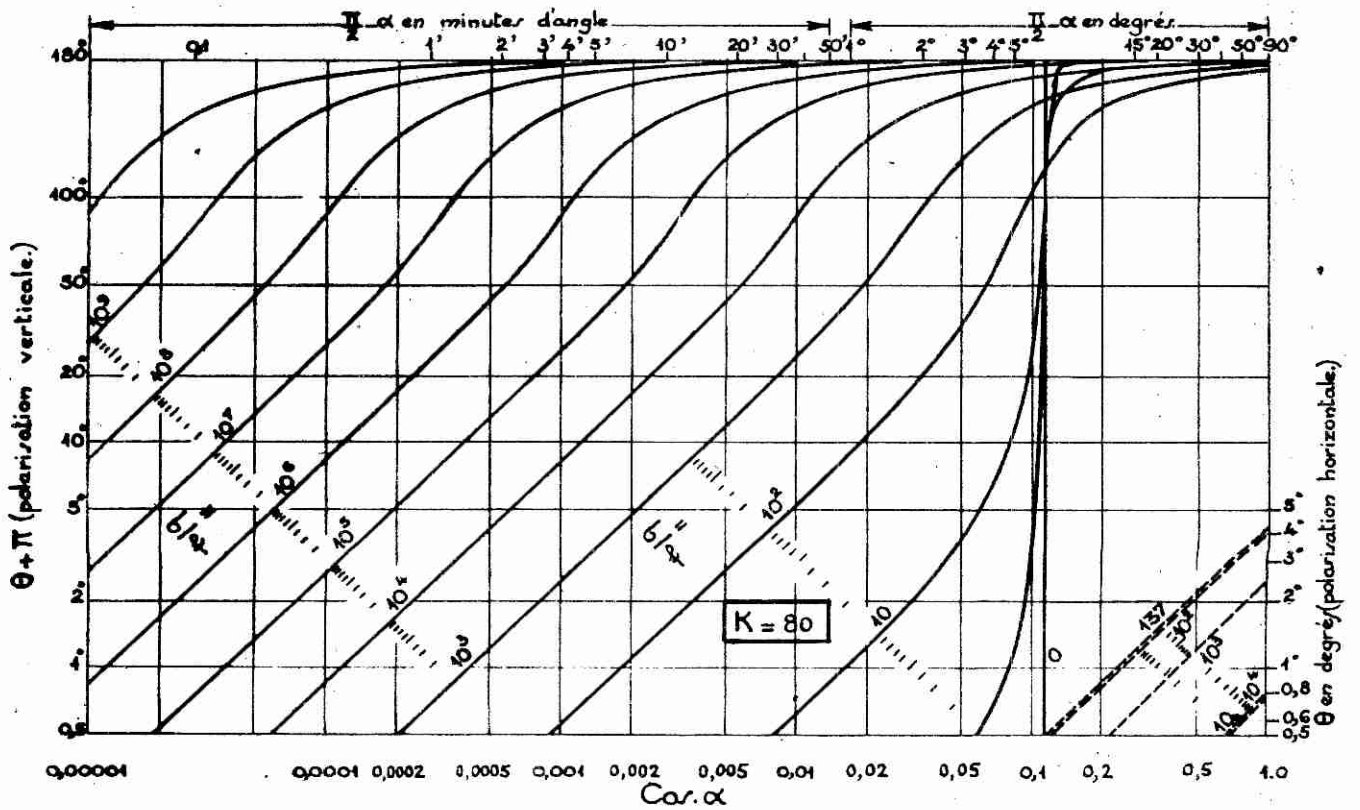
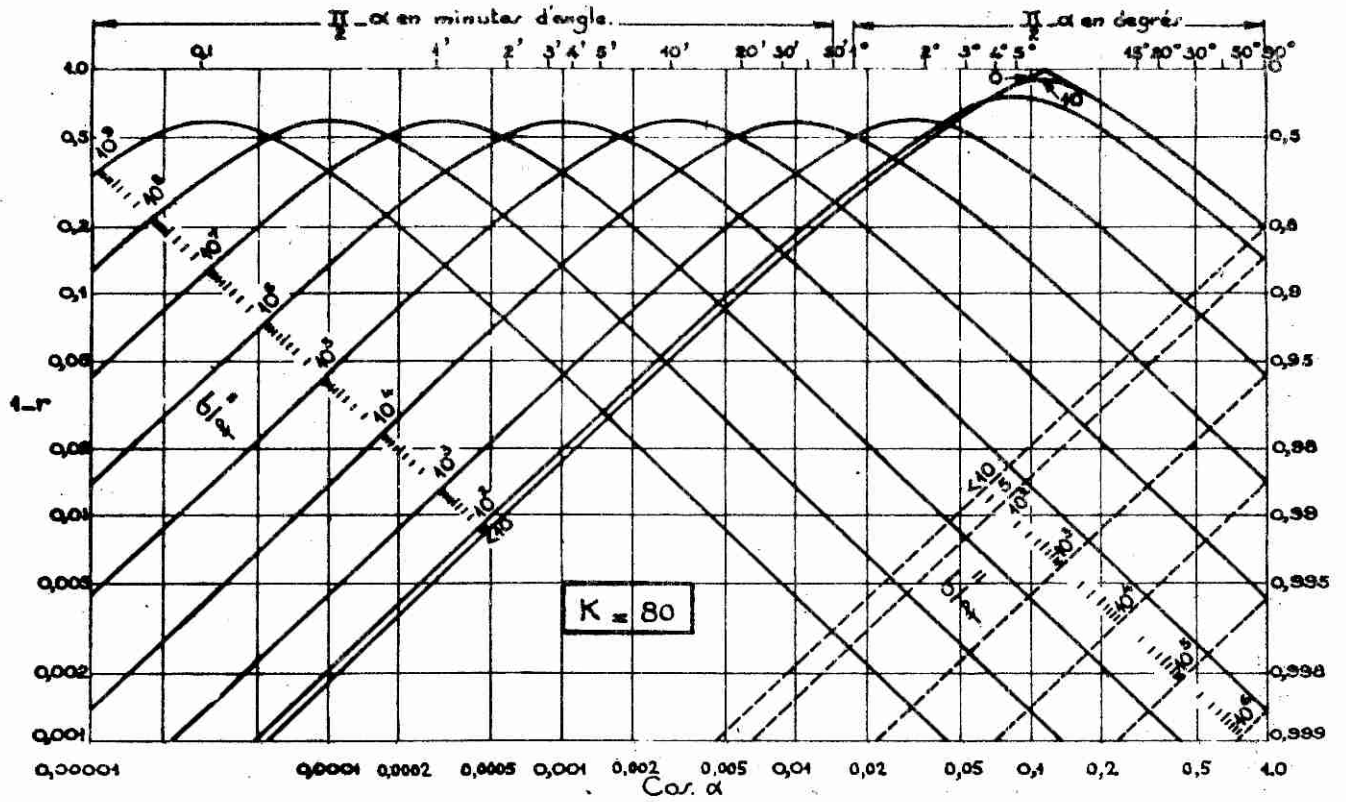
Les fig. 135 et 136 reproduisent le réseau $\left(\frac{\sigma}{f}\right)$ de courbes relatives à la valeur $K = 10$ pour la constante diélectrique du second milieu (cas d'un sol moyen). La première indique les variations de la quantité $1 - r$ et la seconde l'argument θ .

Les fig. 137 et 138 sont les figures correspondantes pour $K = 80$ (cas de l'eau de mer).

Les courbes en traits plein s'appliquent à la composante polarisée dans le plan de propagation tandis que les courbes en traits interrompus sont relatives à la composante polarisée horizontalement.

Quant aux valeurs prises en considération pour le rapport $\frac{\sigma}{f}$ elles s'étendent de 10^9 à zéro. Le cas du deuxième milieu parfaitement isolant se trouve donc traité, lui aussi dans les fig. 135 à 138.





140 - Considérons les courbes en traits pleins des fig. 135 et 137 donnant le module r du coefficient de réflexion dans le cas de la polarisation suivant le plan d'incidence. Contrairement à ce qui se passait dans le cas où le second milieu était parfaitement isolant (§ 131) nous constatons qu'il n'existe plus de valeur de l'angle d'incidence provoquant l'extinction complète du rayon réfléchi (incidence Brewsterienne). On ne constate plus qu'un minimum de r , au lieu d'un zéro, minimum qui est d'autant plus marqué que le rapport $\frac{\sigma}{f}$ est plus faible.

141 - Il faut enfin se garder de considérer l'incidence rasante lors du passage d'une onde plane d'un premier milieu de conductibilité σ finie, comme représentant la propagation d'une onde le long de la surface d'un corps de conductibilité finie. Cette dernière propagation présente en effet des différences essentielles qui seront étudiées plus loin (§ 533), on trouvera, en particulier, des courbes donnant l'excentricité et l'inclinaison du grand axe de l'ellipse de polarisation du champ électrique réel, ellipse qui est évidemment contenue dans le plan de propagation.

Energie rayonnée.

Vecteur de Poynting.

161 - Puisqu'une onde électromagnétique est constituée par un champ électrique combiné avec un champ magnétique qui se propagent, on est conduit à penser que cette onde transporte de l'énergie. C'est en effet ce qui se passe. Pour nous en assurer cherchons la relation qui existe entre la puissance rayonnée et les champs $\vec{E}$ et $\vec{h}$.

Nous avons vu au Chap. II_a (§ 95) que l'énergie électrostatique accumulée par unité de volume d'un milieu de constante diélectrique K où règne un champ électrique $\vec{E}$ est :

$$\frac{K}{8\pi k} \epsilon^2$$

k étant la constante de la formule de Coulomb relative à l'action mutuelle de 2 charges électriques.

De même l'énergie magnétique contenue dans l'élément de volume d'un milieu où règne un champ magnétique $\vec{h}$ est :

$$\frac{\mu}{8\pi k'} h^2$$

k' étant la constante de la formule de Coulomb, relative à l'action mutuelle de deux masses magnétiques (§ 424).

A un instant donné, l'énergie totale contenue dans l'unité de volume où règne à la fois un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{h}$ est :

$$\frac{1}{8\pi} \left(\frac{K}{k} \epsilon^2 + \frac{\mu}{k'} h^2 \right).$$

A l'intérieur d'un volume Ω limité par une surface

fermée, l'énergie sera donnée par les intégrales suivantes relatives au volume Ω :

$$u = \int_{\Omega} \left(\frac{K}{8\pi k} \epsilon^2 + \frac{\mu}{8\pi k'} h^2 \right) d\Omega$$

$$u = \int_{\Omega} \left[\frac{K}{8\pi k} (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) + \frac{\mu}{8\pi k'} (h_x^2 + h_y^2 + h_z^2) \right] d\Omega$$

Cette énergie est variable avec le temps. Soit du sa variation pendant l'intervalle de temps dt .

La puissance sortante de la surface Σ , à l'instant considéré est $-\frac{du}{dt}$

Calculons donc $-\frac{du}{dt}$.

On a $\frac{\partial \epsilon_x^2}{\partial t} = 2 \epsilon_x \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t}$ et ainsi de suite. Donc :

$$-\frac{du}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left[\frac{K}{k} \left(\epsilon_x \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t} + \epsilon_y \frac{\partial \epsilon_y}{\partial t} + \epsilon_z \frac{\partial \epsilon_z}{\partial t} \right) + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\mu}{k'} \left(h_x \frac{\partial h_x}{\partial t} + h_y \frac{\partial h_y}{\partial t} + h_z \frac{\partial h_z}{\partial t} \right) \right] d\Omega$$

Remplaçons les dérivées par rapport au temps : $\frac{\partial \epsilon_x}{\partial t}$, $\frac{\partial \epsilon_y}{\partial t}$, etc... par leurs valeurs tirées des équations de Maxwell (§ 20).

Le milieu étant supposé un milieu purement et parfaitement isolant, on a :

$$\begin{cases} -\frac{a}{k'} \mu \frac{\partial h_x}{\partial t} = \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} \\ -\frac{a}{k'} \mu \frac{\partial h_y}{\partial t} = \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} \\ -\frac{a}{k'} \mu \frac{\partial h_z}{\partial t} = \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{k'}{a} \frac{K}{c^2} \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t} = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \\ \frac{k'}{a} \frac{K}{c^2} \frac{\partial \epsilon_y}{\partial t} = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \\ \frac{k'}{a} \frac{K}{c^2} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial t} = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \end{cases}$$

L'expression de $-\frac{du}{dt}$ devient :

$$-\frac{du}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left[\frac{ac^2}{kk'} \left[\epsilon_x \left(\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \right) + \epsilon_y \left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) + \epsilon_z \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{a} \left[h_x \left(\frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} \right) + h_y \left(\frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} \right) + h_z \left(\frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} \right) \right] \right] d\Omega$$

Compte tenu de ce que $\frac{kk'}{a^2} = c^2$ (voir Chap. II_a - § 252),

on peut écrire :

$$-\frac{du}{dt} = \frac{1}{4\pi a} \int_{\Omega} \left[\left(\epsilon_y \frac{\partial h_z}{\partial x} + h_z \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} \right) - \left(\epsilon_z \frac{\partial h_y}{\partial x} + h_y \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} \right) + \left(\epsilon_z \frac{\partial h_x}{\partial y} + h_x \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} \right) \right. \\ \left. - \left(\epsilon_x \frac{\partial h_z}{\partial y} + h_z \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} \right) + \left(\epsilon_x \frac{\partial h_z}{\partial z} + h_z \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} \right) - \left(\epsilon_y \frac{\partial h_x}{\partial z} + h_x \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} \right) \right] d\Omega$$

ou bien encore :

$$-\frac{du}{dt} = \frac{1}{4\pi a} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_y h_z - \epsilon_z h_y) + \frac{\partial}{\partial y} (\epsilon_z h_x - \epsilon_x h_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_x h_y - \epsilon_y h_x) \right] d\Omega$$

Or, d'après ce qu'on a vu au Chap. I_a (§ 298.2), les trois quantités $(\epsilon_y h_z - \epsilon_z h_y)$, $(\epsilon_z h_x - \epsilon_x h_z)$ et $(\epsilon_x h_y - \epsilon_y h_x)$ ne sont autre chose que les trois composantes suivant les trois axes du vecteur $\vec{V} = \vec{\epsilon} \wedge \vec{h}$, produit géométrique, ou vectoriel, des deux vecteurs $\vec{\epsilon}$ et $\vec{h}$. Nous savons que c'est un vecteur perpendiculaire au plan des vecteurs $\vec{\epsilon}$ et $\vec{h}$, et dont l'orientation est telle que les trois vecteurs $\vec{\epsilon}$, $\vec{h}$ et $\vec{V}$ forment un trièdre tri-rectangle droit comme les axes de coordonnées ox , oy , oz . De plus, la longueur du vecteur $\vec{V}$ est égale à la surface du parallélogramme construit sur $\vec{\epsilon}$ et $\vec{h}$ comme côtés. Le vecteur $\vec{p} = \frac{\vec{V}}{4\pi a} = \frac{\vec{\epsilon} \wedge \vec{h}}{4\pi a}$ est appelé vecteur de Poynting.

D'après ce que nous venons de voir, nous avons :

$$-\frac{du}{dt} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) d\Omega$$

ou encore, d'après la définition de la divergence d'un vecteur, donnée au Chap. I_a (§ 298) :

$$-\frac{du}{dt} = \int_{\Omega} \text{div. } \vec{p} \, d\Omega.$$

Or le même chapitre nous a appris (§ 311) que l'intégrale de la divergence d'un vecteur, étendue au volume Ω compris dans une surface fermée Σ est égale au flux du même vecteur à travers la surface Σ , (ou plus exactement, au flux sortant de la surface Σ). C'est le théorème d'Ostrogradski.

Donc la puissance $-\frac{du}{dt}$ est égale au flux du vecteur de Poynting sortant de la surface Σ . Ceci peut s'écrire :

$$-\frac{du}{dt} = \int_{\Sigma} p_N \, d\Sigma$$

p_N étant la composante normale de $\vec{p}$ mesurée sur la normale extérieure à la surface Σ .

162 - Comme la relation qui précède est vraie quelle que soit la surface Σ , on en conclut que le vecteur de Poynting mesure en grandeur, direction et sens, la densité de puissance (puissance par unité de surface) qui est propagée au point (x, y, z) et à l'instant t .

163 - Dans la pratique, les systèmes d'unités sont toujours choisis de telle façon que l'on ait $c = 1$ (Chap. II_a - § 756). Le vecteur $\vec{p}$ est égal à $\frac{\vec{E} \times \vec{h}}{4\pi}$.

164 - La puissance $p_N \, d\Sigma$ qui traverse l'élément de surface $d\Sigma$ à l'époque t , est, comme les champs $\vec{E}$ et $\vec{h}$ une fonction du temps t , fonction qui peut d'ailleurs changer de

signe au cours d'une période des oscillations de $\vec{E}$ et $\vec{h}$. Mais comme on le constatera notamment en étudiant le cas du doublet, cette fonction possède une valeur moyenne non nulle, et c'est cette valeur moyenne qui constitue, à plus proprement parler, la puissance rayonnée à travers la surface Σ .

165 - En régime sinusoïdal on a coutume de distinguer une puissance active et une puissance réactive. C'est naturellement la première qui constitue la puissance réellement rayonnée à travers la surface $d\Sigma$.

166 - De toute manière, pour avoir la puissance totale rayonnée par un système de conducteurs donné, il faut déterminer la puissance totale sortant (c'est-à-dire le flux du vecteur de Poynting) à travers une surface fermée enveloppant complètement les conducteurs rayonnants. En général, on prendra une sphère de grand rayon centrée sur ces conducteurs et la valeur moyenne du flux du vecteur de Poynting à travers cette sphère donnera la puissance effectivement rayonnée par le système de conducteurs.

B. Production des ondes hertziennes. Rayonnement des antennes élémentaires

Méthode générale pour la détermination du champ produit par un conducteur de forme quelconque.

171 - Dans ce qui précède nous avons étudié les caractéristiques du champ électromagnétique en lui-même sans nous préoccuper de la manière dont il avait été engendré.. Il est évident qu'un tel champ est créé chaque fois qu'un courant électrique variable circule dans un conducteur quelconque. Le problème consiste maintenant à déterminer les relations qui existent entre le courant en question et le champ électromagnétique rayonné à distance par ce courant.

172 - En général, le courant variable utilisé est un courant sinusoïdal (de haute fréquence) dont la pulsation ω est donnée et dont l'amplitude est constante ou quasi-constante, c'est-à-dire lentement variable vis-à-vis de la période

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ du courant HF. On aura donc, en général, à faire l'étude du régime sinusoïdal permanent. Et d'ailleurs, le principe de superposition des états électriques

permettra de ramener l'étude du champ produit par un courant de forme quelconque, à celle du champ produit par les diverses composantes sinusoïdales de ce courant (Série ou intégrale de Fourier §§ 171 et 181 du Chap. I_a).

173 - Soit à déterminer le champ $\vec{E}$, $\vec{H}$ produit à distance par un certain conducteur AA' parcouru par des courants sinusoïdaux de haute fréquence (fig. 171).

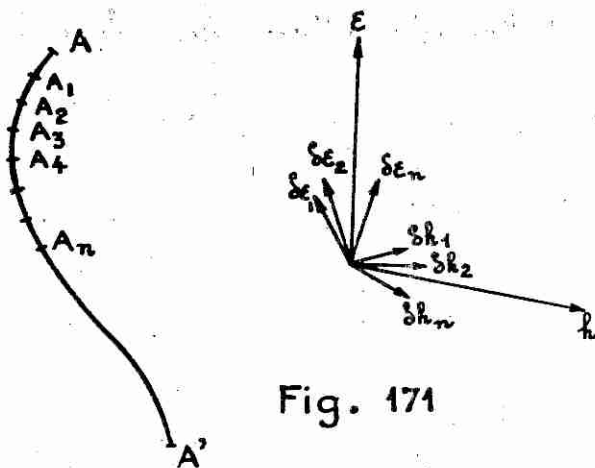


Fig. 171

La méthode consiste à diviser le segment AA' en un grand nombre d'éléments infiniment petits tels que AA_1 , A_1A_2 , A_2A_3 , etc...

Tout au long de chacun de ces éléments le courant HF possède une amplitude et une phase constante. Or on verra plus loin (champ d'un doublet, au

§ 201) ci-après que l'on sait calculer les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ produits, en un point quelconque M de l'espace, par un élément tel que AA_1 . On verra, en particulier que, dès que la distance AM est de l'ordre de grandeur de quelques longueurs d'ondes, ces champs sont polarisés rectilignement, suivant la perpendiculaire au rayon AM , le champ électrique étant contenu dans le plan défini par l'é-

lement AA_1 et le rayon AM ; quant au champ magnétique, il est perpendiculaire à ce plan et lié au champ électrique par la relation $\vec{E} = c \vec{h}$.

174 - On déterminera donc les champs élémentaires produits par tous les éléments AA_1, A_1A_2 , etc... constituant le conducteur donné AA' . Soient $\vec{\partial E}_1, \vec{\partial E}_2$, etc... $\vec{\partial h}_1, \vec{\partial h}_2$, etc... ces différents champs électriques et magnétiques élémentaires, à l'époque t . La résultante $\vec{\partial E}_1 + \vec{\partial E}_2 + \dots = \vec{E}$ constitue le champ électrique engendré en M par le conducteur AA' tout entier, à la même époque t , tandis que le champ magnétique $\vec{h}$ est donné par la somme géométrique $\vec{h} = \vec{\partial h}_1 + \vec{\partial h}_2 + \dots$

175 - Si la distance entre le point M et le conducteur AA' est supérieure à quelques longueurs d'ondes, comme il vient d'être dit, les champs $\vec{\partial E}_1, \vec{\partial E}_2$, etc... $\vec{\partial h}_1, \vec{\partial h}_2$, etc... seront polarisés rectilignement ; ils conserveront donc des directions fixes dans l'espace quand le temps s'écoulera. Chacun d'eux pourra être défini par sa direction dans l'espace, son amplitude et sa phase par rapport à une origine quelconque.

Dans le cas général, ces trois paramètres (dont le premier compte d'ailleurs pour deux puisqu'il s'agit d'une direction dans l'espace) sont différents pour les différents champs élémentaires issus des éléments $AA_1, A_1A_2, \dots$ etc., en sorte que la détermination des champs résultants $\vec{E}$ et $\vec{h}$ est une opération laborieuse.

176 - On est cependant assuré, dans tous les cas (même celui où la distance est plus petite que quelques longueurs d'ondes) que les composantes de $\vec{E}$ et de $\vec{H}$ sur les trois axes de coordonnées, seront des grandeurs sinusoïdales, puisque ces composantes seront elles-mêmes des sommes de grandeurs sinusoïdales de même pulsation. Le lieu, dans l'espace, de l'extrémité du vecteur $\vec{E}$ au point M sera donc une ellipse et de même pour le vecteur $\vec{H}$. Le champ, dans le cas général, doit donc être elliptique. Sous certaines conditions, il pourra cependant, en pratique, être polarisé rectilignement, comme on le verra par la suite.

Principe des images électriques.

181. - Considérons le système S (fig. 181) constitué par un plan P parfaitement conducteur, infiniment étendu, et un ensemble E de charges électriques q_1, q_2 etc... portées par divers points A_1, A_2 etc... situés d'un même côté (par exemple, au dessus) du plan conducteur P .

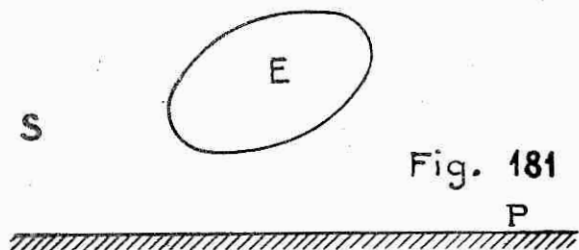


Fig. 181

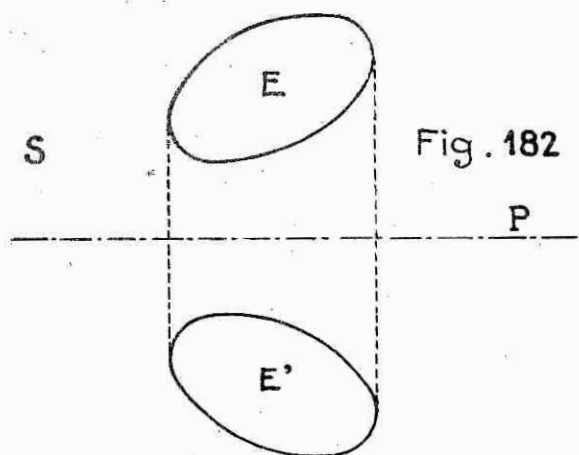


Fig. 182

On démontre que le champ créé par le système S , en un point M se trouvant au-dessus du plan P est le même que celui qui serait produit par le système S (fig. 182) obtenu en supprimant le plan P et en ajoutant, à l'ensemble E des charges q_1, q_2 etc..., un second ensemble E' constitué au moyen des charges $-q_1, -q_2$, etc... respectivement égales et de signes contraires à q_1, q_2 etc... et dont les positions A'_1, A'_2 etc...

seraient symétriques de A_1, A_2 etc... par rapport au plan P .

C'est en cette proposition que consiste le principe des images et l'ensemble E' est appelé l'image électrique de l'ensemble E .

182. - En ce qui concerne le champ électrostatique, on voit immédiatement que le plan P est un plan de symétrie pour les lignes de force et pour les surfaces équipotentielles, lui-même coïncidant avec la surface équipotentielle $V = 0$.

Le champ n'est pas modifié si on remplace une surface équipotentielle par une surface conductrice sur laquelle on porte une charge égale à la somme algébrique des charges comprises à l'intérieur de la surface équipotentielle considérée. Or, on est bien obligé d'admettre que dans le système S , le plan P porte, en effet, une charge égale et de signe contraire à la somme des charges $q_1 + q_2 + \dots$ etc...

183 - Le principe des images est valable non seulement à des charges fixes mais encore à des charges en mouvement, et il s'applique alors au champ électrique total $\vec{E}$ et au champ magnétique $\vec{h}$.

Il faut alors noter que l'image électrique d'un courant i circulant dans un élément de conducteur AB de A vers B (fig. 183) est un courant $-i$ circulant dans l'élément $A'B'$ (de A' vers B') symétrique de AB par rapport au plan P , ou, ce qui revient au même, un courant $+i$ circulant dans le même élément dans le sens inverse à savoir de B' vers A' .

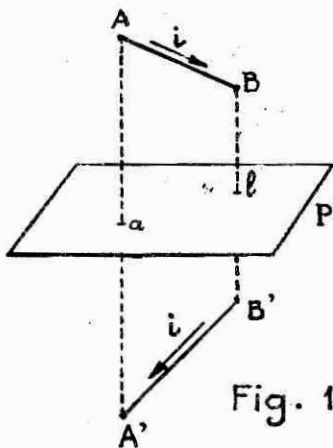


Fig. 183

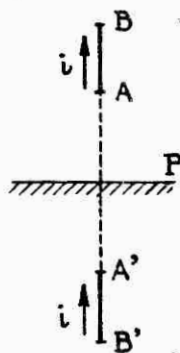


Fig. 184

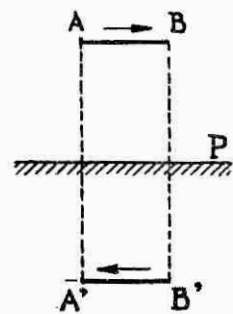


Fig. 185

C'est ainsi que l'image d'un élément de courant vertical AB (fig. 184) dirigé de bas en haut, et un autre élément de courant dirigé aussi de bas en haut, tandis que l'image électrique d'un élément de courant horizontal (fig. 185) dirigé de gauche à droite, est un élément horizontal dirigé de droite à gauche.

Possibilités d'application du principe des images au cas du sol.

185 - Le principe des images suppose que le plan conducteur P est parfaitement conducteur. Cela signifie pratiquement que, dans ce conducteur, les propriétés conductrices sont prépondérantes vis-à-vis des propriétés diélectriques, ou encore que le courant de déplacement est négligeable vis-à-vis du courant de conduction.

Pour que le sol puisse être considéré comme parfaitement conducteur, il faut donc que ses composantes K et σ (constante diélectrique et conductibilité) satisfassent à certaines conditions, lesquelles dépendent de la fréquence, puisque le courant de déplacement est fonction de cette fréquence.

Évaluons le rapport χ des amplitudes du courant de conduction et du courant de déplacement à travers un élément de surface ds perpendiculaire à un champ électrique E sinusoïdal et de pulsation ω .

Le courant de conduction est égal à $E \sigma ds$.

Le courant de déplacement (§ 4) vaut :

$$\frac{K}{4\pi k} \frac{\partial E}{\partial t} ds.$$

Le rapport a donc pour valeur :

$$\chi = \frac{4\pi k \sigma}{K} \frac{E}{\frac{\partial E}{\partial t}}.$$

Comme E est sinusoïdal et de pulsation ω , les grandeurs E et $\frac{\partial E}{\partial t}$ sont déphasées de $\frac{\pi}{2}$, et leurs amplitudes sont dans le rapport $\frac{1}{\omega}$.

On a donc :

$$\chi = \frac{4\pi k \sigma}{K \omega} = \frac{2k \sigma}{K f}.$$

186 - On voit que ce rapport est une fonction décroissante de ω , ou de la fréquence considérée. Les propriétés d'un sol de constantes déterminées, s'écarteront donc d'autant plus de celles d'un sol parfaitement conducteur que la fréquence sera plus basse.

D'une manière générale le principe des images sera donc d'autant mieux applicable que la longueur d'onde sera plus courte.

187 - Pour fixer les idées, proposons nous de calculer la valeur de la fréquence (ou de la longueur d'onde) pour laquelle le rapport atteint la valeur 20. On doit avoir :

$$\frac{4 \pi k \sigma}{K \omega_c} = 20$$

d'où :

$$\omega_c = \frac{4 \pi k \sigma}{20 K} \quad \text{et} \quad f_c = \frac{k \sigma}{10 K}$$

Les valeurs caractéristiques f_c (ou λ_c) dépendent des coefficients K et σ . Nous examinerons successivement le cas de la mer, puis d'un sol moyennement conducteur, et enfin d'un sol sablonneux très sec.

188 - Les constantes de l'eau de mer sont, sensiblement :

$$K = 80, \quad \sigma = 10^{10} \text{ (unités électrostatiques } k=1)$$

On a donc, en unités électrostatiques :

$$f_c = \frac{\sigma}{10 K} = \frac{10^{10}}{800} = 12,5 \cdot 10^6 = 12,5 \text{ Mégacycles (ou } \lambda = 25 \text{ m)}$$

On en conclut que, sauf aux ondes très courtes ($\lambda < 25 \text{ m}$) le principe des images est applicable au dessus de la mer.

189 - Pour un sol moyen non détrempé on a les constantes suivantes :

$$K = 10 \quad , \quad \sigma = 10^8 \text{ (U.E.S)}$$

Il s'en suit que :

$$f_c = \frac{\sigma}{10K} = \frac{10^8}{100} = 10^6 = 1 \text{ Mégacycle (ou } \lambda_c = 300\text{m)}$$

190 - Enfin pour un sol sablonneux très sec, on a :

$$K = 4 \quad , \quad \sigma = 10^6 \text{ (U.E.S)}$$

On trouve alors :

$$f_c = \frac{\sigma}{10K} = \frac{10^6}{40} = 25 \cdot 10^3 = 25 \text{ kilocycles (} \lambda = 12.000\text{m) .}$$

On voit que dans ce dernier cas, le sol ne peut être considéré comme parfaitement conducteur pour aucune des longueurs d'ondes normalement utilisées pour les radiocommunications.

Décomposition d'un élément de conducteur en ses projections suivant les trois axes .

191 - Soit AB un élément de conducteur disposé obliquement par rapport aux directions des axes de coordonnées et parcouru par un courant variable i (fig. 191) . On vérifie aisément, que, pour déterminer les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ créés à distance, on peut remplacer l'élément AB par ses trois projections AB_1 , AB_2 , AB_3 suivant trois

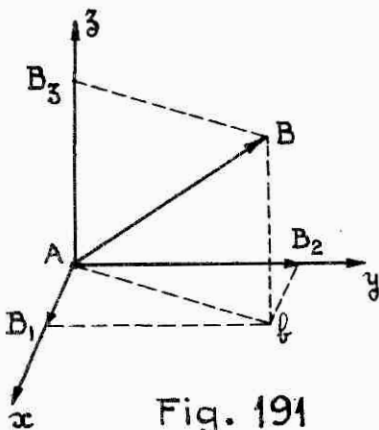


Fig. 191

directions quelconques de l'espace, ces trois projections étant supposées parcourues toutes les trois par le même courant i .

Il suffit de prendre les résultantes des champs $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$ et $\vec{h}_1$, $\vec{h}_2$, $\vec{h}_3$ produits par ces éléments pour obtenir les champs $\vec{E}$ et $\vec{h}$ produits par l'élément AB .

Ce fait est dû à ce que, comme on le verra plus loin (§ 230) le champ électrique (par exemple) produit en un point éloigné M par un élément tel que AB ou AB_1 etc... est une grandeur vectorielle proportionnelle à la projection de l'élément considéré sur le plan perpendiculaire à la droite AM .

Or l'égalité vectorielle $\vec{AB} = \vec{AB}_1 + \vec{AB}_2 + \vec{AB}_3$ entraîne automatiquement la suivante :

$$\overrightarrow{\text{projection de } AB} = \overrightarrow{\text{projection de } AB_1} + \overrightarrow{\text{projection de } AB_2} + \overrightarrow{\text{projection de } AB_3}$$

les projections étant faites sur un plan (ou un axe) quelconques, ce qui démontre la proposition initiale.

Champ du doublet électrique.

201 - Comme on vient de le voir (§ 172) l'étude du champ électromagnétique produit par un conducteur quelconque AA' disposé dans l'espace se ramène à l'étude du champ produit par un élément infiniment petit supposé parcouru par le même courant i , à chaque instant, en tous ses points.

Un tel élément peut être considéré isolément, à condition de le supposer terminé par deux capacités "terminales" suffisantes pour recevoir les charges véhiculées par le courant i dans l'élément de conducteur aa' (fig. 201). L'ensemble du conducteur aa' et des deux capacités terminales C et C' est désigné sous le nom de doublet.

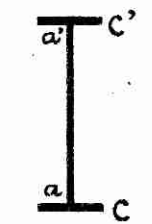


Fig. 201

On observera que lorsque les différents doublets aa_1 , aa_2 , etc... sont mis bout à bout pour reconstituer le conducteur initial, il n'y a pas (en première approximation) à tenir compte des capacités terminales telles que C et C' , puisque la charge $+q$ amenée à l'instant t à l'extrémité d'un doublet est neutralisée par la charge $-q$ amenée au même point par le doublet immédiatement consécutif.

202 - Nous supposons que le courant i dans le doublet est un courant sinusoïdal de pulsation ω . La charge q de la capacité C est alors une grandeur sinusoïdale puisque l'on a $q = \int i dt$, quant à la charge de la capacité C' , elle est à chaque instant égale à $-q$.

203 - Considérons un doublet de longueur l placé le long de l'axe oz , son milieu coïncidant avec l'origine O des coordonnées.

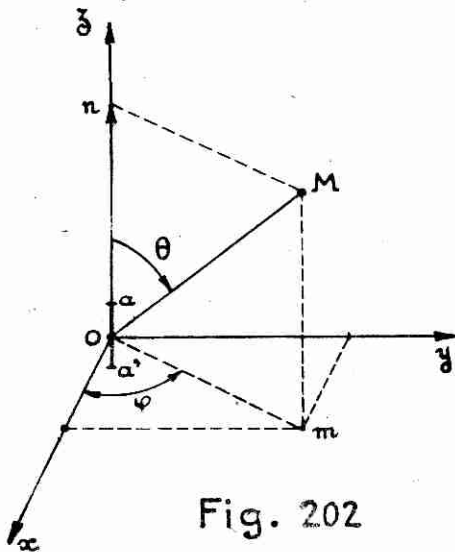


Fig. 202

Nous désirons connaître le champ électromagnétique créé par ce doublet en un point M de coordonnées x, y, z . (fig. 202). Il sera commode de définir le point M par ses coordonnées polaires r, φ et θ .

r est le rayon polaire OM , φ l'azimut et θ la colatitute de la direction OM .

Ces trois nouvelles coordonnées sont reliées à x, y, z par les trois relations :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

204 - Différentes méthodes peuvent être utilisées pour déterminer le champ électromagnétique $\vec{E}, \vec{h}$ en M .

Une première méthode consiste à introduire les coordonnées polaires r, φ et θ dans les équations de Maxwell écrites dans l'hypothèse d'un milieu parfaitement isolant par exemple, puis à écrire, comme condition aux limites, que le champ au voisinage immédiat du doublet ($r \ll \lambda$) est le même que celui qui découle des formules de l'électrotechnique habituelle à savoir :

- 1° : que le champ électrique $\vec{E}$ se confond avec le champ électrostatique produit par les deux charges $+q$ et $-q$ portées par a et a' .
- 2° : que le champ magnétique $\vec{h}$ se confond avec le champ qui serait produit par un courant continu i parcourant

l'élément de conducteur aa' (formule de Laplace, Chap. II_a - § 252).

205 - Une autre méthode consiste à calculer les valeurs en M des potentiels retardés créés par le doublet aa' , savoir le potentiel électrique v et le potentiel vecteur $\vec{p}$. Ces deux potentiels étant calculés, on obtient en effet les champs $\vec{E}$ et $\vec{h}$ en M par les deux formules :

$$\vec{E} = \text{grad. } v \text{ et } \vec{h} = \text{rot } \vec{p}$$

Méthode des potentiels retardés.

206 - Les formules donnant les deux potentiels ont été données au Chap. II_a (§ 29 et § 301) consacré au rappel des lois fondamentales de l'électrotechnique des courants ordinaires, c'est-à-dire des courants lents. Dans ces paragraphes, on admettait implicitement que les actions à distances s'exerçaient instantanément.

Or nous venons de voir, au cours du présent chapitre, qu'il n'en est rien, mais que les actions électromagnétiques se propagent avec une vitesse finie qui, dans le vide, est égale à la vitesse de la lumière C .

Dans l'étude des courants lents, l'hypothèse de l'ins-
tanciété des actions à distance se trouve justifiée parce que les temps de propagation à intervenir sont infiniment petits vis-à-vis de la période des courants considérés (ou des composantes sinusoïdales les plus aiguës renfermées dans ces courants).

207 - Dans le cas des courants de haute fréquence qui nous intéressent, il n'en est plus ainsi, il faut tenir compte des durées de propagation comme on l'a d'ailleurs déjà fait au § 656 du Chap. II (Potentiels retardés de Lorentz).

C'est ainsi que les potentiels v et $\vec{p}$ dus à une charge élémentaire Δq ou un courant élémentaire de longueur $\Delta \vec{s}$, $\Delta \vec{i} = i \Delta \vec{s}$ placés en A ne se manifestent en un point M situé à une distance r de A, qu'un temps $\tau = \frac{r}{c}$ après que la charge Δq ou le courant $\Delta \vec{i}$ sont apparus en A. Par conséquent, pour obtenir les potentiels v et $\vec{p}$ produits en M à l'époque t , il faut faire entrer dans les formules de v et de $\vec{p}$, la charge Δq et le courant $\Delta \vec{i}$ qui existaient en A à l'époque $t - \frac{r}{c}$.

Soient x, y, z les coordonnées de M et ξ, η, ζ celles de A, nous désignerons par $\Delta q (\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c})$ la charge et le courant en A à l'époque $t - \frac{r}{c}$. Pour obtenir les potentiels cherchés en M, il faut faire la somme des potentiels dus à toutes les charges et à tous les courants existant dans le système étudié. On a donc :

$$\left. \begin{aligned} v(x, y, z, t) &= k \sum \frac{\Delta q (\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c})}{r} \\ \text{et} \quad \vec{p}(x, y, z, t) &= a \sum \frac{\Delta \vec{i} (\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c})}{r} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{avec : } \Delta \vec{i} = i \Delta \vec{s} \\ &\text{et : } r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} \end{aligned}$$

209 - Si nous faisons intervenir la densité spatiale $\rho = \frac{dq}{d\Omega}$ et la densité de courant $\vec{j}$ dans un volume élémentaire $d\Omega$ entourant le point A, les deux sommes précédentes se transforment dans les intégrales :

$$\begin{aligned} v(x, y, z, t) &= k \int_{\Omega} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c})}{r} d\Omega \\ \text{et} \quad \vec{p}(x, y, z, t) &= a \int_{\Omega} \frac{\vec{j}(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c})}{r} d\Omega \end{aligned}$$

Les deux intégrales doivent être étendues à des volumes Ω déterminés de façon à enfermer l'ensemble des charges Δq et des

courants $i \vec{\Delta s}$ dont on veut déterminer le champ électromagnétique qu'ils produisent dans l'espace.

210 - Dans le cas du doublet il faut simplement faire intervenir :

1° : le courant élémentaire sinusoïdal vertical :

$$i \vec{\Delta s} = I \vec{l} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right), \text{ avec } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2° : les deux charges $+q$ et $-q$ portées par les points a et a' dont les cotés sont respectivement $+\frac{l}{2}$ et $-\frac{l}{2}$:

$$+q = -\frac{I}{\omega} \cos \omega \left(t - \frac{r_1}{c} \right), \text{ avec } r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{l}{2} \right)^2}$$

$$-q = +\frac{I}{\omega} \cos \omega \left(t - \frac{r_2}{c} \right), \text{ avec } r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + \left(z + \frac{l}{2} \right)^2}$$

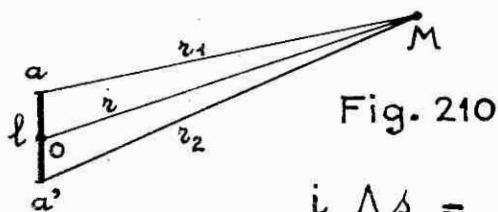


Fig. 210

Ces trois équations peuvent encore s'écrire ; en posant $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = \alpha$:

$$i \vec{\Delta s} = I \vec{l} \sin (\omega t - \alpha r)$$

$$+q = -\frac{I}{\omega} \cos (\omega t - \alpha r_1)$$

$$-q = +\frac{I}{\omega} \cos (\omega t - \alpha r_2)$$

Après calculé les valeurs de $v(x, y, z, t)$ et de $\vec{\mu}(x, y, z, t)$, on obtient les champs $\vec{E}$ et $\vec{h}$ par les deux formules déjà indiquées :

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \overrightarrow{\text{grad}} \cdot v(x, y, z, t)$$

$$\vec{h}(x, y, z, t) = \overrightarrow{\text{rot}} \cdot \vec{\mu}(x, y, z, t)$$

Formules du doublet .

221 - Quelle que soit la méthode adoptée, elle conduit aux résultats suivants :

1^{re} : le champ électrique $\vec{E}$ est situé dans le plan méridien zOM . Sa composante radiale (suivant OM) a pour mesure :

$$E_R = - \frac{2k I l \cos \theta}{\omega r^3} [\cos(\omega t - \alpha r) - \alpha r \sin(\omega t - \alpha r)]$$

et sa composante tangentielle (suivant la tangente au méridien passant par M) :

$$E_T = \frac{k I l \sin \theta}{\omega r^3} [(1 - \alpha^2 r^2) \cos(\omega t - \alpha r) - \alpha r \sin(\omega t - \alpha r)]$$

2^{de} : le champ magnétique $\vec{h}$ est orienté suivant la perpendiculaire au plan méridien zOM , c'est-à-dire tangentiellement au parallèle passant par M ; sa mesure est :

$$h = \frac{\alpha I l \sin \theta}{r^2} [\sin(\omega t - \alpha r) + \alpha r \cos(\omega t - \alpha r)]$$

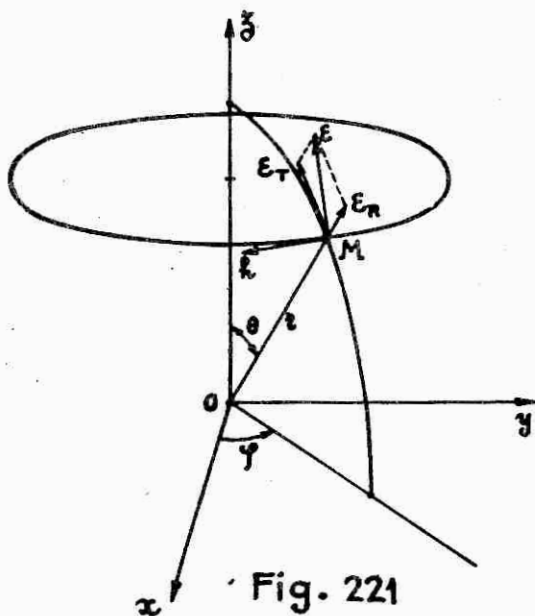


Fig. 221

Dans ces formules, les sens positifs adoptés pour E_R , E_T et h sont les suivants :

- pour E_R , le sens des valeurs croissantes du rayon polaire r .

- pour E_T , le sens de la tangente orientée vers le haut sur le méridien de M .

- pour h , le sens de la tangente au parallèle de M , orientée dans le sens de valeurs croissantes

de φ .

222 - Dans ce qui va suivre, nous prendrons comme sens positif pour le champ h le sens inverse du sens précédent, à savoir celui de la tangente orientée dans le sens des azimuts φ décroissants de façon que les directions positives de E_r , h et du rayon OM selon lequel s'effectue la propagation, forment un trièdre tri-rectangle droit.

Nous ferons dorénavant usage des unités C.G.S électromagnétiques. On aura alors $k' = 1$, $k = c^2$; les formules ci-dessus deviendront :

$$E_R = -c^2 \frac{2 I l \cos \theta}{\omega r^3} [\cos(\omega t - \alpha r) - \alpha r \sin(\omega t - \alpha r)]$$

$$E_T = c^2 \frac{I l \sin \theta}{\omega r^3} [(1 - \alpha^2 r^2) \cos(\omega t - \alpha r) - \alpha r \sin(\omega t - \alpha r)]$$

et

$$h = -\frac{I l \sin \theta}{r^2} [\sin(\omega t - \alpha r) + \alpha r \cos(\omega t - \alpha r)]$$

223 - Examinons ces trois formules :

Nous observerons tout d'abord que les trois composantes E_R , E_T et h sont, comme il fallait s'y attendre, des fonctions sinusoïdales du temps, de pulsation ω .

224 - Les deux composantes E_R et E_T du champ électrique ne sont pas en phase; le champ électrique total E est donc, tout au moins dans le cas général (c'est-à-dire à une distance quelconque du doublet) un champ elliptique.

Le champ magnétique, au contraire, est dans tous les cas polarisé horizontalement.

225 - Les surfaces d'ondes, ou surfaces d'égales phases, sont des sphères de centre O . En effet, à une époque t donnée, celles-ci sont définies par l'équation :

$$\omega t - \alpha r = \varphi_1 = \text{Constante}$$

d'où l'on tire $r = \frac{\omega t - \varphi_1}{\alpha} = \text{Constante}.$

La phase varie de 2π lorsque l'on passe d'une sphère de rayon r à une sphère de rayon $r' = \frac{\omega t - (\varphi_1 - 2\pi)}{\alpha}.$

On a donc :

$$r' - r = \frac{2\pi}{\alpha} = \lambda$$

Les deux rayons r et r' diffèrent d'une longueur d'onde et la phase en avance est, comme il est naturel, celle qui existe sur la sphère de plus petit rayon.

226 - Si on examine ensuite comment varie les champs E et h avec la distance $OM = r$, on remarque :

- que l'expression de E_R contient des termes en $\frac{1}{r^3}$ et $\frac{1}{r^2}$
- que celle de E_T contient des termes en $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^2}$ et $\frac{1}{r}$.
- et que celle de h contient des termes en $\frac{1}{r^2}$ et $\frac{1}{r}$.

Suivant la distance r existant entre le doublet et le point où l'on considère le champ électromagnétique ce seront les uns ou les autres de ces termes qui prédomineront.

227 - Au voisinage immédiat du doublet, en particulier, où l'on a : $r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$, c'est-à-dire :

$$r \ll \frac{1}{\alpha} \quad \text{ou} \quad \alpha r \ll 1$$

Les expressions de E_R , E_T et h deviennent, sensiblement :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_R = -c^2 \frac{2I\ell \cos \theta}{\omega r^3} \cos \omega t \\ \mathcal{E}_T = -c^2 \frac{I\ell \sin \theta}{\omega r^3} \cos \omega t \\ h = -\frac{I\ell}{r^2} \sin \theta \sin \omega t \end{cases}$$

Les deux composantes du champ électrique sont en phase, elles ne sont autres que les deux composantes du champ électrostatique produit par les deux charges $q = -I\omega \cos \omega t$ et $-q$ aux deux extrémités a et a' du doublet.

Quant à l'expression de h , elle n'est autre que la formule même de Laplace donnant le champ magnétique ordinaire d'un élément de longueur ℓ d'un courant continu dont la valeur serait $I \sin \omega t = i$ (Voir Chap. II_a - § 252).

On observera que les champs $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{h}$ sont en quadrature, comme le sont d'ailleurs le courant i et la charge q .

228 - En tous les points situés dans l'axe du doublet ($\theta = 0$), c'est-à-dire suivant la verticale oz , les champs $\mathcal{E}_T$ et h sont nuls. Il ne reste que la composante radiale $\mathcal{E}_R$ qui conserve la valeur :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_R = -c^2 \frac{2I\ell}{\omega r^3} [\cos(\omega t - \alpha r) - \alpha r \sin(\omega t - \alpha r)]$$

229 - Dans le plan équatorial du doublet ($\theta = \frac{\pi}{2}$), au contraire, la composante radiale $\mathcal{E}_R$ s'annule tandis que les champs $\mathcal{E}_T = \mathcal{E}$ et h prennent les valeurs suivantes :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_T = c^2 \frac{I\ell}{\omega r^3} [(1 - \alpha^2 r^2) \cos(\omega t - \alpha r) - \alpha r \sin(\omega t - \alpha r)]$$

$$h = -\frac{I\ell}{r^2} [\sin(\omega t - \alpha r) + \alpha r \cos(\omega t - \alpha r)]$$

230 - A grande distance du doublet, c'est à dire en des points tels que l'on ait $\alpha r \gg 1$, ou encore $r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$, il ne reste plus, dans les expressions du champ que les termes de la plus petite puissance de $\frac{1}{r}$, savoir :

$$\epsilon_R = -c^2 \frac{2 I l \alpha \cos \theta}{\omega r^2} \sin (\omega t - \alpha r)$$

$$\epsilon_T = -c^2 \frac{I l \alpha^2 \sin \theta}{\omega r} \cos (\omega t - \alpha r)$$

$$h = -\frac{I l \alpha \sin \theta}{r} \cos (\omega t - \alpha r)$$

ou, encore, compte-tenu, dans les expressions de ϵ_R et ϵ_T , de ce que $c \frac{\alpha}{\omega} = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_R = -c \frac{2 I l \cos \theta}{r^2} \sin (\omega t - \alpha r) \\ \epsilon_T = -c \frac{I l \alpha \sin \theta}{r} \cos (\omega t - \alpha r) \\ h = -\frac{I l \alpha \sin \theta}{r} \cos (\omega t - \alpha r) \end{array} \right.$$

231 - Pratiquement, à condition d'excepter les points très rapprochés de l'axe Oz (θ très voisin de zéro), la quantité $\frac{1}{r^2}$ sera négligeable devant $\frac{\sin \theta}{r}$ et, par conséquent ϵ_R devant ϵ_T .

On pourra donc prendre pour expression du champ électromagnétique en M :

$$\epsilon = \epsilon_T = -c \frac{I l \alpha \sin \theta}{r} \cos (\omega t - \alpha r)$$

$$h = -\frac{I l \alpha \sin \theta}{r} \cos (\omega t - \alpha r)$$

On voit que les champs ϵ et h sont en phase et qu'il y a, entre leurs grandeurs la relation $\epsilon = ch$. Les vecteurs $\vec{E}$

et $\vec{h}$ ont, à tout instant, les mêmes sens relatifs que les directions positives qui les portent, directions définies au § 222 et au précédent.

En d'autres termes, les trois vecteurs $\vec{E}$, $\vec{h}$, et $\vec{OM}$ qui se confond avec la direction de propagation, forment un trièdre tri-rectangle droit.

Nous retrouvons là les propriétés de l'onde plane (§ 61) et ces résultats ne sont pas pour surprendre puisque, à grande distance de O, la sphère de rayon OM se confond avec son plan tangent en M. L'onde sphérique en M est assimilable à l'onde plane orientée perpendiculairement au rayon OM.

232 - Dans la pratique des radiocommunications, on n'a généralement à considérer que des points suffisamment éloignés des éléments rayonnants, pour que l'on puisse adopter comme expressions rigoureuses des champs $\vec{E}$ et $\vec{h}$ celles qui sont écrites au § 231 ci-dessus. Étudions de plus près ces expressions du champ électromagnétique à grande distance.

Les amplitudes de $\vec{E}$ et de $\vec{h}$ sont les suivantes :

$$\begin{cases} E = E_T = \frac{c I l \alpha \sin \theta}{r} \\ H = \frac{1}{c} E = \frac{I l \alpha \sin \theta}{r} \end{cases}$$

ou bien encore, étant donné que $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{\lambda f} = \frac{\omega}{c}$:

$$\begin{cases} E = 2\pi c \frac{I}{r} \frac{l}{\lambda} \sin \theta \\ H = 2\pi \frac{I}{r} \frac{l}{\lambda} \sin \theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} E = \frac{I l \omega \sin \theta}{r} \\ H = \frac{1}{c} \frac{I l \omega \sin \theta}{r} \end{cases}$$

233 - Sur ces dernières formules, on voit que l'amplitude du champ électromagnétique E H est proportionnelle :

- à la longueur l du doublet ,
- à la pulsation ω du courant dans le doublet ,
- à l'amplitude I de ce courant ,
- au sinus de la distance zénithale θ du point M où est mesuré le champ .

Elle est, d'autre part, inversement proportionnelle à la distance r du point M

Enfin le champ E, H est indépendant de l'azimut φ du point M .

234 - Comme il a été dit plus haut (§ 222) ces formules supposent que les unités employées appartiennent au système électromagnétique ($k' = 1$) .

Si l'on adopte, en particulier, le système pratique (Volts, Amperes, etc...) , on a $c = 30$ quadrants et, par suite :

$$E_{\frac{\text{volts}}{\text{quadrants}}} = 60 \pi \frac{I^{\text{Amp}}}{r_{\text{quadrants}}} \left(\frac{l}{\lambda} \right) \sin \theta .$$

On peut, dans cette formule, exprimer l et λ avec des unités quelconques (pourvu qu'elles soient les mêmes) mais il faut alors exprimer la distance r en quadrants . Comme le résultat est donné en volts par quadrant, on se rend compte qu'il est encore indifférent de prendre n'importe quelle unité de longueur pour le champ E et la distance r ; si l'on prend, par exemple, des centimètres, il vient :

$$E_{\frac{\text{volts}}{\text{cm}}} = 60 \pi \frac{I^{\text{Amp}}}{r_{\text{cm}}} \left(\frac{l}{\lambda} \right) \sin \theta .$$

Valeur imaginaire du champ électrique $\mathcal{E}$.

235 - On a vu au § 230 ci-dessus que le champ électrique produit à l'époque t par un courant $i = I \sin \omega t$ dans le doublet, avait pour expression :

$$\mathcal{E} = -c \frac{I l \alpha \sin \theta}{r} \cos (\omega t - \alpha r).$$

Ce champ $\mathcal{E}$ présente, par rapport au courant i , une différence de phase égale à :

$$\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha r \quad \text{ou encore} \quad -\frac{\pi}{2} - \alpha r$$

En effet, le signe moins placé en tête de l'expression de $\mathcal{E}$ introduit un décalage de π , tandis que la présence du cosinus au lieu du sinus ajoute un nouveau décalage de $\frac{\pi}{2}$ en avant.

Prenant comme origine des phases, la phase du courant i dans le doublet, la valeur imaginaire $\mathcal{E}$ du champ $\mathcal{E}$ pourra s'écrire :

$$\mathcal{E} = -j c \frac{I l \alpha \sin \theta}{r} e^{-j \alpha r} = -j \mathcal{E} e^{-j \alpha r}$$

ou encore :

$$\mathcal{E} = -j 2 \pi c \frac{I}{r} \frac{l}{\lambda} \sin \theta e^{-j \alpha r}$$

ce qui donne, en unités pratiques (Volts et Ampères, et unités de longueur comme au § 234.)

$$\mathcal{E} = -j 60 \pi \frac{I}{r} \left(\frac{l}{\lambda} \right) \sin \theta e^{-j \alpha r}$$

Diagrammes de rayonnement du doublet électrique.

241 - Il est commode de représenter l'efficacité d'un radiateur d'ondes donné, dans les diverses directions de l'espace, au moyen de diagrammes polaires obtenus de la manière suivante :

Sur la direction définie par l'azimut φ et la distance zénithale θ , on porte un rayon vecteur OM proportionnel à l'amplitude E du champ (ou à l'amplitude d'une composante particulière de ce champ).

En faisant balayer par le rayon OM (φ, θ) toutes les directions de l'espace, on obtient une surface dont l'équation en coordonnées polaires est $\rho = f(\varphi, \theta)$, et qui définit, sans ambiguïté le champ (ou la composante considérée) dans chaque direction de l'espace.

242 - Lorsqu'on ne s'intéresse qu'aux directions contenues dans un plan méridien donné, d'azimut φ_1 , il suffit de tracer dans le plan le diagramme d'équation $\rho = f_1(\theta) = f(\varphi_1, \theta)$. Le diagramme obtenu se confond évidemment avec la trace de la surface polaire $\rho = f(\varphi, \theta)$ sur le plan méridien considéré.

On peut, de même, se préoccuper de la manière dont varie le rayonnement dans des directions faisant avec la verticale Oz un angle θ_1 donné. On est alors renseigné par un second diagramme plan dont l'équation est $\rho = f_2(\varphi) = f(\varphi, \theta_1)$, directions considérées sont situées sur la surface du cône de révolution autour de Oz et dont le demi-angle au sommet est θ . Cette surface se confond avec le plan horizontal pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

243 - La constante de la proportionnalité dont il

a été question au § 241 ci-dessus, est généralement choisie de telle façon que le rayon polaire ρ soit égal à l'unité dans une direction particulière φ_0, θ_0 choisie comme référence.

Dans la pratique, cette direction est souvent choisie horizontale, ou bien encore, prend-on comme référence le champ produit dans la direction horizontale par un doublet qui rayonnerait la même puissance HF que l'antenne considérée.

244 - Dans le cas du doublet, la fonction $\rho = f(\varphi, \theta)$ est définie par le rapport du champ $\mathcal{E}$ dans la direction φ, θ , au champ dans la direction horizontale $\varphi, \frac{\pi}{2}$. Or ce dernier champ est égal à $\frac{I l \omega}{r}$. La fonction $\rho = f(\varphi, \theta)$ s'écrit donc :

$$\rho = f(\varphi, \theta) = \frac{\mathcal{E}(\varphi, \theta)}{\mathcal{E}(\varphi, \theta = \frac{\pi}{2})} = \sin \theta$$

245 - Cette expression ne contenant pas φ , on en déduit que la surface cherchée est de révolution autour de Oz . Dans un plan méridien quelconque, le diagramme de rayonnement est défini par la même équation que la surface : $\rho = \sin \theta$. Or cette équation représente un cercle tangent à Oz en 0 et dont le diamètre OA est égal à l'unité. La surface polaire est donc le tore obtenu en faisant tourner ce cercle de diamètre $OA = 1$ autour de sa tangente verticale Oz (fig. 241).

246 - Le diagramme de directivité dans un plan vertical quelconque est obtenu en faisant une coupe de ce tore par un plan vertical passant par Oz ; il est composé de deux cercles tangents tous deux en 0 à la verticale Oz , et dont les diamètres sont égaux à l'unité (fig. 242).

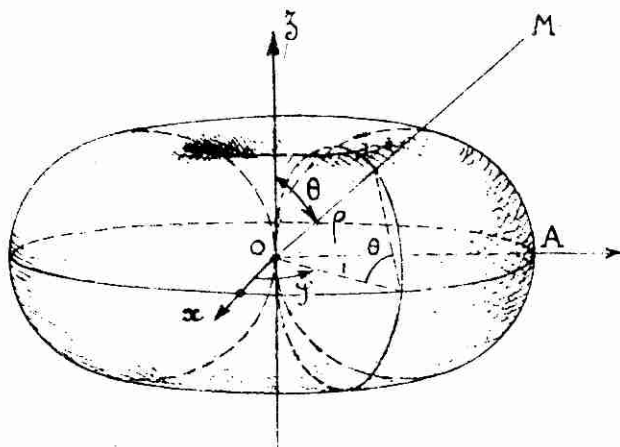


Fig. 241

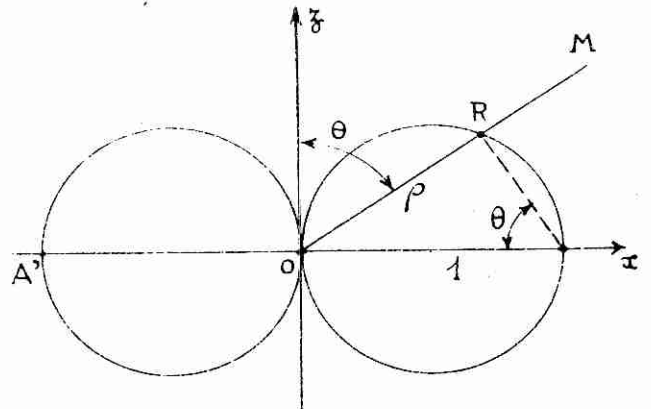


Fig. 242

247 - Dans le plan horizontal xoy , correspondant à $\theta = \frac{\pi}{2}$, le diagramme est un cercle ayant son centre à l'origine O des coordonnées. Il en est de même pour les diagrammes relatifs à des colatitudes θ différentes de $\frac{\pi}{2}$, avec cette différence, toutefois, que le rayon du cercle, au lieu d'être égal à l'unité, est alors égal à $\sin \theta$.

248 - Les diagrammes qui précèdent sont relatifs à la composante électrique tangentielle, c'est-à-dire au champ électrique total. On aurait aussi bien pu prendre en considération, la composante verticale du champ électrique; celle-ci a pour valeur :

$$\epsilon_v = \epsilon \sin^2 \theta = - \frac{I l \omega \sin^2 \theta}{r} \cos(\omega t - \alpha r)$$

et son amplitude :

$$\epsilon_v = \frac{I l \omega \sin^2 \theta}{r}$$

La fonction $\rho = f(\theta)$ qui définit le diagramme dans un plan vertical (ou la surface polaire toute entière), est, cette fois :

$$\rho = \sin^2 \theta.$$

Le diagramme, dans un plan vertical, a encore l'aspect

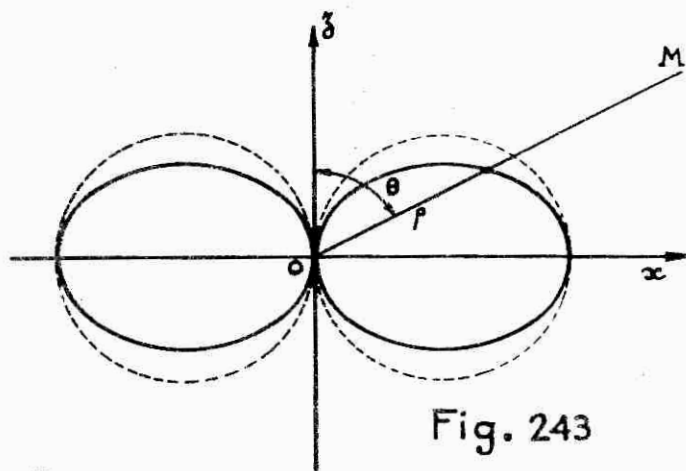


Fig. 243

de deux courbes fermées tangentes à la verticale à l'origine des coordonnées, mais celles-ci ont une forme plus aplatie, entièrement contenue à l'intérieur desdits cercles (fig. 243).

Lignes de force électriques et magnétiques du doublet électrique.

251 - Par définition (Chap. II_a § 214) les lignes de force électriques sont les lignes de l'espace qui admettent, en tous leurs points, le champ électrique $\vec{E}$ pour tangente. De même les lignes de force magnétique sont, en chacun de leurs points, tangentes au champ magnétique $\vec{h}$ existant en ces mêmes points.

252 - On obtient les équations des lignes de force en question, en écrivant que la tangente en un point quelconque de l'espace est parallèle au vecteur $\vec{E}$ ou au vecteur $\vec{h}$.

Soient, par exemple :

$$y = f(x) \text{ et } z = g(x),$$

les deux équations de la ligne de force supposée connue, et soient dx, dy, dz les projections d'un élément différentiel ds de cette ligne. On devra avoir les deux relations :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}, \text{ ou encore } \frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} \text{ et } \frac{dz}{dx} = \frac{E_z}{E_x}.$$

Or les trois quantités dx, dy, dz sont liées par les deux relations :

$dy = f'(x) dx$ $dz = g'(x) dx$,
 $f'(x)$ et $g'(x)$ étant les dérivées premières des fonctions $f(x)$ et $g(x)$.

$f'(x)$ et $g'(x)$ devront donc satisfaire aux deux équations suivantes :

$$f'(x) = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}.$$

Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ cherchées sont définies par ces deux équations qui constituent un système de deux équations différentielles du premier ordre. L'intégration de ce système introduit deux constantes arbitraires d'où il suit que les lignes de force cherchées forment une famille de lignes doublement infinie. Ceci était d'ailleurs à prévoir puisqu'il doit passer une ligne de force en chaque point de l'espace.

253 - Dans le cas du doublet électrique la détermination des lignes de force se simplifie parce que :

- 1° : En tous les points d'un plan méridien quelconque le champ électrique $\vec{E}$ est un vecteur dont la direction est contenue dans ce même plan.
- 2° : En tous les points d'un plan horizontal quelconque, le champ magnétique $\vec{H}$ est un vecteur dont la direction est contenue également dans ce dernier plan.

On en déduit immédiatement :

- 1° : que les lignes de force du champ électrique sont des courbes planes tracées dans les différents plans méridiens du doublet.
- 2° : que les lignes de force du champ magnétique sont des courbes planes tracées dans les différents plans horizontaux.

Dans les deux cas la solution sera donnée, non plus par l'intégration d'un système de deux équations différentielles, mais

par l'intégration d'une seule équation .

Signes de force magnétique du doublet électrique.

254 - Désignons par r' la distance d'un point M (r, φ, θ) de l'espace à l'axe oz (fig. 251) . Dans le plan horizontal de M , les lignes de force

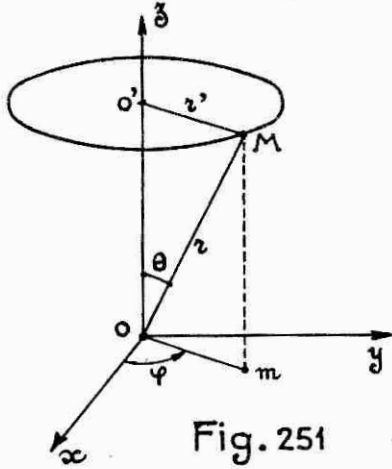


Fig. 251

seront définies par leurs équations en coordonnées polaires : $r' = f(\varphi)$, φ étant l'azimut de M . Cette courbe fait avec la normale au rayon $O'M$ en M un angle dont la tangente est $\frac{dr'}{r'd\varphi}$. Or cet angle doit être nul, puisque le champ magnétique

est perpendiculaire à $O'M$ (comme à OM) . On doit donc avoir :

$$\frac{dr'}{d\varphi} = 0 .$$

L'intégration de cette "équation différentielle" donne immédiatement : $r' = Cte$

Les lignes de force magnétique sont des cercles ayant leur centre sur l'axe

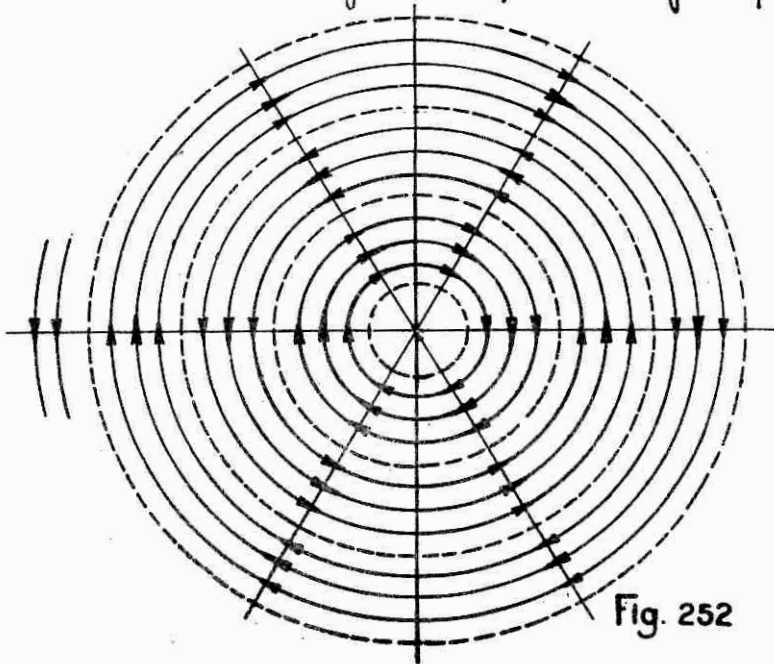


Fig. 252

leur centre sur l'axe oz . La fig 252 représente diverses de ces lignes de force dans le plan horizontal xoy . Les cercles en pointillé sont les lieux des points où le champ change de sens en s'annulant .

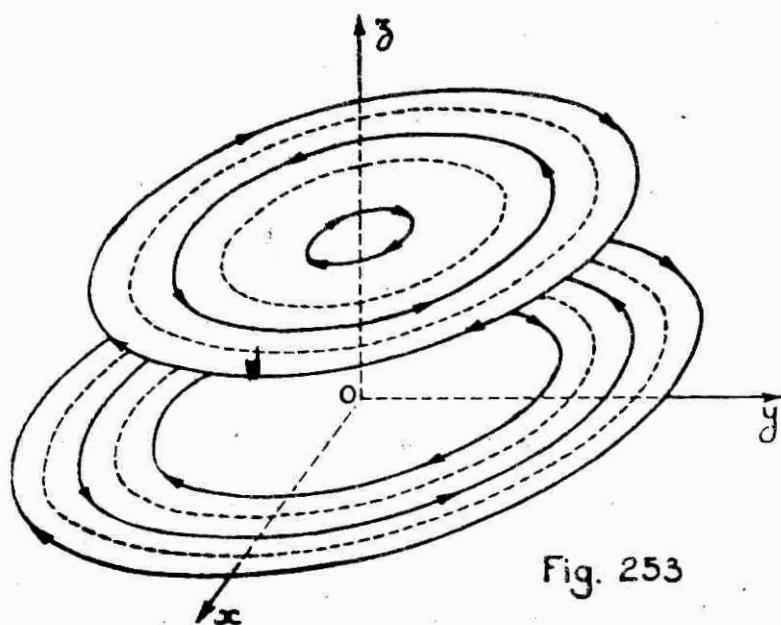


Fig. 253

Les rayons de deux cercles successifs en pointillé différent de $\frac{\lambda}{2}$, mais il est visible que cette différence va en augmentant et cesse d'être constante dans un plan horizontal donné dès que celui cesse d'être

confondu avec le plan équatorial xoy (fig. 253).

Lignes de force électrique du doublet électrique.

255 - Comme il a été dit plus haut, ces lignes de force sont des courbes planes contenues dans les divers plans méridiens. Il suffit de les tracer dans l'un quelconque des plans méridiens. Cette opération a été faite, pour la première fois par Hertz, d'où le nom de figures de Hertz quelquefois donné aux courbes obtenues.

La figure obtenue, surtout au voisinage immédiat au doublet, diffère profondément selon la valeur de la phase ωt à laquelle le champ est représenté.

Partons de la phase $\omega t = 0$, les charges $+q$ et $-q$ portées par les extrémités a et a' du doublet sont maxima en valeur absolue, et l'on a (§ 210) : $q = -I\omega \cos \omega t$. Au voisinage immédiat du doublet, on obtient un système de lignes de force qui partent de l'extrémité inférieure a' du doublet pour rejoindre l'extrémité supérieure a (fig 254). On verra plus loin que ces lignes de force sont comprises à l'intérieur d'une sphère S

de centre O et de rayon $r_0 = \frac{\lambda}{4}$.

Par suite de la propagation, ces lignes de force vont en s'élargissant progressivement en même temps qu'augmente le rayon de la sphère S dont la valeur à l'époque t est $r = \frac{\lambda}{4} + ct$ c'est-à-dire $\frac{\lambda}{2\pi} \left(\omega t + \frac{T}{4} \right)$, T étant la période du courant dans le doublet.

Si les charges $+q$ et $-q$ demeuraient invariables, on obtiendrait un système de lignes de force qui, partant toujours de a' pour aboutir à a , ne tarderait pas à s'étendre à tout l'espace, et à se confondre, au bout d'un temps pratiquement très court, avec le champ électrostatique qui a déjà été représenté au Chap. II^a (fig. 7).

Mais les charges $+q$ et $-q$ varient quand le temps s'écoule. Depuis l'époque $t = 0$, elles diminuent en valeur absolue. Ces charges ne sont plus suffisantes pour retenir toutes les lignes de force précédentes, en sorte que les plus proches du doublet, abandonnées par a et a' , n'ont que la ressource de se fermer sur elles-mêmes comme le montre la fig. 254^b. En même temps, le rayon de la sphère S augmente et l'ensemble va en s'élargissant.

À la phase $\omega t = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire à l'époque $t = \frac{T}{4}$, les deux charges $+q$ et $-q$ se sont annulées, et toutes les lignes de force précédentes sont fermées sur elles-mêmes. Le rayon de la sphère S qui les enferme atteint alors $\frac{\lambda}{2}$.

Si la phase continue à croître, de nouvelles charges apparaissent en a et a' , de signes contraires aux précédentes. De nouvelles lignes de force prennent naissance, mais elles sont orientées en sens inverse des précédentes (fig. 254^c). En même temps les lignes de force que nous avons vues se fermer

sur elles-mêmes depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{T}{4}$, continuent à progresser en s'élargissant, comme si elles étaient poussées par une seconde sphère S' de rayon inférieur de $\frac{\lambda}{2}$ à celui de la sphère S .

Cette sphère S' marque la séparation des points de l'espace où le champ électrique a changé de sens en s'annulant.

Ces nouvelles courbes commencent à se refermer sur elles-mêmes à l'époque $t = \frac{T}{2}$ (où à la phase $\omega t = \pi$). L'opération est terminée à l'époque $t = \frac{3T}{2}$, tandis que les précédentes boucles continuent à se développer à l'intérieur des sphères S et S' dont les rayons r et r' augmentent en conservant entre eux une différence constante : $\frac{\lambda}{2}$ (fig. 254^d).

Puis les charges changent à nouveau de sens, et les phénomènes se reproduisent ensuite identiquement, tandis que les rayons des sphères S , S' , S'' , etc... augmentent avec une vitesse égale à la vitesse de propagation des ondes c (fig. 254^e).

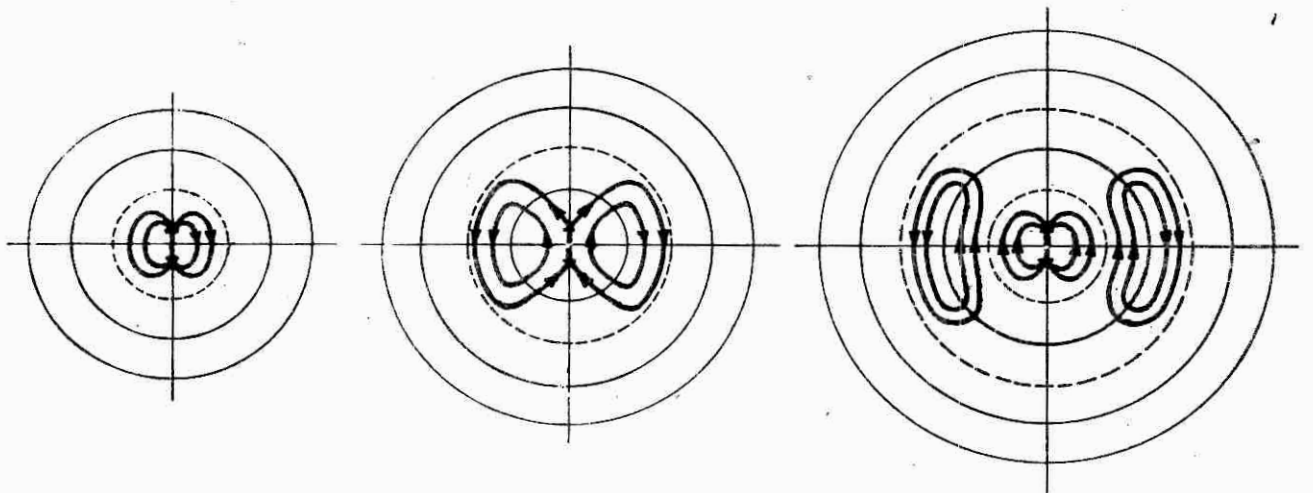


Fig. 254 a

Fig. 254 b

Fig. 254 c

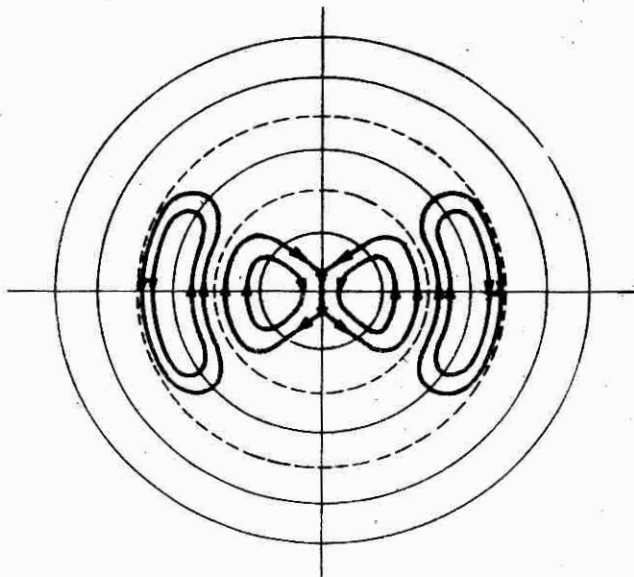


Fig. 254 d

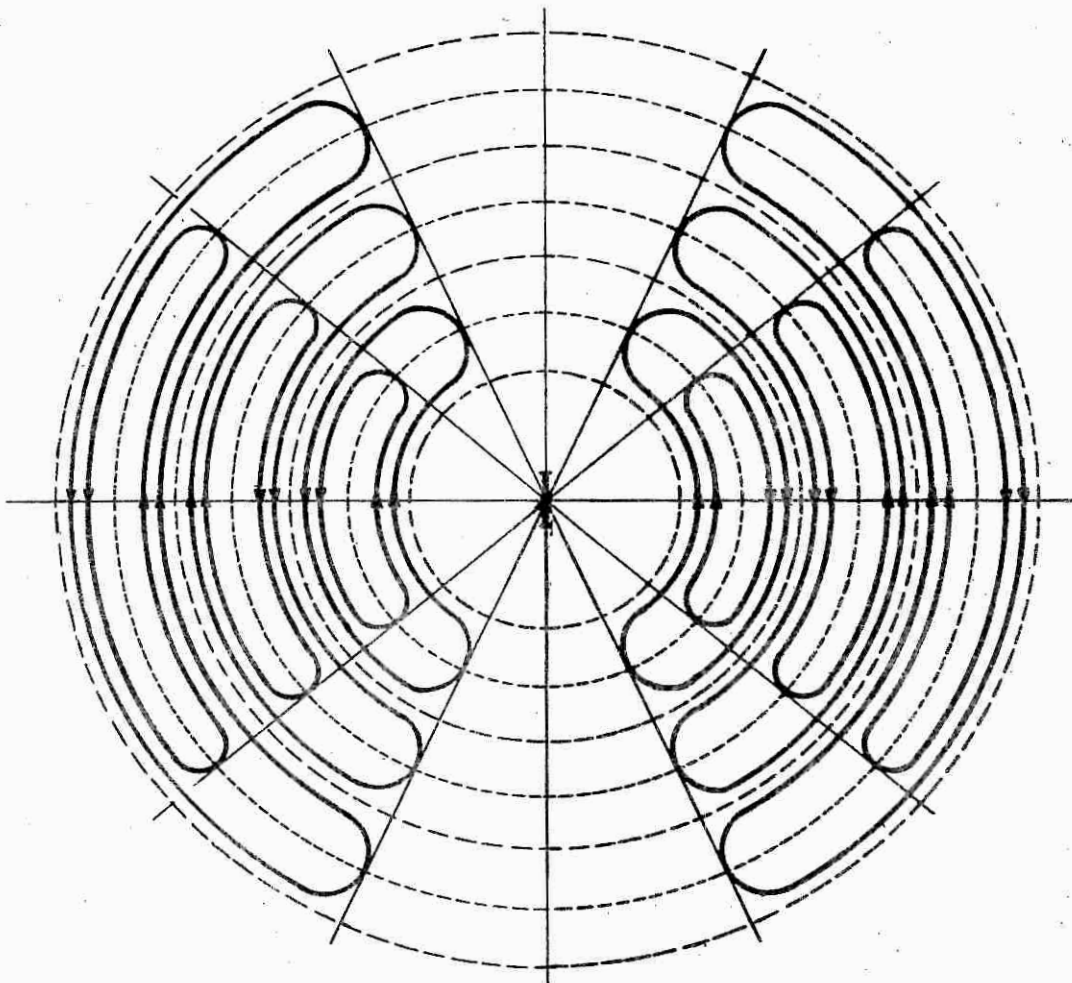


Fig. 254 e

Energie rayonnée par le doublet électrique.

261 - D'après ce qui a été dit au § 163 ci-dessus, nous savons que la densité de puissance rayonnée à travers un élément de surface $d\sigma$ normal à la direction de propagation est mesurée, à chaque instant, par le produit :

$$r = \frac{1}{4\pi} \epsilon \cdot h \sin(\vec{E}, \vec{h}) \quad (\text{en unités électromagnétiques}),$$

qui représente la longueur du vecteur de Poynting au point considéré.

Considérons l'élément de surface $d\sigma$ découpé sur la sphère de rayon r par l'angle solide $d\varphi, d\theta$.

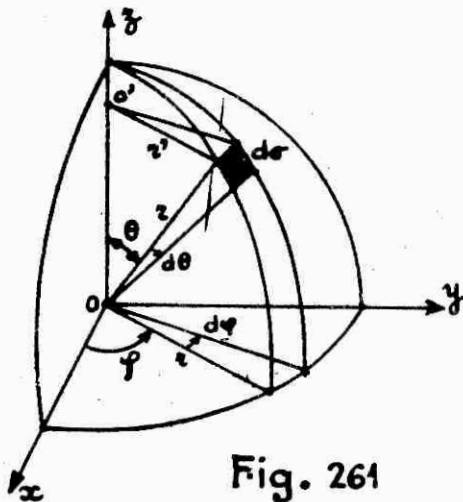


Fig. 261

La grandeur de la surface est (fig. 261) :

$$d\sigma = ds \times ds'$$

$$\text{avec } ds = r' d\varphi = r \sin \theta d\varphi$$

$$ds' = r d\theta$$

d'où résulte :

$$d\sigma = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta.$$

La puissance rayonnée à travers la surface $d\sigma$ par un doublet a, a' placé en O aura pour expression :

$$dw = r d\sigma = \frac{1}{4\pi} r^2 \sin \theta \times \epsilon h \sin(\vec{E}, \vec{h}) d\varphi d\theta.$$

262 - Dans ce qui va suivre nous ne considérerons que des points suffisamment éloignés de l'origine O pour que le champ électrique $\vec{E}$ puisse être considéré comme réduit à sa composante tangentielle $\vec{E}_T$ (ce qui suppose $\alpha r \gg 1$, comme on l'a vu au § 230). ϵ et h sont dès lors des vecteurs perpendiculaires et l'on a $\epsilon = ch$. L'expression de la puissance w devient, dans ces conditions :

$$dw = \frac{1}{4\pi} r^2 \sin \theta \times \frac{\varepsilon^2}{c} d\varphi d\theta$$

Or, d'après le § 231, on a, en unités électromagnétiques, également :

$$\varepsilon = -c \frac{I l \alpha \sin \theta}{r} \cos(\omega t - \alpha r)$$

Donc :

$$dw = \frac{1}{4\pi} c I^2 l^2 \alpha^2 \sin^3 \theta \cos^2(\omega t - \alpha r) d\varphi d\theta.$$

ou bien, puisque $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$dw = \pi c \frac{I^2 l^2 \sin^3 \theta}{\lambda^2} \cos^2(\omega t - \alpha r) d\varphi d\theta.$$

263 - Nous remarquons que cette formule ne contient pas le rayon r , ailleurs que dans l'argument $(\omega t - \alpha r)$ du cosinus carré.

Cette formule nous montre, tout d'abord, qu'en un point donné $M(r, \varphi, \theta)$ la puissance rayonnée à travers l'élément de surface $d\sigma$ normal à OM , varie comme $\cos^2(\omega t - \alpha r)$. Cette puissance est donc toujours positive, et elle varie sinusoïdalement, en fonction du temps, entre les valeurs extrêmes 0 et $\pi c \frac{I^2 l^2 \sin^3 \theta}{\lambda^2} d\varphi d\theta$ avec une fréquence double de celle du courant qui circule dans le doublet. La puissance rayonnée est évidemment nulle au moment où les champs $\vec{E}$ et $\vec{h}$ s'annulent, et maximum quand ces champs sont maxima en valeur absolue, c'est-à-dire aussi bien positifs que négatifs.

264 - On voit, d'autre part que l'expression qui donne le maximum de la puissance à savoir $\pi c \frac{I^2 l^2 \sin^3 \theta}{\lambda^2} d\varphi d\theta$ ne contient pas la variable r . La puissance rayonnée à l'intérieur

d'un angle solide $d\varphi d\theta$ donné varie, en fonction du temps et de la distance r , comme $\cos^2(\omega t - \alpha r)$. Ceci prouve qu'elle se propage avec la vitesse $\frac{\omega}{\alpha} = c$, sans augmenter ni diminuer dans cet angle solide.

Comme la surface de l'élément $d\sigma$ va en augmentant comme r^2 , on en déduit que la densité de puissance va en diminuant comme $\frac{1}{r^2}$, ce que nous savions puisque cette densité de puissance est mesurée par le vecteur de Poynting qui décroît comme $\frac{1}{r^2}$ puisque les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ décroissent comme $\frac{1}{r}$.

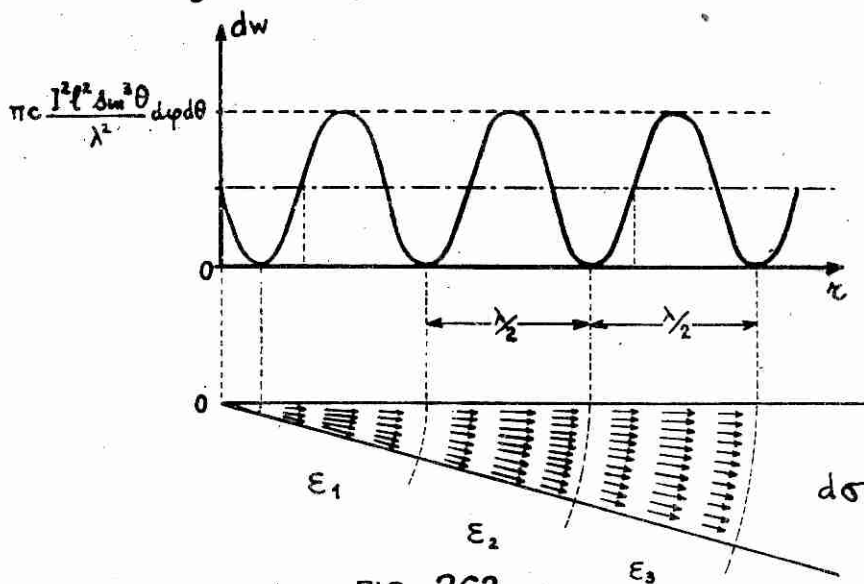


FIG. 262

La fig. 262 représente les variations de la puissance dw dans l'espace à une époque donnée t . Lorsque le temps s'écoule la sinusoïde se déplace vers la droite, entraînant avec elle les arcs de cercles qui représentent les

sections $d\sigma$ de l'angle solide $d\theta d\varphi$ par les sphères de centre O .

Puissance rayonnée dans une zone sphérique de hauteur $d\theta$.

266 - La puissance rayonnée par le doublet dans une zone sphérique toute entière se détermine aisément, au moyen d'une intégration très simple. Cette puissance est en effet donnée par l'intégrale :

$$dw_1 = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dw$$

c'est - à - dire , comme la variable d'intégration ne figure que sous forme d'élément différentiel , $d\varphi$:

$$\begin{aligned} dw_1 &= 2\pi \times \pi c \frac{I^2 l^2 \sin^3 \theta}{\lambda^2} \cos(\omega t - \alpha r) d\theta \\ &= 2\pi^2 c \frac{I^2 l^2 \sin^3 \theta}{\lambda^2} \cos(\omega t - \alpha r) d\theta . \end{aligned}$$

On voit que cette puissance varie avec la colatitude de la zone sphérique élémentaire considérée, comme $\sin^3 \theta$. Cette variation est représentée , en coordonnées polaires par le diagramme de la fig. 263 .

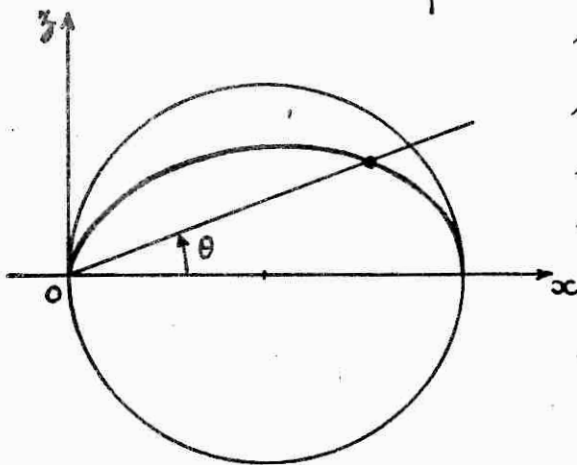


FIG 263

Le maximum de la puissance rayonnée a lieu dans la direction horizontale c'est - à - dire dans le plan équatorial du doublet . La puissance est nulle dans la direction de l'axe du doublet (oz) .

Puissance totale rayonnée dans l'espace par le doublet électrique .

267 - Pour avoir la puissance totale rayonnée par le doublet , il faut totaliser les puissances dw rayonnées à travers toutes les zones sphériques élémentaires constituant la sphère entière . En d'autres termes , il faut intégrer dw , pour θ variant de 0 à π , de même que pour obtenir dw_1 on avait intégré dw pour φ variant de 0 à 2π , au paragraphe précédent .

On a donc :

$$w = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} dw_1$$

ou bien :

$$w = 2 \pi^2 c \frac{I^2 \ell^2}{\lambda^2} \cos^2 (\omega t - \alpha z) \times \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta$$

$$w = 2 \pi^2 c \frac{I^2 \ell^2}{\lambda^2} \cos^2 (\omega t - \alpha z) \times \frac{4}{3}$$

$$w = \frac{8 \pi^2 c}{3} \frac{I^2 \ell^2}{\lambda^2} \cos^2 (\omega t - \alpha z) .$$

Cette puissance varie sinusoïdalement, avec la pulsation 2ω , entre la valeur 0 et la valeur maximum :

$$W_{\text{Max}} = \frac{8 \pi^2 c}{3} \frac{I^2 \ell^2}{\lambda^2} .$$

268 - La valeur moyenne pendant une période, ou une demi-période du courant dans le doublet, ou encore pendant un temps très grand par rapport à cette période est :

$$\overline{w} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{8 \pi^2 c}{3} \frac{I^2 \ell^2}{\lambda^2} \cos^2 (\omega t - \alpha z) dt$$

c'est-à-dire :

$$\overline{w} = \frac{4 \pi^2 c}{3} \frac{I^2 \ell^2}{\lambda^2} .$$

ou encore :

$$\overline{w} = \frac{8 \pi^2 c}{3} \frac{\ell^2}{\lambda^2} I_{\text{eff}}^2 .$$

I_{eff} étant l'intensité efficace du courant dans le doublet .

Résistance de rayonnement du doublet électrique.

271 - La dernière expression ci-dessus montre que la puissance rayonnée est la même que celle qui serait dépensée par le courant $i = I \sin \omega t$ du doublet dans une résistance R_R dont la valeur serait :

$$R_R = \frac{8\pi^2 c}{3} \frac{l^2}{\lambda^2} \quad \text{ou} \quad R_R = \frac{8\pi^2 c}{3} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2.$$

ou encore : $R_R = \frac{2c}{3} \alpha^2 l^2$, puisque $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Par définition, cette résistance R_R est appelée la résistance de rayonnement du doublet.

272 - Au lieu des unités C.G.S. électromagnétiques, nous voulons faire usage des unités pratiques, lesquelles sont aussi des unités électromagnétiques ($k' = 1$), et obtenir la résistance R en ohms, il faut exprimer la vitesse de la lumière c en quadrants (10.000 kilomètres). Ses unités adoptées pour l et λ sont indifférentes pourvu qu'elles soient les mêmes pour les deux termes du rapport $\frac{l}{\lambda}$. Comme $c = 300.000 \text{ km/sec} = 30 \text{ quadrants/sec}$, on a :

$$R_{\text{ohms}} = \frac{8\pi^2 \times 30}{3} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2$$

$$R_{\text{ohms}} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2$$

ou encore : $R_{\text{ohms}} = 20 \alpha^2 l^2$, puisque $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$

soit encore : $R_{\text{ohms}} = 789 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2$.

Expressions du champ $\mathcal{E}$ et de l'amplitude $\mathcal{E}$ en fonction de la puissance rayonnée par le doublet.

273 - En fonction de l'intensité I dans le doublet, le champ imaginaire $\mathcal{E}$, à la distance r dans la direction θ , φ s'écrit (§ 235 ci-dessus) :

$$\mathcal{E} = -j c \frac{\alpha l I}{r} e^{-j \alpha r} \sin \theta .$$

ou bien, en prenant la phase du courant I (dont l'amplitude est I) comme origine des phases :

$$\mathcal{E} = -j c \frac{\alpha l I}{r} e^{-j \alpha r} \sin \theta .$$

D'autre part, la puissance rayonnée par le doublet (§ 268 ci-dessus) est :

$$\overline{W} = R_R \times \frac{I^2}{2} = \frac{2c}{3} \alpha^2 l^2 \frac{I^2}{2} = \frac{c}{3} \alpha^2 l^2 I^2 .$$

Nous en tirons la valeur du produit $\alpha l I$ en fonction de $\overline{W}$:

$$\alpha^2 l^2 I^2 = \frac{\overline{W}}{\frac{c}{3}} = \frac{3 \overline{W}}{c}$$

$$\alpha l I = \sqrt{\frac{3 \overline{W}}{c}} .$$

Portons cette valeur dans l'expression de $\mathcal{E}$; il vient :

$$\mathcal{E} = -j \frac{1}{r} \sqrt{3 c \overline{W}} e^{-j \alpha r} \sin \theta ,$$

d'où l'amplitude $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{r} \sqrt{3 c \overline{W}} \sin \theta .$$

Dans le plan perpendiculaire au doublet ($\theta = \frac{\pi}{2}$) on a :

$$\mathcal{E}_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{r} \sqrt{3 c \overline{W}}$$

274 - On observera que, dans ces expressions de $\mathcal{E}$ ou de $\mathcal{E}$, la longueur l du doublet n'intervient pas. Le champ obtenu ne dépend que de la puissance $\bar{w}$ et de la distance r , pour une colatitude θ donnée (par exemple $\theta = \frac{\pi}{2}$).

275 - En unités pratiques (volts, watts), comme au § 272 ci-dessus, il faut faire $c = 30$ quadrants, mais, à condition d'utiliser la même unité de longueur pour le champ et pour la distance r , cette dernière unité peut être choisie à volonté.

On a, par exemple :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \frac{\text{volts}}{\text{mètre}} &= \frac{1}{r \text{ mètres}} \sqrt{3 \times 30 \bar{w} \text{ watts}}, \\ &= \frac{1}{r \text{ mètres}} \sqrt{90 \bar{w} \text{ watts}}.\end{aligned}$$

Si nous exprimons $\bar{w}$ en kilowatts, il faut écrire :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \frac{\text{volts}}{\text{mètre}} &= \frac{1}{r \text{ mètres}} \times \sqrt{90 \times 1000 \bar{w}_{\text{kw}}}, \\ \mathcal{E} \frac{\text{volts}}{\text{mètre}} &= \frac{300}{r \text{ mètres}} \sqrt{\bar{w}_{\text{kw}}}\end{aligned}$$

ou encore :

$$\mathcal{E} \frac{\text{millivolts}}{\text{mètre}} = \frac{300}{r_{\text{km}}} \sqrt{\bar{w}_{\text{kw}}}$$

On trouve, en particulier, à un kilomètre de distance, (toujours dans la direction horizontale) pour une puissance rayonnée de 1 kilowatt, un champ $\mathcal{E}$ d'amplitude :

$$\mathcal{E} = 300 \text{ millivolts par mètre}.$$

Si on veut la valeur efficace de ce champ, il faut encore diviser par $\sqrt{2}$, ce qui donne :

$$\mathcal{E}_{\text{eff}} = \frac{300}{\sqrt{2}} = 212 \text{ millivolts par mètre}$$

Rayonnement d'un doublet vertical placé au contact d'un plan horizontal indéfini et parfaitement conducteur.

276 - Soit oa ce doublet de longueur l , placé suivant Oz , perpendiculairement au plan xoy supposé parfaitement conducteur (fig. 276).

D'après le principe des images (§ 183), pour avoir le champ dans une direction quelconque de l'espace situé au dessus de xoy il faut ajouter au champ produit par le doublet oa , celui

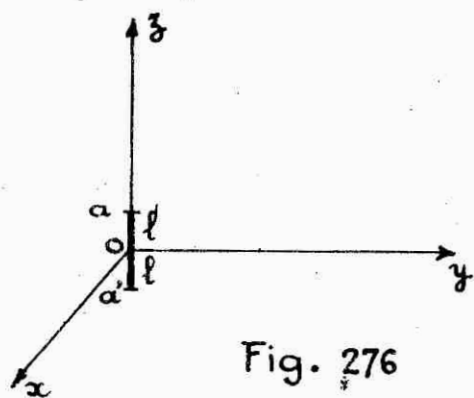


Fig. 276

qui serait produit par son image $a'o$ supposée parcourue à chaque instant par le même courant i que le doublet.

Tout se passe comme si la longueur du doublet était doublée. La puissance rayonnée serait donc multipliée par 4 si le rayonnement s'étendait à tout

l'espace. En réalité, elle n'est multipliée que par 2 puisqu'il n'y a d'énergie réelle que dans la demi-sphère située au-dessus du plan xoy . La puissance moyenne totale rayonnée par le doublet oa dans ces conditions est donc :

$$W = \frac{16 \pi^2 c}{3} \frac{l^2}{\lambda^2} I_{\text{eff}}^2 = \frac{4c}{3} \alpha^2 l^2 I_{\text{eff}}^2.$$

ou bien, en unités pratiques :

$$W_{\text{watts}} = 160 \pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 I_{\text{eff}}^2 = 40 \alpha^2 l^2 I_{\text{eff}}^2.$$

Quant à la résistance de rayonnement, elle a pour valeur :

$$R_{\text{ohms}} = 160 \pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 = 40 \alpha^2 l^2.$$

277 - En fonction de la puissance $\bar{w}$ rayonnée par le doublet, le champ se trouve évidemment multiplié par $\sqrt{2}$ par suite de la présence du sol, puisque, à égalité d'intensité I dans le doublet, l'amplitude du champ se trouve multipliée par deux, et la puissance rayonnée également. On a donc

$$\mathcal{E} = -j \frac{1}{r} \sqrt{6 c \bar{w}} e^{-j \alpha r} \sin \theta$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{r} \sqrt{6 c \bar{w}} \sin \theta$$

$$\mathcal{E}_{\theta = \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{r} \sqrt{6 c \bar{w}}$$

c'est-à-dire, en pratique :

$$\mathcal{E}_{\theta = \frac{\pi}{2}}^{\text{eff}} = 300 \frac{\sqrt{\bar{w} \text{ kw}}}{r \text{ km}}, \text{ en millivolts par mètre.}$$

278 - L'expression du champ en fonction de la longueur du doublet, et du courant I qui le traverse est évidemment :

$$\mathcal{E} = -2 j c \frac{\alpha l I}{r} e^{-j \alpha r} \sin \theta$$

ce qui donne pour amplitude :

$$\mathcal{E} = 2 c \frac{\alpha l I}{r} \sin \theta$$

et dans le plan horizontal ($\theta = \frac{\pi}{2}$) :

$$\mathcal{E}_0 = 2 c \frac{\alpha l I}{r}$$

ou bien :

$$= 4 \pi c \left(\frac{l}{\lambda} \right) \frac{I}{r}$$

ou encore, en unités pratiques, comme au § 234 :

$$\mathcal{E}_0^{\frac{\text{volts}}{\text{cm}}} = 120 \pi \left(\frac{l}{\lambda} \right) \frac{I^{\text{Amp}}}{r^{\text{cm}}}$$

Champs d'une paire de doublets parallèles

281 - Considérons deux doublets de longueur l , parallèles, parcourus par des courants de même amplitude, et orientés d'une façon quelconque dans l'espace, par rapport à la droite $a_1 a_2$ qui joint leurs milieux.

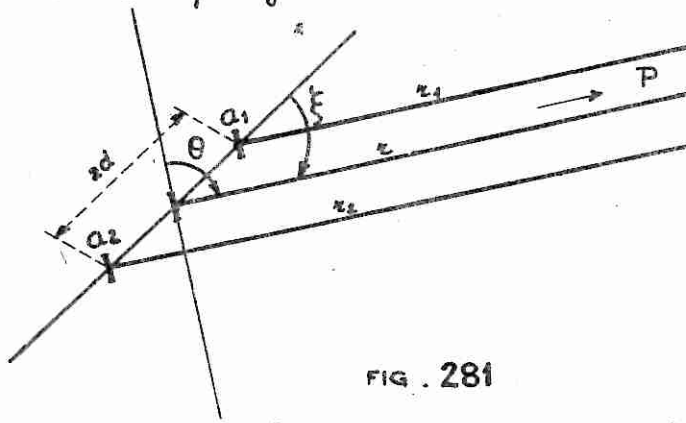


FIG. 281

Soient $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ les champs créés par ces deux doublets en un point P situé à grande distance (par rapport à la distance $a_1 a_2 = 2d$) dans une direction quelconque de l'espace.

La distance $a_1 a_2$ étant négligeable vis-à-vis des distances $Pa_1 = r_1$ et $Pa_2 = r_2$, on peut considérer que la direction du point P fait avec la direction de l'un ou de l'autre doublet le même angle θ .

Le champ imaginaire $\mathcal{E}_1$ produit par le doublet a_1 est, d'après le § 235 ci-dessus :

$$\mathcal{E}_1 = -j \frac{c \alpha l I_1}{r_1} \sin \theta e^{-j \alpha r_1}$$

de même le champ $\mathcal{E}_2$ émanant du second doublet est :

$$\mathcal{E}_2 = -j \frac{c \alpha l I_2}{r_2} \sin \theta e^{-j \alpha r_2}$$

Les amplitudes correspondantes $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ ont pour valeurs :

$$\epsilon_1 = \frac{c \alpha l I}{r_1} \sin \theta$$

$$\epsilon_2 = \frac{c \alpha l I}{r_2} \sin \theta$$

Elles sont égales, car leur rapport est égal à $\frac{r_2}{r_1}$, c'est-à-dire à 1, puisque l'on peut écrire, par exemple :

$$r_2 = r_1 \pm \epsilon \text{ avec } \epsilon \leq 2d,$$

et que $2d$ est négligeable devant r_1 ou r_2 .

En pratique, nous désignerons par r la distance qui sépare le point P du milieu a_0 de l'intervalle $a_1 a_2$, et nous écrirons la valeur commune de l'amplitude $\epsilon_1 = \epsilon_2$, ainsi qu'il suit :

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{c \alpha l I}{r} \sin \theta$$

Les champs $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ pourront, dès lors, se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = -j \frac{c \alpha l I_1}{r} \sin \theta e^{-j \alpha r_1} \\ \mathcal{E}_2 = -j \frac{c \alpha l I_2}{r} \sin \theta e^{-j \alpha r_2} \end{cases}$$

282 - Supposons que les courants I_1 et I_2 dans les deux doublets soient en phase ; comme ils ont déjà même amplitude, ils auront même valeur imaginaire. Soit $I = I_1 = I_2$ leur valeur commune :

Les deux champs $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ s'écriront :

$$\mathcal{E}_1 = -j \frac{c \alpha l I}{r} \sin \theta e^{-j \alpha r_1}$$

$$\mathcal{E}_2 = -j \frac{c \alpha l I}{r} \sin \theta e^{-j \alpha r_2}$$

Ces deux champs présentent une différence de phase :

Phase de $\mathcal{E}_2$ - Phase de $\mathcal{E}_1 = (-\alpha r_2) - (-\alpha r_1) = \alpha (r_1 - r_2)$
 qui provient de la différence absolue $r_1 - r_2$. En effet cette différence ne s'annule pas quand le point P s'éloigne indéfiniment ; elle tend, au contraire, vers une limite fixe qui est pratiquement atteinte dès que la distance $a_1, a_2 = 2d$ est devenue négligeable vis-à-vis de r .

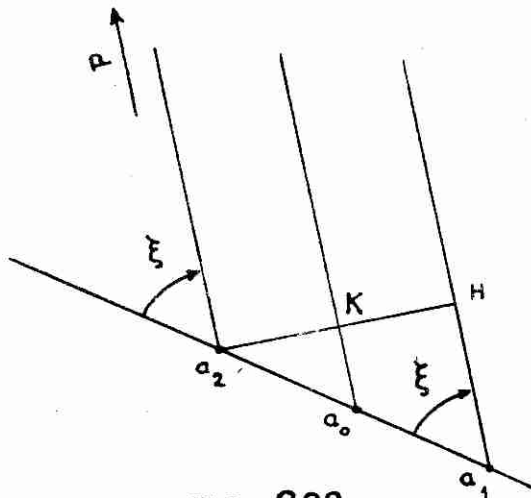


FIG. 282

est égale à $a_1 H$:

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &= a_1 H = a_1 a_2 \cos \xi \\ &= 2d \cos \xi . \end{aligned}$$

283 - Il en découle un déphasage qui est égal à $\alpha (r_1 - r_2)$, c'est-à-dire : $2 \alpha d \cos \xi$.

La méthode vectorielle nous donne immédiatement l'amplitude $\mathcal{E}$ du champ résultant :

$$\mathcal{E} = 2 \mathcal{E}_1 \cos \frac{2 \alpha d \cos \xi}{2}$$

$$\text{ou : } \mathcal{E} = 2 \mathcal{E}_1 \cos (\alpha d \cos \xi)$$

Comparons les champs $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ au champ $\mathcal{E}_0$ d'un troisième doublet identique aux précédents et qui serait placé en a_0 parallèlement aux deux autres. Il est visible que, par rapport à $\mathcal{E}_0$, le champ $\mathcal{E}_2$ sera en avance de $(\alpha d \cos \xi)$ et que $\mathcal{E}_1$ sera en retard du même angle. Comme les amplitudes

de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont égales, on est assuré (fig. 282) que le champ résultant $\mathcal{E}$ est en phase avec le champ $\mathcal{E}_0$.

284 - Ces résultats se retrouvent immédiatement par la méthode des imaginaires. En effet, reprenons les expressions des champs $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ du § 283 ci-dessus :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = -j \frac{c \alpha l J}{r} \sin \theta e^{-j \alpha r_1} \\ \mathcal{E}_2 = -j \frac{c \alpha l J}{r} \sin \theta e^{-j \alpha r_2} \end{cases}$$

Le champ résultant $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ est :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -j \frac{c \alpha l J}{r} \sin \theta \left(e^{-j \alpha r_1} + e^{-j \alpha r_2} \right)$$

Or, d'après la fig. 282 on a :

$$\begin{cases} r_1 = r - OK = r - d \cos \xi \\ r_2 = r + OK = r + d \cos \xi \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned} e^{-j \alpha r_1} + e^{-j \alpha r_2} &= e^{-j \alpha r + j \alpha d \cos \xi} + e^{-j \alpha r - j \alpha d \cos \xi} \\ &= e^{-j \alpha r} \left(e^{j \alpha d \cos \xi} + e^{-j \alpha d \cos \xi} \right) \\ &= 2 e^{-j \alpha r} \frac{e^{j \alpha d \cos \xi} + e^{-j \alpha d \cos \xi}}{2} \\ &= 2 e^{-j \alpha r} \cos (\alpha d \cos \xi) . \end{aligned}$$

D'où l'expression de $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = -j \frac{c \alpha l J}{r} \sin \theta \cdot e^{-j \alpha r} 2 \cos (\alpha d \cos \xi) .$$

Ce qui démontre les propositions du § 283 ci-dessus à savoir que :

- 1° : l'amplitude du champ résultant est égale à l'amplitude du champ d'un doublet multipliée par

$$2 \cos (\alpha d \cos \xi) .$$

2° : la phase est la même que celle du doublet unique placé au milieu a_0 de l'intervalle a_1, a_2 .

Cas où les courants I_1 et I_2 dans les deux doublets ne sont pas en concordance de phase .

285 - Ce cas se ramène aisément au précédent .
En effet , soit 2δ la différence de phase existant entre I_2 et I_1 . On a donc : $I_2 = I_1 e^{2j\delta}$.

Le champ E_2 peut donc s'écrire :

$$E_2 = -j \frac{c \alpha l I_1 e^{2j\delta}}{r} \sin \theta e^{-j\alpha r_2}$$

et le champ résultant :

$$E = E_1 + E_2 = -j \frac{c \alpha l I_1}{r} \sin \theta \times \left[e^{2j\delta} e^{-j\alpha r_2} + e^{-j\alpha r_1} \right]$$

Transformons le facteur composé d'exponentielles ; on a :

$$\begin{aligned} e^{2j\delta} e^{-j\alpha r_2} + e^{-j\alpha r_1} &= e^{j\delta} \left[e^{j\delta} e^{-j\alpha r_2} + e^{-j\delta} e^{-j\alpha r_1} \right] \\ &= e^{j\delta} e^{-j\alpha r} \left[e^{j\delta} e^{-j\alpha d \cos \xi} + e^{-j\delta} e^{j\alpha d \cos \xi} \right] \\ &= e^{j\delta} e^{-j\alpha r} \left[e^{j(\alpha d \cos \xi - \delta)} + e^{-j(\alpha d \cos \xi - \delta)} \right] \\ &= e^{-j\delta} e^{-j\alpha r} 2 \cos (\alpha d \cos \xi - \delta) \end{aligned}$$

Ce qui permet finalement de mettre E sous la forme suivante :

$$E = -j \frac{c \alpha l I_1 e^{j\delta}}{r} \sin \theta \cdot e^{-j\alpha r} \times 2 \cos (\alpha d \cos \xi - \delta)$$

Le champ résultant a maintenant pour amplitude :

$$E = E_1 \times 2 \cos (\alpha d \cos \xi - \delta)$$

et il est en phase avec le champ qui émanerait d'un doublet

unique placé au milieu de l'intervalle $a_1 a_2$ et dans lequel le courant serait $I_1 e^{j\delta}$, c'est-à-dire un courant de même amplitude que dans chacun des deux doublets, mais dont la phase serait égale à la moyenne des phases des courants dans les deux doublets.

Coefficient caractéristique.

286 - Le facteur $2 \cos (\alpha d \cos \xi - \delta)$ par lequel il faut multiplier le champ du doublet a_0 pour obtenir le champ de la paire de doublets parallèles à a_0 et écartés de la distance $2d$, est caractéristique du dédoubllement opéré sur le doublet a_0 .

On observera que, dans ce coefficient, la direction des doublets dans l'espace n'intervient que pour fixer la direction origine à partir de laquelle est compte l'angle θ intervenant dans $\sin \theta$.

287 - Un cas particulier important est celui où le déphasage 2δ est égal à π . C'est en effet ce qui a lieu lorsque le doublet a_2 est constitué par l'image de a_1 dans un plan conducteur parallèle à a_1 . On a alors, pour facteur caractéristique :

$$2 \cos \left(\alpha d \cos \xi - \frac{\pi}{2} \right)$$

c'est-à-dire $2 \sin (\alpha d \cos \xi)$.

288 - Dans ce qui précède, ξ désigne l'angle que fait la direction $a_0 P$ avec la direction $a_0 a_1$ (et non pas la direction $a_0 a_2$ ce qui changerait le signe de $\alpha d \cos \xi$). Dans les applications, il pourra être commode de faire intervenir

l'angle Ψ que fait la même direction $a_0 P$ avec le plan S

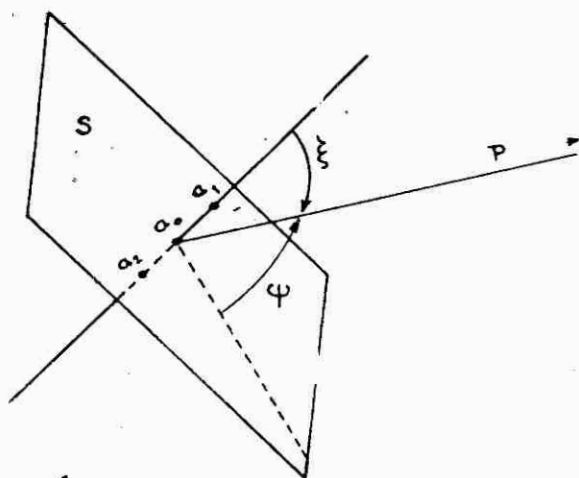


FIG 288

mené perpendiculairement en a_0 à la droite $a_1 a_2$ qui joint les milieux des deux doublets ; cet angle étant compté positivement du côté où se trouve le doublet a_1 .

On a, en ce cas :

$$\Xi + \Psi = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \Xi = \frac{\pi}{2} - \Psi$$

et par conséquent :

$$\cos \Xi = \sin \Psi \quad .$$

Le facteur caractéristique, dans le cas le plus général s'écrit alors :

$$2 \cos (\alpha d \cos \Xi - \delta) = 2 \cos (\alpha d \sin \Psi - \delta) \quad .$$

Diagrammes de rayonnement .

289 - D'après ce qu'on vient de voir, on passera de la valeur du champ E_0 d'un seul doublet, dans une direction φ, θ de l'espace, à celle du champ E produit par le couple de doublets, dans la même direction, en multipliant E_0 par le coefficient caractéristique $2 \cos (\alpha d \cos \Xi - \delta)$.

Il en sera de même pour les diagrammes de rayonnement, dont on obtiendra le rayon polaire ρ , dans la direction θ, φ en multipliant par le même coefficient le rayon polaire ρ_0 correspondant à un seul doublet .

Or, la surface représentative polaire du rayonnement du doublet consiste en un tore qui a été défini au § 241 ci-dessus.

Le rayon polaire de ce tore (ρ_0) devra donc être multiplié par le facteur $2 \cos (\alpha d \cos \Xi - \delta)$ pour donner le

rayon polaire ρ de la nouvelle surface relative au système des deux doublets considérés.

290 - On observera que les variations du coefficient $2 \cos (\alpha d \cos \xi - \delta)$ en fonction de la direction θ, φ de l'espace sont, elles-aussi, représentables par une surface polaire, la surface $\rho_1 = 2 \cos (\alpha d \cos \xi - \frac{\delta}{2})$; on voit, dans ces conditions, que le rayon polaire ρ du nouveau diagramme, dans une direction θ, φ quelconque de l'espace, sera donné par le produit :

$$\rho = \rho_0 \times \rho_1$$

des rayons polaires ρ_0 et ρ_1 relatifs à la direction φ, θ considérée.

C'est en cette égalité $\rho = \rho_0 \times \rho_1$ que consiste le principe de multiplication des caractéristiques, lequel s'applique, comme on le verra, non seulement au couple de doublets, mais encore à un couple d'antennes quelconques pourvu que les paramètres $2d, \xi$ et 2δ conservent la même valeur pour tous les couples d'éléments correspondants dans l'une et l'autre antenne.

291 - Dans le cas qui nous occupe, le résultat de l'opération dépend essentiellement des positions relatives du tore de rayon polaire ρ_0 et de la surface $\rho_1 = 2 \cos (\alpha d \cos \xi - \delta)$, ou, en d'autres termes, de la position de l'axe des doublets (qui coïncide avec celle du tore) avec la direction a_1, a_2 , à partir de laquelle est mesuré l'angle ξ .

Pour nous rendre compte de l'aspect des nouveaux diagrammes, il nous faut d'abord étudier la forme de la surface $\rho_1 = 2 \cos (\alpha d \cos \xi - \delta)$ représentative du coefficient caractéristique.

292 - Étant donné que la direction θ, φ de l'espace n'intervient que par l'angle ξ qu'elle fait avec la direction a, a_2 définie par les milieux des deux doublets, on peut en déduire immédiatement que la surface étudiée est une surface de révolution autour de a, a_2 comme axe. Cette surface sera complètement définie quand on aura tracé sa coupe par un plan quelconque passant par a, a_2 .

293 - Dans un tel plan, cette coupe est évidemment définie par l'équation, en coordonnées polaires :

$$\rho_1 = |2 \cos (\alpha d \cos \xi - \delta)|.$$

294 - On voit tout d'abord qu'il va exister un certain nombre de directions de rayonnement nul ($\rho_1 = 0$). Celles-ci sont définies par l'équation :

$$\cos (\alpha d \cos \xi - \delta) = 0$$

ou bien : $\alpha d \cos \xi - \delta = (2K+1) \frac{\pi}{2}$ avec K entier quelconque, positif ou négatif.

d'où :

$$\cos \xi = \frac{1}{\alpha d} \left[(2K+1) \frac{\pi}{2} + \delta \right]$$

$$\cos \xi = (2K+1) \frac{\lambda}{4d} + \frac{\delta}{\alpha d}$$

ou bien :

$$\cos \xi = (2K+1) \frac{\lambda}{4d} + \frac{\delta}{2\pi} \times \frac{\lambda}{d}.$$

Pour tracer ces directions dans le plan passant par a, a_2 , (fig. 289), portons à partir de a_0 comme origine, les points K_1, K_3, K_5 etc... ayant respectivement comme abscisses :

$$\frac{\lambda}{4d} + \frac{\delta}{\alpha d}, \quad \frac{3\lambda}{4d} + \frac{\delta}{\alpha d}, \quad \frac{5\lambda}{4d} + \frac{\delta}{\alpha d}, \text{ etc...},$$

puis les points K_{-1} , K_{-3} etc... d'abscisses :

$$-\frac{\lambda}{4d} + \frac{\delta}{\alpha d}, \quad -\frac{3\lambda}{4d} + \frac{\delta}{\alpha d}, \text{ etc...}$$

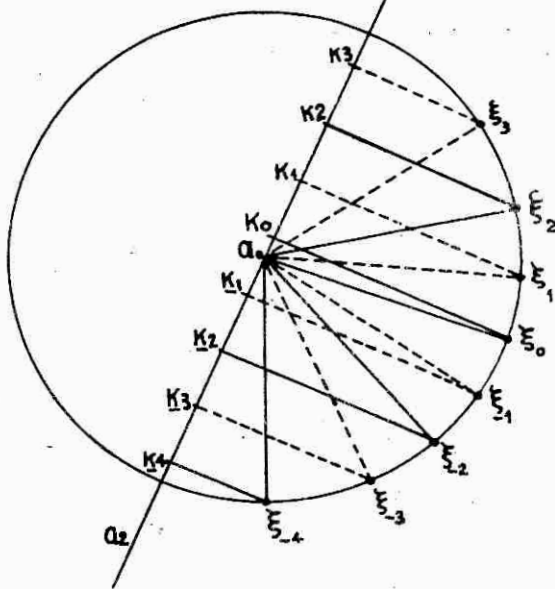


FIG 290

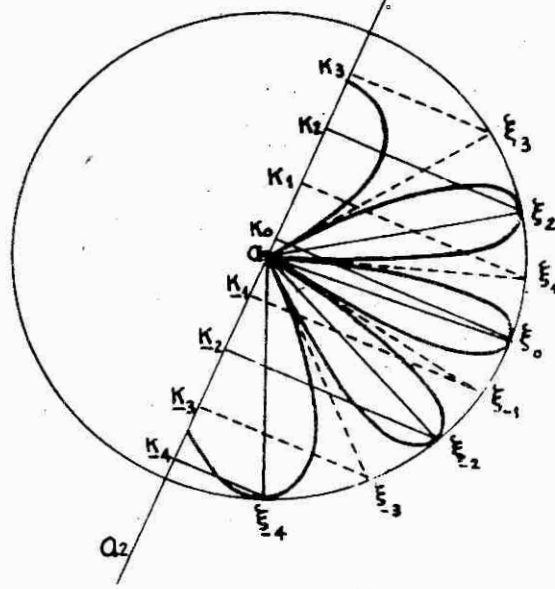


FIG 291

Ses perpendiculaires à a_1, a_2 , menées par ces différents points $K_1, K_3 \dots K_{-1}, K_{-3}$ etc... rencontrent le cercle de rayon 1 aux points $E_1, E_3, E_5 \dots E_{-1}, E_{-3}$ etc... qui définissent les directions de rayonnement nul.

295 - D'autre part, la valeur maximum que puisse atteindre ρ_1 est 2. Donc le diagramme tout entier sera compris à l'intérieur du cercle de rayon $R = 2$ et de centre a_0 , auquel il sera tangent lorsque l'on aura :

$$\cos(\alpha d \cos \xi - \delta) = \pm 1$$

c'est-à-dire

$$\alpha d \cos \xi - \delta = K\pi, \text{ avec } K \text{ entier quelconque.}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \cos \xi &= \frac{1}{\alpha d} [K\pi + \delta] \\ \cos \xi &= 2K \frac{\lambda}{4d} + \frac{\delta}{\alpha d} \end{aligned}$$

Comme précédemment (§ 294) portons, sur la fig. 292,

les points $K_0, K_2, K_4, \dots, K_{-2}, K_{-4}, \dots$ etc ayant respectivement pour abscisses :

$$\frac{\delta}{\alpha d}, \quad \frac{\delta}{\alpha d} + \frac{2\lambda}{4d}, \quad \frac{\delta}{\alpha d} + \frac{4\lambda}{4d}, \dots$$

$$\frac{\delta}{\alpha d} - \frac{2\lambda}{4d}, \quad \frac{\delta}{\alpha d} - \frac{4\lambda}{4d}, \quad \text{etc} \dots$$

Ces points tombent aux milieux des intervalles des points K_1, K_3, K_5 précédemment placés.

Les perpendiculaires à $a_1 a_2$, menées par $K_0, K_2, K_4, \dots, K_{-2}, K_{-4}$ etc ... rencontrent le cercle de rayon $R = 1$ aux points $\xi_0, \xi_2, \xi_4, \dots, \xi_{-2}, \xi_{-4}$ etc ... qui définissent les directions où ρ_1 est maximum et égal à 2.

296 - Enfin, soit ξ le point du cercle de rayon 1, correspondant à une direction faisant un angle ξ quelconque avec la direction $a_0 a_1$, et K la projection du point ξ sur $a_1 a_2$. Il est clair que $a_0 K$ est égal à $\cos \xi$, et que ρ sera le module d'une fonction sinusoïdale de l'abscisse du point K sur $a_1 a_2$. Cette fonction sera nulle lorsque K sera en $K_1, K_3, \dots, K_{-1}, K_{-3}$ etc ... Elle sera maximum pour K en $K_0, K_2, K_4, \dots, K_{-2}, K_{-4}$ etc ...

En définitive, le diagramme se présentera sous l'aspect d'une série de feuilles, ou de lobes, distincts, séparés par les directions de rayonnement nul $\xi_1, \xi_3, \dots, \xi_{-1}, \xi_{-3}$ etc ... et présentant leur elongation maximum dans les directions $\xi_0, \xi_2, \xi_4, \dots$

297 - Quant à la surface polaire de l'espace,

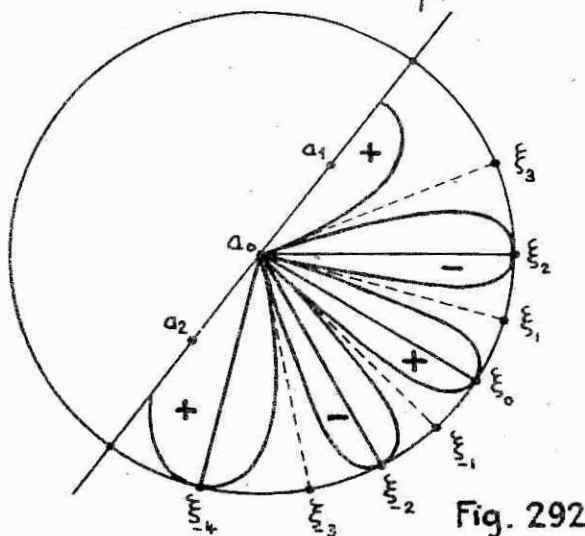


Fig. 292

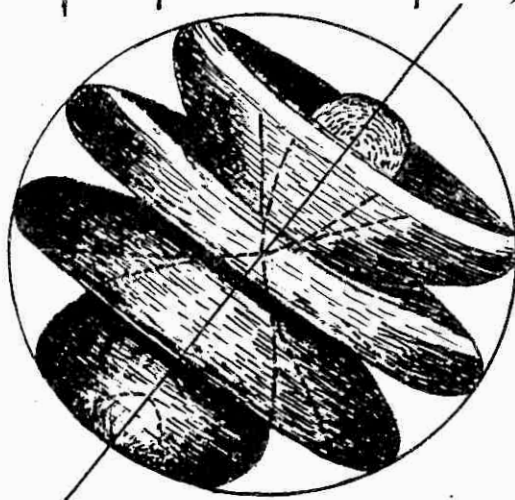


Fig. 293

elle se présentera donc sous l'aspect d'un ensemble de corolles ayant toutes la droite a_1, a_2 pour axe commun et emboîtées les unes dans les autres (fig. 293).

298 - La formule du champ imaginaire $\mathcal{E}$ (§ 285 ci-dessus) montre que la phase de ce champ change brusquement de π chaque fois que $\cos(\alpha d \cos \xi - \delta)$ change de signe, donc chaque fois que la direction ξ franchit l'une quelconque des directions de rayonnement nul définies au § 294 ci-dessus.

En d'autres termes les lobes successifs du diagramme tracé dans un plan méridien correspondent à des champs dont le sens est, à une époque t donnée, alternativement dirigé dans un sens et dans le sens opposé. C'est ce qu'indiquent, conventionnellement les signes + et - dont sont marqués les feuilles successives du diagramme de la fig. 292.

299 - Le nombre de feuilles du diagramme, ou de cloches de la surface de l'espace, dépend du nombre de points tels que $K_0, K_2, K_4, \dots, K_{-2}, K_{-4}$ etc... qui sur a_1, a_2 , tombent à l'intérieur du cercle de rayon unité. A une ou deux unités près (pour tenir compte des feuilles non complètement développées), ce nombre

est égal au quotient de la longueur du diamètre du cercle (soit 2) par la longueur $K_0 K_2$ (soit $\frac{\lambda}{2d}$) c'est donc : $\frac{2}{(\frac{\lambda}{2d})} = \frac{d}{\lambda}$.

Ce nombre sera d'autant plus grand que le rapport $\frac{d}{\lambda}$ sera plus grand.

300 - Quant au décalage δ il influe sur la position absolue des points K_0, K_1, K_2 etc... mais pas sur leurs intervalles respectifs.

En faisant varier δ on ne modifie donc pas (à une ou deux unités près, tenant compte des feuilles incomplètes comme précédemment) le nombre des feuilles du diagramme, mais on modifie les directions ξ_1, ξ_2 etc... dans lesquelles le rayonnement est nul ou maximum.

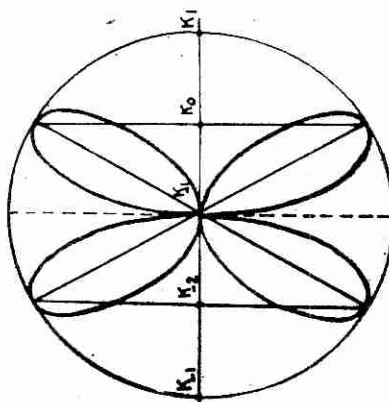
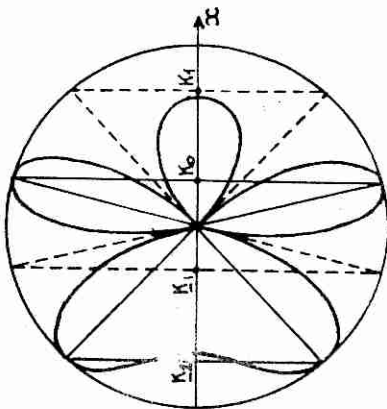
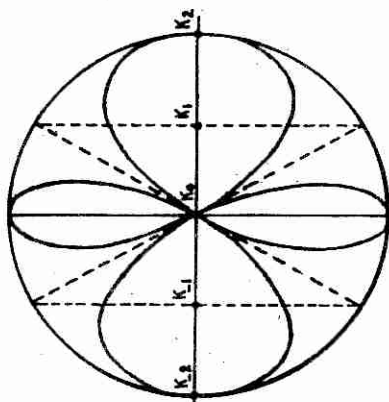
On a même la possibilité, en ajustant δ convenablement, d'amener à coïncider avec une direction θ, φ de l'espace, à volonté :

- soit une direction de rayonnement nul
- soit une direction de coefficient p_1 maximum.

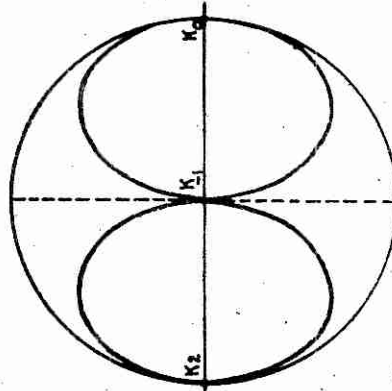
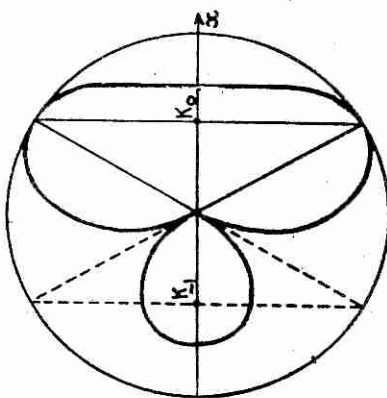
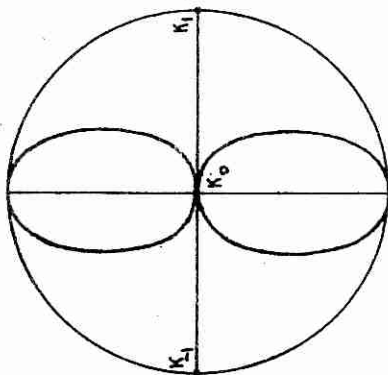
301 - Dans le cas particulier où le déphasage 2δ est nul (courants en phase dans les deux doublets), le point K_0 coïncide avec a_0 et le plan équatorial, perpendiculaire à a_1, a_2 en a_0 est un plan de rayonnement maximum.

Par ailleurs, les points K_{-1}, K_{-2} etc... sont symétriques de K_1, K_2 etc... par rapport au point a_0 . La surface polaire $p_1 = 2 \cos(\alpha d \cos \xi - \delta)$ toute entière est donc symétrique par rapport à ce même plan équatorial (et de rayonnement maximum).

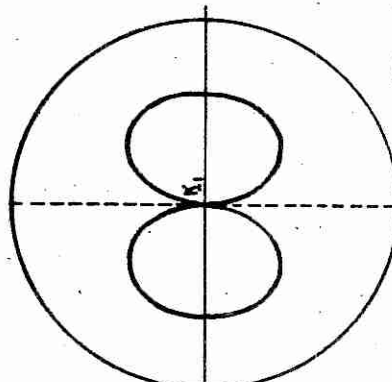
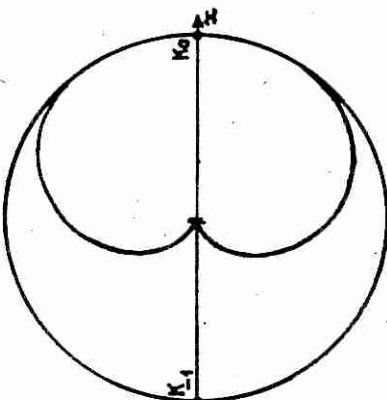
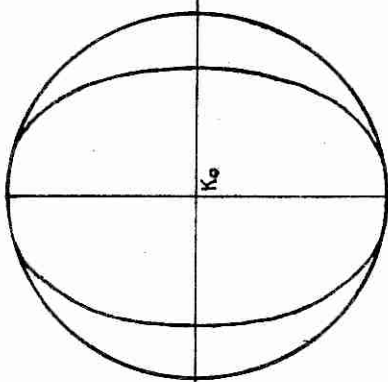
$$\frac{2d}{\lambda} = 1$$



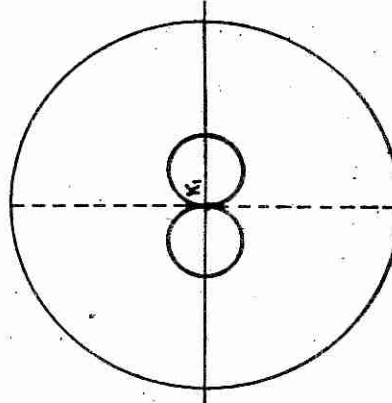
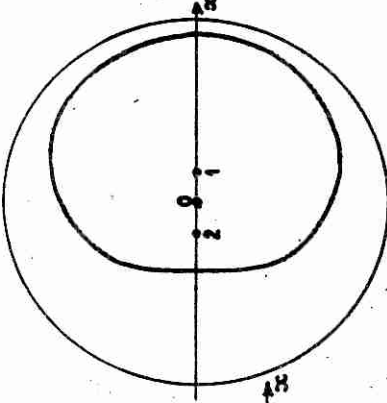
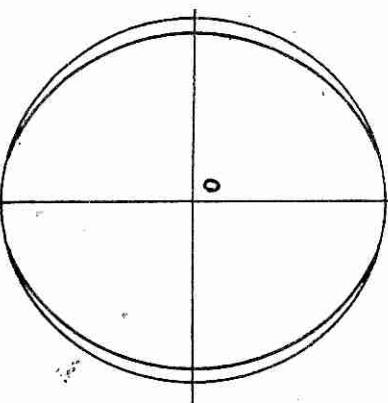
$$\frac{2d}{\lambda} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{2d}{\lambda} = \frac{1}{4}$$



$$\frac{2d}{\lambda} = \frac{1}{8}$$



$$2\delta = 0$$

$$2\delta = \frac{\pi}{2}$$

$$z = j e^{j\delta}$$

$$2\delta = \pi$$

Planche 294

302 - Dans le cas particulier, opposé du précédent, où le déphasage 2δ est égal à π (courants opposés dans les deux doublets), c'est le point K_{-1} qui est en coïncidence avec le centre a_0 . En effet, l'abscisse de K_{-1} est (§ 294) :

$$-\frac{\lambda}{4d} + \frac{\delta}{\alpha d} = -\frac{\lambda}{4d} + \frac{\pi}{2\alpha d} = -\frac{\lambda}{4d} + \frac{\lambda}{2\pi \times 2d} = -\frac{\lambda}{4d} + \frac{\lambda}{4d}$$

Le plan perpendiculaire à a_1, a_2 en a_0 est, cette fois, un plan de rayonnement nul.

D'autre part le point K_{-2} est symétrique de K_0 par rapport à a_0 , K_{-3} est symétrique de K_{+1} , etc ... Le plan équatorial (de rayonnement nul) dont il était question ci-dessus est encore un plan de symétrie pour la surface représentative du facteur caractéristique $\rho = 2 \cos(\alpha d \cos \xi - \delta)$.

303 - Enfin, la planche 294 représente certains aspects du diagramme méridien, obtenus pour divers couples particuliers de valeurs données à $\frac{2d}{\lambda}$ et à 2δ . On en retrouvera d'autres au Chap. VIII. (fig.)¹ à l'occasion de l'étude du rayonnement d'une paire d'antennes verticales de même hauteur.

Rayonnement d'un doublet vertical de grandeur l situé à une hauteur h au-dessus d'un plan horizontal parfaitement conducteur.

311 - Ce cas diffère du cas primitivement traité au § 276, par ce fait que le doublet vertical considéré se trouve à la cote $z = h$ au lieu de la cote $z = 0$.

Soit a_1, a_1' ce doublet (fig. 311). D'après le principe des images (§ 181) le champ produit par ce doublet au-dessus du plan conducteur xoy est le même que celui qui serait créé, en l'absence du plan conducteur, par l'ensemble a_1, a_1' et de son image a_2, a_2' par rapport au plan xoy .

312 - Nous sommes donc en présence d'un cas particulier du problème des deux doublets parallèles qui vient d'être étudié (§ 285 ci-dessus), avec les particularités suivantes :

1° : Le doublet donné étant vertical, d'après le § 183 les courants I_1 et I_2 dans ce doublet et dans son image a_2, a_2' sont en phase (ils ont, en outre, même amplitude, bien entendu).

En d'autres termes le déphasage δ est nul.

2° : la distance $2d$ des deux doublets est égale à $2h$.

3° : Les doublets a_1, a_1' et a_2, a_2' étant orientés suivant la droite qui joint ces deux doublets. L'angle ξ que fait avec a_1, a_2 la direction d'un point éloigné quelconque P , coïncide avec la colatitude θ de cette direction comptée à partir de l'axe a_1, a_1' du doublet donné.

Coefficient caractéristique .

313 - D'après ce qui précède, le coefficient caractéristique défini au § 286 ci-dessus s'écrit, dans le cas actuel :

$$2 \cos(\alpha d \cos \xi - \delta) = 2 \cos(\alpha h \cos \theta) .$$

C'est le coefficient par lequel il faut multiplier le champ du doublet vertical a, a' supposé placé à l'origine des coordonnées :

$$-j \frac{c I l \alpha}{r} \sin \theta \cdot e^{-j \alpha r}$$

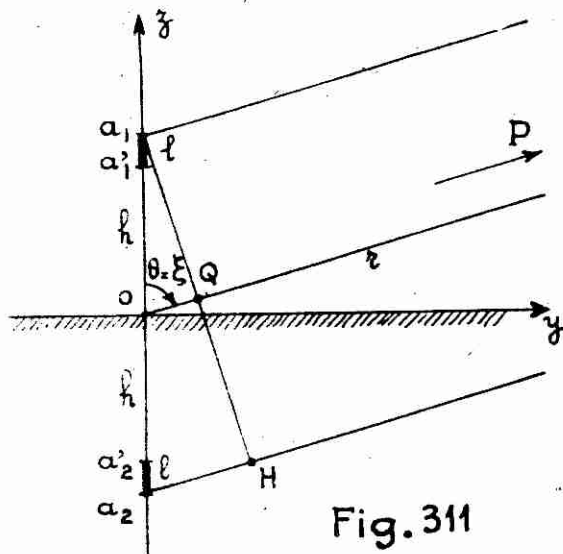


Fig. 311

pour tenir compte du fait que :

- 1° : le doublet a été surélevé à la cote $z = h$ au-dessus du plan xoy .
- 2° : le plan xoy lui-même est devenu un plan parfaitement conducteur :

$$E = -j c \frac{I l \alpha}{r} \sin \theta \times 2 \cos(\alpha h \cos \theta) \times e^{-j \alpha r} .$$

314 - La phase du champ est la même que si ce champ émanait d'un doublet unique placé à l'origine des coordonnées ($z = 0$) . En ce qui concerne l'amplitude E du champ, on peut dire, aussi, que $2 \cos(\alpha h \cos \theta)$ est le coefficient par lequel il faut multiplier l'amplitude du champ du doublet vertical isolé dans l'espace pour tenir compte de la présence du sol supposé parfaitement conducteur, à la distance h au-dessous de ce doublet .

Diagramme de rayonnement

315 - D'après le principe de multiplication des caractéristiques, (§ 290 ci-dessus), on obtiendra le rayon polaire de la surface représentative du rayonnement des deux doublets a, a' et a_2, a'_2 en multipliant le rayon polaire ρ_0 du tore relatif au doublet supposé isolé dans l'espace, par le rayon polaire ρ_1 de la surface $\rho_1 = 2 \cos(\alpha h \cos \theta)$.

Cette dernière surface diffère de la surface représentée sur la fig. 293, par le fait que le déphasage δ est maintenant nul. Il s'en suit que la distance $a_0 K_0$ ou OK_0 est nulle. Le point K_0 coïncide avec l'origine O , et la nouvelle surface ρ_1 admet le plan équatorial ($\theta = \xi = \frac{\pi}{2}$) comme plan de symétrie. Ce plan est en même temps un plan de rayonnement maximum.

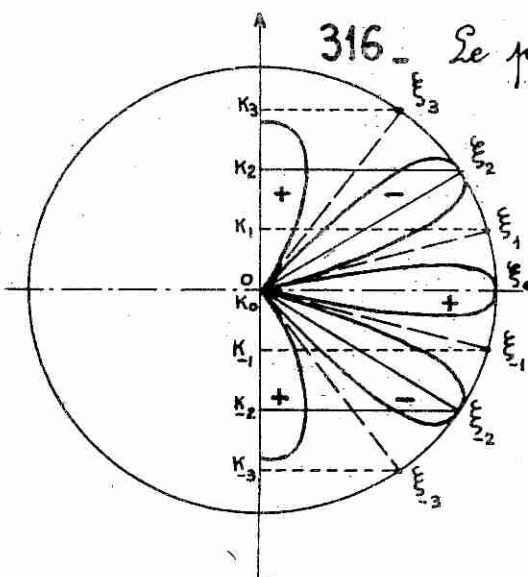


FIG 312

316 - Le problème de la détermination de la surface $\rho = \rho_0 \times \rho_1$, est simplifié dans le cas actuel, parce que le tore ρ_0 et la surface ρ_1 ont leurs axes de révolution en coïncidence.

Dans ces conditions, la surface cherchée ρ sera, elle aussi, de révolution autour du même axe, et on aura sa courbe méridienne en faisant le produit $\rho = \rho_0 \times \rho_1$ de rayons

polaires des 2 diagrammes ρ_0 et ρ tracés dans un plan méridien. Le résultat de l'opération est donné par la fig. 313.

Les directions ξ_1, ξ_3 , etc... devenues $\theta_1, \theta_3 \dots \theta_{-1}, \theta_{-3}$ etc... sont encore des directions de rayonnement nul, tandis que les directions $\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \theta_2, \dots \theta_{-2}, \theta_{-4}$, etc... ne sont plus des directions de rayonnement maximum mais des directions où le dia-

gramme est tangent au cercle de diamètre égal à 2 et tangent à la verticale oz en O .

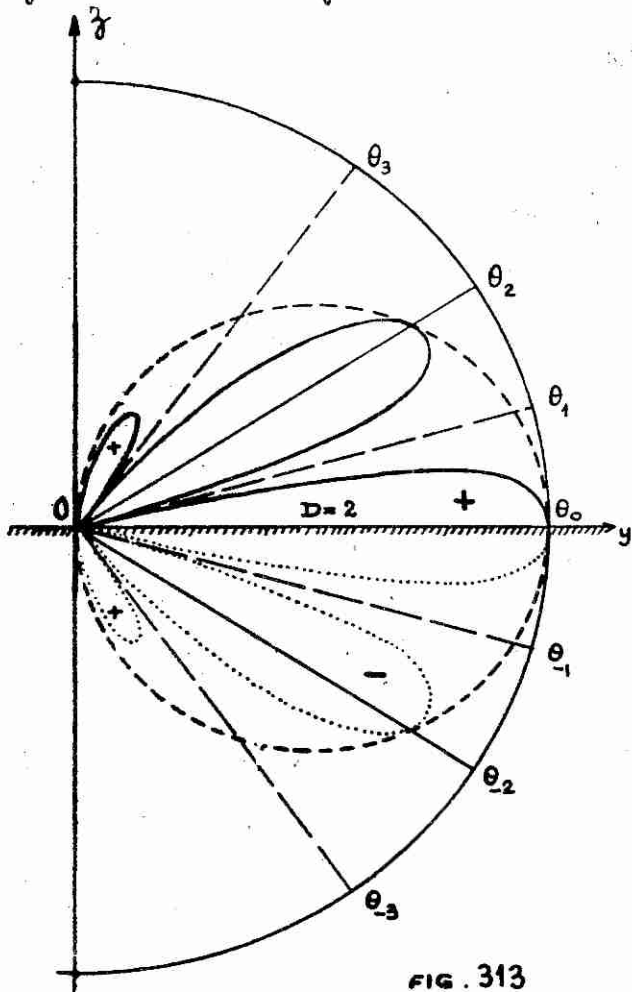


FIG. 313

en pointillé sur la même figure.

317. - A cause de la présence du plan conducteur xoy , le diagramme réel se trouve limité à la partie située au-dessus du plan xoy , et représentée en trait plein sur la fig. 313.

C'est seulement dans le cas où il y aurait deux doublets réels et pas de plan conducteur, comme au § 339 ci-après, qu'il y aurait évidemment lieu de tenir compte, en outre, de la portion symétrique située au-dessous de xoy et représentée

318 - D'après ce qu'on a vu au § 299, le nombre de feuilles du diagramme croît avec la hauteur h du doublet au-dessus du sol. Le diagramme demeure constitué d'une seule feuille aussi longtemps que α est inférieur à $\frac{\lambda}{2}$. Dès que h dépasse $\frac{\lambda}{2}$, une seconde feuille apparaît tangentielllement à l'axe vertical oz . Celle-ci se développe progressivement quand h continue à croître, en même temps que la première feuille s'aplatit de plus en plus. Une troisième feuille (en ne comptant que celles qui se trouvent au-dessus de la direction horizontale) prend naissance quand la hauteur h dépasse $2\frac{\lambda}{2}$ soit λ , et ainsi de suite.

Energie rayonnée - Résistance de rayonnement.

321 - Le calcul de l'énergie rayonnée par le doublet vertical situé à la cote h au-dessus d'un plan horizontal parfaitement conducteur s'effectue par la même méthode que pour le doublet isolé dans l'espace (§ 261).

Toutefois, le rayonnement n'ayant lieu que dans l'espace situé au-dessus du plan horizontal, il faut évaluer le flux du vecteur de Poynting (§ 161) non plus à travers une sphère entière de grand rayon, ayant son centre en O , mais seulement à travers la moitié supérieure limitée au plan xoy .

Le vecteur de Poynting, qui est partout dirigé suivant le rayon OM , a pour longueur $\frac{Eh}{4\pi}$, ou encore $\frac{E^2}{4\pi c}$ puisque les champs E et h sont liés par la relation $E = ch$ (§ 66). Son flux élémentaire, à l'époque t , à travers l'élément $d\sigma = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta$ de surface sphérique est donc :

$$dw = \frac{E^2}{4\pi c} d\sigma$$

Or, nous venons de voir que le champ électrique E du doublet situé à la cote $z = h$ avait pour valeur :

$$E = -2c \frac{I l \alpha \sin \theta}{r} \cos(\alpha h \cos \theta) \cos(\omega t - \alpha r).$$

On a donc :

$$dw = \frac{1}{4\pi c} \times 4c^2 \frac{I^2 l^2 \alpha^2 \sin^2 \theta}{r^2} \cos^2(\alpha h \cos \theta) \cos^2(\omega t - \alpha r) \times r^2 \sin \theta d\varphi d\theta$$

$$dw = \frac{c}{\pi} I^2 l^2 \alpha^2 \sin^3 \theta \cos^2(\alpha h \cos \theta) \cos^2(\omega t - \alpha r) d\varphi d\theta.$$

La puissance rayonnée dans une zone sphérique élémentaire de hauteur $d\theta$ à l'époque t est :

$$dw_1 = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dw$$

$$dw_1 = 2c I^2 l^2 \alpha^2 \sin^3 \theta \cos^2(\alpha h \cos \theta) \cos^2(\omega t - \alpha r) d\theta .$$

En intégrant cette puissance élémentaire pour θ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on obtient l'expression de la puissance totale rayonnée par le doublet :

$$W = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} dw_1$$

$$W = 2c I^2 l^2 \alpha^2 \cos^2(\omega t - \alpha r) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos(\alpha h \cos \theta) d\theta$$

$$W = 2c I^2 l^2 \alpha^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^2(\alpha h \cos \theta) d\theta \right] \times \cos^2(\omega t - \alpha r).$$

Le calcul de l'intégrale définie comprise entre les crochets donne comme résultat :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^2(\alpha h \cos \theta) d\theta = \frac{1}{3} \left(1 + 3 \frac{\sin 2\alpha h - 2\alpha h \cos 2\alpha h}{2(2\alpha h)^3} \right).$$

On a donc, pour expression de W :

$$W = \frac{2}{3} c I^2 l^2 \alpha^2 \left(1 + 3 \frac{\sin 2\alpha h - 2\alpha h \cos 2\alpha h}{2(2\alpha h)^3} \right) \cos^2(\omega t - \alpha r) .$$

322 - Or, d'après ce que nous avons vu au § 276 ci-dessus, la quantité :

$$\frac{4}{3} c I_{\text{eff}}^2 l^2 \alpha^2 \cos^2(\omega t - \alpha r)$$

$$\text{ou } \frac{2}{3} c I^2 l^2 \alpha^2 \cos^2(\omega t - \alpha r)$$

représente la puissance totale rayonnée à l'instant t par le doublet de longueur l lorsqu'il est placé verticalement au contact du plan conducteur. Désignons par $w_{h=0}$ cette puissance. On aura la relation:

$$W = w_{h=0} \left(1 + 3 \frac{\sin 2\alpha h - 2\alpha h \cos 2\alpha h}{2(2\alpha h)^3} \right)$$

323 - Les puissances moyennes $\bar{W}$ et $\bar{W}_{h=0}$ pendant une période, ou un temps quelconque comprenant un nombre important de périodes, seront dans le même rapport que W et $w_{h=0}$:

$$\bar{W} = \bar{W}_{h=0} \left(1 + 3 \frac{\sin 2\alpha h - 2\alpha h \cos 2\alpha h}{2(2\alpha h)^3} \right).$$

324 - Enfin, il en sera encore de même des résistances de rayonnement correspondantes. On en déduit la résistance de rayonnement du doublet vertical placé à la cote $z = h$ au-dessus du plan horizontal conducteur, en fonction de la résistance de rayonnement $R_{R.0}$ du même doublet quand h est égal à zéro :

$$R_R = R_{R.0} \left(1 + 3 \frac{\sin 2\alpha h - 2\alpha h \cos 2\alpha h}{2(2\alpha h)^3} \right)$$

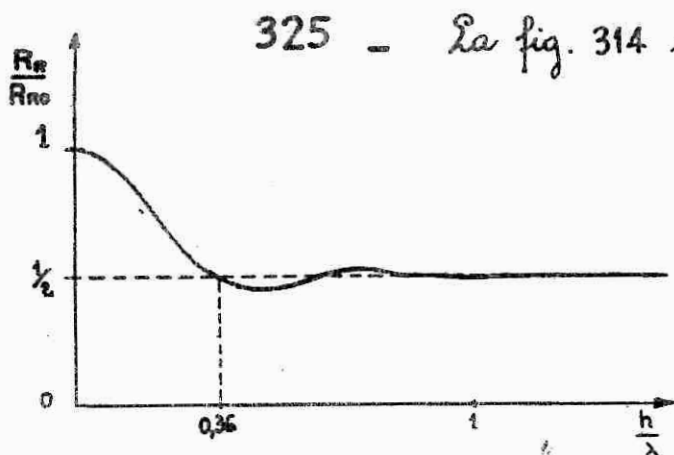


FIG 314.

325 - La fig. 314 représente les variations du facteur entre parenthèses, c'est-à-dire du rapport $\frac{W}{w_{h=0}}$ ou $\frac{\bar{W}}{\bar{W}_{h=0}}$ ou encore $\frac{R_R}{R_{R.0}}$, en fonction de $\frac{h}{\lambda}$ ou $\frac{\alpha h}{2\pi}$.

La courbe obtenue part

évidemment de l'unité pour $\frac{h}{\lambda} = 0$, puisque le doublet est alors au contact du plan conducteur.

Elle s'abaisse ensuite et tend finalement vers la valeur $\frac{1}{2}$ après avoir effectué des oscillations très rapidement décroissantes autour de cette valeur limite.

On observera que cette valeur $\frac{1}{2}$ est obtenue déjà pour $\frac{h}{\lambda} = 0,36$ et que les écarts absolus par rapport à cette valeur sont ensuite inférieurs à quelques centièmes.

Rayonnement d'un couple de deux doublets
identiques situés dans le prolongement l'un de
l'autre à la distance $2h$ et alimentés en phase.

331 - Prenons comme axe oz , la droite qui porte les deux doublets $a_1 a'_1$ et $a_2 a'_2$, et adoptons pour plan xoy le plan de symétrie du système des deux doublets, à savoir le plan perpendiculaire à oz au milieu de $a_1 a_2$.

Le doublet $a_2 a'_2$ coïncide avec l'image du doublet $a_1 a'_1$ par rapport au plan xoy . Le problème posé se ramène à celui qui vient d'être traité, mais avec ces deux différences essentielles suivantes :

- 1^{re} : le doublet $a_2 a'_2$ est maintenant un doublet alimenté et qui, par conséquent, consomme de la puissance.
- 2^{re} : le rayonnement s'étend à tout l'espace, au lieu de se limiter à l'espace situé d'un seul côté du plan conducteur.

On constate, d'ailleurs, que l'on peut, sans modifier le rayonnement des deux doublets $a_1 a'_1$ et $a_2 a'_2$, interposer entre ces deux doublets un plan mince parfaitement conducteur coïncidant avec le plan de symétrie xoy du système. Ce plan est en effet, par raison de symétrie, une surface équipotentielle de potentiel zéro quelle que soit l'époque t considérée.

332 - Tout se passe comme si chaque doublet rayonnait tout seul pour son propre compte dans l'espace situé du même côté que lui du plan de symétrie xoy . Les conséquences sont les suivantes :

- 1° la puissance consommée par le système des deux doublets écartés de $2h$ est égale à 2 fois celle qui est rayonnée par un seul doublet à la hauteur h au dessus du plan conducteur xoy .
- 2° : la résistance de rayonnement du système, définie comme le rapport de la puissance totale rayonnée par les deux doublets à l'intensité efficace dans un doublet est égale à deux fois la résistance de rayonnement R_R d'un seul doublet agissant en présence du plan conducteur xoy .

La valeur R'_R , d'après le § 324 ci-dessus sera donc :

$$R'_R = 2 R_R = 2 R_{R,0} \left(1 + 3 \frac{\sin 2\alpha h - 2\alpha h \cos 2\alpha h}{2(2\alpha h)^3} \right),$$

où $R_{R,0}$ est la résistance de rayonnement du doublet vertical placé au contact d'un plan horizontal parfaitement conducteur.

Cas où les deux doublets sont alimentés avec une différence de phase 2δ .

333 - Ce qui vient d'être dit a été établi dans l'hypothèse où les courants i_1 et i_2 dans les deux doublets sont exactement en phase. Supposons maintenant que le courant dans le 2° doublet soit décalé d'un angle 2δ par rapport au courant dans le premier :

$$\begin{cases} i_1 = I \sin \omega t \\ i_2 = I \sin (\omega t + 2\delta) \end{cases}$$

La théorie déjà faite au § 281 ci-dessus pour deux doublets parallèles, orientés d'une façon quelconque par rapport à

la droite qui joint leurs milieux, conduit immédiatement aux résultats suivants :

1^o : le champ résultant $\mathcal{E}$ a la même phase que s'il était produit par un doublet vertical unique placé à l'origine 0 (milieu de $a_1 a_2$) et alimenté par un courant I_0 de même amplitude que ceux qui circulent dans les deux doublets, mais dont la phase serait la moyenne des phases, de ce deux courants. Ce courant I_0 est donc en avance d'un angle δ sur I_1 et en retard d'un même angle δ sur I_2 .

2^o : l'amplitude $\mathcal{E}$ du champ résultant est égale au produit de celle qui serait créée par un seul des doublets supposé isolé dans l'espace, par le coefficient caractéristique $2 \cos (\alpha h \cos \xi - \delta)$, coefficient qui s'écrit dans le cas actuel ($\xi = \theta$) :

$$2 \cos (\alpha h \cos \theta - \delta) .$$

D'une manière plus brève on peut dire aussi que le champ imaginaire $\mathcal{E}$ a pour expression :

$$\mathcal{E} = -j c \frac{\alpha l I_0}{r} e^{-j \alpha r} \sin \theta \times 2 \cos (\alpha h \cos \theta - \delta) ,$$

r étant la distance qui sépare le point P, auquel se rapporte le champ $\mathcal{E}$, du milieu 0 de l'intervalle $a_1 a_2$ des deux doublets (fig. 331).

Diagrammes de rayonnement .

334 - Comme l'axe des doublets coïncide avec la droite $a_1 a_2$ qui les joint, l'angle ξ se confond avec la colatitude θ rapportée à l'axe d'un doublet, et la surface polaire représentative du rayonnement du système est, comme au

§ 297 ci-dessus, de révolution autour de l'axe $a_1 a_2$.

La coupe de cette surface par un plan méridien a pour équation en coordonnées polaires :

$$\rho = \rho_0 \times \rho_1 = \sin \theta \times 2 \cos (\alpha h \cos \theta - \delta) .$$

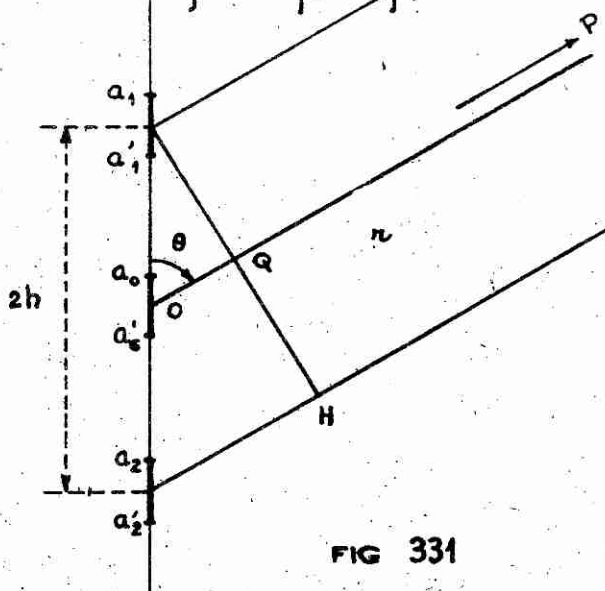


FIG 331

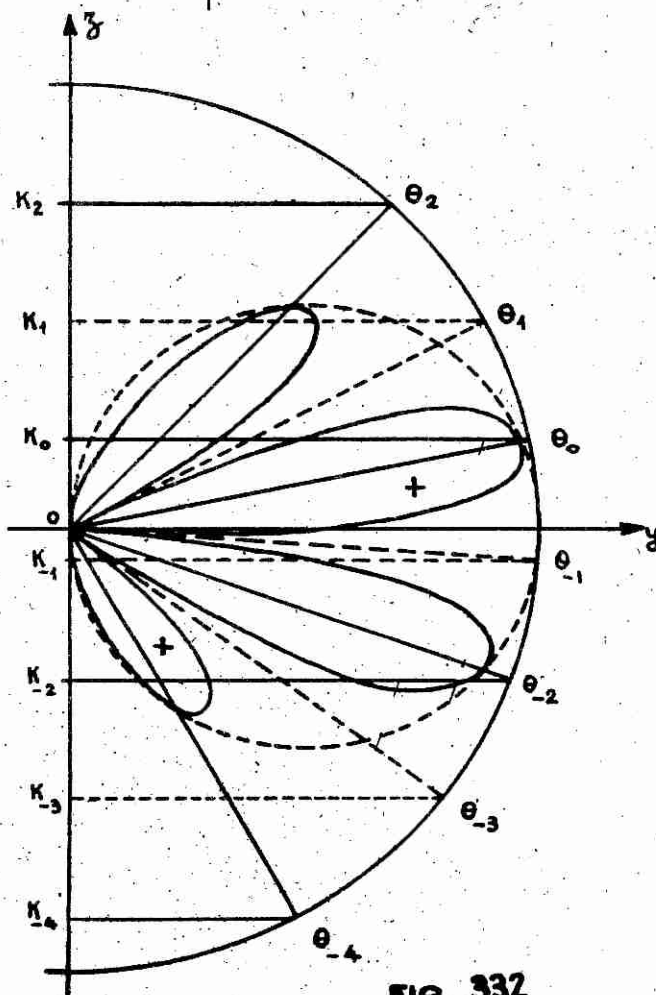


FIG 332

335 - La courbe obtenue diffère de celle tracée au § 317 (fig. 313) par la présence du paramètre δ non nul. La conséquence en est que le plan équatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$ n'est plus un plan de rayonnement maximum ni un plan de symétrie pour la surface représentative du rayonnement dans l'espace. La courbe méridienne n'est plus symétrique par rapport à la perpendiculaire à l'axe de révolution Oz .

336 - Comme il a été dit au § 300, le réglage du déphasage δ permet de faire coïncider une direction de rayonnement nul ou une direction de rayonnement maximum avec une direction de colatitude θ quelconque donnée à l'avance.

Rayonnement d'un couple de doublets perpendiculaires
à la droite qui joint leurs milieux et déphasés
d'un angle 2δ .

341 - Nous sommes encore en présence d'un cas particulier du problème général étudié au § 281 ci-dessus. La direction des doublets fait un angle droit avec la direction de la droite $a_1 a_2$ qui joint leurs milieux, le tore représentant le rayonnement d'un doublet et la surface de révolution représentant le coefficient caractéristique $2 \cos(\alpha d \cos \xi - \delta)$ ont maintenant leurs axes de révolution perpendiculaires. La multiplication de leurs rayons polaires ρ_0 et ρ_1 donne une surface qui n'est évidemment pas de révolution et qu'il faut déterminer par un nombre suffisant de coupes suivant des plans (ou des cônes) convenablement choisis.

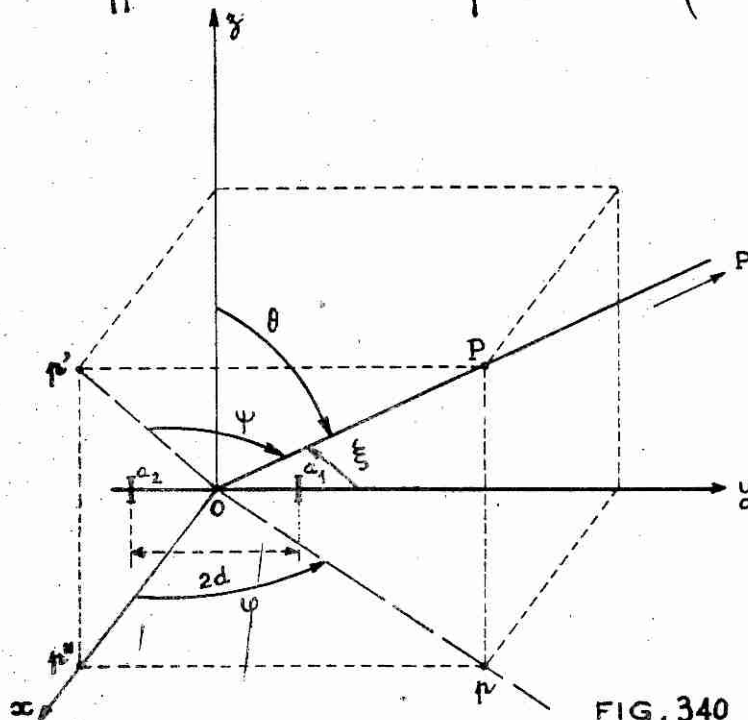
342 - Nous prendrons le plan des deux doublets a_1 et a_2 comme plan de coordonnées yoz , l'origine O étant au milieu de $a_1 a_2$ et l'axe Oz dirige parallèlement aux doublets eux-mêmes (fig. 341). Dans ces conditions, l'axe Oy sera porté par la droite $a_1 a_2$ et l'axe Ox sera perpendiculaire au plan des deux doublets :

Les courants dans ces deux doublets ont même amplitude mais sont déphasés de l'angle 2δ , en sorte que les courants i_1 et i_2 dans ces deux doublets peuvent s'écrire :

$$i_1 = I \sin \omega t$$

$$i_2 = I \sin (\omega t + 2\delta)$$

343 - Soit P un point éloigné dans une direction θ, φ quelconque de l'espace. L'angle ξ qui intervient dans le coefficient caractéristique $2 \cos (\alpha d \cos \xi - \delta)$ est l'angle



γOP , complémentaire de l'angle $POp' = \varphi$ que fait la direction OP avec le plan xOy .

D'après le § 286 ci-dessus le coefficient caractéristique peut donc également s'écrire :

$$\rho_1 = 2 \cos (\alpha d \sin \varphi - \delta) .$$

La fig. 340 montre que l'on a immédiatement la relation :

$$\sin \varphi = \sin \varphi \sin \theta ,$$

elle découle, en effet, des égalités successives suivantes :

$$Pp' = OP \sin \varphi$$

$$Pp' = pp''$$

$$pp'' = Op \sin \varphi$$

$$Op = OP \sin \theta$$

d'où
$$OP \sin \varphi = OP \sin \varphi \sin \theta .$$

En sorte que le coefficient caractéristique, s'écrit finalement en fonction de l'azimut φ et de la colatitude θ :

$$\rho_1 = 2 \cos (\alpha d \sin \varphi \sin \theta - \delta) .$$

344 - Le champ imaginaire $\mathcal{E}$ créé par le couple

de doublets au point P est donc :

$$\mathcal{E} = -j c \frac{\alpha l J_0}{r} e^{-j\alpha r} \sin \theta \times 2 \cos (\alpha d \sin \varphi \sin \theta - \delta).$$

Dans cette expression r désigne la distance OP et J_0 un courant imaginaire de même amplitude que ceux qui circulent dans les deux doublets, mais de phase égale à la moyenne des phases de ces courants :

$$J_0 = J_1 e^{j\delta} \text{ ou } J_0 = J_2 e^{-j\delta}.$$

345 - Le champ a la même phase que s'il émanait d'un doublet a_0 de même dimension, situé à l'origine O, et parcouru par le courant J_0 de phase égale à la moyenne des phases de J_1 et J_2 .

Diagrammes de rayonnement.

346 - D'après le principe de multiplication des caractéristiques (§ 290) le rayon polaire ρ de la surface représentative du rayonnement des deux doublets (diagramme dans l'espace) est égal au produit $\rho_0 \times \rho_1$ du rayon polaire ρ_0 du tore représentant le rayonnement du doublet unique, et du rayon polaire ρ_1 de la surface définie par le coefficient caractéristique :

$$\rho_1 = 2 \cos (\alpha d \sin \varphi \sin \theta - \delta).$$

Ce sont là deux surfaces de révolution dont les axes coïncident respectivement avec oz et oy . Par ailleurs, elles admettent toutes les deux les plans xoy et yoz comme plans de symétrie. Ces deux plans seront donc également des plans de symétrie pour la surface définie par le rayon polaire $\rho = \rho_0 \times \rho_1$.

347 - Pour étudier cette surface nous en examinerons les diverses coupes ci-après indiquées :

- 1° : coupe suivant le plan horizontal xoy , ce qui reviendra à tracer le diagramme de rayonnement horizontal du système ($\theta = \frac{\pi}{2}$).
- 2° : coupes suivant des cônes de révolution autour de oz , ($\theta = Cte$), donnant le rayonnement, en fonction de l'azimut, pour des diverses colatitudes θ données et fixes.
- 3° : coupes suivant des plans méridiens ($\varphi = Cte$), qui donneront le rayonnement dans des plans verticaux d'azimut φ donnés et fixes.

Rayonnement dans le plan horizontal.

348 - Le plan horizontal xoy coupe le tore de rayon polaire ρ_0 suivant son cercle équatorial de rayon $R = 1$. D'autre part, le plan horizontal xoy est un plan méridien de la surface ρ_1 . Le diagramme horizontal cherché, dont le rayon polaire ρ est égal à $\rho_0 \times \rho_1$, c'est-à-dire à $1 \times \rho_1 = \rho_1$, coïncidera donc avec la coupe méridienne de la surface ρ_1 .

Cette courbe a été étudiée en détail au § 294 ci-dessus, et les fig. de la planche 294 en ont représenté divers aspects pour un certain nombre de valeurs données à l'écartement $\frac{2d}{\lambda}$ et au déphasage 2δ .

En fonction de l'azimut φ , l'équation du diagramme s'obtient en faisant $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans l'expression de ρ_1 :

$$\rho = \rho_1 = 2 \cos(\alpha d \sin \varphi - \delta) .$$

349 - C'est un diagramme qui présente des directions de rayonnement nul $\varphi_1 \varphi_3 \dots \varphi_{-1} \varphi_{-3}$ etc ... et des directions de rayonnement maximum $\varphi_0 \varphi_2 \varphi_4 \dots \varphi_{-2} \varphi_{-4}$ etc ... que l'on obtient par le procédé indiqué au § 295 ci-dessus.

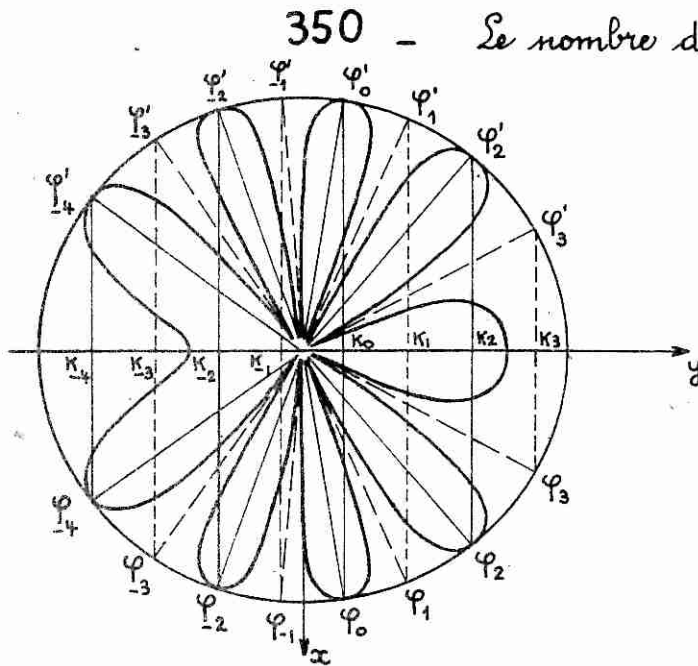


FIG 341

350 - Le nombre de feuilles dont est composé le diagramme augmente en même temps que le rapport $\frac{d}{\lambda}$ (§ 296) tandis que le déphasage 2δ influe sur la position absolue des points $K_0 K_1 K_2$ etc ... sans agir sur leurs distances relatives (fig. 341).

Le réglage de l'angle de phase 2δ permet, en particulier, d'amener, à volonté, une direction de rayonnement maximum (ou de rayonnement nul) dans un

azimut quelconque φ donné à l'avance.

Rayonnement suivant les génératrices d'un cône faisant un angle θ donné avec la verticale Oz .

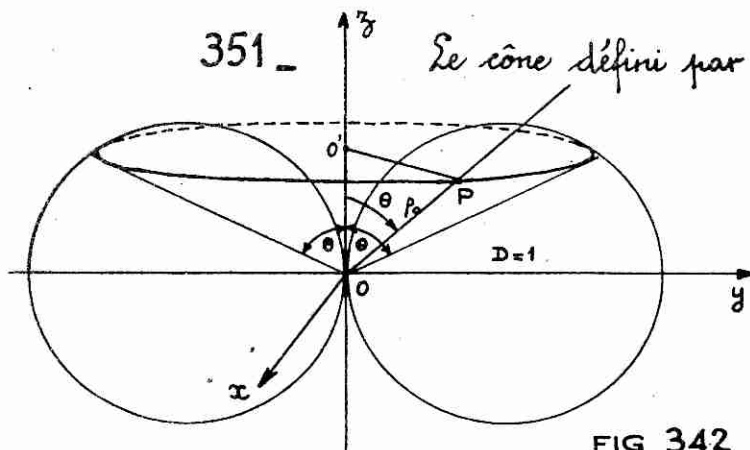


FIG 342

Le cône défini par les directions de colatitude

$\theta = \text{cte}$, coupe le tore représentatif du rayonnement d'un seul doublet suivant un petit cercle de centre O' , et de rayon polaire $OP = \rho$. (qu'il ne faut pas confondre

avec le rayon $O'P$ de ce cercle) a pour valeur :

$$\rho_0 = \sin \theta .$$

D'autre part, il coupe la surface représentative du coefficient caractéristique ρ_1 suivant une courbe dont le rayon polaire ρ_1 sur le cône est obtenu en faisant $\theta = \text{cte}$ dans l'équation de cette surface :

$$\rho_1 = 2 \cos (\alpha d \sin \theta \sin \varphi - \delta) .$$

352 - Cette dernière courbe se construit d'une manière analogue à celle du diagramme horizontal (§ 348 ci-dessus) mais avec cette différence que le produit $d \sin \theta$ y remplace la distance d . En particulier, les abscisses des points $K_0, K_1, K_2 \dots K_{-1}, K_{-2}$ etc... sont se trouver multipliées par $\frac{1}{\sin \theta}$ puisque d entre au dénominateur de leurs expressions (§ 294).

Les points $\xi_0, \xi_1, \dots \xi_{-1}$ etc..., dans la fig. 290 ou les points $\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_{-1}$ etc... de la fig. 341 sont donc se trouver déplacés.

On observera qu'il revient au même de laisser fixes les points $K_0, K_1, \dots K_{-1}$ etc... et de chercher les points de rencontre des perpendiculaires à a_1, a_2 menées par ces points, avec le cercle de rayon unité.

Cette manière de faire simplifie les constructions et permet en outre de mieux voir l'influence de la valeur de θ .

Si l'on fait décroître θ depuis $\theta = \frac{\pi}{2}$ (auquel cas le cône se confond avec le plan horizontal xoy dont il était question au § 348 ci-dessus), jusqu'à $\theta = 0$ (cône confondu avec l'axe oz), on voit le cercle de rayon $R = \sin \theta$ diminuer progressivement et abandonner l'un après l'autre les points K_3, K_{-4}, K_2, K_{-3} etc... . A chaque fois c'est une paire de directions de rayonnement nul, ou de rayonnement maximum qui disparaît du diagramme représentatif de ρ_1 , jusqu'à ce que ce diagramme ne soit plus

- constitué que par une seule boucle, laquelle vient d'ailleurs se confondre avec le cercle de rayon $\rho = 2 \cos \delta$ quand $\theta = 0$.

353 - En même temps le rayon $\rho = \sin \theta$ diminue depuis $\rho_0 = 1$ jusqu'à $\rho_0 = 0$, en sorte que le diagramme $\rho = \rho_0 \times \rho_1$

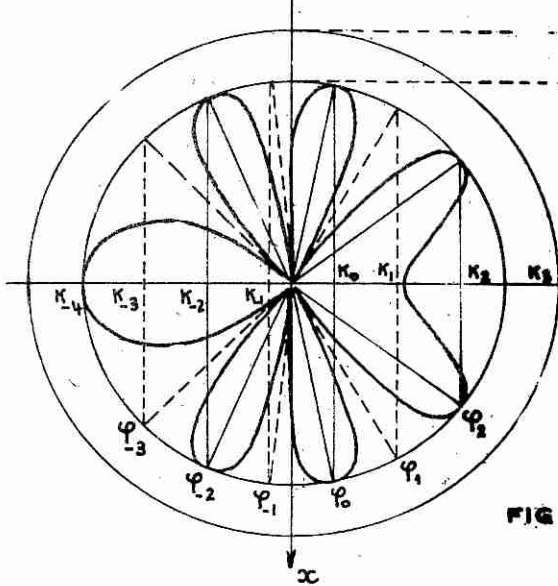


FIG 343

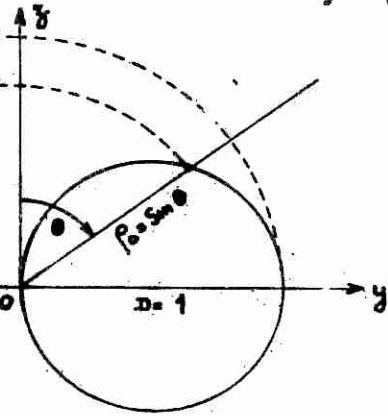


FIG 344

représentatif du rayonnement, suivant une colatitude θ fixe, en fonction de l'azimut φ voit non seulement le nombre de ses feuilles diminuer progressivement quand θ varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0, mais encore diminuer lui-même d'ampleur, et tendre finalement vers le cercle de rayon nul autour de l'origine 0

354 - Étant donné que, dans l'espace, les directions de rayonnement nul et de rayonnement maximum pour la surface représentative du coefficient caractéristique $\rho_1 = 2 \cos (\alpha \text{ d } \cos \xi - \delta)$ sont des cônes $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{-1}, \Gamma_{-2}$ etc... de demi-angles au sommet $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{-1}, \xi_{-2}$ etc... définis comme il a été dit au § 294, les directions de l'espace, génératrices du cône de demi-angle au sommet θ , qui seront des directions de rayonnement nul ou de rayonnement maximum pour le système des deux doublets considérés, seront les génératrices communes de ce cône et des cônes $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{-1}, \Gamma_{-2}$ etc... (fig. 345).

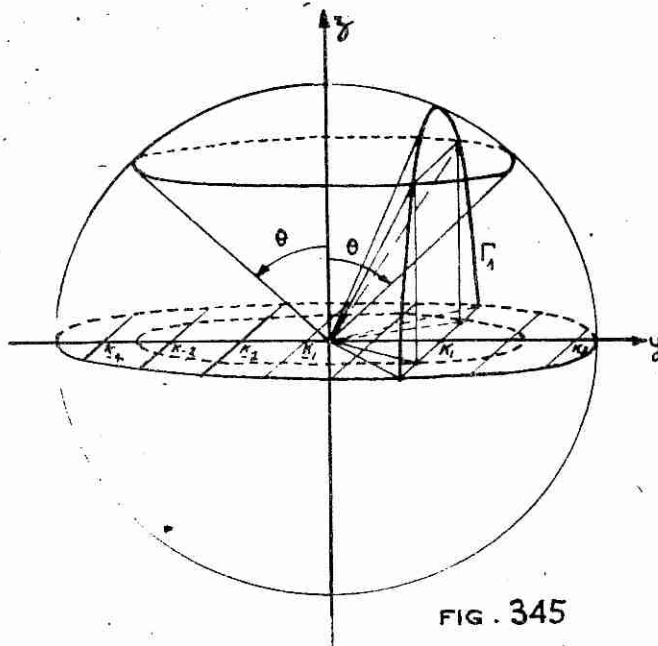


FIG. 345

On obtiendra les azimuts $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{-1}$ etc... des directions du cône où le rayonnement est ou nul ou maximum, en prenant les points d'intersection des parallèles à ox menées par les points $K_0, K_1, K_2, \dots, K_{-1}, K_{-2}$ etc... de l'axe oy , avec la projection, sur le plan xoy , du petit cercle, intersection du cône de demi-angle

au sommet θ , avec la sphère de rayon 1. Cette méthode nous conduit exactement à la même construction que celle qui est indiquée sur la fig. 343.

Rayonnement dans un plan méridien quelconque.

356 - Cette fois, c'est l'azimut φ qui est donné et nous voulons savoir comment varie le rayonnement en fonction de θ . Le rayon ρ du diagramme cherché est toujours égal à $\rho_0 \times \rho_1$ où ρ_0 est le rayon polaire de la coupe du tore par le plan méridien considéré (c'est-à-dire du cercle de diamètre unité tangent à la verticale oz , à l'origine O), et ρ_1 celui de la coupe par le même plan méridien, de surface représentative du coefficient caractéristique :

$$\rho_1 = 2 \cos (\alpha d \cos \xi - \delta)$$

ou encore
$$\rho_1 = 2 \cos (\alpha d \sin \varphi \sin \theta - \delta)$$

De même qu'au § 352, le diagramme ρ_1 se déduit du diagramme dans le plan horizontal (§ 348) par substitution de la quantité $d \sin \varphi$ à la distance d . On obtiendra donc les

directions de rayonnement nul et de rayonnement maximum par une construction en tous points analogue à celle du § 352 ci-dessus.

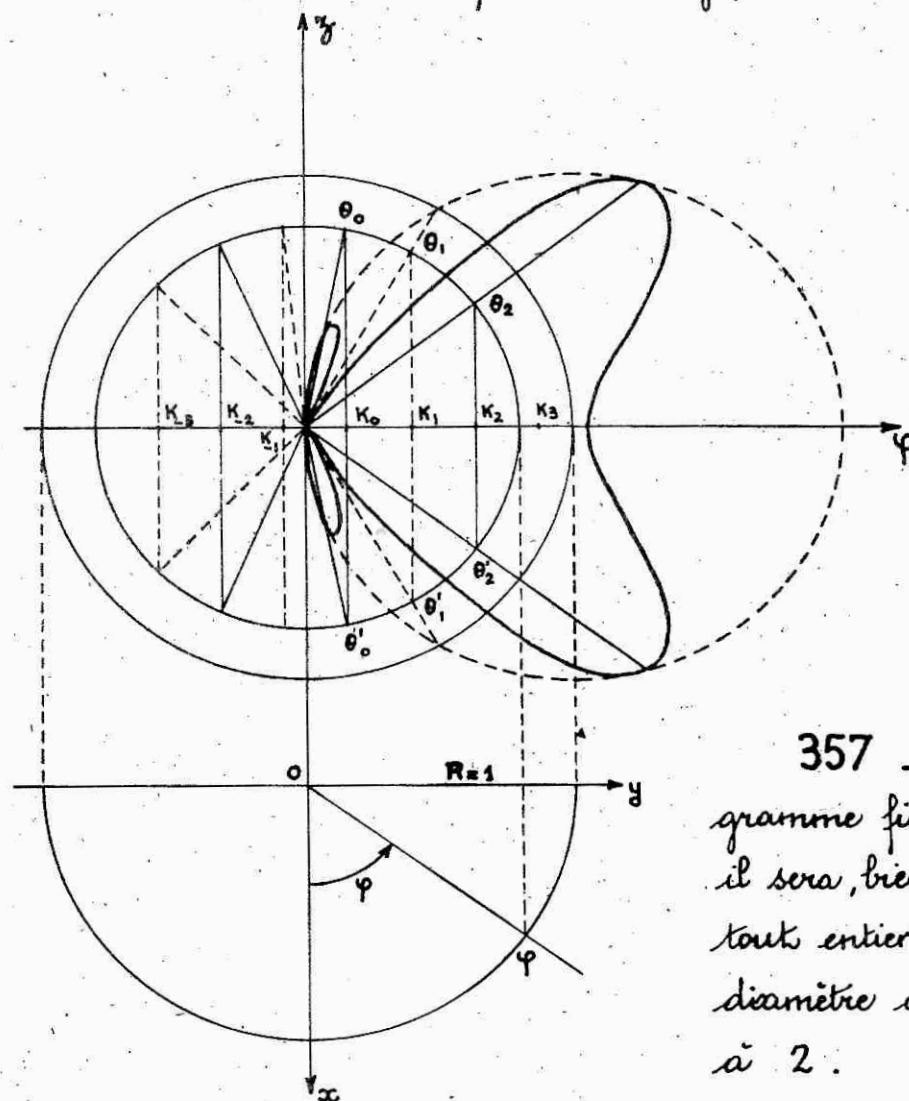


FIG 346

Suivant que l'azimut φ sera compris entre 0 et 180° , ou bien entre 180° et 360° ce sera la partie située vers les y positifs, ou vers les y négatifs du diagramme horizontal qui aura à intervenir

357 - Quant au diagramme final de $p = p_0 \times p_1$, il sera, bien entendu compris tout entier à l'intérieur du diamètre de diamètre égal à 2.

358 - D'autre part, comme au § 354 ci-dessus, on peut définir les directions de rayonnement nul et de rayonnement quasi-maximum ($p_1 = 2$ ou $p = 2 p_0$) dans le plan méridien d'azimut φ comme les intersections de ce plan avec les cônes $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{-1}, \Gamma_{-2}$ etc... définis au § 354 qui précède (fig. 345).

Par rabattement du plan méridien considéré, dans le plan horizontal xoy autour de son intersection avec ce dernier plan, on peut construire aisément, et d'une autre façon les directions de rayonnement nul et de rayonnement $p = 2 p_0$ du diagramme tracé dans le plan méridien en cause.

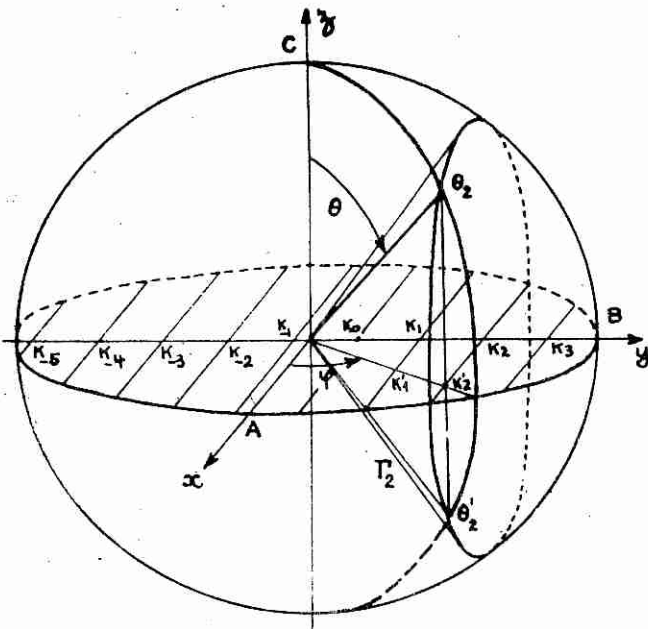


FIG 347

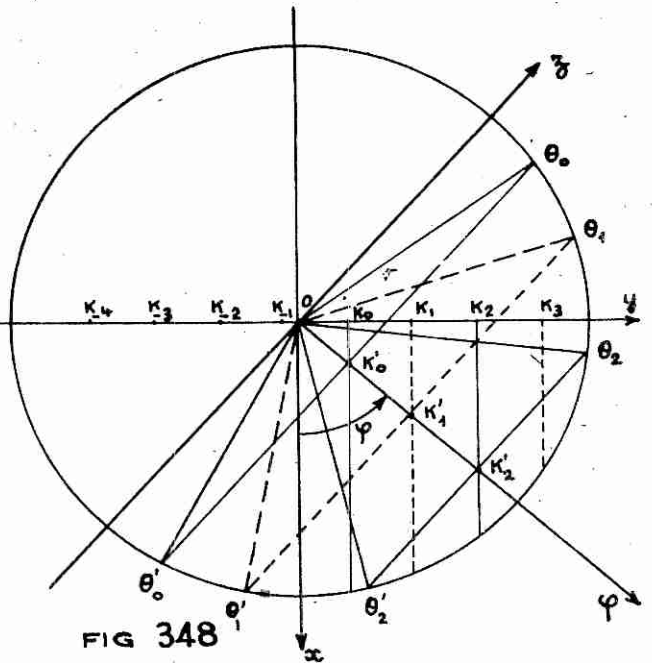


FIG 348

359 - Lorsque l'azimut φ est nul, ce diagramme se réduit à un cercle de diamètre $D = 2 \cos \delta$, qui est nul lorsque $\delta = (2K + 1) \frac{\pi}{2}$ et égal à 2 lorsque $\delta = K\pi$. En faisant ensuite croître φ on fait apparaître l'une après l'autre

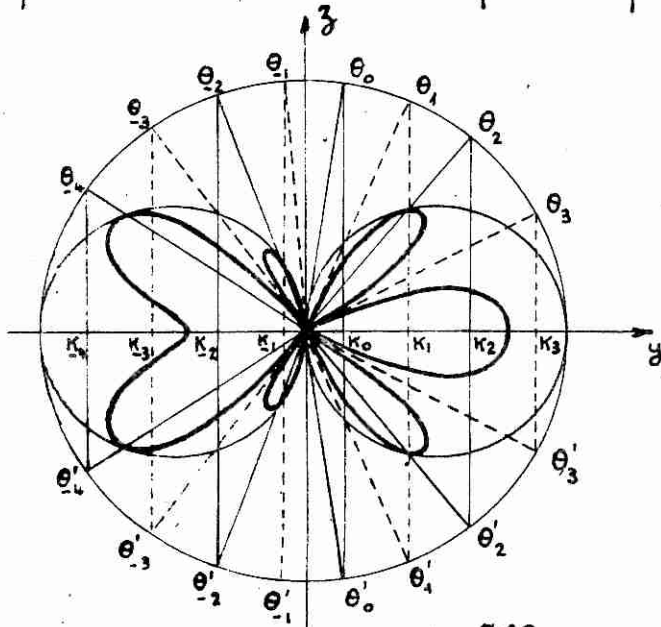


FIG 349

des directions de rayonnement nul ou de rayonnement égal à $2\rho_0$ ($\rho_1 = 2$) chaque fois que la direction φ atteint successivement les directions $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ marquées sur le cercle de rayon 1 (fig. 341).

Lorsque φ atteint $\frac{\pi}{2}$, le plan méridien considéré se confond avec le plan xz et on retrouve les mêmes directions

de rayonnement nul et de rayonnement $\rho = 2\rho_0$ que dans le plan horizontal. Les diagrammes obtenus dans l'ensemble des deux plans méridiens d'azimuts $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ est donné par la fig. 349.

Enfin la fig. 350 est une vue perspective de la surface $\rho = f(\theta, \varphi)$ qui représente le rayonnement dans l'espace situé au-dessus du plan xoy . Le rayonnement au-dessous du plan serait, donné par la surface symétrique par rapport au plan xoy .

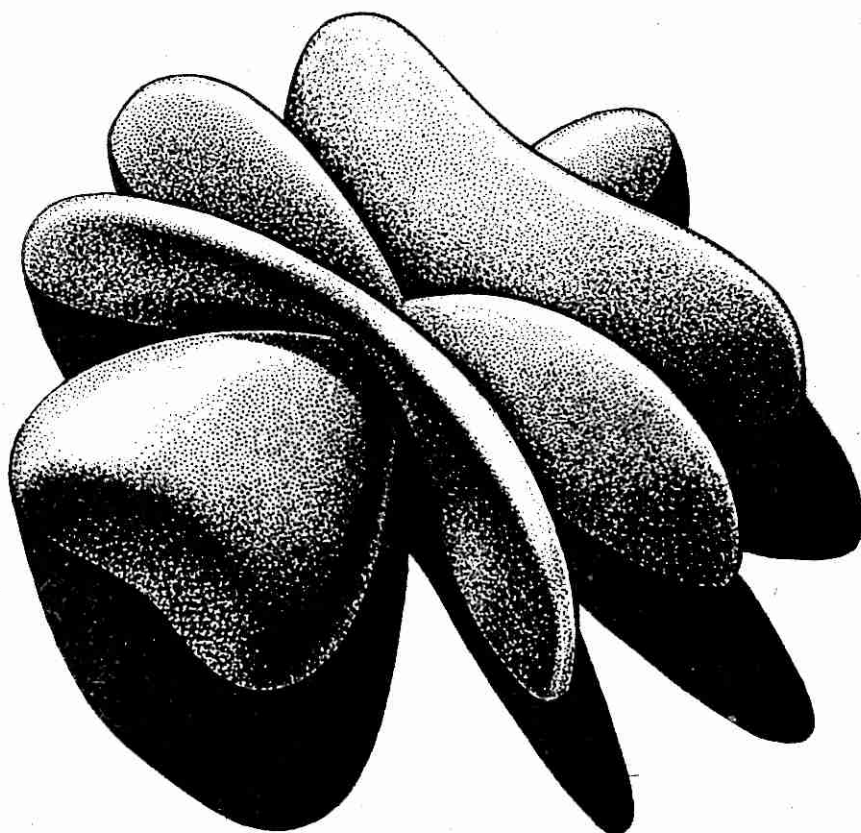


Fig. 350

Rayonnement d'un doublet horizontal placé à la hauteur h au-dessus d'un plan horizontal parfaitement conducteur.

371 - Soit a, a' ce doublet supposé parcouru par un courant sinusoïdal d'amplitude I et de pulsation ω . Soit l sa longueur.

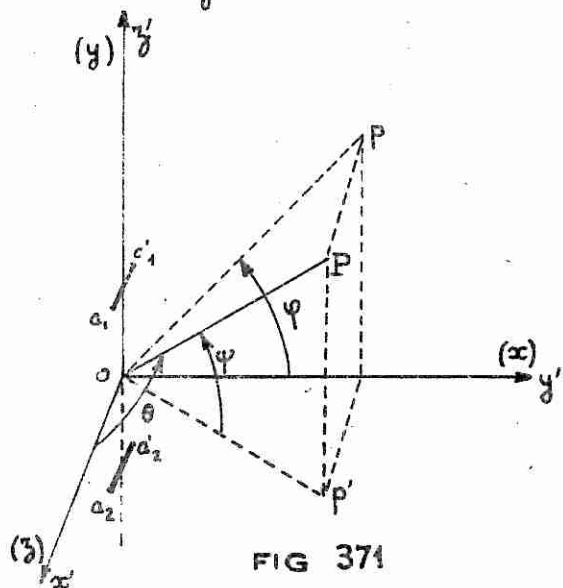


FIG 371

Nous prendrons comme axe Oz' la verticale passant par le milieu du doublet. Le plan $x'Oy'$ sera le plan conducteur lui-même, la direction Ox' étant choisie parallèlement au doublet lui-même (fig. 371).

D'après le principe des images (§ 181) le champ en un point P quelconque situé au-dessus du plan conducteur $x'Oy'$ est égal

à la résultante des deux champs qui seraient produits, en l'absence du plan conducteur, par le doublet $a_1 a_2$ et par son image $a_1' a_2'$ par rapport au plan $x'Oy'$.

Nous retrouvons, avec une autre orientation des axes de coordonnées, le cas qui vient d'être étudié au § 341 ci-dessus, à savoir celui de deux doublets parallèles écartés de la distance $2d$ et déphasés d'un angle 2δ . Le déphasage 2δ est ici égal à π (§ 285) et la distance $2d$ vaut $2h$.

Les angles φ et θ qui servaient à définir précédemment la direction OM sont ici, respectivement : $\widehat{y'O P} = \varphi$ et $\widehat{x'O P} = \theta$ les trois directions $\widehat{Ox'}, \widehat{Oy'} \text{ et } \widehat{Oz'}$ ayant respectivement pris la place des directions Oz, Ox, Oy de la fig. 341. Quant à l'angle φ

dont il était question au § 343 ci-dessus, il n'est autre que $\widehat{p'oP}$ p' étant la projection de P sur $x'o'y'$, de même que p est sa projection sur $y'o'z'$ (fig. 341).

372 - Le champ résultant $\vec{E}$ en P a la même direction que les champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ créés séparément par les deux doublets $a_1 a'_1$ et $a_2 a'_2$. Comme les champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$, il sera donc perpendiculaire à OP et contenu dans le plan défini par cette droite OP et l'axe ox parallèle au doublet donné $a_1 a'_1$.

On voit, en particulier que ce champ sera horizontal en tous les points du plan vertical $y'o'z'$, perpendiculaire à la direction du même doublet.

373 - L'expression du champ total E est donnée en fonction des angles φ , θ et ψ utilisés au § 343 ci-dessus (et rappelés sur la fig. 371) par la formule du § 285, où 2δ est fait égal à Π :

$$E = -j c \frac{\alpha l J_0}{r} \sin \theta e^{-j\alpha r} \times 2 \cos \left(\alpha h \sin \psi - \frac{\Pi}{2} \right)$$

ou encore :

$$E = -j c \frac{\alpha l J_0}{r} \sin \theta e^{-j\alpha r} \times 2 \sin \left(\alpha h \sin \psi \right).$$

Dans cette formule r est la distance OP et J_0 , le courant dans le doublet $a_0 a'_0$ dont il était question au § 284 à savoir un courant de même amplitude que les courants $J_1 = J$ et J_2 dans les doublets $a_1 a'_1$ et $a_2 a'_2$, mais de phase égale à la moyenne des phases de J_1 et J_2 .

Comme J_2 est en avance de Π sur $J_1 = J$, on en déduit que J_0 est en avance de $\frac{\Pi}{2}$ sur J .

$$I_0 = I e^{j\frac{\pi}{2}} = j I.$$

On peut donc écrire l'expression de $\mathcal{E}$, en fonction de I au lieu de I_0 , ainsi qu'il suit :

$$\mathcal{E} = -j c \frac{\alpha l I}{r} \sin \theta \cdot e^{-j\alpha r} \times 2 j \sin (\alpha h \sin \varphi).$$

Quant à l'amplitude $\mathcal{E}$ elle est :

$$\mathcal{E} = c \frac{\alpha l I}{r} \sin \theta \times 2 \sin (\alpha h \sin \varphi).$$

374 - Ces deux expressions de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}$, sont données en fonction des angles φ , θ et φ relatifs aux anciens axes de coordonnées $oxyz$. Pour avoir leurs expressions en fonction de l'azimut réel φ' et de la colatitude réelle θ' correspondant aux axes $ox'oy'oz'$ de la fig. 371, il est nécessaire d'opérer une transformation de coordonnées. Cette transformation est définie par les équations qui lient les anciennes coordonnées θ , φ aux nouvelles θ' , φ' .

Désignons par x' , y' , z' les coordonnées du point M situé à la distance r ; on a, d'après la fig. 371 :

$$\begin{cases} \frac{y'}{r} = \sin \theta \cos \varphi = \sin \theta' \sin \varphi' \\ \frac{z'}{r} = \sin \theta \sin \varphi = \sin \varphi = \cos \theta' \\ \frac{x'}{r} = \cos \theta = \sin \theta' \cos \varphi' \end{cases}$$

Ces trois équations se réduisent d'ailleurs à 2, que l'on peut écrire :

$$\begin{cases} \cos \theta = \sin \theta' \cos \varphi' \\ \cotg \varphi = \tg \theta' \sin \varphi' \end{cases}$$

Dans le cas actuel, il nous suffit de remplacer, dans

l'expression de $\mathcal{E}$ (ou de $\mathcal{E}$) :

- d'une part : $\sin \theta$ par $\sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \sin^2 \theta' \cos^2 \varphi'}$

- d'autre part : $\sin \varphi = \sin \varphi \sin \theta$ par $\cos \theta'$.

Il vient :

$$\mathcal{E} = -j c \frac{\alpha l J}{r} e^{-j \alpha r} \sqrt{1 - \sin^2 \theta' \cos^2 \varphi'} \times 2 j \sin (\alpha h \cos \theta').$$

Coefficient caractéristique.

375 - Considérons la deuxième expression de $\mathcal{E}$ donnée au § 373 ci-dessus, à savoir l'expression de $\mathcal{E}$ en fonction du courant J dans le doublet a, a' donné. Si ce doublet avait été placé le long de ox , en o , le sol n'existant pas, il aurait produit un champ :

$$\mathcal{E}_0 = -j c \frac{\alpha l J}{r} \sin \theta \cdot e^{-j \alpha r}.$$

Nous pouvons en conclure que le fait d'avoir surélevé le doublet à une hauteur h au-dessus du plan xoy et d'avoir rendu ce plan parfaitement conducteur, a eu pour conséquence de multiplier le champ imaginaire $\mathcal{E}_0$ par le coefficient $2 j \sin (\alpha h \sin \varphi)$ ou encore, d'après ce que l'on vient de voir :

$$2 j \sin (\alpha h \cos \theta')$$

Ce facteur est caractéristique de l'opération qui a été effectuée sur le doublet considéré.

Diagrammes de rayonnement .

376 - La surface représentative du rayonnement dans l'espace du doublet horizontal à la hauteur h au-dessus du sol peut se déduire de celle qui est relative à deux doublets verticaux espacés de la distance $2d = 2h$ par les deux opérations suivantes :

- 1^o : le déphasage 2δ y est fait égal à π , ce qui a pour conséquence de rendre symétrique par rapport au plan perpendiculaire à a_1, a_2 en O , la surface représentative du coefficient caractéristique p_1 .
- 2^o : l'ensemble de la surface $p = p_0 \times p_1$ obtenue (où p_0 est le rayon polaire du tore représentant le rayonnement du doublet supposé isolé dans l'espace) subit dans son ensemble une rotation dans l'espace, de façon à amener l'axe Ox suivant Oy' (fig. 371), Oy suivant Oz' et Oz suivant Ox' . C'est une rotation de 120° autour de la perpendiculaire, menée par O , au plan coupant les trois axes de coordonnées, à égales distances de l'origine ($x = y = z$).
- 3^o : la partie de la surface située au-dessous du plan conducteur xOy est, naturellement, supprimée.

377 - Vis-à-vis de la surface représentée par la fig. 350, dans l'hypothèse où cette surface aurait été tracée avec $2\delta = \pi$, l'opération reviendrait à conserver seulement la moitié de droite de la surface, puis à la compléter au moyen d'une symétrie par rapport au plan xOy , et enfin à faire tourner l'ensemble ainsi obtenu, de façon à amener les axes Ox, Oy, Oz attachés à cette figure en coïncidence respectivement avec les nouveaux axes Oy', Oz' et Ox' .

378 - Il est également intéressant d'étudier directement, dans sa position définitive, la surface représentative du rayonnement du doublet horizontal à la hauteur h au-dessus du plan horizontal $x'o'y'$ supposé parfaitement conducteur.

Comme il a été dit maintes fois, le rayon polaire ρ de cette surface est égal au produit $\rho = \rho_0 \times \rho_1$ du rayon polaire ρ_0 du tore représentatif du rayonnement du doublet supposé seul dans l'espace et du rayon polaire ρ_1 de la surface représentant les variations du coefficient caractéristique $2 \sin(\alpha h \sin \varphi)$ ou $2 \sin(\alpha h \sin \theta')$.

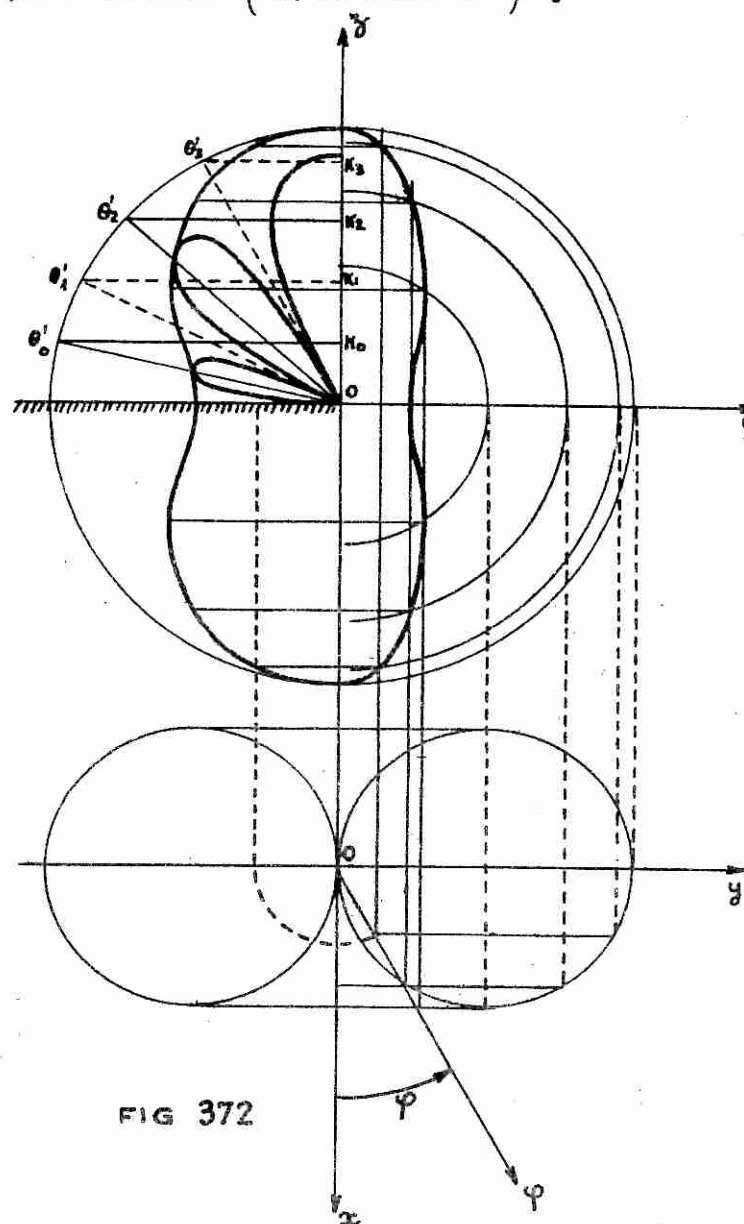


FIG 372

Le tore en question a son axe dirigé suivant ox , tandis que la surface ρ_1 est de révolution autour de la verticale oy' . Quant à la méridienne de la seconde surface, elle se détermine aisément (§ 292), et on peut la représenter, par exemple, dans le plan $y'o'z'$ comme il est fait sur la fig. 291.

Un plan vertical quelconque (d'azimut φ') passant par oy' coupe la surface ρ_1 suivant la même courbe méridienne; par contre il coupe le tore ρ_0 suivant une courbe du 4^e degré, qu'il est facile de construire par points (fig. 272). C'est une courbe qui se

déforme continuellement au fur et à mesure que φ varie. Pour $\varphi = 0$ elle est constituée par les deux cercles constituant la coupe méridienne du tore, puis elle prend l'aspect d'une boucle étranglée en son milieu, et finalement tend vers le grand cercle équatorial du tore pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

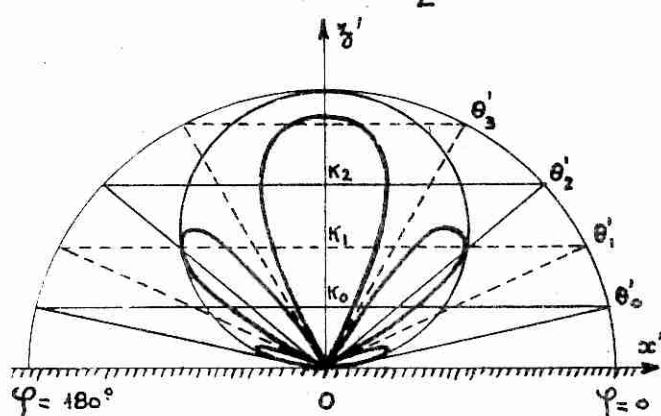


FIG 373

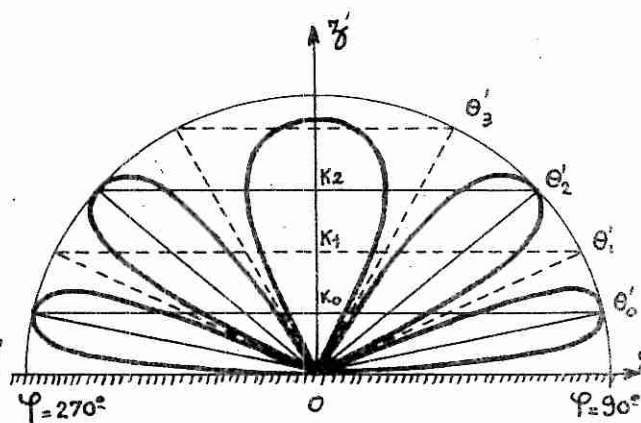


FIG 374

Ces différentes sections du tore représentent les courbes limites, à l'intérieur desquelles sont enfermés les diagrammes de rayonnement cherchés et auxquels ces diagrammes sont tangents dans les directions de colatitudes ξ_0 ou $\theta'_2, \theta'_4, \dots, \theta'_{-2}$ etc... tandis que les directions de colatitudes ξ_1 ou $\theta'_1, \theta'_3, \dots, \theta'_{-1}$ etc... sont en toutes circonstances des directions de rayonnement nul (fig. 372)

Enfin les figures 373 et 374 représentent les diagrammes obtenus pour $\varphi = 0$ et π (plan $x'o'z'$) et $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ (plan $y'o'z'$) tandis que la fig. 374^{bi} donne une vue de la surface caractéristique $\rho = \rho(\varphi, \theta)$ dans l'espace

379 - Les diagrammes considérés ci-dessus sont relatifs à l'amplitude du champ résultant dont la direction est, comme on l'a vu, celle de la tangente en P au grand cercle qui, d'autre part, traverse le plan équatorial xoy suivant l'axe ox .

Il peut également y avoir intérêt à connaître les diagrammes relatifs à des composantes particulières de ce champ, par exemple, la composante E_K suivant la tangente au méridien

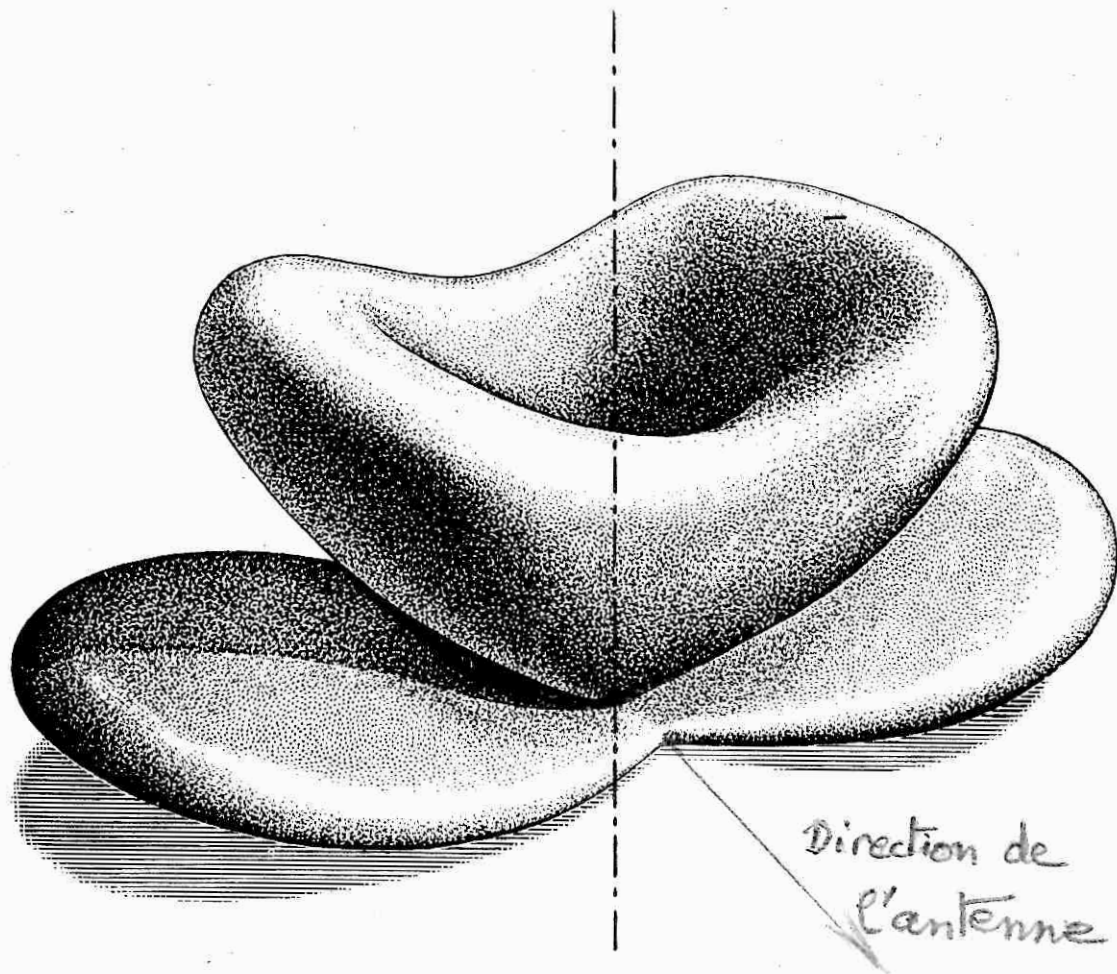


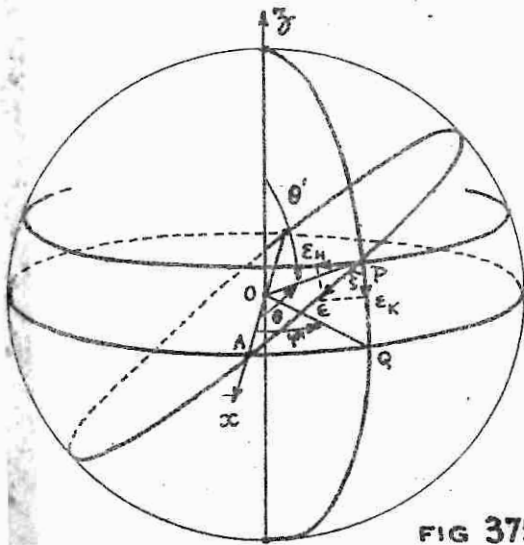
Fig. 374 ^{Bis}

Diagramme de rayonnement, dans l'espace, d'un doublet horizontal situé à une hauteur $h = 5,88 \frac{\lambda}{2\pi}$ au-dessus d'un sol supposé parfaitement conducteur.

en P, et la composante ε_H suivant la direction horizontale.

En désignant par ζ l'angle de ε avec ε_K (fig. 375) on a évidemment les relations :

$$\begin{aligned} \varepsilon_K &= \varepsilon \cos \zeta \\ \varepsilon_H &= \varepsilon \sin \zeta \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \varepsilon_K = \varepsilon \cos \zeta \\ \varepsilon_H = \varepsilon \sin \zeta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varepsilon_K = \varepsilon \cos \zeta \\ \varepsilon_H = \varepsilon \sin \zeta \end{cases}$$



Quant à la valeur de l'angle ζ , elle découle de cette propriété que, dans un triangle sphérique ABC (fig. 376), les sinus des angles et des côtés opposés sont proportionnels :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} \quad (\text{fig. 376}).$$

FIG 375 Faisons en effet, application au triangle APQ de la fig. 375. On a :

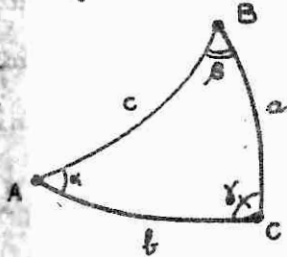


FIG 376

$$\frac{\sin \zeta}{\sin \varphi'} = \frac{\sin PQA}{\sin \theta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$$

Or d'après le § 374 ci-dessus :

$$\cos \theta = \sin \theta' \cos \varphi'.$$

donc :

$$\frac{\sin \zeta}{\sin \varphi'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta' \cos^2 \varphi'}}$$

$$\sin \zeta = \frac{\sin \varphi'}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta' \cos^2 \varphi'}}$$

Quant à $\cos \zeta$, sa valeur est :

$$\cos \zeta = \sqrt{1 - \sin^2 \zeta} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \theta' \cos^2 \varphi' - \sin^2 \varphi'}{1 - \sin^2 \theta' \cos^2 \varphi'}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi' - \sin^2 \theta' \cos^2 \varphi'}{1 - \sin^2 \theta' \cos^2 \varphi'}}$$

c'est à dire : $\cos \zeta = \frac{\cos \varphi' \cos \theta'}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta' \cos^2 \varphi'}}$

On a donc finalement :

$$\begin{cases} \varepsilon_K = \varepsilon \frac{\cos \varphi' \cos \theta'}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta' \cos^2 \varphi'}} \\ \varepsilon_H = \varepsilon \frac{\sin \varphi'}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta' \cos^2 \varphi'}} \end{cases}$$

Résistance de rayonnement du doublet horizontal au-dessus d'un plan parfaitement conducteur.

381 - La résistance de rayonnement R_R est, comme précédemment le rapport de la puissance moyenne $\bar{W}$, rayonnée pendant une période T , ou un temps très grand par rapport à la période T , au carré de l'intensité efficace dans le doublet $I_{\text{eff}} = \frac{I}{\sqrt{2}}$.

Cette puissance totale moyenne $\bar{W}$ est l'intégrale, étendue à la demi-sphère de rayon r située au-dessus du plan horizontal xoy , de toutes les puissances moyennes élémentaires $d\bar{W}$ traversant les éléments $d\sigma = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta$ de cette demi-sphère.

Cette puissance moyenne élémentaire a pour valeur :

$$d\bar{W} = \bar{\mu} d\sigma$$

où $\bar{\mu}$ représente la densité de puissance moyenne dans l'élément $d\sigma$ situé dans la direction φ, θ . Or la densité de puissance instantanée μ est mesurée par la longueur du vecteur de Poynting, à savoir $\mu = \frac{\varepsilon^2}{4\pi c}$, ou encore :

$$\mu = \frac{\varepsilon^2}{4\pi c} \cos^2 (\omega t - \alpha r),$$

r désignant la longueur du rayon OM .

La valeur moyenne $\bar{\mu}$ pendant une période T ou un

temps quelconque très long par rapport à la période T , est donc :

$$\bar{p} = \frac{\epsilon^2}{8\pi c}$$

La puissance élémentaire moyenne à travers l'élément $d\sigma$ est :

$$d\bar{w} = \bar{p} d\sigma$$

$$d\bar{w} = \frac{\epsilon^2}{8\pi c} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta .$$

Remplaçons ϵ par sa valeur tirée du § 373 ci-dessus, à savoir :

$$\epsilon = 2c \frac{\alpha l I}{r} \sin \theta \cos \frac{2\alpha h \sin \varphi \sin \theta - \pi}{2}$$

Il vient donc :

$$d\bar{w} = \frac{1}{8\pi c} \times 4c^2 \frac{\alpha^2 l^2 I^2}{r^2} \times r^2 \sin^3 \theta \cos^2 \frac{2\alpha h \sin \varphi \sin \theta - \pi}{2} d\varphi d\theta$$

$$d\bar{w} = \frac{c}{2} \alpha^2 l^2 I^2 \sin^3 \theta \cos^2 \frac{2\alpha h \sin \varphi \sin \theta - \pi}{2} d\varphi d\theta .$$

382 - la demi-sphère d'intégration (demi-sphère située au-dessus du plan conducteur) est obtenue en faisant varier φ et θ de 0 à π . L'expression de la puissance totale $\bar{w}$ s'écrit donc :

$$\bar{w} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} d\bar{w}$$

$$\bar{w} = \frac{c}{2} \alpha^2 l^2 I^2 \int_0^\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos^2 \frac{2\alpha h \sin \varphi \sin \theta - \pi}{2} d\varphi d\theta$$

D'où l'expression de la résistance de rayonnement :

$$R_R = \frac{\bar{w}}{I_{\text{eff}}^2} = \frac{2\bar{w}}{I^2} = c \alpha^2 l^2 \int_0^\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos^2 \frac{2\alpha h \sin \varphi \sin \theta - \pi}{2} d\varphi d\theta$$

383 - Pour un doublet unique rayonnant dans tout l'espace, nous avons obtenu, au § 271 ci-dessus, une résistance de rayonnement :

$$R_{R.0} = \frac{2C}{3} \alpha^2 l^2 .$$

Le rapport $\frac{R_R}{R_{R.0}}$ est donc donné par le facteur :

$$\frac{R_R}{R_{R.0}} = \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{3}{2} \sin^3 \theta \cos^2 \frac{2\alpha h \sin \varphi \sin \theta - \pi}{2} d\varphi d\theta .$$

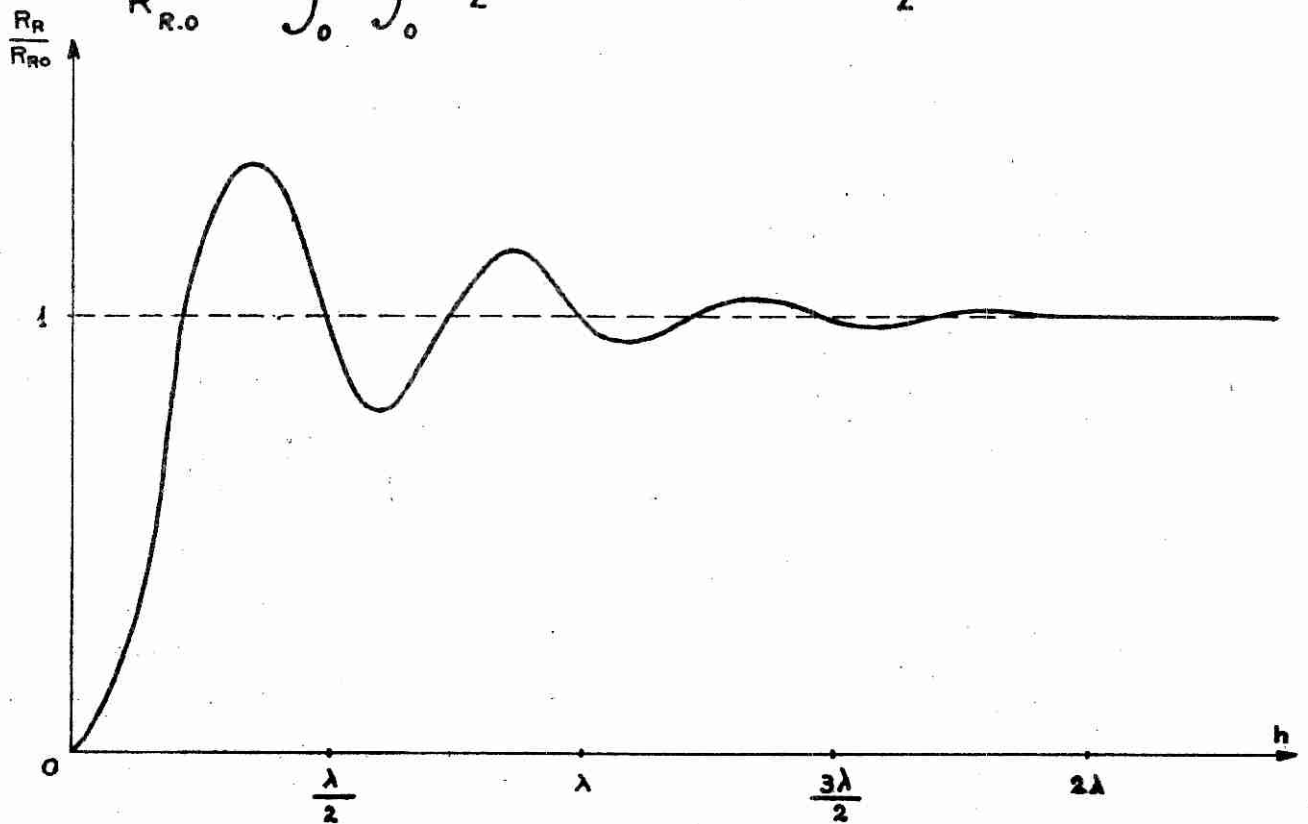


FIG 377

Le calcul de cette intégrale définie donne, pour le rapport $\frac{R_R}{R_{R.0}}$ une fonction de la hauteur h , fonction dont les variations sont représentées par la courbe de la fig. 377 .

Champ du doublet magnétique.



401 - Considérons un circuit fermé élémentaire de surface S parcouru par un courant i . Nous avons vu au Chap. II_a (§ 313) que ce circuit était équivalent à un aimant élémentaire (c'est-à-dire à un doublet magnétique) de moment m , tel que l'on ait la relation :

$$k' m = a i S$$

Dans le système C.G.S d'unités électromagnétiques ($k' = 1$, $a = 1$) cette relation s'écrit, plus simplement

$$m = i S$$

Ce doublet magnétique élémentaire, on peut le considérer comme constitué par deux masses magnétiques de signes contraires $+q$ et $-q$, séparées par un intervalle l , pourvu que l'on ait :

$$m = q l$$

402 - Supposons que le courant i soit un courant sinusoïdal d'amplitude I et de pulsation ω :

$$i = I \cos \omega t,$$

Le moment magnétique sera aussi une grandeur sinusoïdale :

$$m = i S = I S \cos \omega t.$$

$$= M \cos \omega t$$

en désignant par $M = IS$ l'amplitude du moment magnétique considéré.

403 - Ce doublet magnétique détermine dans l'espace un potentiel vecteur instantané $\vec{p}$ dont l'expression a été donnée au Chap. II_a (§ 317). Il détermine aussi un potentiel électrique scalaire u .

Tenant compte des retards dus à la propagation, on peut comme dans le cas du doublet électrique, déduire les expressions du champ magnétique $\vec{h}$ et du champ électrique $\vec{E}$

en un point M quelconque de coordonnées r , φ et θ (voir fig. 401 qui n'est d'ailleurs que la reproduction pure et simple de la fig. 202).

On obtient les résultats suivants:

1° : le champ magnétique en M est contenu dans le plan défini par le point M et le doublet magnétique $a a'$. Il possède donc

seulement une composante radiale h_r et une composante h_θ tangente au méridien du point M.

2° : le champ électrique est perpendiculaire au plan qui vient d'être défini. Il ne possède donc qu'une composante $E_\varphi = E$ tangente au parallèle du point M.

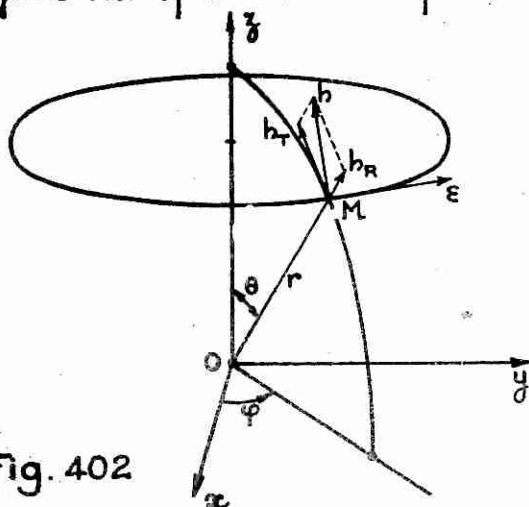


Fig. 401

En d'autres termes, nous retrouvons pour le champ magnétique les propriétés du champ électrique du doublet électrique, tandis que le champ électrique se trouve orienté de la même façon que le champ magnétique du doublet électrique (fig. 402).

Fig. 402

Les expressions de ces diverses composantes sont les suivantes :

$$\begin{cases} h_r = \frac{2M \cos \theta}{r^3} [\cos(\omega t - \alpha r) - \alpha r \sin(\omega t - \alpha r)] \\ h_T = -\frac{2M \sin \theta}{r^3} [(1 - \alpha^2 r^2) \cos(\omega t - \alpha r) - \alpha r \sin(\omega t - \alpha r)] \\ \epsilon = \frac{M \sin \theta}{r^2} [\sin(\omega t - \alpha r) + \alpha r \cos(\omega t - \alpha r)] \end{cases}$$

Dans ces formules, α représente, comme d'habitude, la constante de longueur d'onde :

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{\lambda f} = \frac{\omega}{c}$$

404 - Les expressions de h_r , h_T et ϵ sont à rapprocher des formules du doublet écrites au § 221 ci-dessus. On voit que l'amplitude M y tient lieu du produit $-\frac{I\ell}{\omega}$, c'est-à-dire de l'amplitude $Q\ell$ du moment électrique :

$$\begin{aligned} q\ell &= \ell \int i dt = \ell \int I \omega \sin \omega t \\ &= -\frac{I\ell}{\omega} \cos \omega t \end{aligned}$$

qu'on peut écrire :

$$q\ell = Q\ell \cos \omega t.$$

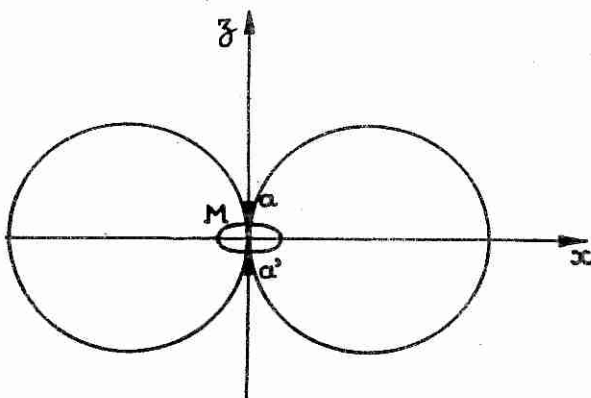


Fig. 403.

Tout ce qui a été dit aux §§ 222 à 275 au sujet du doublet électrique peut aisément être transposé au cas du doublet magnétique.

406 - On retrouve, en particulier, comme diagramme de directivité dans le plan vertical, le même système des deux cercles

égaux tangents à l'axe du doublet (fig. 403) que celui qui avait été obtenu au § 246 pour le doublet électrique.

Résistance de rayonnement du doublet magnétique.

407 - Il est intéressant de calculer l'énergie rayonnée par un doublet magnétique $m = M \cos \omega t$.

Sa valeur moyenne de cette énergie est, dans le cas du doublet électrique (§ 268) :

$$\overline{W} = \frac{4\pi^2 c}{3} \frac{I^2 \ell^2}{\lambda^2}$$

qu'on peut écrire :

$$\overline{W} = \frac{4\pi^2 \omega^2}{3 \lambda^2 c} \frac{c^2 I^2 \ell^2}{\omega^2}$$

Cette expression résulte de l'intégration du vecteur de Poynting $\frac{1}{4\pi} \vec{E} \times \vec{h}$ à la surface d'une sphère de grand rayon autour de l'émetteur.

Dans cette expression, le champ électrique intervient avec le coefficient c^2 provenant du coefficient de la loi d'action électrostatique de Coulomb $k = c^2$ en unités électromagnétiques C.G.S (voir formules du § 221); c'est donc le produit

$c^2 \frac{I^2 \ell^2}{\omega^2}$ qu'il faut remplacer par le moment magnétique M^2

Il vient donc, pour le doublet magnétique :

$$\overline{W} = \frac{4\pi^2 \omega^2}{3 \lambda^2 c} M^2$$

Supposons que le doublet soit constitué par une boucle circulaire de rayon r parcourue par un courant $i = I \cos \omega t$. On a :

$$M = \pi R^2 \times I$$

et par suite :

$$\bar{W} = \frac{4 \pi^2 \omega^2}{3 \lambda^2 c} \pi^2 R^4 I^2$$

$$\bar{W} = \frac{8 \pi^4 \omega^2 \lambda^2}{3 c} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^4 \frac{I^2}{2} .$$

La résistance de rayonnement, rapportée à l'intensité I dans la boucle est :

$$R = \frac{\bar{W}}{\frac{I^2}{2}} = \frac{8 \pi^4 \omega^2 \lambda^2}{3 c} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^4 ;$$

or : $\omega^2 \lambda^2 = 4 \pi^2 f^2 \lambda^2 = 4 \pi^2 c^2 ,$

d'où :

$$R = \frac{8 \pi^4 \times 4 \pi^2 c^2}{3 c} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^4$$

$$R = \frac{32 \pi^6 c}{3} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^4 .$$

Dans le système pratique, on a $c = 30$ (voir § 272) R et λ pouvant être exprimées avec une unité quelconque pourvu qu'elle soit la même pour R et λ :

$$\begin{aligned} R_{\text{ohm}} &= 320 \pi^6 \left(\frac{R}{\lambda} \right)^4 \\ &= 3,08 \cdot 10^5 \left(\frac{R}{\lambda} \right)^4 . \end{aligned}$$

408 - Pour une boucle dont le rayon est égal à $\frac{\lambda}{10}$, par exemple, on trouve $R = 31$ ohms. Cette résistance est sensiblement la même que celle d'un doublet électrique dont la

longueur serait égale au diamètre de la boucle. D'après le § 272, cette résistance est, en effet :

$$\begin{aligned} R' &= 789 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 = 789 \left(\frac{2R}{\lambda} \right)^2 \\ &= 789 \left(\frac{1}{5} \right)^2 = 31,5 \, \Omega \end{aligned}$$

Cette égalité ($R = R'$) cesse évidemment d'être vraie pour les valeurs de $\frac{R}{\lambda}$ qui diffèrent de la valeur indiquée ($\frac{R}{\lambda} = \frac{1}{10}$) ; on voit immédiatement que R décroît beaucoup plus vite que R' lorsque l'on fait décroître le rapport $\frac{R}{\lambda}$, puisque le rapport $\frac{R}{R'}$ est proportionnel à $\left(\frac{R}{\lambda} \right)^2$.

Influence du sol sur un doublet magnétique vertical.

409 - La présence du sol, que nous supposons parfaitement conducteur, produit, sur le doublet magnétique, un effet complètement différent de celui qui est produit sur le doublet électrique. En effet, le principe des images électriques (§ 181) nous a appris que le champ électromagnétique cherché, était le même que celui qui serait rayonné dans l'espace indéfini (le sol n'existant pas) par le doublet et son image électrique par rapport au sol.

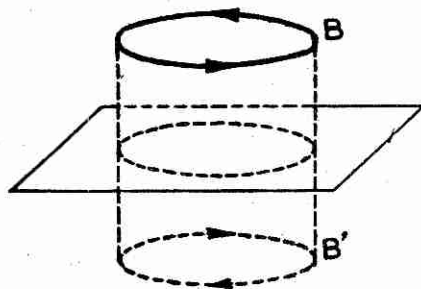


Fig. 409

Or, cette image (§ 183 ; fig. 185) est une boucle B' de même dimension, parcourue par un courant de sens inverse (fig. 409). Autrement dit, l'image du doublet magnétique est un doublet magnétique égal et de sens contraire. Si le doublet magnétique (c'est-à-dire la boucle) est posé sur le sol, la distance entre la boucle et son

image est nulle, les deux boucles s'opposent complètement, le rayonnement est nul.

410 - On traitera donc le cas du doublet magnétique situé à la hauteur $2h$ au-dessus du sol, comme on a traité la paire de doublets ^{électriques} placés dans le prolongement l'un de l'autre, à l'intervalle $2h$ et déphasés d'un angle de phase δ . Il suffit de faire $\delta = \pi$ dans les développements des §§ 333 et suivants. Le diagramme de directivité dans le plan vertical, dont il ne faudra d'ailleurs retenir que la partie située au-dessus de la direction horizontale, sera symétrique par rapport à cette même direction, laquelle sera une direction de rayonnement nul (voir fig. 410, qui est à rapprocher de la fig. 332 précédemment donnée).

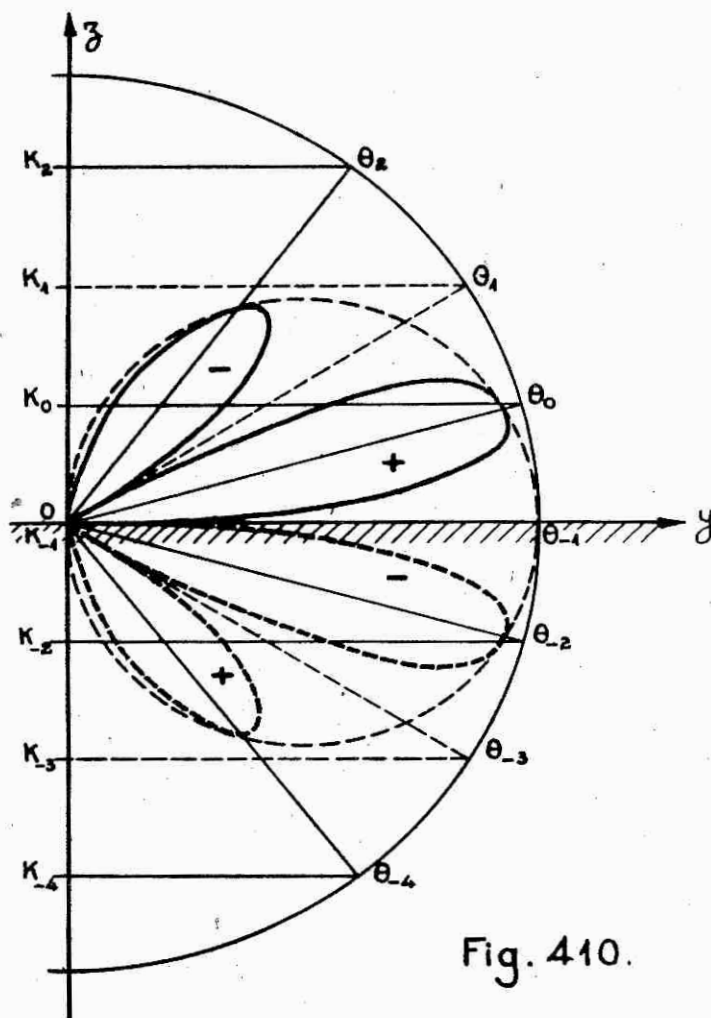


Fig. 410.

Champ d'un doublet oblique à la hauteur h au-dessus d'un plan horizontal parfaitement conducteur.

425 - Soit a, a' , ce doublet de longueur l et situé à la hauteur h au-dessus du plan conducteur horizontal. Nous prendrons comme axe oz la verticale passant par le milieu O , de a, a' , le plan xoy étant le plan conducteur donné et le plan xoz étant celui qui contient le doublet donné (fig. 425).

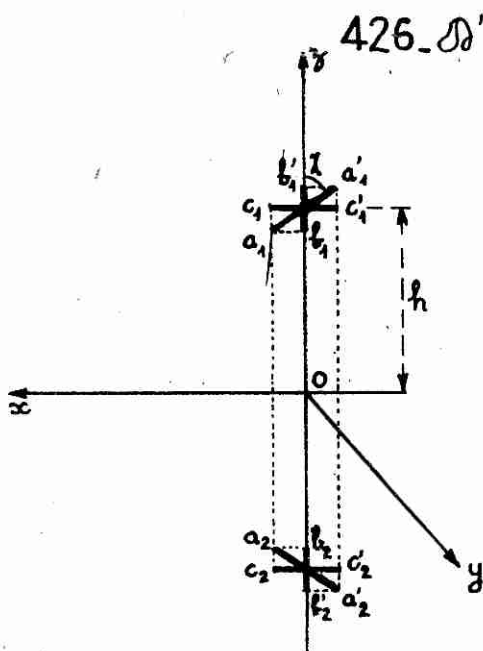


FIG 425

426. D'après le principe exposé au § 191 (principe de décomposition) le champ E produit, par ce doublet, en un point éloigné P , à la distance r dans la direction θ, φ au-dessus du plan xoy sera égal à la résultante des champs qui seraient produits séparément par la projection b, b' du doublet a, a' suivant la verticale, et par sa projection c, c' suivant la direction horizontale, les deux doublets b, b' et c, c' étant supposés parcourus par le même courant I que le doublet donné a, a' .

Donné a, a' .

Désignons par χ l'angle de a, a' avec la verticale;

on a :

$$\begin{aligned} b, b' &= a, a' \cos \chi = l \cos \chi \\ \text{et } c, c' &= a, a' \sin \chi = l \sin \chi. \end{aligned}$$

Cas du doublet électrique.

427 - Or les champs E_1 et E_2 sont connus. E_1 est le champ d'un doublet vertical de longueur $l \cos \chi$ parcouru par l'intensité I et situé à la hauteur h au-dessus d'un plan

conducteur horizontal. Son expression nous a été donnée au § 313 ci-dessus ; il vient donc :

$$\mathcal{E}_1 = -j c \frac{\alpha J}{r} l \cos \chi \sin \theta e^{-j\alpha z} \times 2 \cos (\alpha h \cos \theta)$$

D'autre part $\mathcal{E}_2$ est le champ d'un doublet horizontal de longueur $l \sin \chi$ parcouru par la même intensité J et situé à la même hauteur h au-dessus du plan horizontal conducteur. On a, d'après le § 374, en supprimant les accents de θ' et φ' :

$$\mathcal{E}_2 = -j c \frac{\alpha J}{r} l \sin \chi \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} e^{-j\alpha z} \times 2 j \sin (\alpha h \cos \theta)$$

La somme $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ donne l'expression du champ résultant cherché.

428 - On remarquera que ce champ est aussi la résultante des champs qui seraient créés séparément, en l'absence du plan conducteur par le doublet $a_1 a'_1$ et son image $a_2 a'_2$, ou encore par les deux doublets $b_1 b'_1$, $c_1 c'_1$ et leurs images $b_2 b'_2$ et $c_2 c'_2$ (fig. 425).

Autres représentations des diagrammes de rayonnement.

Diagrammes rapportés à une puissance rayonnée donnée.

435 - Dans ce qui précède nous avons pris, comme rayon polaire du diagramme de rayonnement, le rapport $\rho = \frac{E}{E_0}$, E étant l'amplitude du champ à la distance r dans la direction θ , φ et E_0 l'amplitude du champ fourni, à la même distance r , dans la direction horizontale par un doublet vertical de même longueur l , et parcouru par la même intensité $i = I \sin \omega t$.

Or nous avons vu que la résistance de rayonnement des derniers systèmes étudiés était différente de celle du doublet vertical au sol, et au surplus qu'elle variait avec les paramètres des systèmes étudiés (fig. 314 et 377 en particulier). La puissance rayonnée dans chaque cas est donc, elle aussi, différente.

436 - Pour les applications pratiques il est plus commode d'adopter comme doublet de référence, non pas un doublet de même longueur parcouru par la même intensité I , mais un doublet qui rayonnerait la même puissance HF totale que le système étudié, ce doublet étant, par exemple, placé verticalement au contact d'un sol supposé parfaitement conducteur.

Soit $\bar{W}$ la puissance rayonnée par le système étudié. Nous avons vu au § 277 que le champ E_0' d'un tel doublet, rayonnant la puissance $\bar{W}$, était :

$$E_0' = \frac{1}{r} \sqrt{6 c \bar{W}} ,$$

expression, d'ailleurs, indépendante de la longueur dudit doublet.

437 - Dans le cas où le doublet de référence est supposé isolé dans l'espace, le champ E'_0 , pour une même puissance rayonnée $\bar{W}$ est évidemment $\sqrt{2}$ fois plus petit :

$$E'_0 = \frac{1}{r} \sqrt{3 c \bar{W}}$$

438 - Le nouveau diagramme de rayonnement se déduit de l'ancien par un simple changement de l'échelle graphique employée pour mesurer son rayon polaire ρ .

Si ρ est le rayon polaire de direction φ, θ dans l'ancien diagramme, le rayon ρ' dans le nouveau aura pour longueur :

$$\rho' = \frac{E}{E'_0} = \frac{E}{E_0} \times \frac{E_0}{E'_0} = \rho \times \frac{E_0}{E'_0}$$

Or les champs E_0 et E'_0 sont proportionnels aux racines carrées des puissances $\bar{W}_0$ et $\bar{W}'_0$ mises en jeu, puisqu'il s'agit du même doublet dans les deux cas.

D'autre part, les puissances $\bar{W}_0$ et $\bar{W}$ sont proportionnelles aux résistances de rayonnement R_0 et R_R puisque l'intensité mise en jeu est la même dans les deux cas. Comme enfin $\bar{W} = \bar{W}'_0$ on a finalement l'égalité :

$$\frac{E_0}{E'_0} = \sqrt{\frac{\bar{W}_0}{\bar{W}'_0}} = \sqrt{\frac{\bar{W}_0}{\bar{W}}} = \sqrt{\frac{R_0}{R_R}}$$

et par conséquent :

$$\rho' = \rho \times \sqrt{\frac{R_0}{R_R}}$$

Le second diagramme sera représenté par la même courbe que le premier, à condition de multiplier l'échelle graphique du rayon polaire ρ par le rapport inverse $\sqrt{\frac{R_R}{R_0}}$.

Echelles absolues .

439 - Les deux échelles précédentes mesurent toujours des grandeurs relatives puisque celles-ci représentent le rapport de deux grandeurs, les champs E et E_0 sur E'_0 .

On peut donner à la longueur du rayon polaire ρ une signification absolue en précisant :

- d'une part la puissance $\bar{W} = \bar{W}'_0$ rayonnée
- d'autre part la distance r à laquelle est mesurée, ou rapportée, le champ E .

L'échelle de ρ peut alors être graduée directement en valeurs du champ E , par exemple en millivolts par mètre, la puissance $\bar{W}$ étant prise égale à 1 Kw rayonné et la distance r à 1 kilomètre.

Muni d'une telle graduation, les diagrammes de rayonnement donnent des renseignements directement utilisables puisqu'il ne reste plus qu'à multiplier le résultat lu sur la courbe par le rapport $\frac{\sqrt{P \text{ Kilowatt}}}{r \text{ Kilomètres}}$ pour avoir le champ à la distance r d'un émetteur rayonnant la puissance P .

Diagrammes en coordonnées cartésiennes .

440 - Pour le tracé des courbes et leur lecture, il

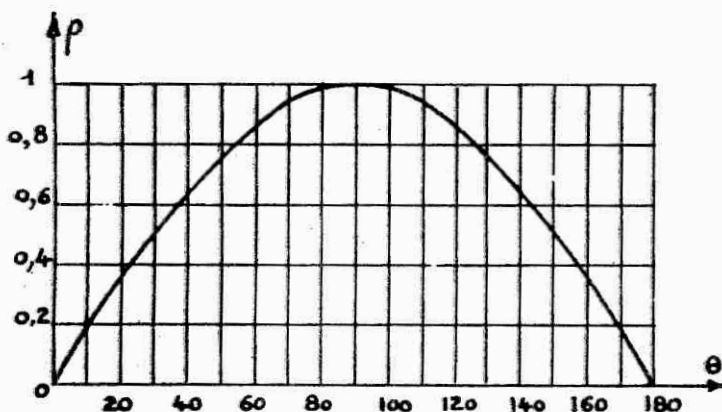


Fig. 440

est souvent plus commode de substituer des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires pour la représentation des diagrammes de rayonnement.

Le paramètre ρ est alors porté en ordonnées

et l'azimut φ (ou la distance zénitale θ) en abscisses.

La courbe obtenue a l'inconvénient de ne plus donner une image immédiate de la manière dont l'énergie est distribuée dans les directions de l'espace mais les mesures graphiques y sont plus aisées.

A titre d'exemple, la figure 440 représente le diagramme de rayonnement du doublet en coordonnées rectangulaires; la courbe obtenue n'est évidemment autre chose qu'une sinusoïde ordinaire.

C. Propagation des ondes radioélectriques.

501 - La propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu homogène indéfini ou au-dessus d'un sol suppose plan et parfaitement conducteur (σ infini) a, en fait, déjà été étudiée au cours des §§ 124 à 129 du présent Chapitre.

Ces conditions ne sont pas exactement celles qui interviennent dans la réalité pratique ; en effet :

- 1° : Le sol réel possède une conductibilité finie en raison de laquelle les ondes pénètrent plus ou moins profondément dans le sol en s'y amortissant (voir § 53').

2° : La haute atmosphère, par suite de l'ionisation intense provoquée par le rayonnement solaire est, elle aussi, conductrice et devient capable de renvoyer vers le sol une fraction plus ou moins importante de l'énergie qui lui parvient du poste émetteur :

Comme on le verra ultérieurement plus en détails (§ 592), la hauteur des couches ionisées et le degré de l'ionisation sont essentiellement variables non seulement avec le lieu géographique, mais encore dans le temps (heure du jour, saison, année). Il en résulte des variations considérables de l'intensité des ondes qui arrivent au poste récepteur après avoir été renvoyées par la haute atmosphère.

3° : La surface du sol ne peut être confondue avec un plan que pour les petites distances comprises entre émetteurs et récepteurs. Dans le cas contraire il est indispensable de tenir compte de la courbure de la terre.

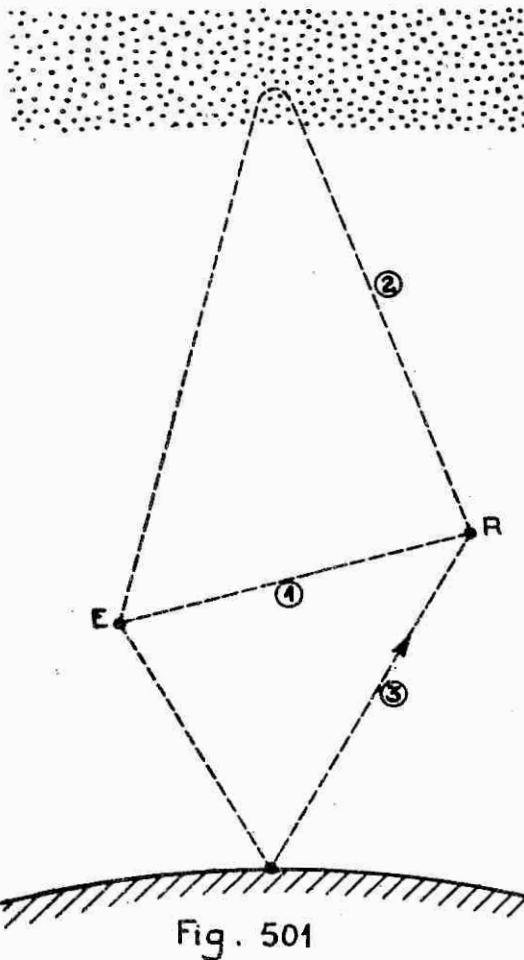
4° : La basse atmosphère elle-même n'est pas absolument homogène, puisque l'indice de réfraction de l'air est fonction de la pression, du degré hygrométrique et de la température, lesquels ne sont pas uniformes dans l'atmosphère. L'effet de ces variations est particulièrement sensible dans le cas de très hautes fréquences dont la propagation s'apparente de plus en plus à celle de la lumière visible (propagation suivant le rayon optique).

502 - De ce qui précède, il résulte que les phénomènes à intervenir pourront différer sensiblement d'après les emplacements occupés par l'antenne d'émission et par l'antenne de réception, par rapport à la surface du sol.

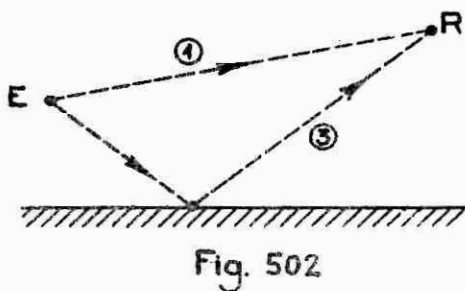
503 - Considérons le cas où l'antenne d'émission et l'antenne de réception sont toutes deux placées à des hauteurs notables au-dessus du sol . Le champ électromagnétique qui agit sur l'antenne de réception est la résultante des champs produits par trois ondes distinctes (fig. 501) .

- une onde directe ① .
- une onde réfléchie par la haute atmosphère ou onde ionosphérique ② .
- une onde réfléchie par le sol ③ .

504 - Lorsque la distance ER est petite vis-à-vis



de la hauteur de la couche réfléchissante de la haute atmosphère, le champ provenant de l'onde ionosphérique est négligeable devant les deux autres (et en pratique devant la résultante de ces deux champs) et tout se passe comme si la propagation se faisait seulement au moyen des ondes ① et ③ (fig. 502).



505 - L'ensemble constitué par la composition de l'onde directe ① et de l'onde ③ réfléchi par le sol est souvent désigné sous le nom d'onde d'espace.

506 - Enfin, lorsque la distance ER est petite vis-à-vis de la hauteur des antennes au-dessus du sol,

le champ provenant de l'onde directe est prédominant et tout se passe, à très peu près, comme si la propagation se faisait uniquement par l'onde directe ① (fig. 501).

507 - Lorsque les antennes se rapprochent du sol, l'expérience et la théorie

montrent que le champ réel ne coïncide plus avec la résultante des champs de l'onde directe et de l'onde réfléchie telle que celle-ci est définie par les formules de Fresnel. Pour obtenir le champ réel, il faut ajouter à cette résultante un certain champ supplémentaire. Ce champ est le champ de l'onde de surface, par définition.

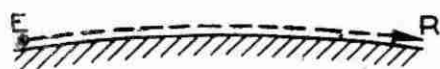


Fig. 503.

508 - Il est visible que cette onde de surface est la seule à exister quand les deux antennes sont situées à la surface du sol, puisque, dans ce cas, (incidence égale à 90°), le coeffi-

cient de réflexion a son module égal à l'unité, et son argument égal à 180° . L'onde dite "réfléchie par le sol" est exactement en opposition avec l'onde directe; leur résultante, (ou onde d'espace) est constamment nulle.

509 - Quand les antennes sont progressivement élevées au-dessus du sol, la résultante de l'onde directe et de l'onde réfléchie croît rapidement tandis que l'amplitude de l'onde de surface décroît. Le champ réel a une amplitude qui croît tout d'abord, puis diminue ensuite par suite de la disparition de l'onde de surface.

510 - Dans ce qui va suivre, on étudiera successivement :

- la propagation de l'onde de surface
- la propagation de l'onde d'espace ou résultante de l'onde directe et de l'onde dite réfléchie par le sol.
- la propagation de l'onde renvoyée par la haute atmosphère ou onde ionosphérique.

I. Propagation de l'onde de surface.

511 - L'onde de surface se propage autour de l'antenne d'émission en s'affaiblissant plus rapidement que l'onde rayonnée dans l'espace libre et indéfini (§ 230) ou, ce qui est équivalent, que l'onde émise en présence d'un sol parfaitement conducteur (§ 276). En effet, par suite de la conductibilité finie du sol, le champ électromagnétique y pénètre à une profondeur plus ou moins grande en y dissipant une part plus ou moins importante de l'énergie transportée par cette onde.

512 - L'amplitude E du champ de l'onde de surface a déjà, en fait, été donnée au § 276 ci-dessus, dans le cas d'un sol plan et parfaitement conducteur, pour une antenne de faible hauteur par rapport à la longueur d'onde, $E = 4\pi c \frac{I}{d} \frac{h_{\text{eff}}}{\lambda}$ où h_{eff} est la hauteur effective de l'antenne d'émission, I l'amplitude du courant HF au pied de cette antenne, d la distance réelle qui sépare l'émetteur du récepteur, ceux-ci étant tous deux situés à la surface du sol.

- Le problème consiste maintenant à tenir compte :
- des caractéristiques vraies du sol réel.
 - de la courbure de la terre.

Influence des caractéristiques du sol : Constante diélectrique et conductibilité.

513 - La théorie de l'onde de surface a été donnée pour la première fois par Sommerfeld en 1909, puis perfectionnée par divers auteurs, notamment par van der Pol. Nous

nous bornerons à donner les résultats de cette théorie.

Deux cas sont à distinguer, d'après la distance entre l'émetteur et le récepteur, distance en fonction de laquelle la surface de la terre peut ou non être considérée comme un plan.

Cas des petites distances permettant de considérer la surface de la terre comme planes. Théorie de Sommerfeld.

514 - Dans ce cas, le champ E est donnée par l'expression :

$$E = \frac{2 E_0}{d} \times A ,$$

où d est la distance réelle

E_0 l'amplitude du champ qui serait rayonné dans l'espace supposé libre et indéfini, à la distance unité, par la même antenne supposée parcourue par les mêmes courants.

A est le coefficient qui tient compte de l'affaiblissement supplémentaire dû aux pertes dans le sol. Il est évidemment réduit à l'unité, pour un sol parfaitement conducteur, dans le cas d'une onde polarisée verticalement; on a alors $E = \frac{2 E_0}{d}$, ce que nous savons déjà (§ 278).

515 - Le coefficient A est, en réalité, une fonction compliquée de la fréquence f , de la distance d , de la constante diélectrique K et de la conductibilité σ du sol. Mais diverses approximations permettent d'exprimer A en fonction de 2 paramètres seulement, à savoir :

- la distance numérique p ,
- et la constante de phase b .

516 - La distance numérique p représente la mesure de la distance réelle au moyen d'une unité qui dépend

elle-même :

- de la distance réelle d
- de la fréquence f
- de la polarisation de l'onde (verticale ou horizontale)
- des caractéristiques du sol (conductibilité σ et constante diélectrique K , ou plus précisément de l'argument de l'impédance imaginaire spécifique du sol considéré comme une résistance shuntée par un condensateur)

517 - La constante de phase b est une fonction du même argument de la même impédance imaginaire que ci-dessus.

On a :

Dans le cas de la polarisation verticale

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \frac{\pi}{x} \frac{d}{\lambda} \frac{\cos^2 b''}{\cos b'} \cong \frac{\pi}{x} \frac{d}{\lambda} \cos b \\ b = (2b'' - b') \cong \arctg \frac{K+1}{x} \end{array} \right.$$

Dans le cas de la polarisation horizontale

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \pi \frac{d}{\lambda} \frac{x}{\cos b'} \\ b = \pi - b' \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{4.80 \times 10^{21} \sigma}{f} \\ b' \cong \arctg \frac{K-1}{x} \\ b'' = \arctg \frac{K}{x} \end{array} \right.$$

σ étant exprimé en unités électromagnétiques, f en cycles seconde et la longueur d'onde λ dans la même unité que la distance d .

518 - Ses courbes de la fig. 511 donnent la valeur du coefficient A en fonction de p (variant de 1/100 à 1000) pour les 5 valeurs suivantes de la constante de phase :

$$b = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ \text{ et } 180^\circ.$$

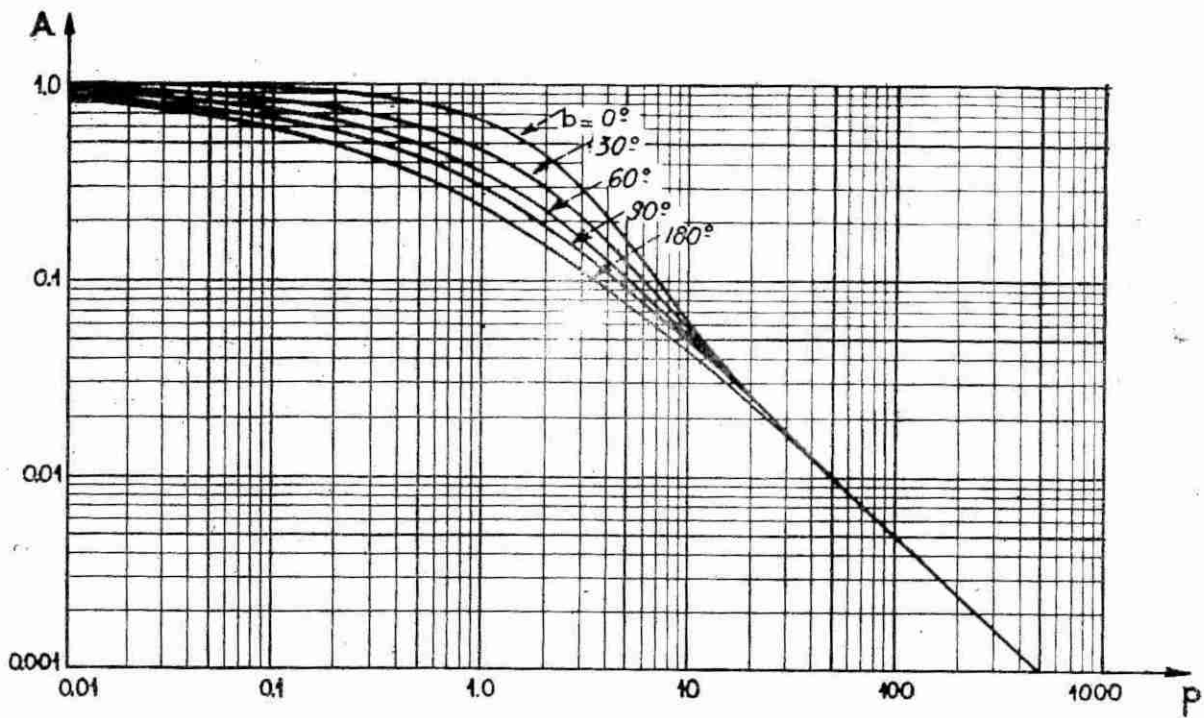


Fig. 511

519 - Comme le montre cette figure, aux grandes distances numériques ($p \geq 10$) le coefficient A devient tout simplement proportionnel à la distance numérique, donc à la distance réelle d .

On a :
$$A = \frac{1}{2p}.$$

Il s'en suit que le champ E est alors inversement proportionnel au carré de la distance (alors qu'il est inversement proportionnel à cette distance en l'absence de pertes - espace libre ou présence d'un sol parfaitement conducteur).

Cas particuliers .

520 - Lorsque le courant de déplacement dans le sol est négligeable vis-à-vis du courant de conduction (§ 185) ou encore lorsque le sol peut être considéré à peu près comme une résistance pure (c'est-à-dire aux basses fréquences), la constante de phase b est petite et la distance numérique p dépend à peu près uniquement de la conductibilité σ du sol ; on a :

$$p \cong \pi \frac{f}{1,8 \times 10^{21} \sigma} \times \frac{d}{\lambda} .$$

Au contraire, lorsque c'est le courant de conduction qui est négligeable vis-à-vis du courant de déplacement (le sol pouvant être considéré comme un diélectrique pur), la constante de phase approche de 90° . La distance numérique p dépend pratiquement uniquement de la grandeur de la constante diélectrique K : $p \cong \frac{\pi}{K+1} \frac{d}{\lambda}$

521 - L'hypothèse de la planité du sol est admissible pour les distances d inférieures à une certaine limite d_0 qui dépend de la fréquence. Cette limite est donnée sensiblement par la relation :

$$d_0 = 80 f^{\frac{1}{3}} \quad (d_0 \text{ en kilomètres et } f \text{ en mégacycles}) .$$

522 - Les fig. 520 à 522 donnent quelques résultats pratiques exprimés en microvolts par mètres, en fonction de la distance d pour diverses fréquences et dans le cas de divers sols de caractéristiques différentes. L'émetteur est supposé constitué par une antenne verticale de faible hauteur vis-à-vis de la longueur d'onde et rayonnant une puissance de 1 kilowatt.

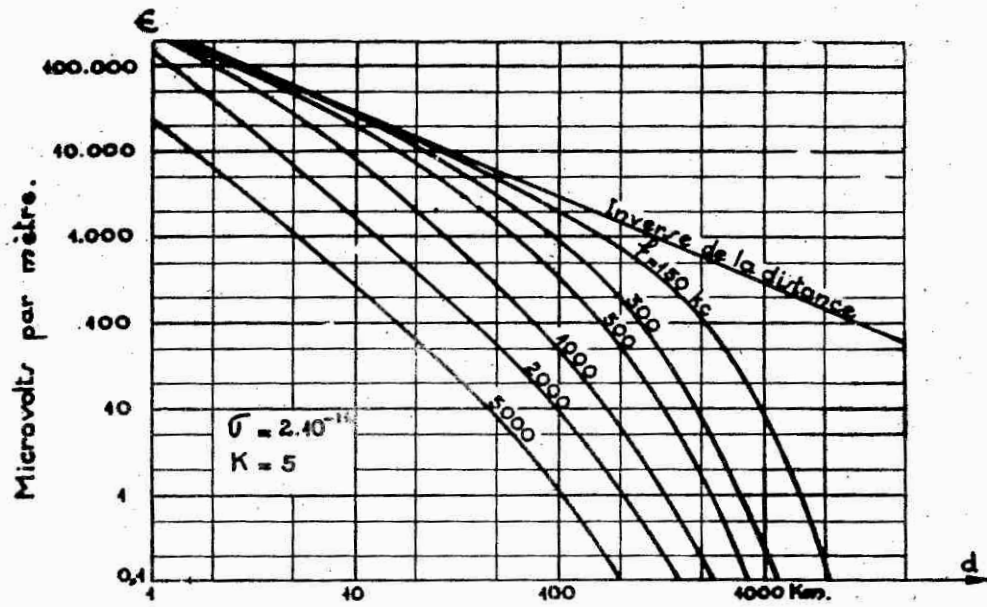


Fig. 520

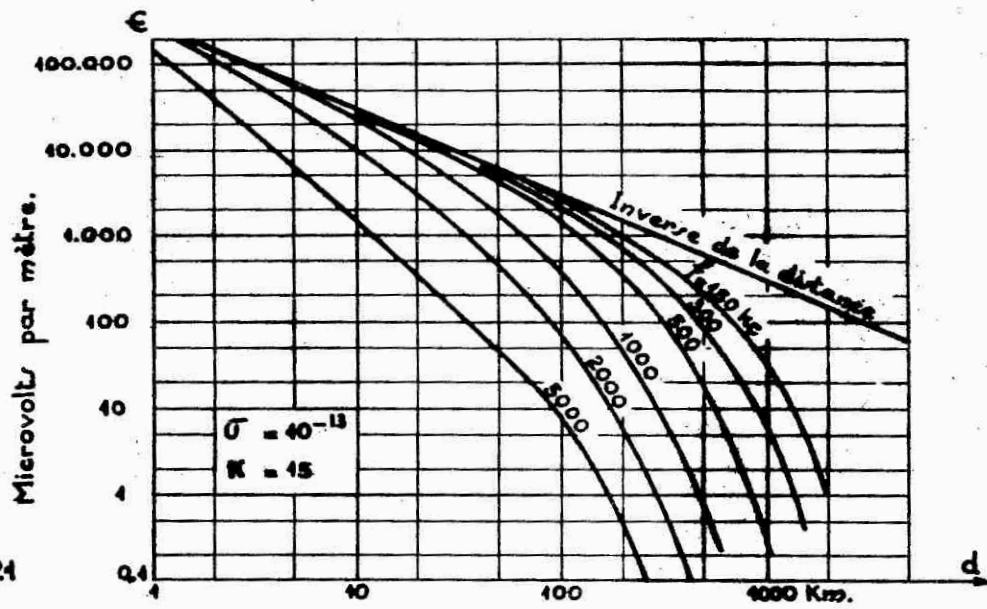


Fig. 521

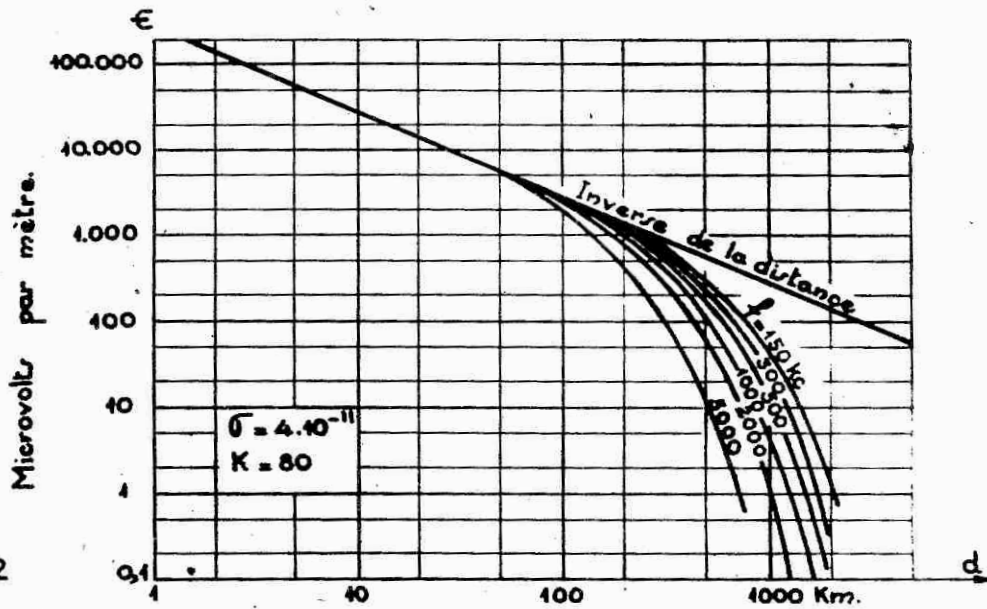


Fig. 522

Cas des grandes distances . (tenant compte de la courbure de la terre) .

523 - La propagation de l'onde de surface n'est pas arrêtée par la courbure de la terre . Les ondes électromagnétiques ont , en effet , la possibilité de contourner la terre grâce à deux phénomènes qui viennent ajouter leurs effets :

- 1° : La réfraction qui se produit dans l'atmosphère par suite des variations de l'indice avec l'altitude (voir plus loin § 651) .
- 2° : La diffraction qui est inséparable de toute propagation par ondes et qui est d'autant plus importante que la fréquence est moins élevée .

De toutes manières , la courbure de la terre impose à l'onde de surface un amortissement supplémentaire que la théorie permet de déterminer .

524 - La méthode consiste à calculer tout d'abord le champ comme si le sol était plan (§ 514 ci-dessus) et à appliquer au résultat obtenu un coefficient de réduction dont la valeur est donnée dans les formulaires , en fonction de la distance numérique p , de la constante de phase b , et des constantes K et σ du sol . On peut aussi utiliser des courbes telles que celles qui sont données par les fig 523 à 526 pour certaines valeurs déterminées des constantes σ et K . Ces courbes donnent , directement en microvolts par mètre , le champ produit par un émetteur de 1 kw rayonné , en fonction de la distance à cet émetteur . La polarisation est supposée verticale , et l'antenne d'émission petite vis-à-vis de la longueur d'onde (champ rayonné proportionnel au cosinus de l'angle de site) .

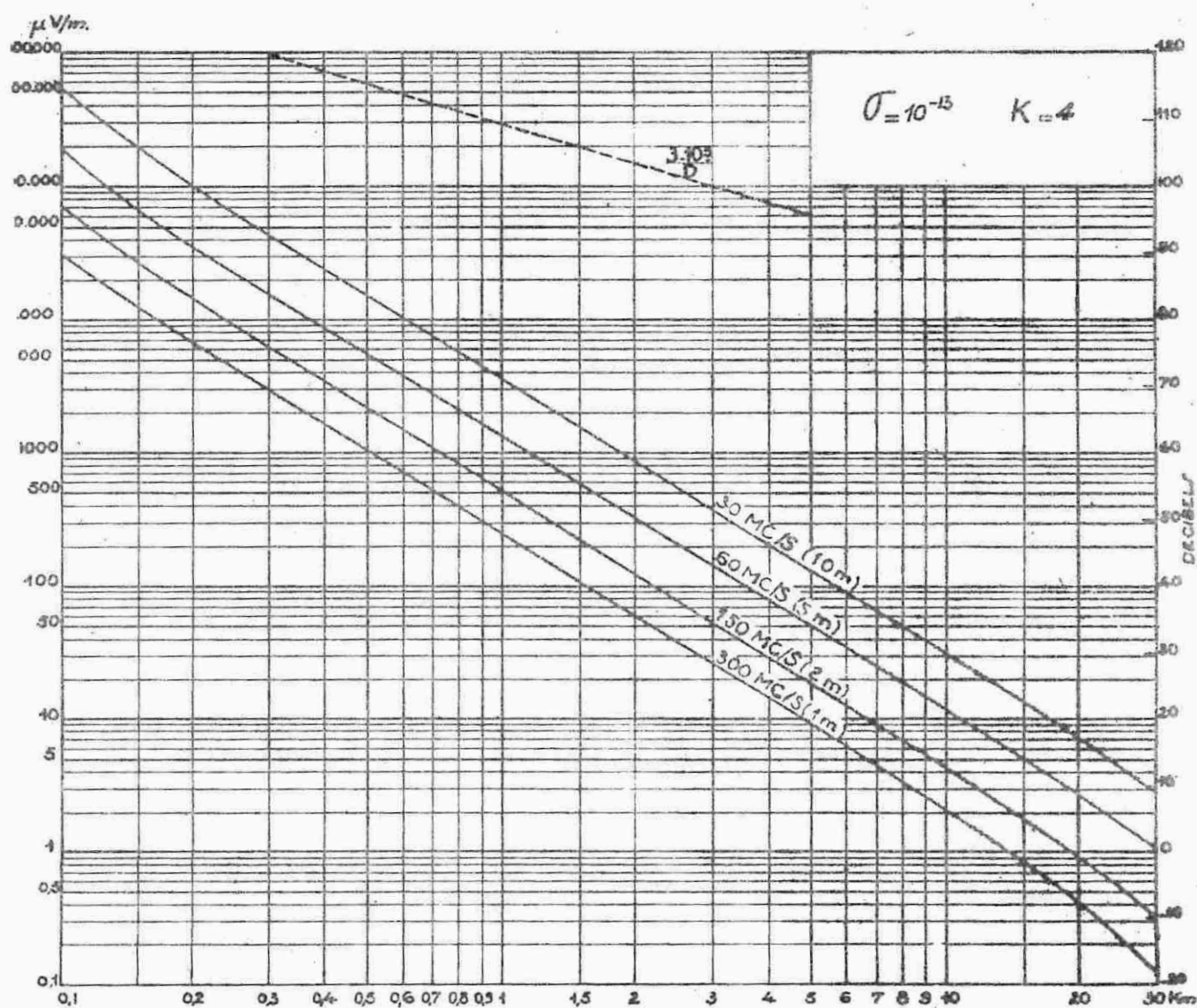


Fig. 523

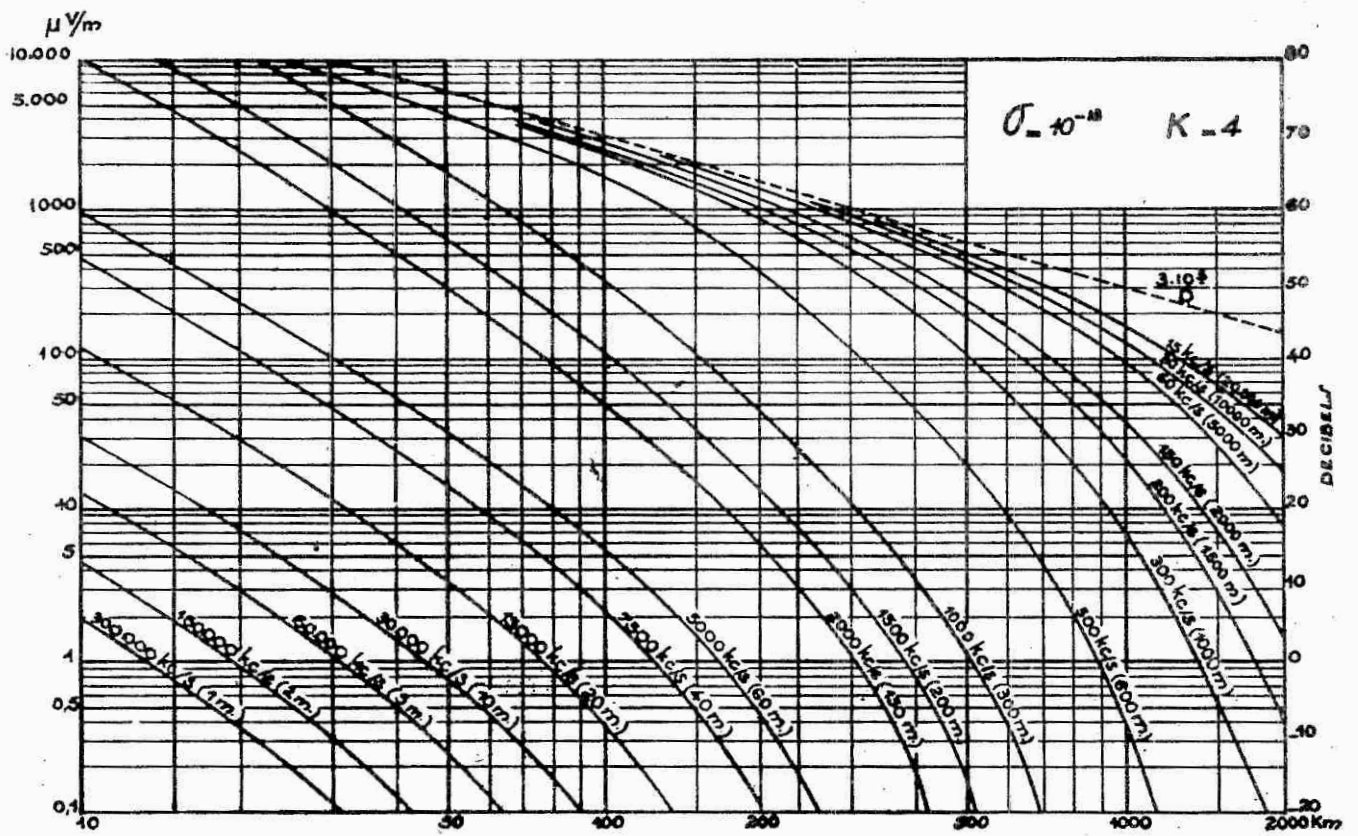


Fig. 524

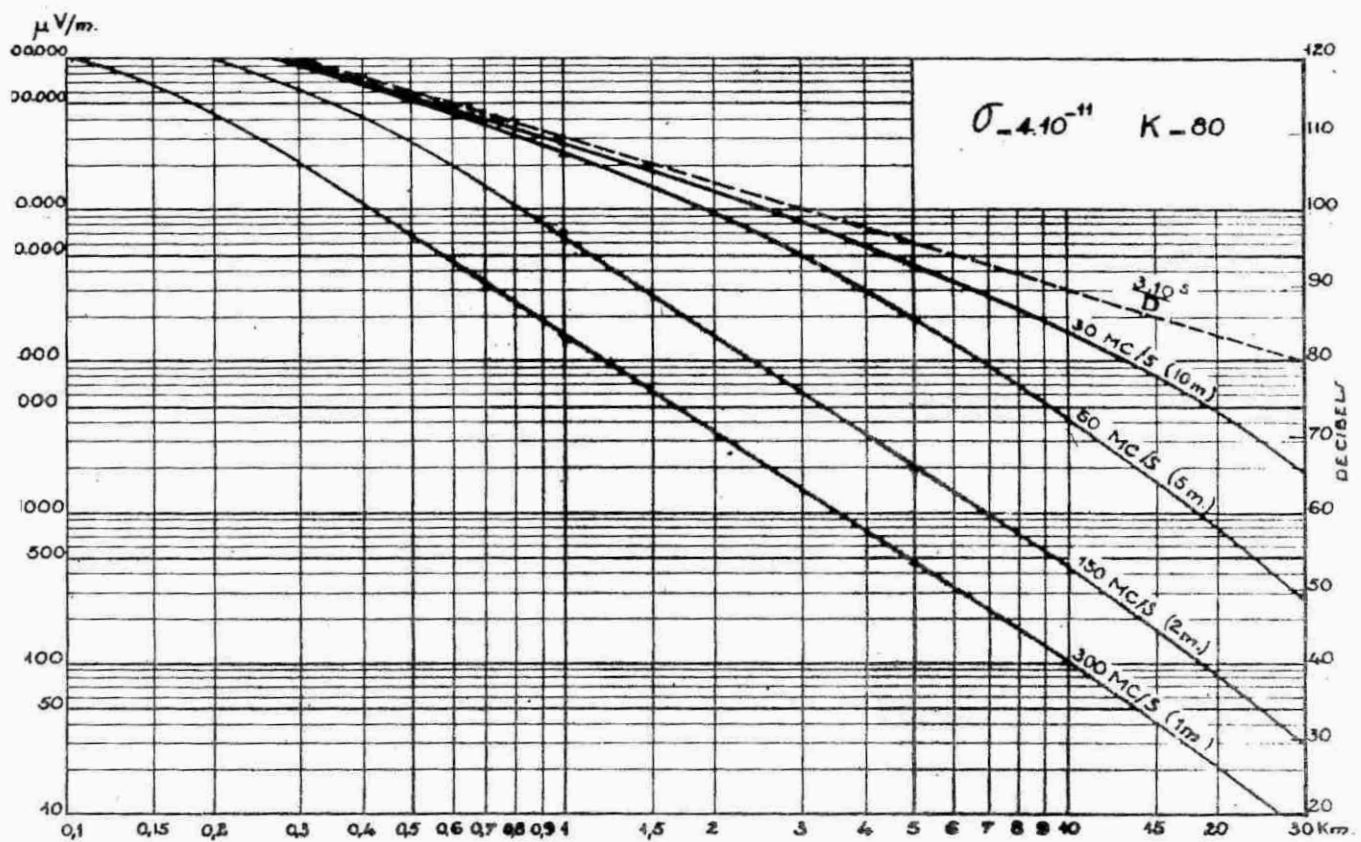


Fig. 525

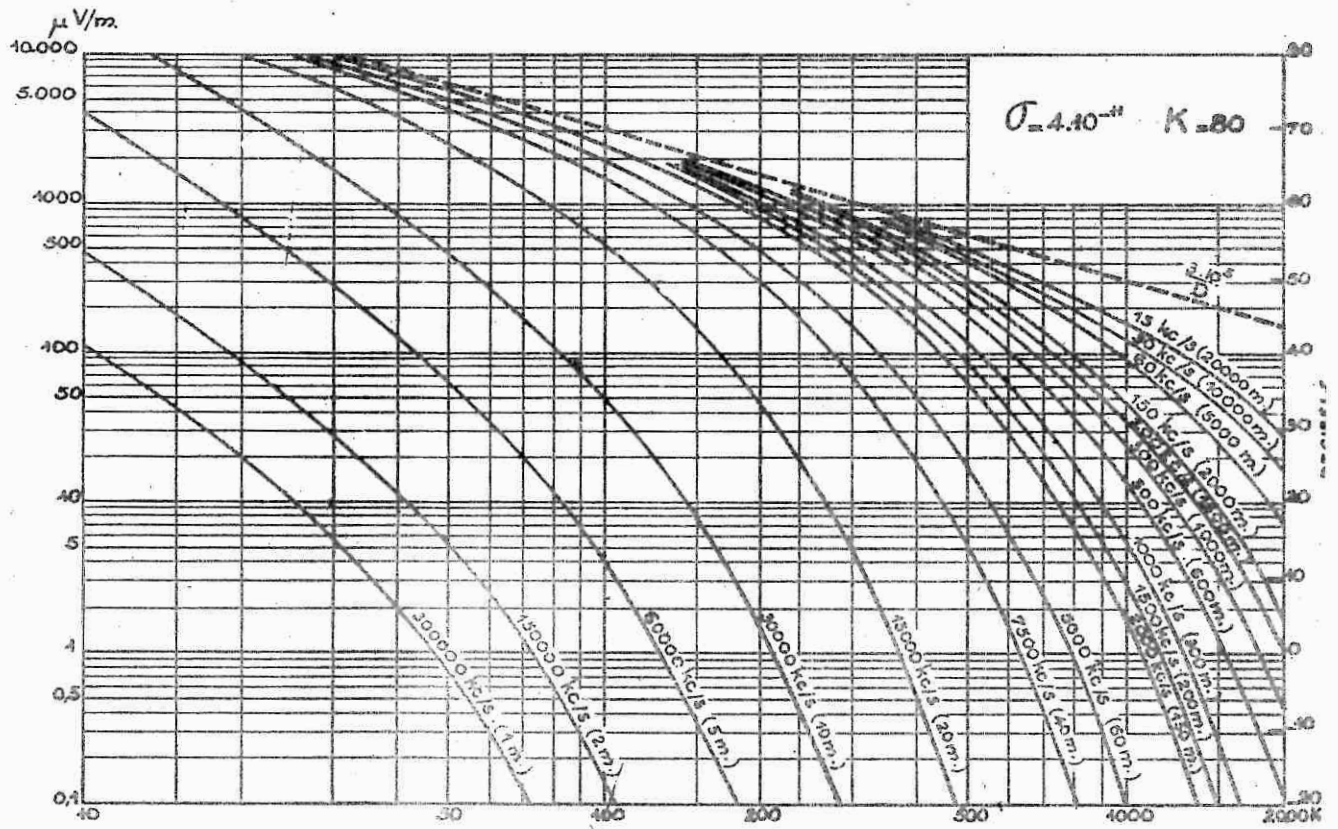


Fig. 526

Pénétration de l'onde de surface dans le sol.

531 - L'onde de surface pénètre à l'intérieur du sol en s'y amortissant progressivement suivant une loi exponentielle.

L'intensité du champ ϵ à la profondeur d , est liée à l'intensité ϵ_0 à la surface par la formule :

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = e^{-\mu d}$$

avec
$$\mu = \sqrt{\frac{1}{2} \times 0,008 \pi^2 B f_{MC} \left(\sqrt{1 + \frac{(\sigma \times 10^9)^2}{B^2}} - 1 \right)}$$

$$B = 0,556 \times 10^{-6} K f_{MC}$$

K = constante diélectrique du sol

σ = conductibilité du sol (Unités électromagnétiques C.G.S)

Avec $K = 5$, $\sigma = 2,8 \times 10^{-14}$ UEM, la profondeur à laquelle le champ est réduit dans la proportion de 4 à 1 est 6 m 5 pour 10 MC/s et 14 m pour 1 MC/s, respectivement.

532 - Comme on le voit, l'onde de surface pénètre à une profondeur considérable dans le sol, c'est pourquoi les mesures de K et σ ne doivent pas être faites seulement à la surface du sol. Ses valeurs à faire intervenir dans les calculs sont des valeurs moyennes prises jusqu'à des profondeurs qui peuvent atteindre plusieurs mètres et même plusieurs dizaines de mètres. Il est d'ailleurs préférable de les déterminer par l'opération inverse qui consiste à mesurer le champ pour diverses fréquences sur le parcours intéressé et à utiliser les formules et courbes pour en déduire les coefficients K et σ .

Inclinaison de la surface d'onde.

533 - Les pertes d'énergie qui ont leur siège dans le sol, par suite de sa conductibilité finie, ont pour conséquence de provoquer

une légère inclinaison vers l'avant des surfaces d'ondes se propageant à la surface du sol.

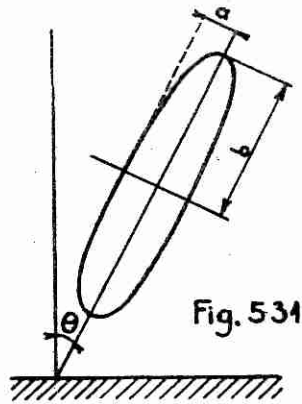


Fig. 531

Le champ électrique possède donc une composante horizontale dirigée dans le sens de la propagation. Cette composante n'est généralement pas en phase avec la composante verticale, en sorte que l'extrémité du vecteur champ électrique $\vec{E}$, en un point donné voisin de la surface, décrit une ellipse dont le plan est celui de la propagation (fig. 531).

La fig. 532 donne les valeurs de l'excentricité $c = \frac{a}{b}$ de cette ellipse, et l'inclinaison θ de son grand axe, en fonction de la variable $x = \frac{1,8 \times 10^{21} \sigma}{f}$ pour diverses valeurs de la constante diélectrique K .

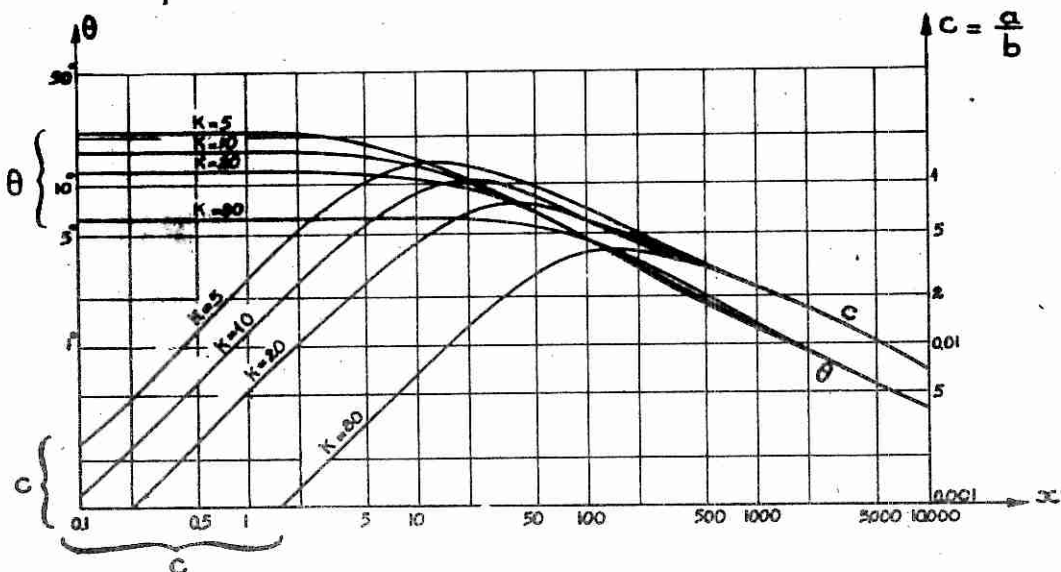


Fig. 532

On voit sur cette figure que l'inclinaison θ atteint au maximum 22° (ce qui nécessite à la fois un sol peu conducteur et une très haute fréquence).

II. Propagation de l'onde d'espace.

Etude du rayon direct et du rayon réfléchi par le sol.

541 - Dans les paragraphes qui précèdent, nous avons supposé les hauteurs des antennes suffisamment faibles pour que nous puissions négliger le rayon direct et le rayon réfléchi par le sol (§ 508), ceux-ci donnent, en effet, à la réception, des champs d'amplitudes égales et de phases opposées. Quand on élève progressivement l'une des antennes, ou les deux à la fois, cette condition n'est plus satisfaite et il faut tenir compte des 3 champs dus respectivement à l'onde de surface, à l'onde directe et à l'onde réfléchie par le sol.

La résultante des deux derniers champs augmente rapidement en même temps que s'atténue le champ dû à l'onde de surface, dès que la hauteur des antennes au-dessus du sol devient notable. Il n'y a plus alors à considérer que l'onde directe et l'onde réfléchie par le sol. C'est le cas qui va être étudié tout d'abord. On examinera ensuite le cas général où aucune des ondes composantes ne peut être négligée.

Etude du rayon direct. Propagation troposphérique.

542 - Il convient d'observer que par suite de la variation due à la variation de la constante diélectrique en fonction de la hauteur dans l'atmosphère, le rayon direct suit, en réalité, une trajectoire incurvée vers le bas.

D'autre part, la pression, la température et le degré d'humidité aux différents points de l'atmosphère sont susceptibles de variations irrégulières ; celles-ci provoquent des variations correspondantes de la constante diélectrique, avec la saison, le jour et même l'heure dans la journée.

Ces variations sont susceptibles, non seulement de modifier l'horizon hertzien, mais aussi de provoquer des variations notables du champ (analogues au fading), notamment lorsque le rayon utilisé est voisin du rayon limite et cela d'autant plus que la fréquence est plus élevée, à cause de la diminution de la diffraction.

Aux longueurs d'ondes moyennes employées tout d'abord dans les radiocommunications, ces phénomènes étaient masqués par la diffraction, inséparable de toute propagation par ondes, mais dont l'effet est une fonction croissante de la longueur d'onde.

Ils revêtent, par contre, une importance particulière aux fréquences très élevées (supérieures à 40 ou 60 Mégacycles) dont le mode de propagation se rapproche de celui des ondes lumineuses. C'est d'ailleurs le développement récent des applications de ces fréquences qui a permis d'étudier de près la propagation des ondes dans la basse atmosphère (ou troposphère).

Propagation dans un milieu de constante diélectrique variable.

543 - La propagation des ondes radioélectriques est évidemment régie par les mêmes lois que les ondes lumineuses.

Si un rayon électromagnétique attaque sous l'angle β_0 la limite de séparation de deux milieux, d'indices de réfraction n_0 et n_1 (fig. 541), l'angle de sortie β_1 dans le deuxième

milieu est donné par la loi bien connue en optique :

$$n_0 \cos \beta_0 = n_1 \cos \beta_1$$

On sait (§ 40) que l'indice de réfraction n (rapport de la vitesse dans le vide à la vitesse dans le milieu considéré) s'identifie avec la racine carrée de la constante diélectrique K . On peut donc écrire la relation précédente sous la forme :

$$\sqrt{K_0 \cos \beta_0} = \sqrt{K_1 \cos \beta_1}$$

544 - Lorsque l'indice n varie d'une façon continue, mais en restant constant dans une couche horizontale d'altitude donnée h , la formule demeure vraie (fig. 542).

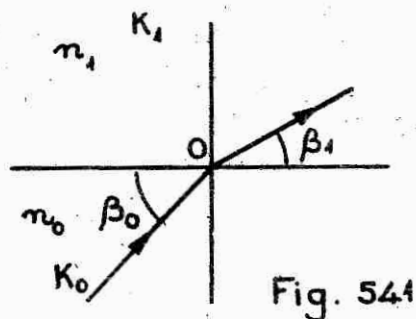


Fig. 541

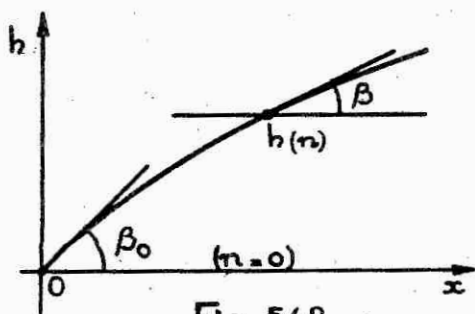


Fig. 542

On a :

$$n_0 \cos \beta_0 = n \cos \beta$$

La trajectoire est incurvée et sa concavité est tournée du côté des indices croissants. Dans l'atmosphère, la constante diélectrique K , légèrement supérieure à l'unité, décroît en tendant vers 1 quand la pression diminue, et par conséquent quand augmente l'altitude h . La concavité des trajectoires est donc dirigée vers le bas.

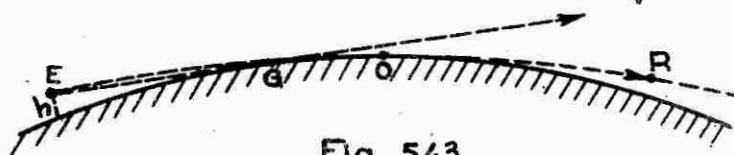


Fig. 543

545 - De la loi de la réfraction ($n \cos \beta = Cte$), on déduit facilement que la courbure $\frac{1}{\rho}$ de la trajectoire est :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{n} \frac{dn}{ds}$$

où s est la distance mesurée perpendiculairement à la direction de propagation. La courbure est comptée comme positive lorsque la concavité est dirigée vers le haut.

Pour les rayons s'écartant peu de l'horizontale, on a sensiblement $s = h$; d'autre part on peut prendre $n = 1$. La formule devient alors :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{dn}{dh}$$

546 - La première conséquence observée est le recul de l'horizon hertzien (ou optique) par rapport à l'horizon géométrique (fig. 543).

La distance d_0 de cet horizon est donnée par la formule :

$$d_0 = \sqrt{2 k a h}$$

où h désigne la hauteur de l'antenne d'émission

a le rayon de la terre.

k un coefficient de majoration du rayon terrestre a , coefficient dont nous trouverons plus loin l'expression (§ 549) et qui, dans la pratique, est voisin de $\frac{4}{3}$.

547 - Ses résultats sont un peu plus compliqués si l'on tient compte de la courbure de la terre. Soit a le rayon terrestre, h l'altitude du point où l'indice est n et β l'angle du rayon. On a (fig. 544) :

$$n_0 \cos \beta_0 = n \left(1 + \frac{h}{a} \right) \cos \beta$$

Il faut alors écrire en effet :

$$n_0 r_0 \cos \beta_0 = n_1 r_1 \cos \beta_1 = \dots = n r \cos \beta$$

or : $r_0 = a$ $r = a + h$

d'où la relation :

$$n_0 a \cos \beta_0 = n (a + h) \cos \beta$$

$$\text{ou } n_0 \cos \beta_0 = \left(1 + \frac{h}{a}\right) \cos \beta$$

$n \left(1 + \frac{h}{a}\right)$ est ce qu'on appelle l'indice modifié, comme n est toujours très voisin de l'unité, on peut écrire pratiquement :

$$n_0 \cos \beta_0 = \left(n + \frac{h}{a}\right) \cos \beta$$

On a coutume de poser :

$$\left(n + \frac{h}{a} - 1\right) 10^6 = M,$$

ce qui signifie que M est, exprimé en millionièmes, l'excès de l'indice modifié par rapport à l'unité. Cette unité est appelée l'unité M (UM).

À la surface du sol, on a :

$$M_0 = (n_0 - 1) 10^6.$$

De nombreuses expériences ont montré que le gradient de l'indice n en fonction de l'altitude était donné par une expression de la forme :

$$\frac{dn}{dh} = -\frac{1}{\alpha a}, \quad \alpha \text{ étant une constante voisine de } \alpha = 4.$$

On en déduit la valeur du gradient de "l'indice modifié" M :

$$M = \left(n + \frac{h}{a} - 1\right) 10^6$$

$$\frac{dM}{dh} = \left(\frac{dn}{dh} + \frac{1}{a}\right) 10^6$$

$$= \left(\frac{-1}{\alpha a} + \frac{1}{a}\right) 10^6$$

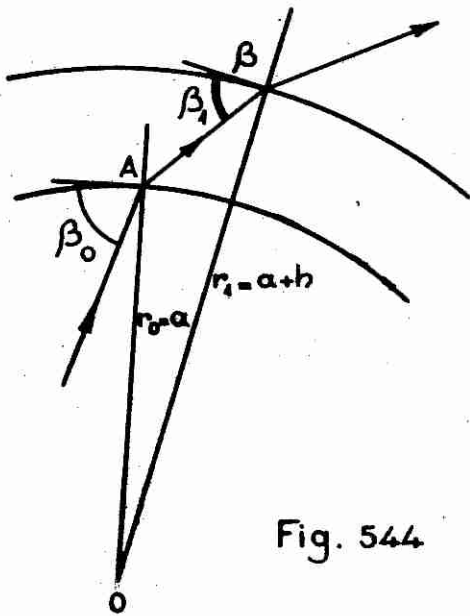


Fig. 544

$$= \frac{-1}{k a} 10^6 \text{ avec } k = \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha}}$$

548 - Dans la pratique on a très sensiblement $\alpha = 4$, et par conséquent :

$$\frac{dn}{dh} = -\frac{1}{4 a} \approx -0,039 \text{ } 10^6 / \text{mètre}$$

$$\approx -0,039 \text{ UM / mètre}$$

et d'autre part :

$$k = \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \frac{4}{3}$$

$$\text{d'où : } \frac{dM}{dh} = \frac{10^6}{\left(\frac{4}{3} a\right)}$$

$$\text{soit : } 0,118 \text{ UM / mètre.}$$

L'expression de M en fonction de l'altitude est donc :

$$M \approx M_0 + 0,118 \times h$$

549 - Il sera intéressant d'avoir, pour la suite, l'expression de k en fonction du gradient de l'indice n ; nous avons :

$$k = \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha}}$$

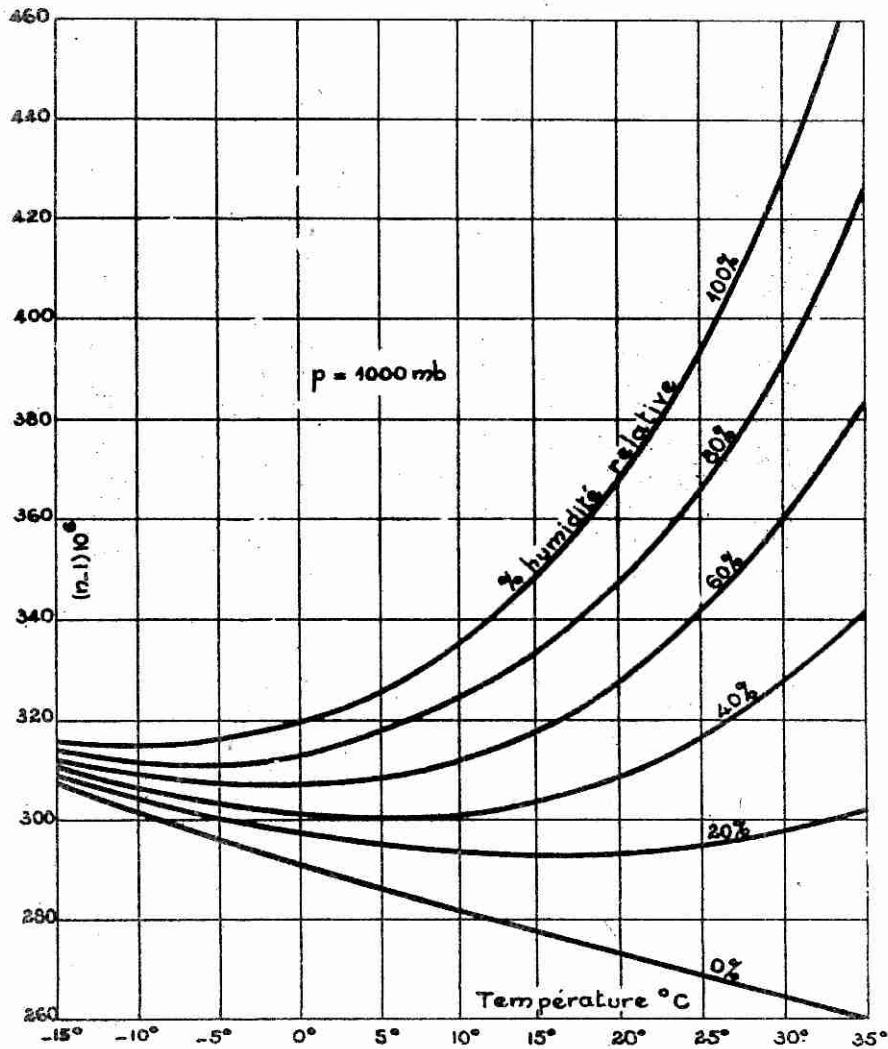
Or, de la relation de définition : $\frac{dn}{dh} = -\frac{1}{\alpha a}$, nous tirons :

$$\alpha = -\frac{1}{a \frac{dn}{dh}}$$

d'où l'expression de k :

$$k = \frac{1}{1 + a \frac{dn}{dh}}$$

550 - Les indices n et M dépendent de la pression, de la température et du degré d'humidité au point considéré ; la fig. 545 donne les variations de n en fonction de la température, pour différents degrés d'humidité relative échelonnés de 0 à 100% et pour une pression de 1000 millibars. En ordonnées sont portées les quantités $(n-1) \times 10^6$



* Fig. 545 (1)

D'autre part la fig. 546 donne les valeurs du coefficient $\frac{1}{h}$ en fonction du gradient d'humidité relative (exprimé en pourcentage pour 100 mètres) pour différentes températures.

(1) D'après le rapport d'octobre 1946 du Central Radio Propagation Laboratory (CRPL) à Washington.

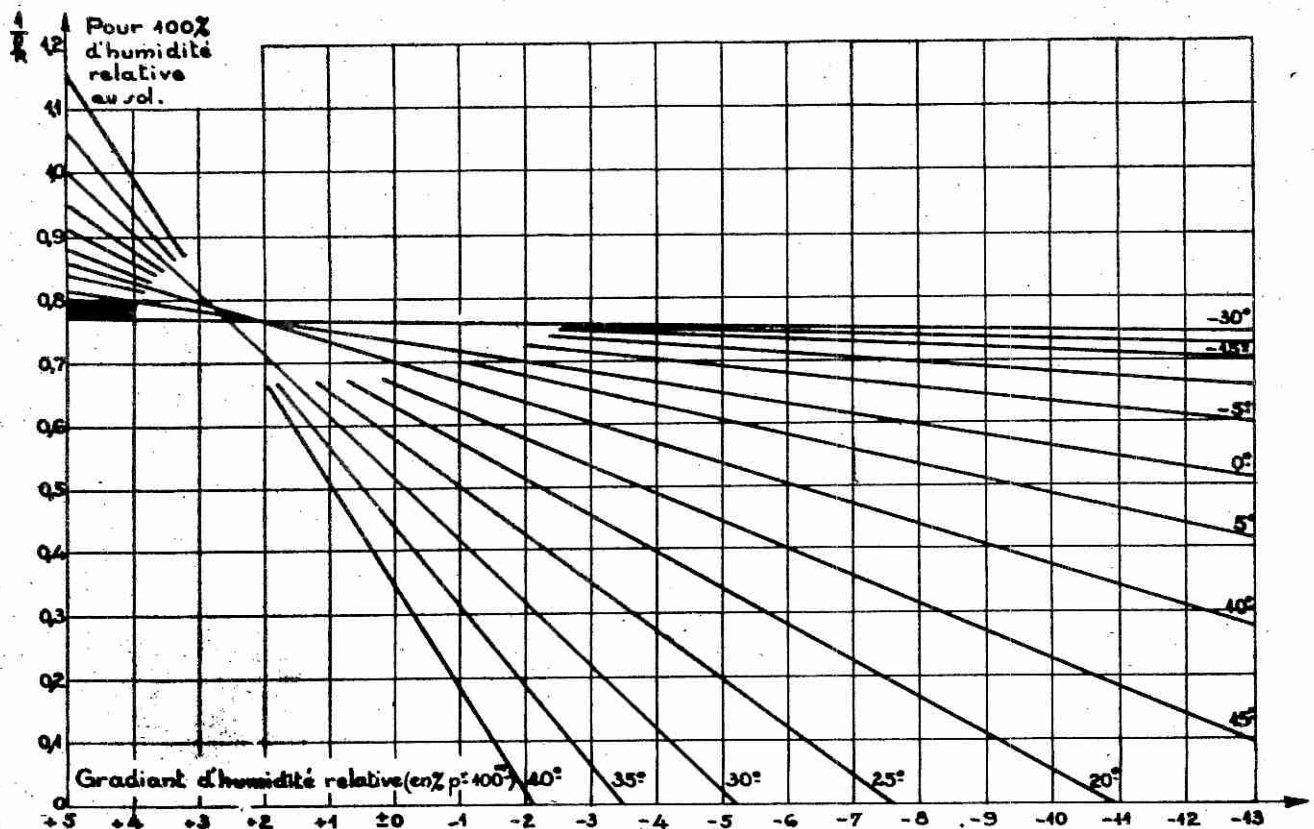


Fig. 546 (1)

Tableau de correction pour humidité relative différente de 100% au sol.(1)

°C	-30°	-25°	-20°	-15°	-10°	-5°	± 0°	+ 5°	+ 10°	+ 15°	+ 20°	+ 25°	+ 30°	+ 35°	+ 40°
10%	0.009	0.012	0.017	0.027	0.039	0.055	0.076	0.090	0.118	0.151	0.194	0.240	0.301	0.371	0.455
20%	0.008	0.011	0.015	0.024	0.034	0.049	0.069	0.080	0.105	0.134	0.172	0.214	0.267	0.329	0.405
30%	0.007	0.009	0.014	0.021	0.030	0.043	0.060	0.070	0.092	0.118	0.151	0.187	0.234	0.285	0.354
40%	0.006	0.008	0.012	0.018	0.026	0.037	0.052	0.060	0.079	0.104	0.129	0.161	0.200	0.247	0.304
50%	0.005	0.007	0.010	0.015	0.021	0.031	0.043	0.050	0.066	0.084	0.108	0.134	0.167	0.206	0.253
60%	0.004	0.005	0.008	0.012	0.017	0.024	0.034	0.040	0.052	0.067	0.080	0.107	0.134	0.165	0.202
70%	0.003	0.004	0.006	0.009	0.013	0.018	0.026	0.030	0.039	0.050	0.065	0.080	0.100	0.123	0.152
80%	0.002	0.003	0.004	0.006	0.009	0.012	0.017	0.020	0.026	0.034	0.043	0.065	0.067	0.082	0.101
90%	0.001	0.001	0.002	0.003	0.004	0.006	0.009	0.010	0.013	0.017	0.021	0.027	0.033	0.041	0.051

551 - On sait d'après le § 545 que $-\frac{dn}{dh}$ représente la courbure du rayon radioélectrique, cette courbure étant comptée comme positive lorsque la concavité est tournée vers le bas. D'autre part $\frac{1}{a}$ est la courbure de la terre. La somme algébrique $\left(\frac{dn}{dh} + \frac{1}{a}\right)$ représente donc la différence de courbure du sol et de la trajectoire, c'est-à-dire la courbure relative de la trajectoire par rapport au sol.

Il est aisé de voir que cette courbure relative est

(1) D'après le CRPL (rapport d'octobre 1946).

égale à $\frac{1}{ka}$; en effet (§ 549) on a :

$$k = \frac{1}{1 + a \frac{dn}{dh}}$$

donc :

$$ka = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{dn}{dh}} = \frac{1}{\frac{dM}{dh}}$$

ce qui démontre la proposition :

$$\frac{1}{ka} = \frac{dM}{dh}$$

552 - Si, au lieu d'être égale à a , le rayon de courbure de la terre était égal à ka (ou sa courbure égale à $\frac{1}{ka}$), la courbure du rayon serait :

$$\frac{1}{ka} + \left(\frac{dn}{dh} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{ka} - \frac{1}{ka} = 0 .$$

En d'autres termes, le rayon de courbure serait infini, le rayon se propagerait en ligne droite. Tout se passerait comme si l'indice de réfraction était constant dans l'atmosphère (indépendant de l'altitude). Cette remarque explique immédiatement pourquoi s'introduit le produit ka au lieu de a dans l'expression de la distance d_0 de l'horizon optique (§ 546).

553 - On peut même aller plus loin et considérer la terre comme plane ; la trajectoire radioélectrique redevient alors courbe, mais une courbe qui présente sa concavité vers le haut (fig. 547 ③). La valeur algébrique de cette courbure est :

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{dM}{dh} = - \frac{1}{ka}$$

ce qui implique un indice de réfraction croissant avec l'altitude, avec un gradient $\frac{dn}{dh} = - \frac{1}{\rho} = \frac{dM}{dh} = \frac{1}{ka}$

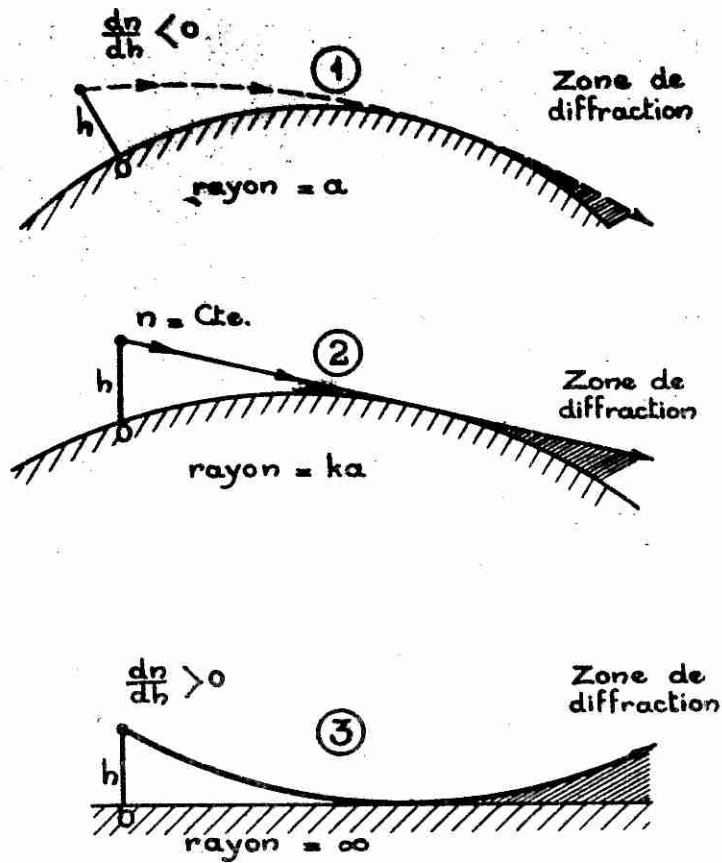


Fig. 547

554 - La fig. 548 donne quelques aspects de courbes de l'indice corrigé M en fonction de l'altitude dans différentes situations atmosphériques.

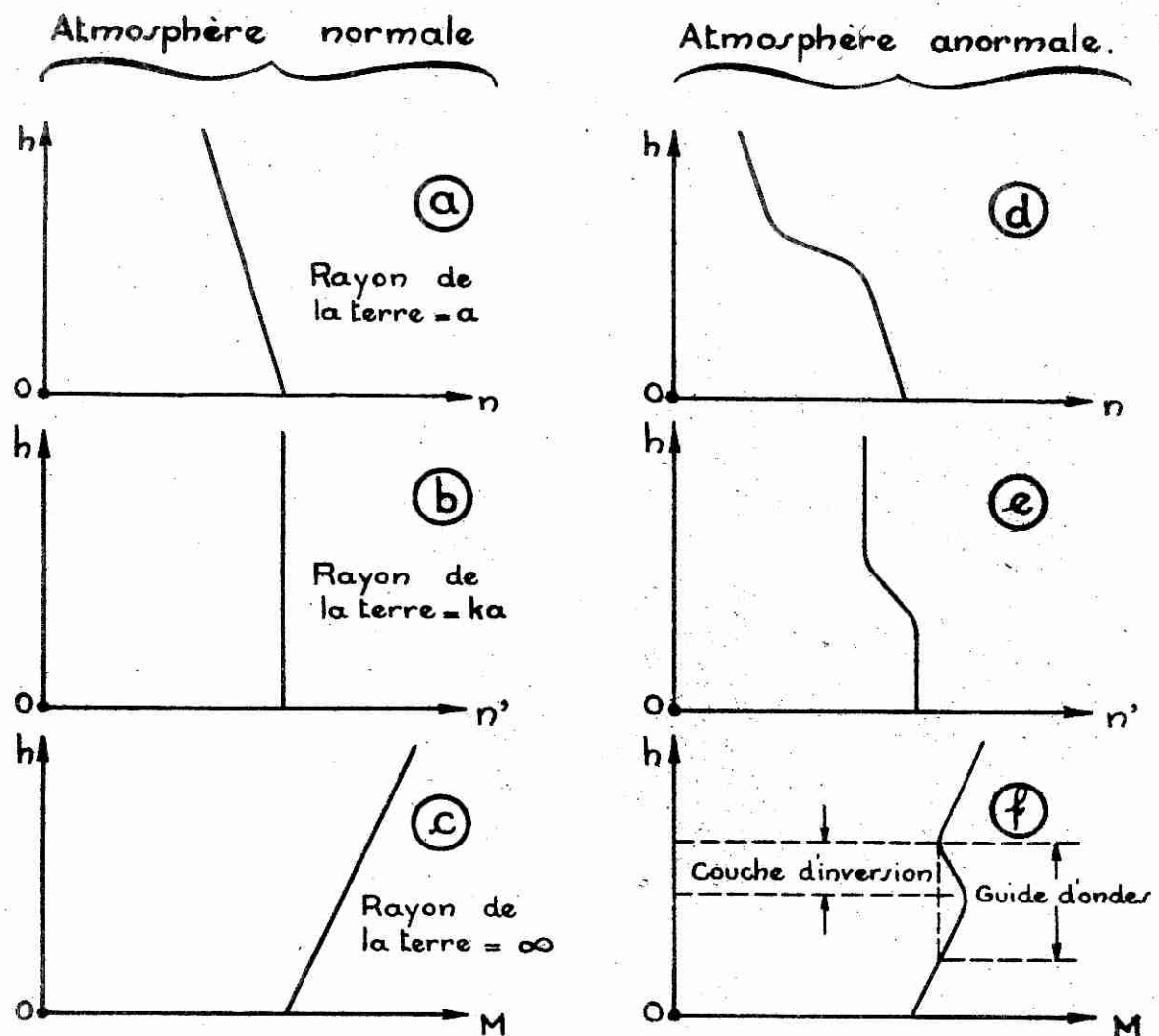


Fig. 548

Les diagrammes (a) à (c) sont relatifs à une atmosphère normale, tandis que (d) à (f) se rapportent à une atmosphère anormale, présentent un palier dans la variation de l'indice de réfraction réel mesuré en fonction de l'altitude.

Les courbes (a) et (d) ont été tracées pour un rayon de la terre égal au rayon réel a , comme la fig. 547 (1). Dans les fig. (b) et (e) ce rayon a été pris égal à ka comme dans la fig. 547 (2); enfin les fig. (c) et (f) correspondent à une terre plane (fig. 547 (3)).

Cette dernière courbe (fig. 548 (f)) met en évidence une zone de l'espace où l'indice de réfraction est décroissant quand l'altitude croît, ou plutôt une certaine altitude h_0 à

partir de laquelle l'indice est décroissant quand on s'écarte de cette altitude. Un rayon radioélectrique qui chemine dans cet intervalle est incurvé dans le sens qui le rapproche du centre de cette zone. Si l'incidence est suffisamment proche de l'horizontale, et la fréquence suffisamment élevée, l'onde peut se trouver canalisée (ou emprisonnée) dans cet intervalle.

On est en présence d'une sorte de conduit ("duct" en anglais). Pour ces fréquences qui sont de l'ordre de 60, ces zones se comportent comme de véritables guides d'ondes (§ 751).

La fig. 549 donne divers types de courbes de l'indice M .

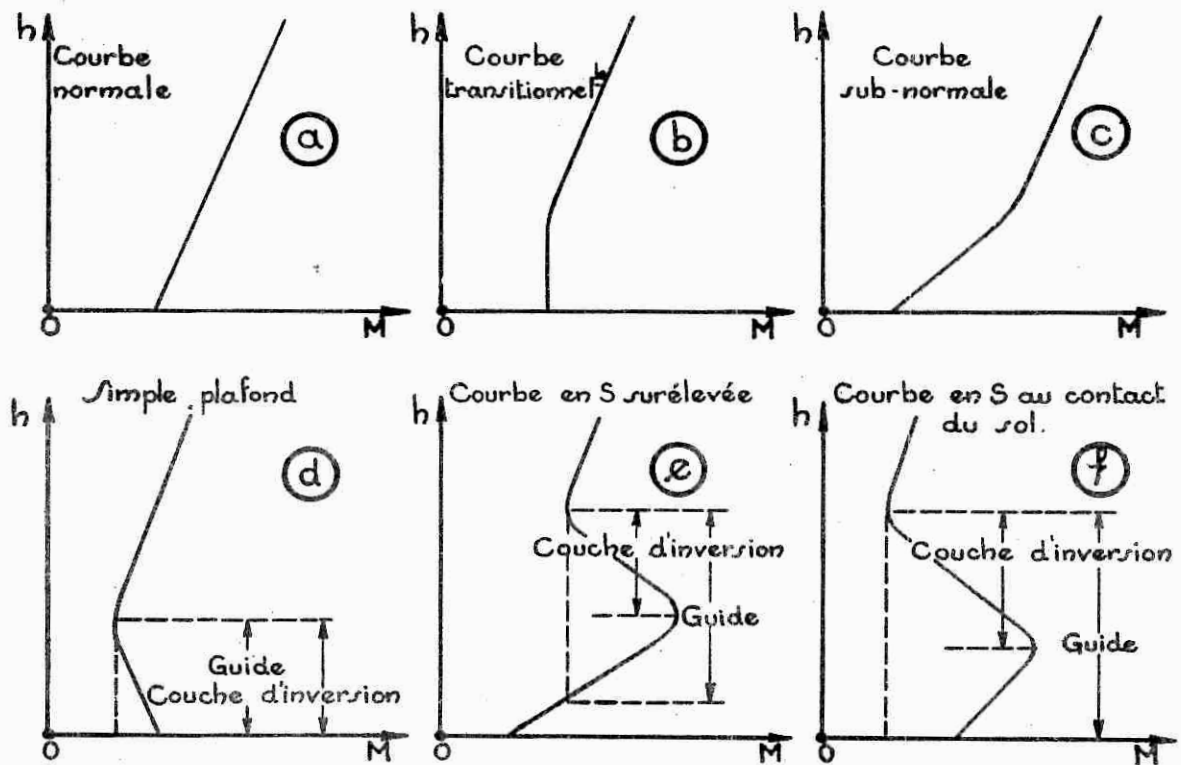


Fig. 549

Les trois dernières (d) à (f) présentent des zones d'inversion, donnant naissance à des guides de divers types : simple plafond, guide élevé, guide touchant le sol. On reviendra ultérieurement, à propos des ondes ionosphériques, sur la propagation des ondes en milieu d'indice variable.

555 - Les conséquences de tels phénomènes sont considérables dans les radiocommunications et les applications diverses utilisant les très hautes fréquences ($\lambda \leq 1^m$).

En particulier, le diagramme de directivité dans le plan vertical, d'un émetteur donné peut se trouver profondément altéré. Les fig. 550 (a) à (e) donnent les variations calculées pour un émetteur situé à 30^m au-dessus de la mer et émettant sur la fréquence de 200 mégacycles.

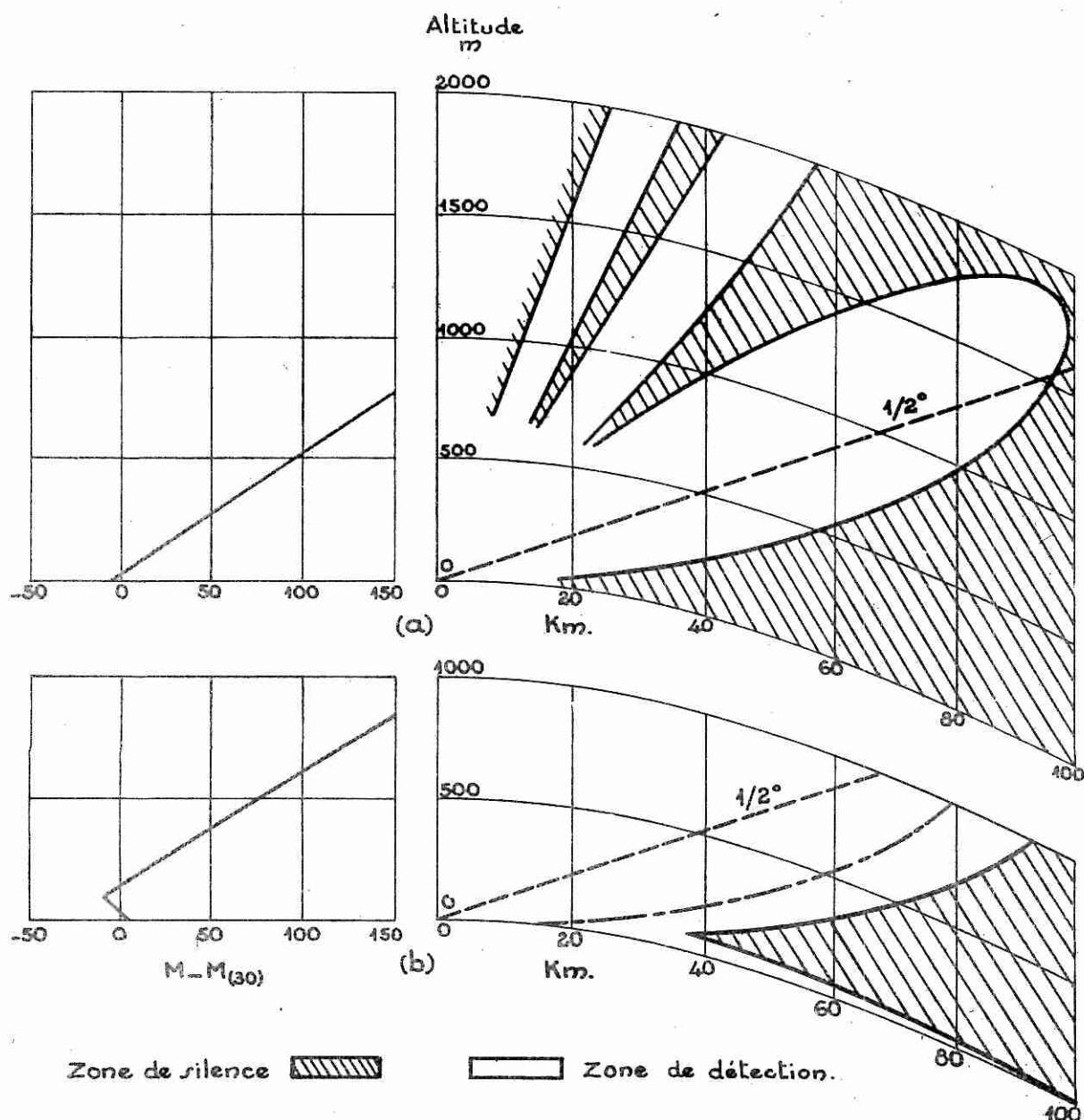


Fig. 550 (1)

(1) D'après le CRPL (rapport d'octobre 1946).

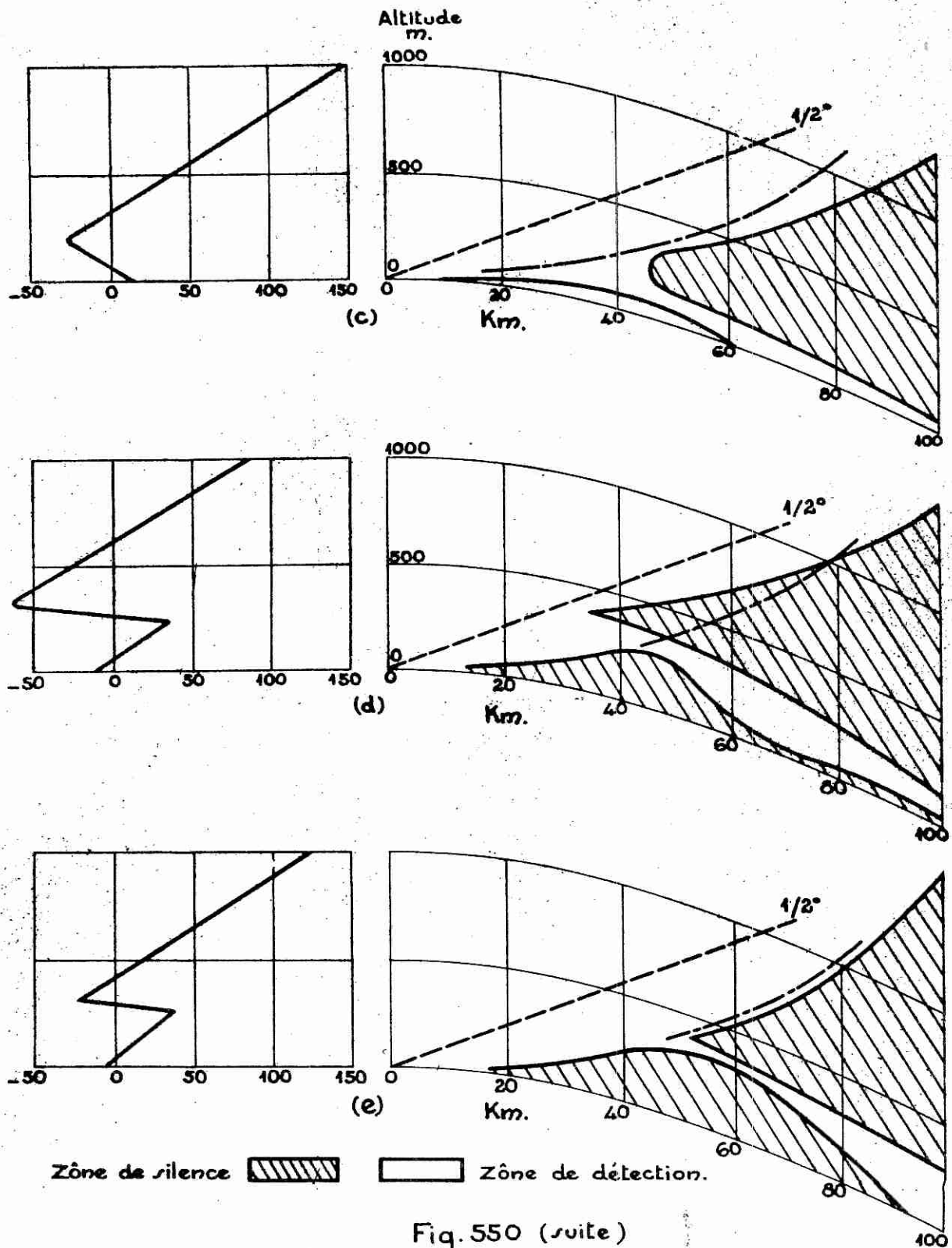


Fig. 550 (suite)

Les zones de silences (ou aveugles) ont été marquées en hachures sur les figures. On voit immédiatement l'importance qu'elles présentent pour les radars (Chap. IX - §), lesquels peuvent présenter, tantôt des portées anormales, tantôt des zones imprévues d'obscurité.

Etude du rayon réfléchi par le sol.

565 - L'étude de la réflexion des ondes électromagnétiques sur un sol de constantes σ et K données a été faite précédemment (§ 137). On a vu, en particulier, que les formules de Fresnel permettent de calculer :

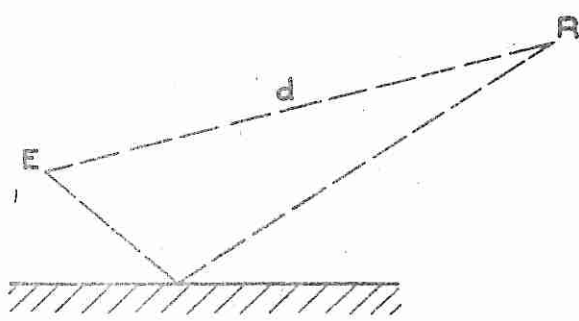


Fig. 552.

1° : le coefficient de réflexion r c'est-à-dire le rapport des amplitudes du champ de l'onde réfléchie et de l'onde incidente.

2° : le déphasage θ introduit par la réflexion.

Les fig 135 à 138 ont également donné, en fonction de l'angle d'incidence $\alpha_1 = \alpha_2$ la valeur de ces deux coefficients r et θ , pour plusieurs valeurs bien déterminées des constantes σ et K du sol.

Composition du rayon direct et du rayon réfléchi par le sol.

566 - Dans la composition de ces deux ondes interviennent non seulement les longueurs de leurs deux trajets respectifs mais encore le coefficient de réflexion r et le déphasage θ .

Lorsque l'on trace la courbe donnant l'intensité du

— champ la fonction de la distance d pour une fréquence f donnée, des hauteurs h_1 et h_2 données au-dessus d'un sol de constantes K et σ données également, on obtient une série de maxima et de minima (d'autant plus rapprochés que la fréquence est plus haute) et qui vont en se resserrant quand la distance diminue.

Ses maxima et minima sont dus à la variation des phases relatives, à l'arrivée, de l'onde directe et de l'onde renvoyée par le sol.

Influence de la hauteur des aériens au-dessus du sol.

567 — Lorsque l'émetteur et le récepteur sont placés à une faible hauteur, il faut, pour obtenir le champ réel d'après ce qui a été dit, ajouter le champ de l'onde de surface à ceux qui sont produits respectivement par l'onde directe et l'onde dite réfléchie par le sol ; cela résulte de la définition même de l'onde de surface.

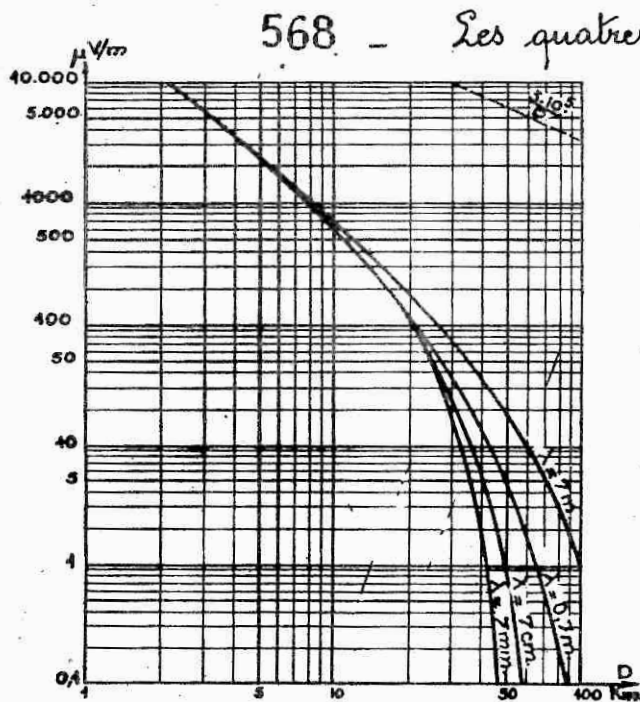


Fig. 557

Ces courbes correspondent respectivement aux fréquences $f_1 = 43 \text{ MC}$ ($\lambda = 7^m$),
 $f_2 = 430 \text{ MC}$ ($\lambda = 0,7^m$),
 $f_3 = 4300 \text{ MC}$ ($\lambda = 7 \text{ cm}$)
 $f_4 = 43000 \text{ MC}$ ($\lambda = 7 \text{ mm}$).

569 — La fig. 558 est relative aux mêmes fréquences et au même sol, mais le champ est observé, cette fois, à une hauteur

$h_2 = 100 \text{ m}$, l'émetteur étant toujours à l'altitude $h_1 = 100 \text{ m}$.

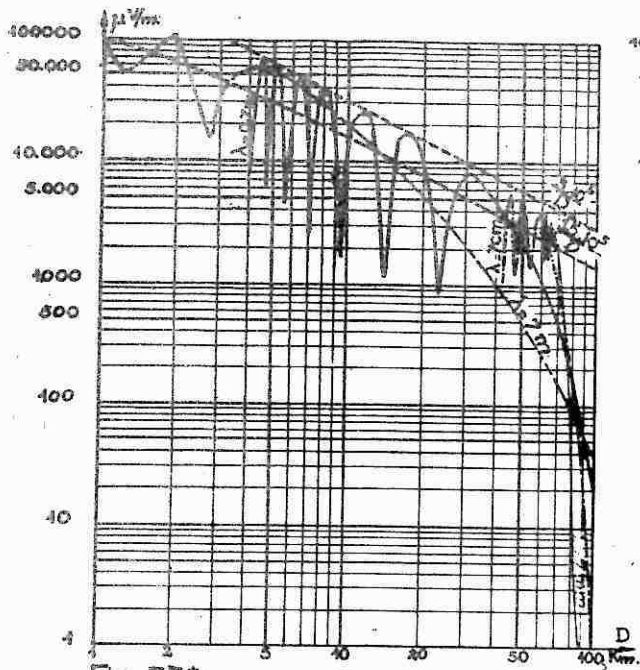


Fig. 558

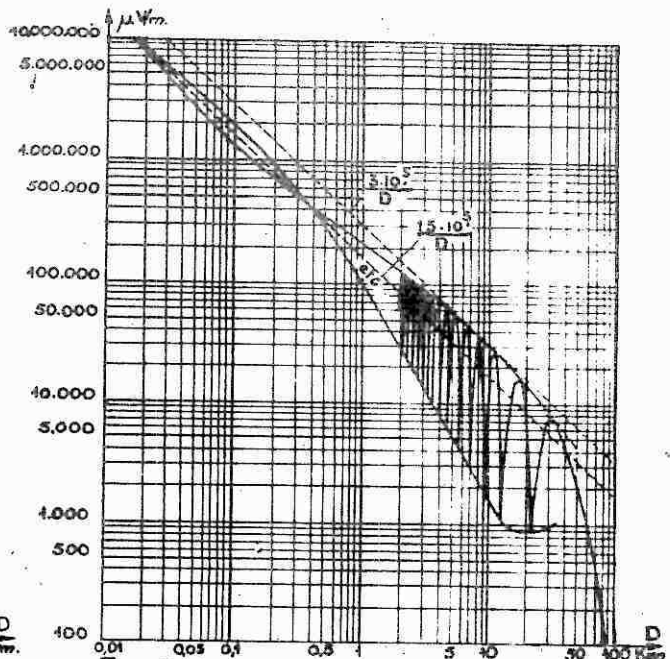


Fig. 559

La fig. 559 reproduit, avec une échelle différente pour les distances, la courbe relative à la fréquence $f = 430 \text{ MC}$ ($\lambda = 0,7 \text{ m}$) dans la figure précédente (distances représentées à partir de 10^m au lieu de 1 km)

570 - On retrouve sur ces courbes la succession de maxima et de minima dont il a été question au § 556 ci-dessus, en même temps que l'on observe un affaiblissement qui augmente très rapidement dès que la portée optique est dépassée.

571 - Les courbes des fig. 557 à 559, de même que celles des fig. 520 à 526 qui précèdent, correspondent à l'hypothèse d'un émetteur rayonnant une puissance d'un kilowatt dans une antenne verticale de hauteur faible vis-à-vis de la longueur d'onde (champ proportionnel au cosinus de l'angle que fait le rayon considéré avec le plan horizontal).

III. Propagation de l'onde ionosphérique

581 - L'expérience montre que les couches supérieures de l'atmosphère ont la propriété de renvoyer vers le sol les ondes électromagnétiques qui les atteignent sous certaines conditions (incidence et fréquence).

Ce phénomène trouve sa cause dans l'ionisation de l'air, ionisation qui est provoquée par le rayonnement solaire. Sous l'action des rayons ultra-violet, et des corpuscules émis par le soleil, des électrons périphériques sont arrachés à un certain nombre d'atomes des gaz composant l'atmosphère, lesquels se transforment ainsi en autant d'ions ayant chacun une charge positive élémentaire (Chap. III - § 523). Le nombre d'électrons libérés est égal au nombre d'atomes ionisés.

582 - Les électrons libérés se mettent en mouvement quand on applique un champ électrique extérieur, comme le font les électrons dits "libres" des corps conducteurs (Chap. II_a - § 151). Le milieu possède donc les propriétés d'un corps conducteur; ces électrons se trouvent freinés par leurs chocs avec les molécules de gaz, en sorte que le milieu présente une certaine résistivité (ou conductivité) qui varie avec la fréquence des collisions, laquelle dépend elle-même de la longueur du libre parcours moyen de l'électron dans le milieu (Chap. III - § 525), ainsi que de son agitation thermique (Chap. III - § 1).

Le tableau ci-dessous donne, en fonction de l'altitude, les variations de la pression, du nombre de molécules par cm^3 , le libre parcours moyen de l'électron et la fréquence des collisions.

Altitude (Km)	Pression (dynes par cm^2)	N ^{bre} de molécules. (par cm^3)	Parcours moyen de l'électron. (cm)	Fréquence des collisions. (par sec.)
1	1.01×10^6	2.7×10^{19}	9×10^{-6}	9.5×10^{11}
12	1.92×10^5	6.5×10^{18}	4×10^{-5}	2.1×10^{11}
20	5.53×10^4	1.9×10^{18}	1×10^{-4}	8.5×10^{10}
40	2.55×10^3	8.6×10^{16}	3×10^{-3}	2.8×10^9
60	1.24×10^2	4.2×10^{15}	6×10^{-2}	1.4×10^8
80	6.27	2.1×10^{14}	4.0	8.5×10^6
100	0.363	1.2×10^{13}	20	4.3×10^5
150	1.49×10^{-2}	5.0×10^{11}	500	1.7×10^4
200	5.62×10^{-3}	1.8×10^{11}	1000	8.5×10^3
300	6.99×10^{-4}	2.4×10^{10}	1×10^4	8.5×10^2
400	1.05×10^{-4}	3.6×10^9	7×10^4	1.2×10^2
600	2.59×10^{-6}	8.8×10^7	3×10^6	2.8
800	7.97×10^{-8}	2.7×10^6	9×10^7	0.95
1000	2.92×10^{-9}	9.9×10^4	3×10^9	2.8×10^{-3}

583 - Le degré d'ionisation en un point de l'atmosphère est caractérisé par le nombre N d'ions (ou d'électrons libérés) contenus dans un centimètre cube. On voit immédiatement que ce nombre N dépend de deux facteurs principaux.

1° : L'intensité du facteur ionisant (en pratique l'intensité du rayonnement ultra-violet et celle du bombardement corpusculaire provenant du soleil).

2° : Du nombre total d'atomes (et par conséquent susceptibles d'être ionisés) existant dans chaque centimètre cube, et par suite de la pression au point considéré de l'atmosphère.

584 - L'intensité du facteur ionisant est variable ^{saison} avec le lieu (latitude géographique) et avec le temps (heure solaire, époque dans le cycle de 11 ans de l'activité solaire). Elle dépend aussi de l'épaisseur de la couche d'atmosphère traversée par le rayon.

nement ultra-violet, en raison de l'absorption progressive que celui-ci subit dans son parcours. Le facteur ionisant varie donc avec l'altitude, et dans le même sens qu'elle.

585 - Quant à la pression, dont dépend le nombre des atomes par cm^3 , elle est uniquement fonction de l'altitude du point considéré (voir § 582 ci-dessus).

586 - Un élément important qui intervient également est la vitesse de désionisation du milieu, c'est-à-dire la vitesse de recombinaison des ions. En effet, par suite de l'agitation des ions positifs d'une part, mais surtout des électrons libres, plus légers et par conséquent animés de vitesses incomparablement plus grandes, un électron donné ne tarde pas à rencontrer sur son chemin un atome ionisé et à se recombiner avec lui pour reconstituer un atome neutre. Le délai à intervenir est fonction de la vitesse des électrons (donc de la température) mais surtout de la longueur des distances à parcourir, donc du degré de raréfaction de l'air, et en définitive de l'altitude.

C'est ainsi que la recombinaison est notablement moins rapide dans les couches de l'atmosphère comprises entre 300 et 500 kms d'altitude que dans les couches situées à 100 km.

587 - Des expériences (voir plus loin § 657) permettent de tracer, en une époque donnée et par un lieu donné, la courbe donnant la variation du nombre N représentant le degré d'ionisation, en fonction de l'altitude.

D'après ce qui a été dit plus haut (§ 581 à 586), on conçoit que le résultat obtenu sera variable avec le lieu et avec le temps.

La fig. 581 représente l'aspect de la courbe généralement obtenue de jour, en été, à la latitude de Paris, tandis que la

fig. 582 donne l'aspect obtenu de nuit en hiver.

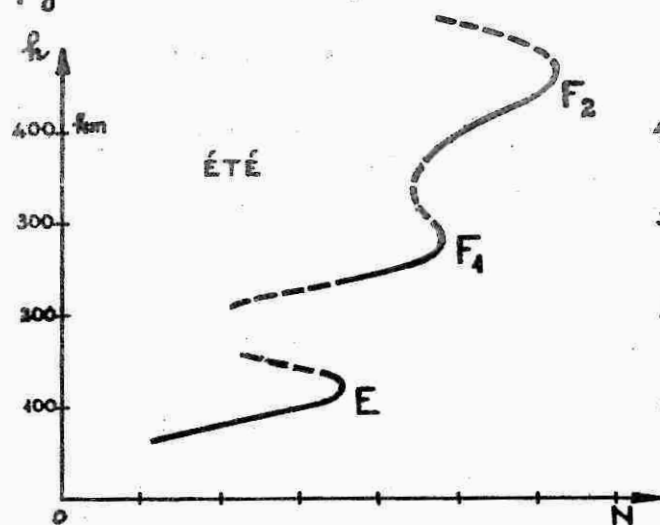


Fig. 581

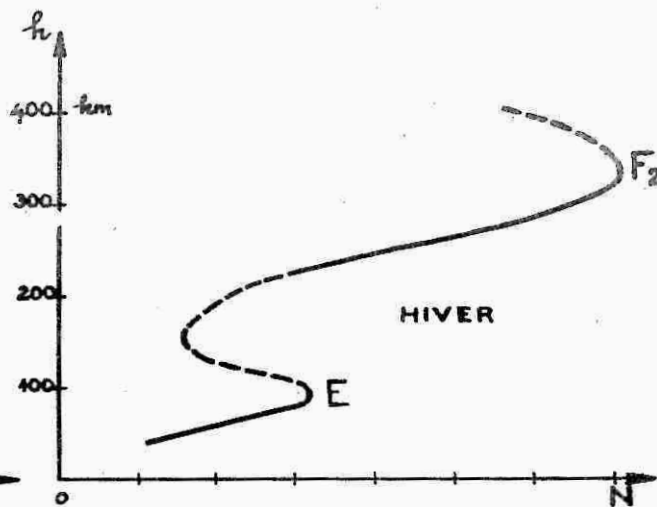


Fig. 582.

Dans ces figures, les parties en traits pleins, seules, sont déduites de l'expérience, les parties en pointillé étant estimées.

Comme on le voit, le degré d'ionisation N présente une série de maxima. En d'autres termes, il existe dans l'atmosphère des "couches" où l'ionisation présente des maxima relatifs d'ionisation.

Les couches E et F.

588 - On distingue les différentes "couches" les unes des autres en les désignant par des lettres successives de l'alphabet, une marge ayant été réservée vers le bas pour le cas où de nouvelles couches seraient éventuellement découvertes.

589 - D'une manière générale, on constate, été comme hiver, de jour ~~comme de nuit~~, l'existence d'une première couche importante dite couche E (c'est-à-dire d'un premier maximum d'ionisation (fig. 581 et 582) dont la hauteur se situe à 10 kms d'altitude en moyenne.

590 - Par dessus la couche E se trouve une couche

dite couche F_2 qui se tient de nuit vers une altitude voisine de 300 kms. Cette couche s'élève de jour jusqu'à une altitude pouvant atteindre 4 à 500 km, tandis que, simultanément, une nouvelle couche dite F_1 prend naissance au-dessous, à une altitude de l'ordre de 200 kms (1).

591 Quant au degré d'ionisation, quelle que soit la couche considérée, il est évidemment plus élevé pendant le jour que pendant la nuit, le maximum ayant lieu vers midi et le minimum au milieu de la nuit.

Pour la couche F_2 , toutefois, en raison de sa moindre vitesse de désionisation (§ 586) le maximum s'observe dans l'après-midi, tandis que le minimum est observé vers les dernières heures de la nuit.

592 - L'effet des saisons sur le degré d'ionisation est différent selon qu'il s'agit des couches E et F_1 d'une part, ou bien de la couche F_2 d'autre part. L'ionisation des couches E et F_1 augmente en été et diminue en hiver, tandis que c'est le contraire pour la couche F_2 . Cette anomalie apparente résulte simplement du fait que la couche F_2 se présente en hiver dans une région beaucoup plus basse qu'en été et que, dans cette région plus basse, le nombre d'atomes susceptibles d'être ionisés est notablement plus grand et compense l'effet de la diminution du facteur ionisant.

(1) Ces couches F_1, F_2 , étaient considérées à l'origine comme provenant du dédoublement de la couche unique observée de nuit et qui était alors désignée par la lettre F sans indice; ainsi s'explique l'indice 2 pour la couche supérieure unique de nuit (alors que F_1 n'existe pas).

593 - L'influence du cycle solaire se traduit par des variations du degré d'ionisation qui ont le même sens que cette activité solaire elle-même. Le dernier maximum a eu lieu en 1939, tandis que le prochain maximum se produira vers 1950.

La couche D

594 - Enfin, ^{desquels} on observe de jour entre 50 et 90 kms d'altitude, donc au-dessus de la couche E, une dernière couche ionisée appelée couche D. Cette couche ne possède qu'une faible intensité d'ionisation et disparaît pendant la nuit, la recombinaison des ions étant rapide à l'altitude considérée. Son effet principal est d'affaiblir les ondes qui la traversent avant d'atteindre les couches E ou F, mais elle peut aussi provoquer la réflexion des ondes moyennes et longues.

La couche E sporadique.

595 - Les couches E, F₁, F₂ et D que nous avons considérées ci-dessus sont des couches régulières, en ce sens que l'intensité d'ionisation à une altitude donnée, ne varie que relativement lentement en fonction des coordonnées géographiques (longitude et latitude) du lieu considéré. En plus de ces couches dites "régulières", il se présente fréquemment, à l'altitude habituelle de la couche E, une sorte de couche discontinue d'ionisation possédant des maxima (ou tout au moins des gradients) d'ionisation très élevées. Cette couche apparaît comme un ensemble de nuages plus ou moins séparés les uns des autres et susceptibles de modifications rapides.

Cette couche, appelée "couche E sporadique", est responsable de certaines radiocommunications sur fréquences élevées

et à caractère temporaire, qui ne peuvent être expliquées par les couches "régulières" de l'ionosphère.

Autres variations anormales de l'ionosphère.

596 - En dehors des variations régulières d'ionisation dont il a été question aux §§ 587 à 594, on observe, par moment, des variations très importantes de l'ionisation.

La couche E sporadique (§ 595 ci-dessus) constitue une première espèce de manifestation de ce genre. Mais il existe d'autres perturbations telles que :

- "les orages ionosphériques",
- "les perturbations à début brusque",
- "les périodes prolongées d'absorption des couches basses".

Ces phénomènes ont des répercussions immédiates et très importantes sur la propagation des ondes ionosphériques ; ils seront décrits ultérieurement (voir §§ 732 à 734).

Propagation des ondes électromagnétiques en milieu ionisé .

Constante diélectrique apparente - Absorption dans le
milieu ionisé .

Constante diélectrique d'un milieu ionisé .

601 - Il est aisé de se rendre compte que le premier effet de la présence des ions dans le milieu de propagation est de produire une diminution de la constante diélectrique de ce milieu .

Soit en effet : $\epsilon = \epsilon \cos \omega t$ le champ en un point du milieu considéré .

Un ion libre soumis à l'action de ce champ se met à osciller avec la même pulsation ω . Comme il n'y a pas de force de rappel de l'ion vers une position d'équilibre donnée, l'oscillation acquise par l'ion est en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur la force qui l'actionne (voir Chap. II - § 224 . 2°) .

Ce mouvement est donc exactement en opposition de phase avec le courant de déplacement ⁽¹⁾ dû au champ ϵ .

En d'autres termes le courant dû au mouvement des ions libres vient en diminution du courant de déplacement, et par conséquent tout se passe comme si la constante diélectrique (à laquelle le courant de déplacement est proportionnel) se trouvait diminuée .

1) En effet, dans le courant de déplacement en question, n'interviennent, au contraire, que les forces élastiques de rappel des charges supposées mises en mouvement par le champ, tandis que leur inertie est négligée (voir § 5 ci-dessus) .

602 - Calculons la valeur de la constante diélectrique apparente.

Il nous faut pour cela exprimer la valeur du courant ionique et le retrancher du courant de déplacement. Le courant ionique est égal au produit de la charge en mouvement par la vitesse de cette charge. Calculons la vitesse de l'ion soumis au champ $\epsilon = \epsilon \cos \omega t$. Soit m sa masse et e sa charge. Si x est l'abaisse à l'époque t , on aura l'équation du mouvement de l'ion en écrivant que la force agissante :

$$f = e \epsilon = e \epsilon \cos \omega t,$$

est égale au produit de l'accélération $\gamma = \frac{d^2 x}{dt^2}$ par la masse m .

Il vient :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = e \epsilon \cos \omega t,$$

d'où par intégration :

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{e}{m} \frac{\epsilon}{\omega} \sin \omega t.$$

or :

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\epsilon \omega \sin \omega t.$$

On a donc finalement :

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{e}{m \omega^2} \frac{d\epsilon}{dt}.$$

S'il y a N ions par centimètre cube, chacun ayant une charge e , le courant ionique par centimètre carré aura pour valeur :

$$N e v = N e \frac{dx}{dt} = -\frac{N e^2}{m \omega^2} \frac{d\epsilon}{dt}.$$

Or le courant de déplacement dû au champ $\epsilon = \epsilon \cos \omega t$ a précisément pour valeur (§ 7) :

$$\frac{K}{4\pi k} \frac{d\epsilon}{dt}$$

La présence des ions paraît le ramener à la valeur :

$$\frac{K}{4\pi k} \frac{d\epsilon}{dt} - \frac{Ne^2}{m\omega^2} \frac{d\epsilon}{dt}$$

ou :

$$\frac{1}{4\pi k} \frac{d\epsilon}{dt} \left[K - 4\pi k \frac{Ne^2}{m\omega^2} \right]$$

Tout se passe comme si la constante diélectrique K était remplacée par la constante K' :

$$K' = K - 4\pi k \frac{Ne^2}{m\omega^2}$$

En unités C.G.S. électrostatiques, on aurait :

$$K' = K - 4\pi \frac{Ne^2}{m\omega^2}$$

En unités électromagnétiques, il vient, au contraire :

$$K' = K - 4\pi c^2 \frac{Ne^2}{m\omega^2}$$

603 - Tenant compte du fait que les ions qui nous intéressent sont, en réalité, des électrons, nous pouvons effectuer le calcul de K' ; on a en effet :

$$\begin{cases} c = \text{vitesse de la lumière dans le vide} = 10^{10} \text{ cm/sec.} \\ m = \text{masse de l'électron} = 9 \cdot 10^{-28} \text{ gr} \\ e = \text{charge de l'électron} = 1,6 \cdot 10^{-20} \text{ cgs. E.M.} \\ \omega = 2\pi f \end{cases}$$

En remplaçant dans l'expression de K' on trouve :

$$K' = K - 0,81 \cdot 10^8 \frac{N}{f^2}$$

ou bien, à condition d'exprimer f en kilocycles :

$$K' = K - \frac{81 N}{f_{kc}^2} .$$

604 - Enfin dans l'air, on a pratiquement $K=1$ et par suite :

$$K' = 1 - \frac{81 N}{f_{kc}^2} .$$

605 - A cette nouvelle valeur de la constante diélectrique correspond une nouvelle valeur de l'indice de réfraction n , et de la vitesse de propagation v . On a en effet :

$$n' = \sqrt{\mu K'} = \sqrt{1 - \frac{81 N}{f_{kc}^2}} ,$$

puisque, dans l'air : $\mu = 1$.

606 - Quant à la vitesse de propagation $v = \frac{c}{\sqrt{K\mu}}$ (§ 37) elle devient de même :

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{81 N}{f_{kc}^2}}} .$$

Cette vitesse est plus grande que celle de la lumière, mais il faut observer qu'il s'agit là d'une vitesse de "phase" laquelle ne doit pas être confondue avec une vitesse de "groupe" qui est celle avec laquelle se propagent les signaux, ou l'énergie. Cette vitesse de groupe est nécessairement inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide, d'après la théorie de la relativité .

On observera que la vitesse de phase :

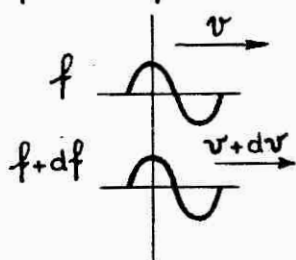
$$v = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{81 N}{f_{kc}^2}}} .$$

n'est pas la même pour toutes les fréquences. C'est ce qu'on exprime en disant, comme en optique, que le milieu est "dispersif". La vitesse v est décroissante quand la fréquence croît.

Un signal, qui est nécessairement constitué par un certain nombre (fini ou infini) de fréquences différentes (Cf : série et intégrale de Fourier au Chap. I_a), verra ses composantes se propager avec des vitesses différentes ; il se déformera donc au cours de la propagation.

607 - Supposons que ces composantes soient réduites à deux :

f et $f' = f + df$, de longueur d'onde λ et $\lambda' = \lambda - d\lambda$ et cherchons la vitesse avec laquelle va se propager la crête produite par la concordance de l'alternance positive de l'oscillation de fréquence f avec celle de fréquence $f' = f + df$.



Supposons ces deux alternances en concordance à l'époque $t = 0$. Au bout d'un temps t l'alternance de fréquence f aura parcouru une distance vt et celle de f' une distance $v't = (v + dv)t$.

Ces deux alternances seront décalées dans l'espace d'un intervalle $dv \times t$ correspondant à un angle de phase $\phi = 2\pi \frac{t dv}{\lambda}$; comme l'alternance de période la plus courte voyage moins vite que l'autre, le point de coïncidence des maxima des deux oscillations recule par rapport à cette alternance. La coïncidence se trouve reportée en arrière à une distance δ égale à $\frac{\phi}{2\pi} \times \Delta$, où Δ désigne la distance qui sépare, à un instant donné, deux coïncidences successives des ondes de fréquences f et f' .

$$\text{On a } \Delta = n\lambda \text{ avec } n\lambda = (n+1)\lambda'$$

d'où l'on tire $\Delta = \frac{\lambda^2}{\lambda - \lambda'} = \frac{\lambda^2}{d\lambda} = \lambda \frac{\lambda}{d\lambda} = \lambda \frac{f}{df}$, en valeurs absolues.

La distance δ est :

$$\delta = \frac{\varphi}{2\pi} \times \Delta = \frac{t dv}{\lambda} \times \lambda \frac{f}{df} = t f \times \frac{dv}{df}.$$

La coïncidence s'est donc finalement propagée, depuis l'origine, jusqu'à une distance x :

$$x = vt - \delta = \left(v - f \frac{dv}{df} \right) t.$$

La vitesse de propagation est donc :

$$v_g = v - f \frac{dv}{df} = v \left(1 - \frac{f}{v} \frac{dv}{df} \right) = v \left(1 - \frac{\frac{dv}{v}}{\frac{df}{f}} \right)$$

c'est la vitesse de groupe, v étant la vitesse de phase.

608 - Dans le cas du milieu ionisé on a (§ 606) :

$$v_g = c \cdot \left(1 - \frac{81 N}{f^2 k c} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

On démontre que la vitesse de groupe v_g et la vitesse de phase v sont reliées par la relation :

$$v v_g = c^2.$$

Influence du champ magnétique .

631 - Nous avons déjà étudié , au cours du Chap. II le mouvement d'un électron dans un champ magnétique fixe et uniforme .

Ce problème a été traité en supposant d'abord (Chap. III § 861) que le champ magnétique agit seul sur l'électron supposé animé de la vitesse initiale $\vec{v}$. Puis au Chap. IV - (§ 264) on a fait intervenir , en plus , un champ électrique qu'on a supposé lui aussi , uniforme et constant (en grandeur , direction et sens) . La vitesse v de l'électron était , en outre , supposée située dans un plan perpendiculaire à la direction des lignes de force du champ magnétique . On se rappelle que les trajectoires obtenues dans ce dernier cas sont des cycloïdes , ayant leurs axes parallèles à la direction du champ électrique .

Le cas qui reste maintenant à traiter est plus compliqué , en ceci que :

- le champ électrique agissant sur l'électron est un champ alternatif , celui de l'onde électromagnétique dont on étudie la propagation ,
- sa direction peut avoir une orientation quelconque par rapport à celle du champ magnétique ,
- les électrons se meuvent dans un milieu contenant aussi des ions positifs susceptibles de les absorber .

Mouvement d'un électron soumis simultanément à un champ électrique alternatif et à un champ magnétique fixe - Gyrofréquence.

632 - Nous remarquons tout d'abord qu'à chaque valeur du champ magnétique correspond une certaine fréquence possédant des propriétés particulières.

En effet, supposons d'abord, comme au Chap. III (§ 863) que le champ électrique soit nul, et la vitesse initiale v_0 contenue dans un plan perpendiculaire au champ magnétique. L'électron décrit un cercle de rayon $R = \frac{m}{e} \frac{v_0}{h}$, et la durée T de révolution est égale à $\frac{2\pi m}{eh}$ indépendante du rayon R et de la vitesse v_0 . Si le champ électrique alternatif a une fréquence égale à $\frac{1}{T}$, il se trouve changer de sens exactement à chaque demi-circonférence parcourue par l'électron. Cet électron ne tarde pas à se mettre en phase avec la composante $\vec{E}_p$ (du champ électrique $\vec{E}$) située dans le plan de la trajectoire et l'accélération tangentielle de l'électron augmente constamment. Le rayon du cercle décrit par l'électron croît constamment de même que l'accélération de cet électron. Sa trajectoire qu'il décrit n'est plus un cercle mais en réalité une spirale qui tend constamment à s'élargir.

Une énergie importante est alors soustraite à l'onde incidente. L'amplitude de celle-ci décroît rapidement en fonction de la distance, et en pratique, l'onde considérée se trouve complètement absorbée après un trajet relativement court.

La fréquence $f_g = \frac{1}{T} = \frac{eh}{2\pi m}$ pour laquelle ce phénomène se produit s'appelle la gyrofréquence.

En prenant pour valeur du champ magnétique terrestre le champ $h = 1,5$ gauss, on trouve $f_g = 1,4$ MC/s environ; les phénomènes qui viennent d'être exposés expliquent pourquoi cette fréquence est particulièrement inapte aux transmissions aux grandes distances.

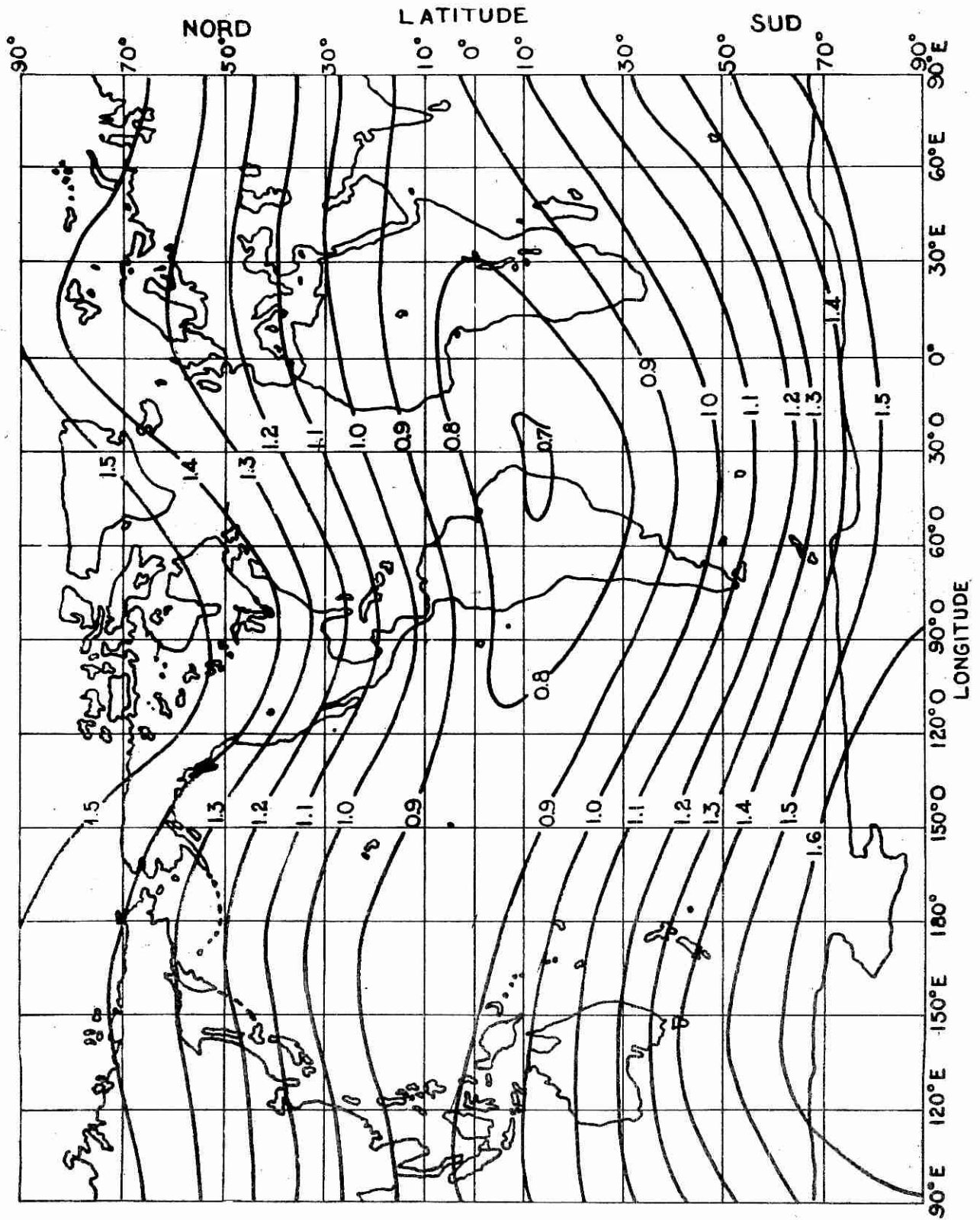


Fig. 632

632^{bu} - Cette girofréquence varie, d'ailleurs avec le lieu géographique, comme le champ magnétique terrestre. La fig. 632 donne en courbes de niveau les variations de la girofréquence aux divers points du globe. On voit pratiquement, que celle-ci varie depuis 1,6 Mc/s environ auprès des pôles magnétiques, jusqu'à 0,7 Mc/s vers le centre de l'Amérique du Sud.

Cas des fréquences supérieures à la gyrofréquence.

633 - La période T de l'oscillation de l'électron est alors beaucoup plus petite que la gyropériode définie au § 632 précédent. Le champ magnétique n'a pas le temps de courber notablement la trajectoire de l'électron, que l'accélération de celui-ci change de sens (avec le champ électrique). L'électron qui aurait décrit un segment rectiligne en l'absence de champ magnétique, décrit maintenant une ellipse très aplatie, dont le grand axe coïncide avec le champ électrique incident. La composante parallèle au petit axe de l'ellipse donne naissance à une deuxième onde (ou à un rayon dit "extraordinaire") qui est polarisé à angle droit sur le champ de l'onde incidente (c'est-à-dire du rayon "normal").

On assiste là à un dédoublement du rayon électromagnétique sous l'action du champ magnétique. C'est le phénomène de la double réfraction bien connue en optique.

634 - Si la fréquence de l'onde incidente diminue et se rapproche, par conséquent, de la gyrofréquence, l'électron devient susceptible d'acquiescer des vitesses plus élevées. Les dimensions des ellipses augmentent également mais la courbure créée par le champ magnétique augmente également; l'ellipse parcourue par l'électron est à la fois plus grande et plus ouverte, l'intensité du rayon extraordinaire augmente, l'amortissement de l'onde incidente augmente également.

Cas des fréquences inférieures à la gyrofréquence.

635 - Pendant une période du champ H.F. et même pendant une demi-période, l'électron est susceptible de décrire plusieurs tours sur le cercle dont il était question au § 632

ci-dessus, ou plusieurs spires d'hélice, (si le mouvement de l'électron n'a pas lieu dans le plan perpendiculaire au champ magnétique). Sous l'action du champ électrique alternatif l'électron décrit dans un sens, puis dans l'autre des courbes telles que celles qui sont représentées (pour une demi-période de doublement de l'onde incidente) par les fig. 631 et 632.



Fig. 631



Fig. 632

636 - Dans tous les cas, l'effet du champ magnétique est de donner à l'oscillation de l'électron, une composante (plus ou moins intense) perpendiculaire à la direction de l'oscillation qui existerait sous l'action du champ électrique seul c'est-à-dire en l'absence du champ magnétique.

L'énergie rayonnée par cette nouvelle composante donne naissance au rayon extraordinaire, lequel est relativement d'autant plus intense que la fréquence d'excitation est plus proche de la gyrofréquence.

Le rayon extraordinaire polarisé à angle droit sur le rayon ordinaire, se distingue de ce dernier :

- par une vitesse de phase différente
- par un trajet différent dans l'espace
- par une atténuation différente le long de ce trajet.

637 - La présence du champ magnétique a pour effet de modifier la valeur de l'indice de réfraction n trouvée au § 605 ci-dessus. Cette expression était (en l'absence de champ magnétique) :

$$n = \sqrt{K} = \sqrt{1 - \frac{4\pi c^2 e^2 N}{m \omega^2}} = \sqrt{1 - \frac{81 N}{f_{hc}^2}}.$$

En désignant :

par H_L la composante du champ magnétique dans la direction de la propagation

H_T la composante à angle droit avec cette même direction

c la vitesse de la lumière

α la quantité $\alpha = \frac{m \omega^2}{4 \pi N c^2 e^2}$

γ_L la quantité $\gamma_L = \frac{m \omega \frac{H_L e}{m}}{4 \pi N c^2 e^2}$

γ_T la quantité $\gamma_T = \frac{m \omega \frac{H_T e}{m}}{4 \pi N c^2 e^2}$,

l'expression des indices de refraction tenant compte du champ magnétique de composantes H_L et H_T devient la suivante (1) :

$$n = \sqrt{1 - \frac{2}{2\alpha - \left(\frac{\gamma_T^2}{\alpha-1}\right) \pm \sqrt{\frac{\gamma_T^4}{(\alpha-1)^2} + 4\gamma_L^2}}}$$

Le signe (-) qui fournit l'expression la plus voisine de l'expression du § 605 ci-dessus (ne tenant pas compte de champ magnétique) donne l'indice de réfraction relatif au rayon ordinaire, tandis que le signe (+) donne l'indice pour le rayon extraordinaire.

Rôle des molécules gazeuses restantes.

638 - Comme il a déjà été indiqué au paragraphe 582 ci-dessus, les électrons, dans leur mouvement oscillatoire, sont susceptibles d'entrer en collision avec des molécules gazeuses de la haute atmosphère.

À la suite d'une telle collision, l'électron est dévié de sa direction primitive et sa vitesse se trouve diminuée d'une quantité qui correspond à l'énergie cinétique cédée à la molécule.

(1) en supposant l'absorption négligeable.

Comme les déviations se produisent dans tous les sens, au hasard, le champ électromagnétique nouveau qui résulte de ces déviations est complètement désordonné et par conséquent inutilisable. Le résultat pratique de l'opération est une absorption de l'onde incidente.

Le taux de cette absorption dépend de la pression du gaz (voir § 582 ci-dessus), de la probabilité de rencontre d'un électron avec une molécule, et de la vitesse moyenne de l'électron en vibration (c'est-à-dire de la perte moyenne d'énergie à la suite du choc).

Variation de l'indice de réfraction.

639 — Le mouvement des électrons, tel qu'il a été décrit au § 601, se trouve modifié par ces collisions, et la constante diélectrique apparente aussi. Cette constante est plus proche de l'unité que s'il n'y avait pas de collisions. Si l'on néglige l'effet du champ magnétique, on a pour nouvelle expression de la constante diélectrique :

$$K'' = 1 - \frac{81 N}{f_{kc}^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2}$$

où ν représente le nombre de collisions par seconde et ω la pulsation $2\pi f$. On observe immédiatement que le terme correctif $\frac{1}{1 - \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2}$ tend vers l'unité lorsque l'on a $\nu \ll \omega$, c'est-à-dire lorsque le nombre de collisions par seconde est très petit par rapport à la pulsation ω . On a alors sensiblement $K'' = K' = 1 - \frac{81 N}{f_{kc}^2}$.

Quant à l'indice f_{kc}^2 de réfraction, il est donné par l'expression :

$$n = \sqrt{\frac{K''}{2} + \sqrt{\frac{K''^2}{4} + \left(\frac{2\pi\sigma c^2}{\omega}\right)^2}}$$

où σ représente la conductibilité du milieu ionisé (voir § 640 ci-après).

Absorption des ondes dans le milieu ionisé .

640 - Comme il a été dit au § 582 ci-dessus, le milieu ionisé possède une certaine conductibilité σ . Dans la mesure où l'effet du champ magnétique peut être négligé, la valeur de ce coefficient σ est donnée par la formule :

$$\sigma = N \frac{e^2}{m} \frac{\nu}{\omega^2 + \nu^2} \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}$$

où ν représente le nombre de collisions par seconde. Comme le montre cette formule, la contribution $\Delta\sigma$ apportée par un électron à la conductivité de l'ionosphère est maxima lorsque le rapport $\frac{\nu}{\omega^2 + \nu^2}$ est maximum, c'est-à-dire lorsque $\omega = \nu$, c'est-à-dire lorsqu'il y a 2π collisions pendant une période de l'oscillation de l'onde incidente.

Les variations de la fréquence ν en fonction de l'altitude ont déjà été données dans le tableau du § 582 ci-dessus.

Si l'on tient compte de la distribution des électrons en fonction de l'altitude (§ 582) on constate que le maximum de conductibilité se présente à une altitude de 60 à 80 kms, pour les fréquences courantes. Cette altitude est celle de la limite inférieure de l'ionosphère. La conductibilité va ensuite en décroissant rapidement avec l'altitude malgré une densité électronique élevée, à cause de la diminution considérable de la pression (voir tableau du § 582).

Il s'en suit, comme conséquence pratique, que toute l'absorption subie par une onde ionosphérique, se produit dans les couches basses de l'ionosphère, c'est-à-dire quand l'onde y entre et quand elle en sort.

Affaiblissement de l'onde dans le milieu ionisé.

641 - Le rapport des champs électriques E_1 et E_2 mesurés à un intervalle l est évidemment de la forme exponentielle puisque ce rapport se conserve aux bornes d'une tranche d'épaisseur constante quelle que soit la position de cette tranche :

$$\frac{E_2}{E_1} = e^{-\alpha l}$$

Dans cette formule α représente la "constante d'affaiblissement", et sa valeur est donnée par l'expression :

$$\alpha = \frac{\omega}{e \sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{K''^2 + \left((1 - K'') \frac{\nu}{\omega} \right)^2} - K''}$$

où les lettres ont la même signification que précédemment (voir § 639 pour l'expression de K'').

Pour les fréquences beaucoup plus basses que la fréquence critique, et $\omega \gg \nu$, l'expression de α se simplifie et peut s'écrire :

$$\alpha = \frac{2 \pi \sigma}{c \sqrt{K''}} = \frac{2 \pi c e^2 N \nu}{\sqrt{K''} m \omega^2}$$

Comme le montre cette formule, le coefficient d'affaiblissement, dans ces conditions, devient inversement proportionnel au carré de la fréquence.

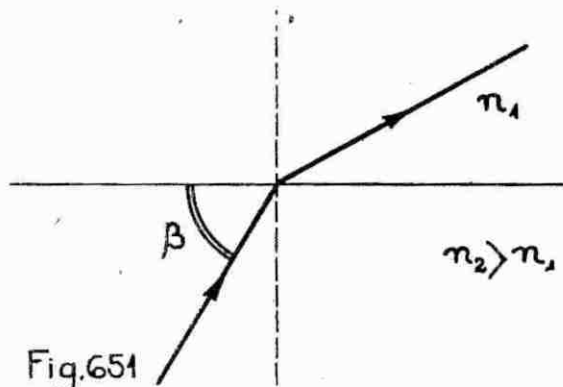
Influence du champ magnétique sur l'absorption.

642 - Ce qui a été dit dans les §§ 640 et 641 a été établi sans tenir compte du champ magnétique terrestre. Or celui-ci, en modifiant la vitesse moyenne des électrons, modifie aussi la conductivité du milieu ionisé.

Aux fréquences voisines de la gyrofréquence en particulier, cette vitesse moyenne est notablement augmentée ; le coefficient de conductivité acquiert par suite, une valeur élevée. La nouvelle expression de ce coefficient devient très compliquée.

Trajets suivis par les ondes dans l'ionosphère.

651 - Comme en optique les ondes subissent un changement de direction en traversant la limite de séparation de deux milieux d'indices de réfraction différents (voir § 543 ci-dessus).



Le rayon se rapproche de la normale à la surface de séparation en passant du milieu d'indice le plus faible à l'autre milieu (fig. 651).

Lorsque le changement d'indice se fait progressivement (cas de l'atmosphère) le changement de direction se fait, lui aussi d'une manière continue, et le rayon électromagnétique suit une trajectoire incurvée. Comme l'indice de l'ionosphère va en diminuant quand l'altitude croît (il est inférieur à l'unité), la concavité des trajectoires est tournée vers le bas; c'est pourquoi des ondes parties de la surface de la terre peuvent y revenir, si la courbure est suffisante.

D'une manière générale, la courbure $\frac{1}{\rho}$ est donnée par la formule (§ 545) :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{n} \frac{dn}{ds},$$

où s représente la distance mesurée suivant la perpendiculaire à la direction de propagation.

Aux courtes distances, où l'on peut négliger la courbure de la terre, la trajectoire est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$dx = \frac{\cos \beta \, dz}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \beta}},$$

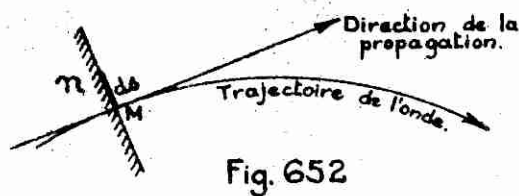


Fig. 652

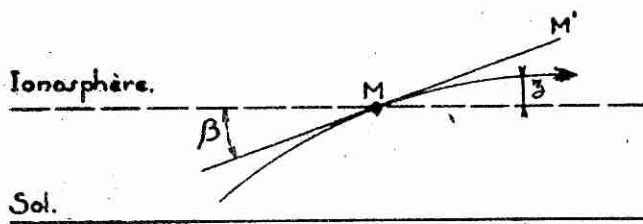


Fig. 653

β est l'inclinaison du rayon considéré au point où il pénètre dans l'ionosphère, et n est l'indice de réfraction (fonction de la cote z).

Si l'on veut tenir compte de la courbure de la terre (cas

des grandes distances) il faut introduire les coordonnées polaires r et θ ; l'équation différentielle s'écrit alors (fig. 654).

$$d\theta = \frac{r_1 \cos \beta \, dr}{r \sqrt{r^2 n^2 - r_1^2 \cos^2 \beta}}.$$

Dans cette formule r_1 représente la valeur du rayon r à la limite inférieure de l'ionosphère, les autres lettres ont la même signification que précédemment.

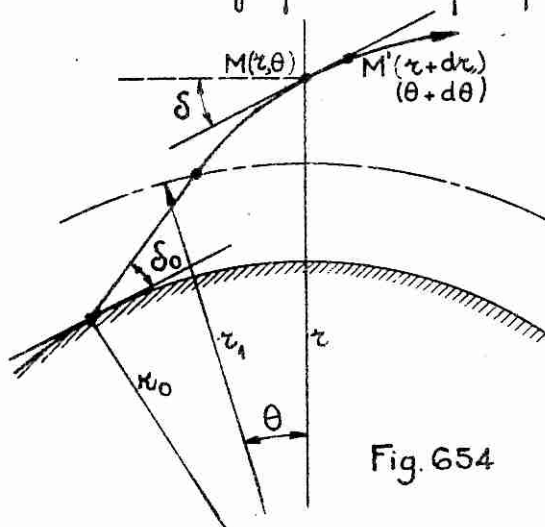


Fig. 654

Il convient d'observer que les rayons rectilignes qui quittent le sol en faisant de petits angles δ_0 (fig. 654) avec l'horizon, ont néanmoins, en arrivant au contact de l'ionosphère, une inclinaison β (sur l'horizontale du lieu de réception) qui peut être

beaucoup plus grande que δ_0 . On a exactement :

$$\cos \beta = \frac{\cos \delta_0}{1 + \frac{h}{r_0}},$$

où h représente l'altitude de la limite inférieure de l'ionosphère et r_0 le rayon de la terre.

Ses courbes de la fig. 655 représentent les valeurs de

β en fonction de δ_0 pour les valeurs suivantes de h : 100, 200, 300, 400 et 500 kilomètres.

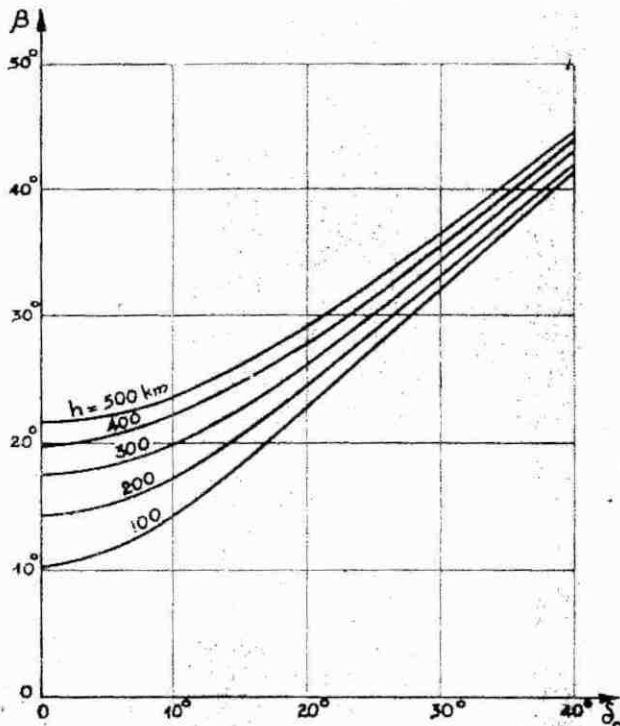


Fig. 655

Les inclinaisons β et α qu'une onde possède à l'entrée de la couche ionisée et en un autre point où l'indice est n sont reliées par la relation (loi de Snell) :

$$\cos \beta = n \cos \alpha. (1)$$

Si l'on veut que le rayon soit réfléchi vers le sol, il faut que celui-ci soit recourbé jusqu'à devenir horizontal ($\alpha = 0$). L'indice de réfraction doit descendre

jusqu'à la valeur :

$$n = \cos \beta$$

Cet indice doit être d'autant plus faible (et l'ionisation d'autant plus intense) que l'angle β est plus grand, c'est-à-dire que la direction d'arrivée des ondes est plus voisine de la verticale.

Pour une incidence verticale ($\beta = \frac{\pi}{2}$) l'onde se propage jusqu'au moment où elle atteint une région telle que l'on ait $n = 0$.

652 - Comme on l'a vu plus haut (§ 637), le champ magnétique terrestre provoque un dédoublement de l'indice de réfraction.

Les deux indices observés s'appliquent à deux composantes différemment polarisées de l'onde incidente ; ces deux composantes se mettent donc à suivre deux trajets différents correspondant à leurs indices de réfraction respectifs.

1) C'est la loi ordinaire de la réfraction, bien connue en optique. (voir aussi § 543).

On appelle rayon "ordinaire" celui dont les caractéristiques sont les plus voisines de celui qui existerait en l'absence de champ magnétique, tandis que l'autre est appelé rayon "extraordinaire".

653 - On appelle hauteur virtuelle atteinte par une onde qui est réfléchi vers le sol (fig. 656) la hauteur à laquelle devrait se produire la réflexion si le rayon était réfléchi en A sur une surface métallique polie au lieu d'être progressivement recourbé dans la couche ionisée.

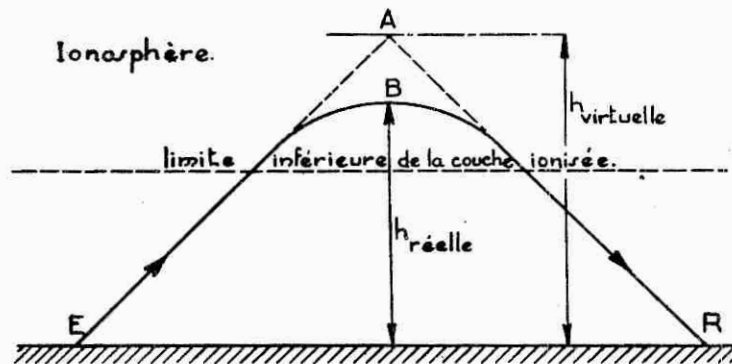


Fig. 656

654 - On appelle fréquence critique f_c d'une couche ionisée la fréquence la plus élevée qui est susceptible d'être renvoyée sous l'incidence ^{verticale} par cette couche ionisée. D'après ce que l'on a vu précédemment, (§ 651 inf.) c'est la fréquence maxima pour laquelle la relation $n = 0$ peut être satisfaite dans la couche considérée.

Cette fréquence critique est liée au maximum d'ionisation dans la couche, puisque l'on a (§ 605), en négligeant l'effet du champ magnétique :

$$n = \sqrt{1 - \frac{81 N}{f^2}}$$

La condition $n = 0$ donne immédiatement :

$$\begin{aligned} f_c^2 \text{ (kilocycles)} &= 81 N \\ \text{d'où } f_c \text{ (kilocycles)} &= 9 \sqrt{N} \end{aligned}$$

étant, comme précédemment le nombre d'électrons ^{libres} par cm^3 .

655 - Lorsqu'il est tenu compte du champ magnétique terrestre, on trouve naturellement deux fréquences critiques au lieu d'une, l'une appelée f_c^0 est la fréquence critique relative au rayon ordinaire, l'autre f_c^x est relative au rayon extraordinaire. Ces deux fréquences critiques sont liées à la gyrofréquence $(f_g = \frac{He}{2\pi m})$ par la relation :

$$(f_c^x)^2 = f_c^0 (f_c^0 + f_g)$$

la fréquence f_c^x est donc toujours supérieure à f_c^0 et aux hautes fréquences, la différence $f_c^x - f_c^0$ tend vers $\frac{f_g}{2}$ c'est-à-dire environ 730 Kc/s pour $H = 0,52$ Gauss.

656 - Le phénomène de courbure progressive du rayon hertzien suppose une variation lente de l'indice de réfraction avec la hauteur. Il est nécessaire que cet indice, en effet, ne subisse pas de variation appréciable sur une distance égale à une longueur d'onde, de l'onde considérée.

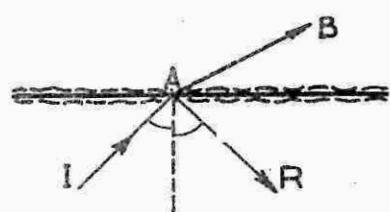


Fig. 657

S'il en est autrement, la réfraction s'accompagne d'une réflexion partielle (fig. 657).

De l'énergie est donc renvoyée vers le sol chaque fois que l'onde rencontre des régions où la variation de l'indice de réfraction est rapide.

Cette circonstance se produit, en particulier, dans la couche E où se forment de véritables nuages électroniques contours nettement délimités (couche E sporadique ou E_s).

1983 souvent

donnent la cause de ce qu'on appelle les réflexions sporadiques. Les ondes réfléchies par la couche E_s se propagent dans des directions différentes de la direction de propagation de l'onde incidente, et donnent lieu à des réceptions en des points situés en dehors du plan de propagation des rayons réguliers.

← c'est facile

1980 *[Signature]*

Structure de l'ionosphère.

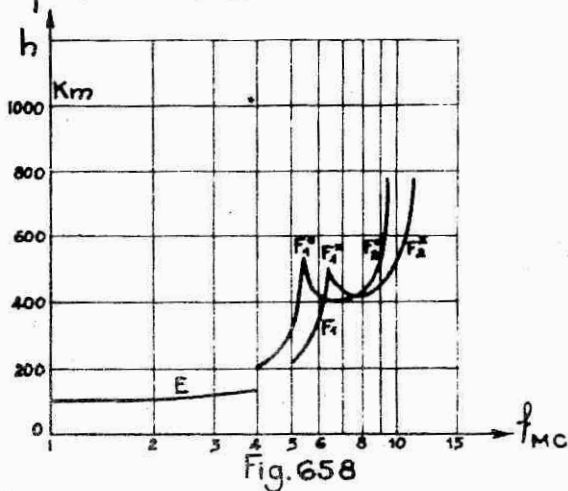
657 - Les deux caractéristiques qui permettent d'être renseigné sur la constitution de l'ionosphère sont la fréquence critique et la hauteur virtuelle (§ 653 et § 654). Des stations de "sondage" de l'ionosphère ont été installées en de nombreux points du globe et équipées pour mesurer à toute heure de jour et de la nuit les fréquences critiques et les hauteurs virtuelles de l'ionosphère.

La méthode de détermination des hauteurs virtuelles, utilisant le même principe que les radars, comme on le verra plus loin (Chap. IX. §), consiste à émettre des impulsions brèves et à mesurer à l'oscillographe cathodique (muni d'un dispositif de balayage approprié) la durée qui s'écoule entre le départ d'une impulsion, et l'arrivée de l'écho qui est produit par la couche ionisée. En multipliant cette durée par la vitesse de la lumière, et en divisant par 2 le résultat, on obtient la hauteur virtuelle cherchée.

Cette hauteur virtuelle est fonction de la fréquence et il est facile de tracer par points ou même automatiquement, la courbe donnant cette hauteur virtuelle h en fonction de la fréquence.

La courbe h obtenue a l'aspect indiqué par la fig. 658. Cette figure est à rapprocher de la fig. 581 du § 587 ci-dessus.

Pour les fréquences inférieures à 4 mégacycles, la hauteur virtuelle observée, légèrement croissante avec la fréquence, se trouve comprise entre 100 et 120 kilomètres. La réflexion a alors lieu dans la couche E.



Au moment où la fréquence f dépasse la fréquence critique de la couche E (4 mégacycles dans le cas de la fig. 658, on voit la hauteur virtuelle h sauter brusquement de 120 à 200 km environ. La couche E a été traversée, et la réflexion se produit maintenant

sur la couche F_1 . Ce phénomène de saut brusque définit la fréquence critique f_E et la hauteur virtuelle de la couche E.

658 - Si nous continuons à faire croître la fréquence d'émission, nous observons non plus une courbe mais deux, à cause du dédoublement de l'onde par le champ magnétique terrestre, l'une, marquée F_1^o et F_2^o est relative au rayon ordinaire, l'autre marquée F_1^x et F_2^x correspond au rayon extraordinaire. (voir § 636 ci-dessus).

Considérons l'une de ces deux courbes, par exemple celle qui correspond au rayon ordinaire. Pour une fréquence voisine de 5,5 Mc/s, cette courbe présente une montée presque verticale. Les ondes viennent de traverser la couche F_1 ; cette montée rapide définit la fréquence critique $f_{F_1}^o$ de la couche F_1 pour le rayon ordinaire.

659 - En augmentant encore la fréquence on parcourt un nouvel arc de courbe, lequel présente une nouvelle montée rapide lorsque la fréquence atteint 9,5 Mc environ. Cette fois c'est la couche F_2 qui a été traversée, et ainsi se trouve définie la

fréquence critique $f_{F_2}^o$ de la couche F_2 pour le rayon ordinaire .

660 - A partir de cette valeur de f , il n'y a plus d'échos observés , les ondes traversent l'ionosphère de part en part et vont se perdre dans les espaces interplanétaires .

La deuxième courbe marquée F_1^x et F_2^x permet , de même , de définir exactement les fréquences critiques $f_{F_1}^x$ et $f_{F_2}^x$ des couches F_1 et F_2 pour le rayon extraordinaire . Dans l'exemple de la fig. 658 , on trouve :

$$f_{F_1}^x = 6,5 \text{ Mc/s et } f_{F_2}^x = 11,5 \text{ Mc/s .}$$

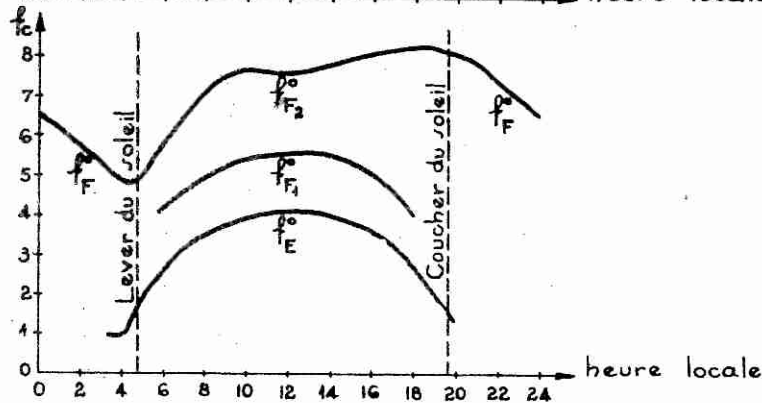
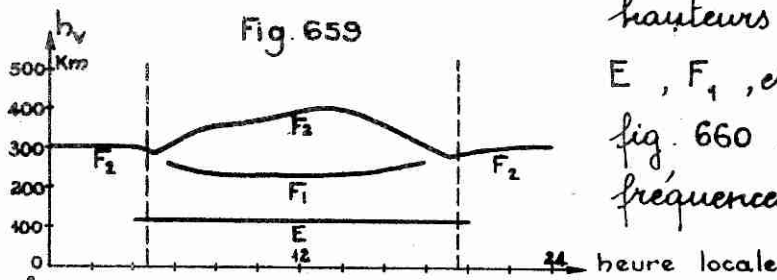
Variations des hauteurs virtuelles et des fréquences critiques avec le temps .

661 - Les variations "régulières" de l'ionosphère avec le temps sont de trois types :

- variations journalières .
- variations saisonnières .
- variations dans le cycle solaire de 11 ans .

Ses sondages ionosphériques (§ 657) permettent de tracer des courbes donnant, chaque jour, les hauteurs virtuelles et les fréquences critiques depuis 0^h jusqu'à 24^h . La comparaison de telles courbes , obtenues dans diverses saisons de l'année , et durant les 11 années d'un cycle solaire ont permis de préciser les lois auxquelles obéissent les variations de l'ionosphère , et même de prédire , quelques mois à l'avance , les hauteurs virtuelles et les fréquences critiques des couches ionisées . Ces résultats sont très importants pour la prévision des fréquences à employer pour les radiocommunications à grandes distances .

662 - Les fig. 659 et 660 représentent les courbes obtenues un certain jour de juin 1937. La fig. 659 donne les hauteurs virtuelles des couches E, F_1 , et F_2 tandis que la fig. 660 indique les variations des fréquences critiques correspondantes.



663 - Pour donner une idée des variations subies par les différentes caractéristiques, suivant la saison et l'époque dans le cycle d'activité solaire de 11 ans, on a reporté sur une même figure, 4 courbes relevées dans les conditions suivantes (pour une même caractéristique ou un même groupe de caractéristiques) :

1^{re} : en Juin
2^{re} : en Décembre } au minimum d'activité solaire (1933).

1^{re} : en Juin
2^{re} : en Décembre } au maximum d'activité solaire (1939).

La fig. 661 donne ainsi les variations de la hauteur virtuelle de la couche F_2 et de la couche E.

La fig. 662, celles de la hauteur virtuelle de la couche F_1 .

La fig. 663 donne de même les variations de $f_{F_2}^{\circ}$.

La fig. 664, celles de $f_{F_1}^{\circ}$, enfin la fig. 665 donne les variations de f_E .

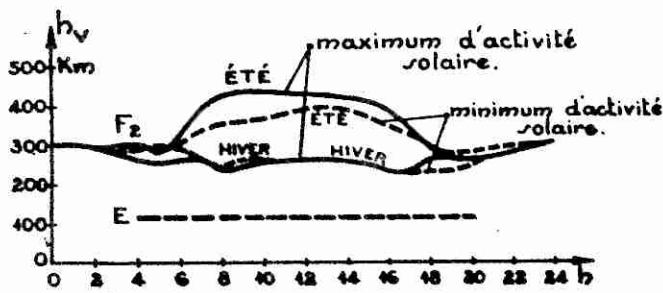


Fig. 661

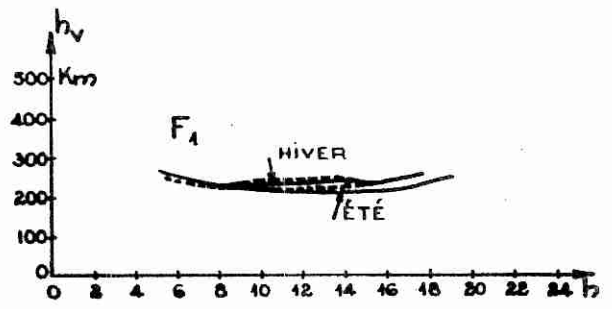


Fig. 662.

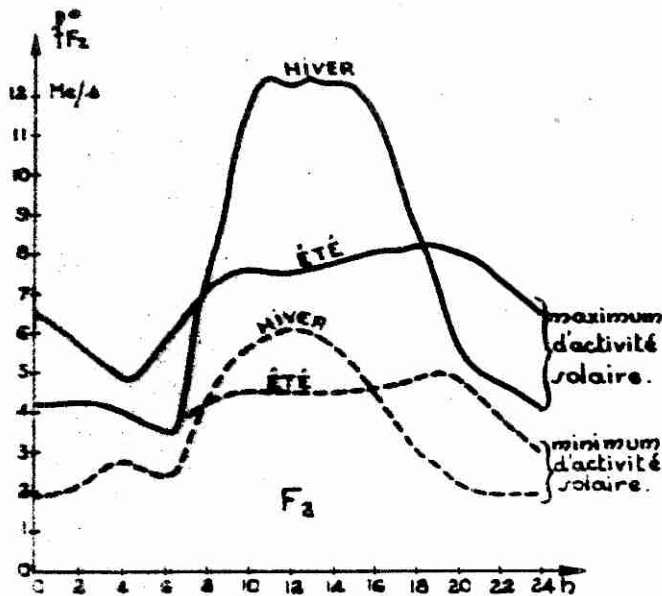


Fig 663

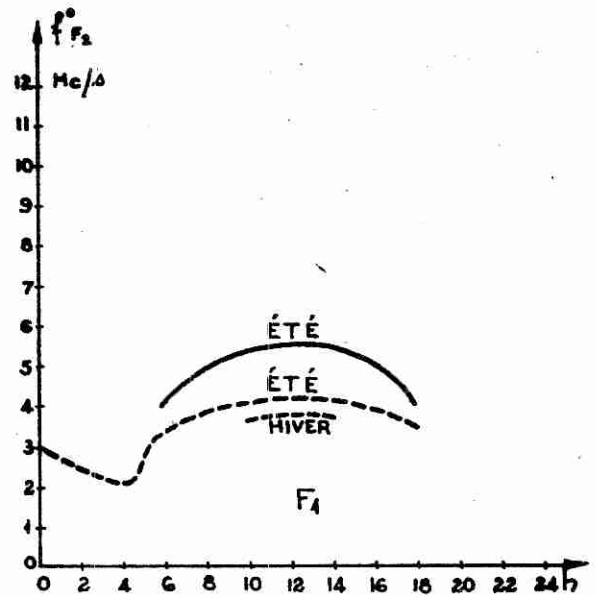


Fig. 664

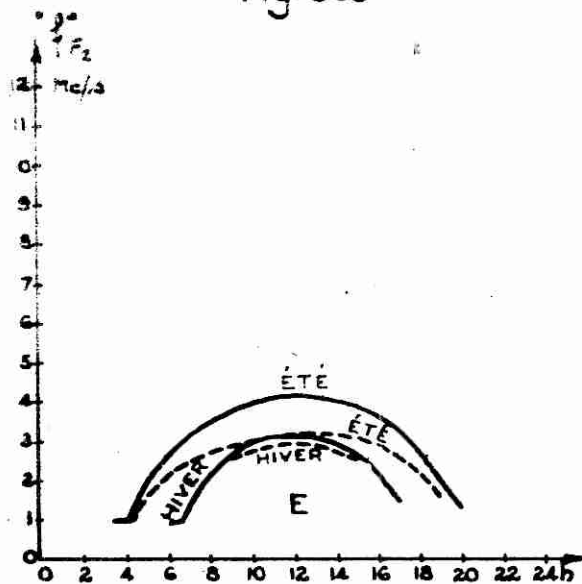


Fig. 665.

Nous retrouvons sur ces courbes les résultats qui avaient déjà été indiqués, par anticipation, au §§ 588 et suivants ci-dessus.

Variations de l'ionisation en fonction des coordonnées géographiques.

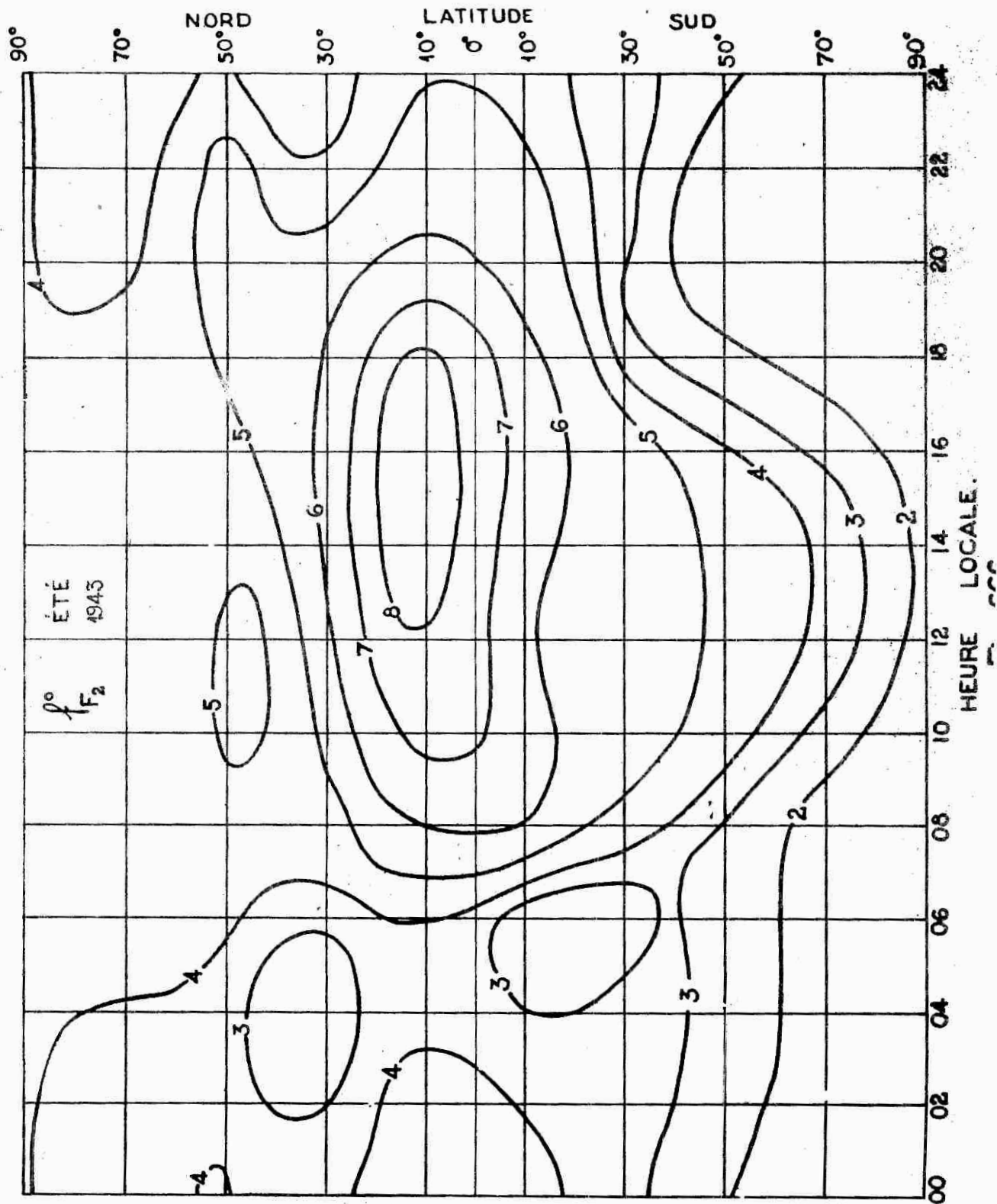
664 - Ses sondages ionosphériques opérés 24 heures durant en divers points de la terre montrent :

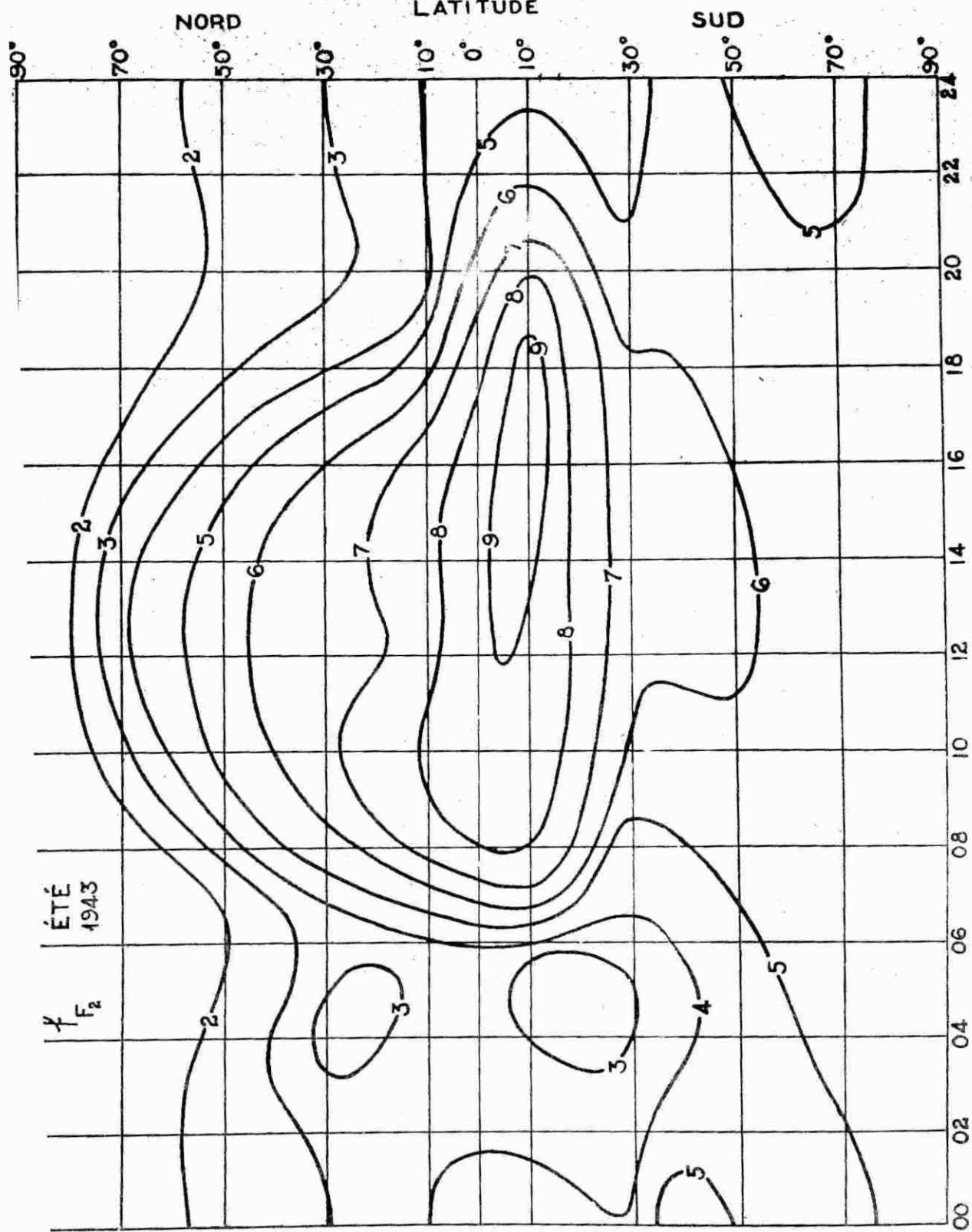
- que les caractéristiques de l'ionosphère (hauteurs virtuelles et fréquences critiques) varient , non seulement avec l'heure locale (voir § 663 ci-dessus), mais encore avec la latitude du lieu d'observation.

Pour représenter l'état de l'ionosphère, dans son ensemble, un jour donné, une surface est nécessaire pour chacune des caractéristiques (hauteurs virtuelles et fréquences critiques) .

La fig. 666 donne, à titre d'exemple, en courbes de niveau, un aspect de la surface représentative de la fréquence critique f_{F2}° en été (1943), tandis que la fig. 667 donne ce même aspect en hiver de la même année. Ses chiffres portés sur les courbes indiquent les fréquences critiques en Mégacycles/seconde.

La fig. 668 représente, de la même manière, la carte des fréquences critiques f_E° de la couche E normale (été 1943). On remarquera la régularité de cette couche, et sa symétrie par rapport à l'heure locale $h = 12$ c'est-à-dire midi, en comparaison de l'aspect tourmenté des cartes donnant f_{F2} (voir §§ 588 et suivants, ci-dessus).





HEURE LOCALE

Fig. 667

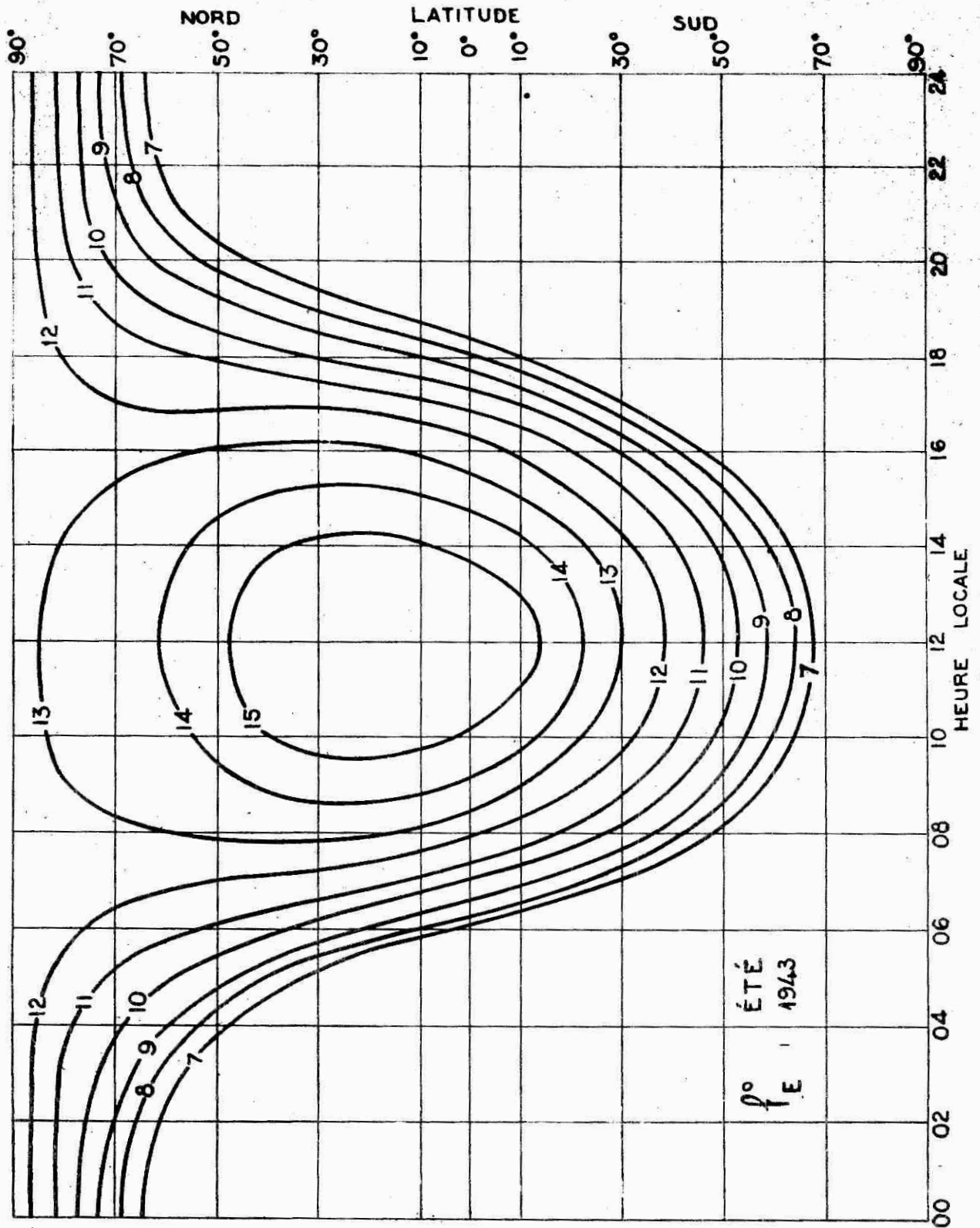


Fig. 668

665 - Dans chacune de ces figures, l'heure locale est portée en abscisses et la latitude en ordonnées. En superposant une telle carte à un planisphère dessiné avec les mêmes échelles (pour les longitudes et les latitudes), et à condition, bien entendu, de faire coïncider l'heure locale avec la longitude correspondante du planisphère, on peut obtenir la représentation de l'état de l'ionosphère, sur l'ensemble du globe terrestre à toute heure que l'on voudra.

666 - Ce raisonnement suppose toutefois que l'état de l'ionosphère n'est pas influencé par la longitude absolue de point d'observation mais seulement par ce qu'on pourrait appeler sa longitude par rapport au soleil (c'est-à-dire son heure locale).

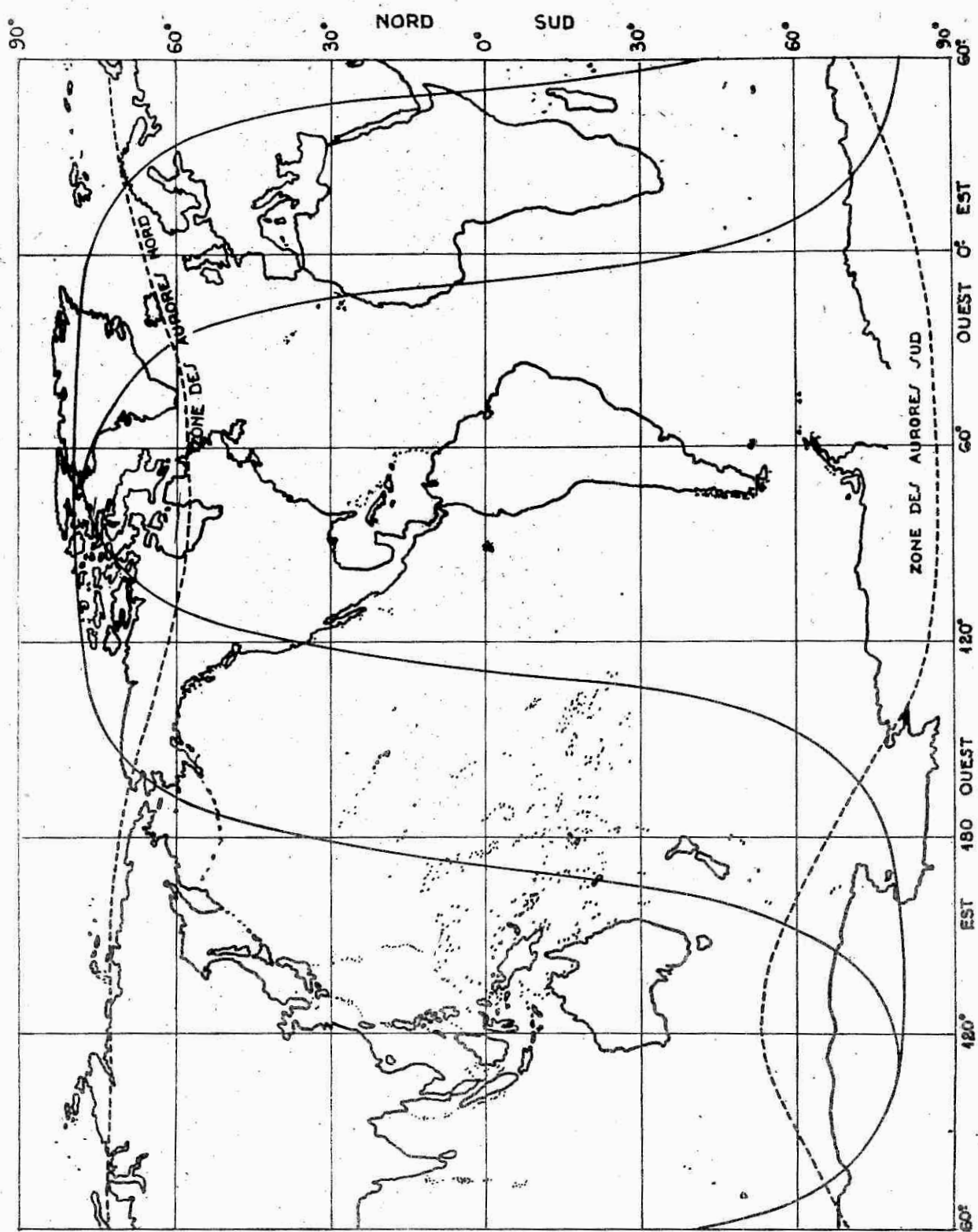
S'expérience montre qu'il n'en est pas tout à fait ainsi ne fut-ce qu'à cause de la non coïncidence des pôles magnétiques avec les pôles géographiques de la terre.

Pour servir de plus près la question, on a été amené à diviser le globe terrestre en trois zones (fig. 669) :

- une zone W (ou zone ouest) comprenant le continent américain.
- une zone E (ou zone est) comprenant le continent asiatique et l'Australie.
- une zone I (ou zone intermédiaire) entre les zones W et E.

Pour chaque caractéristique de l'ionosphère (f_E , f_F^o , etc...) il existe donc un jeu de trois cartes valables dans les trois zones W, I et E, respectivement. Ces cartes relatives aux couches F_1 et F_2 présentent des différences notables, comme le montre la comparaison des figures 670, 670^W et 671 qui donnent $f_{F_2}^o$ en janvier 1947, la première dans la zone ouest, dans la zone intermédiaire et dans la zone est.

En ce qui concerne la couche E, les différences sont moins profondes et l'expérience montre que les courbes relatives à la zone Ouest et à la zone Est peuvent pratiquement se déduire de celles relatives à la zone intermédiaire en faisant subir à celles-ci une translation de 10° vers le sud (pour obtenir la figure relative à la zone ouest) ou vers le Nord (Zone Est).



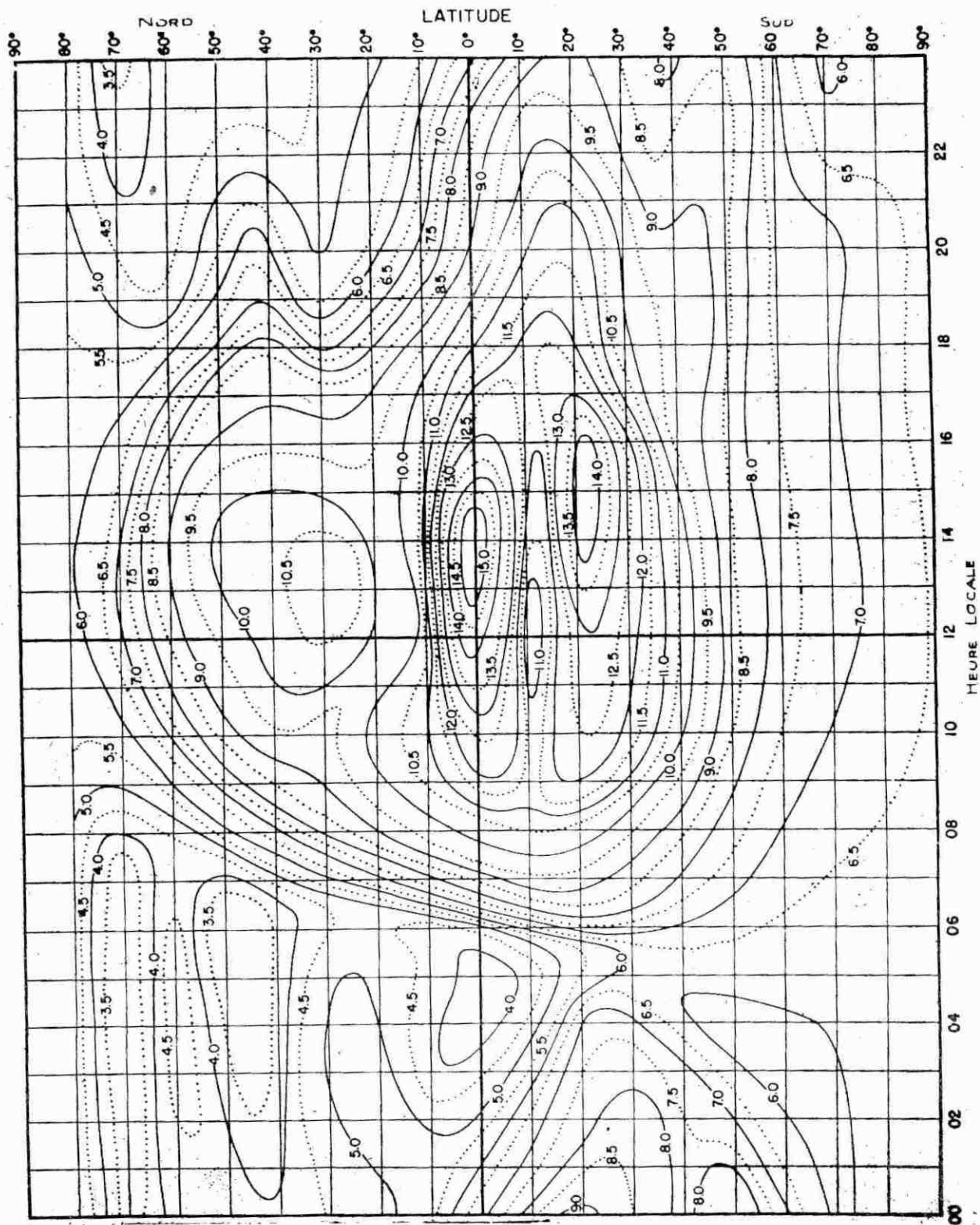
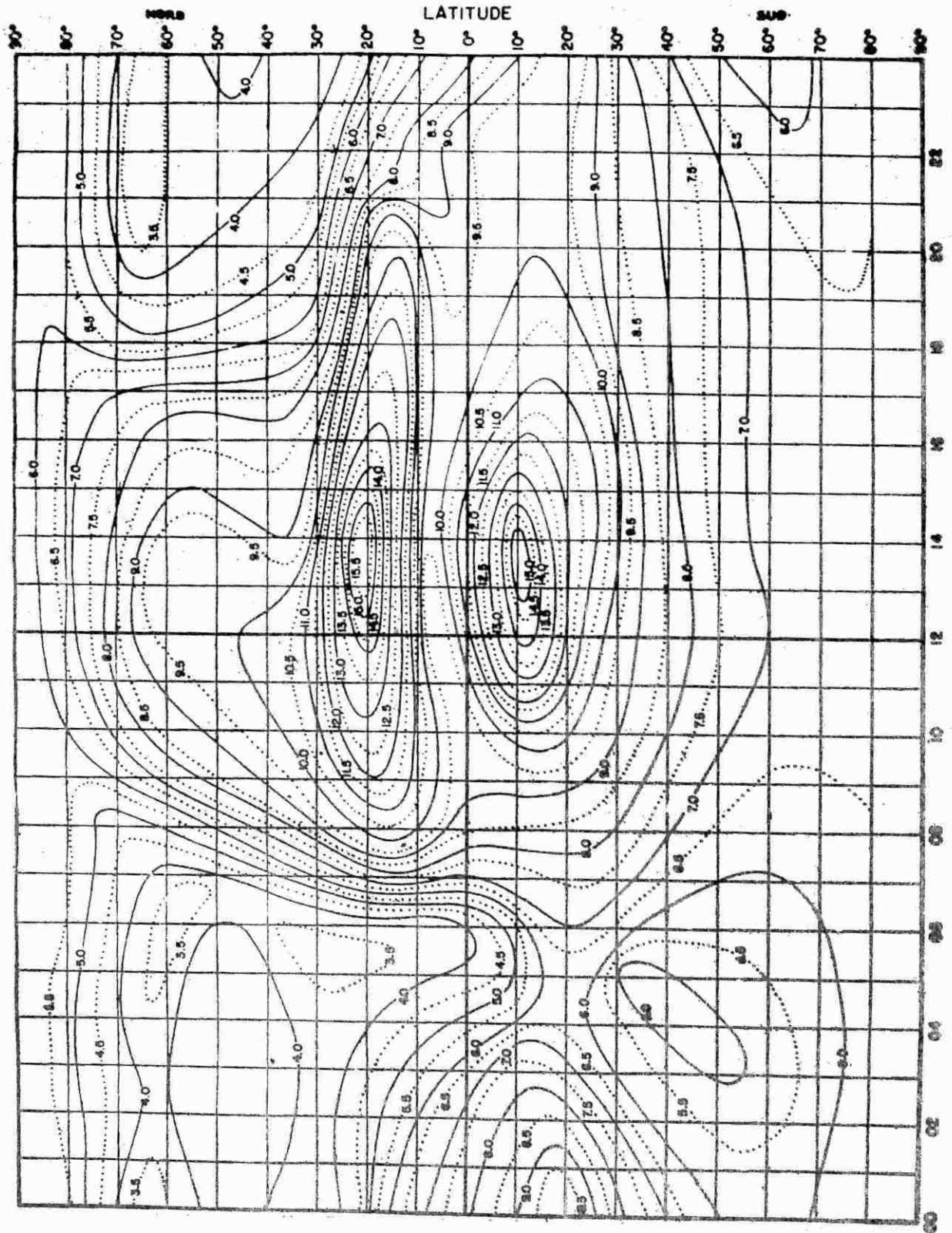
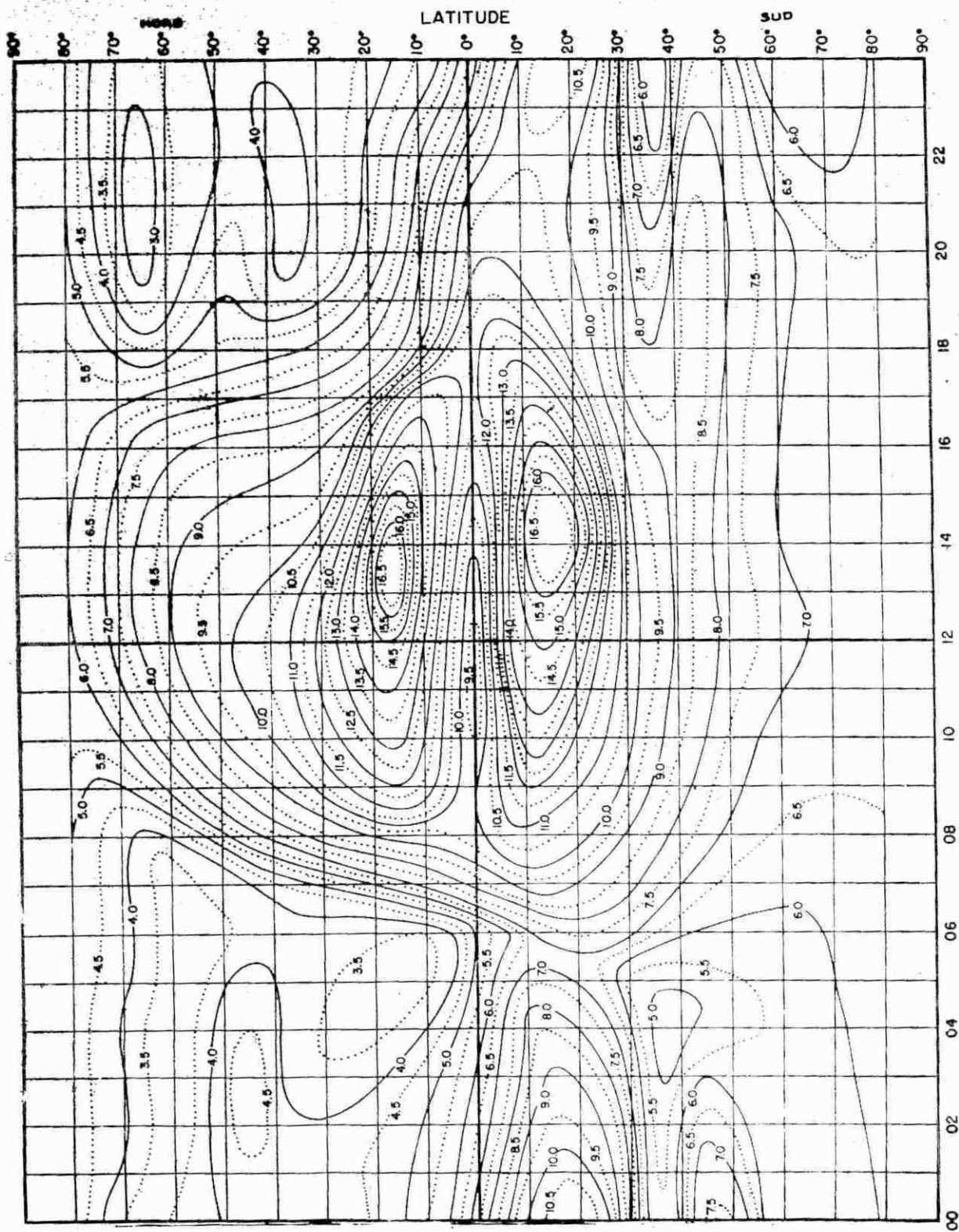


Fig 670





HEURE LOCALE

Fig. 671

Caractéristiques de la couche E sporadique.

667 — En raison du caractère essentiellement changeant de la couche E sporadique (voir § 595), il n'est pas possible de préciser, pour elle, des hauteurs virtuelles et des fréquences critiques en fonction de l'heure locale et de la latitude comme on a pu le faire pour les couches E, F₁ et F₂.

On ne peut indiquer que des moyennes (ou des probabilités) comme par exemple, la proportion du temps pendant lequel la fréquence critique est supérieure à une fréquence donnée; ainsi, la fig. 672 indique, en fonction de l'heure locale et de la latitude, les régions où la fréquence critique f_{ES} dépasse 15 Mc/s, pendant 10%, 20%, 30%, 40% et 50% du temps total. Cette figure a été établie pour un mois d'été, tandis que la fig. 673 est relative à un mois d'hiver de la même année.

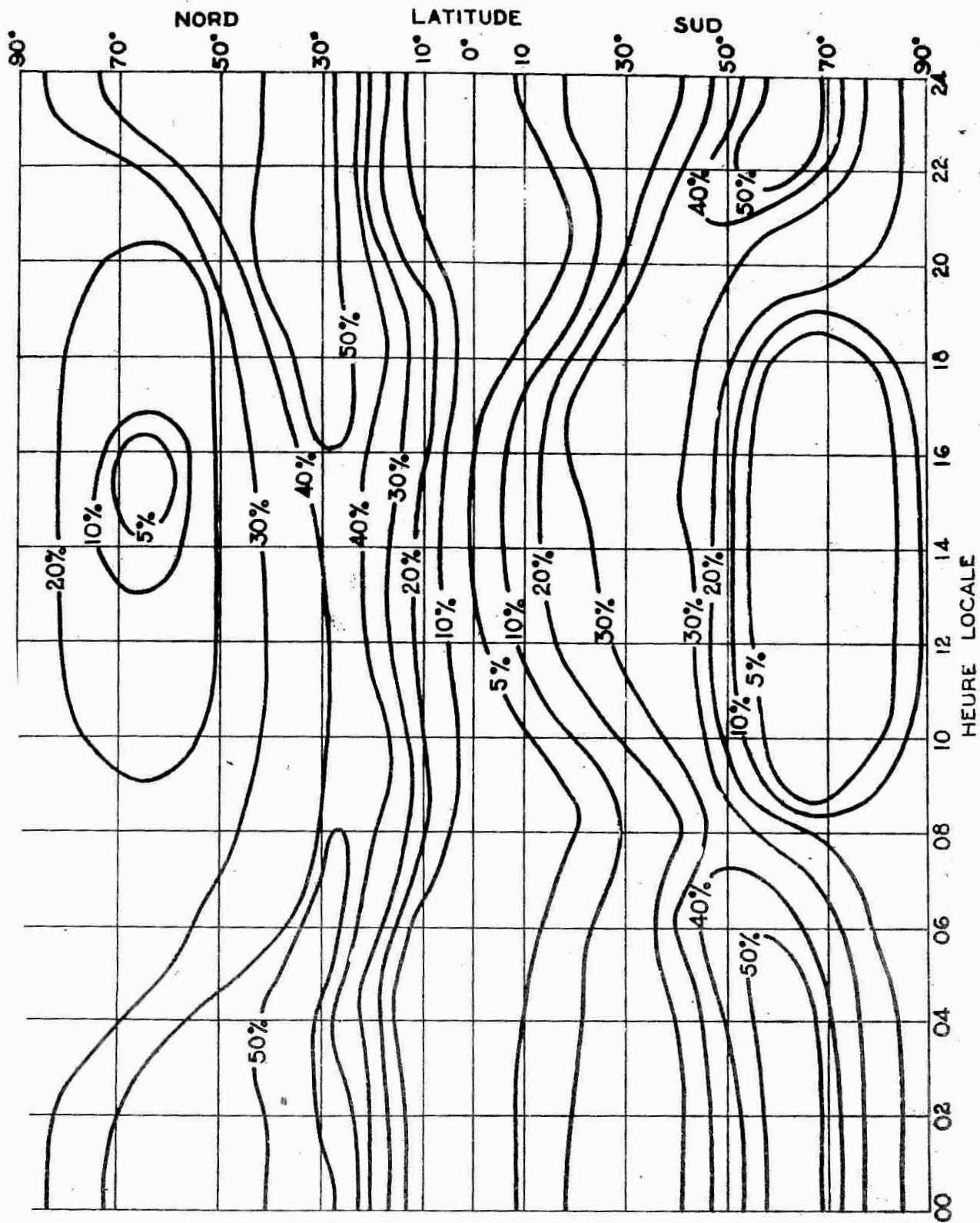


Fig 672

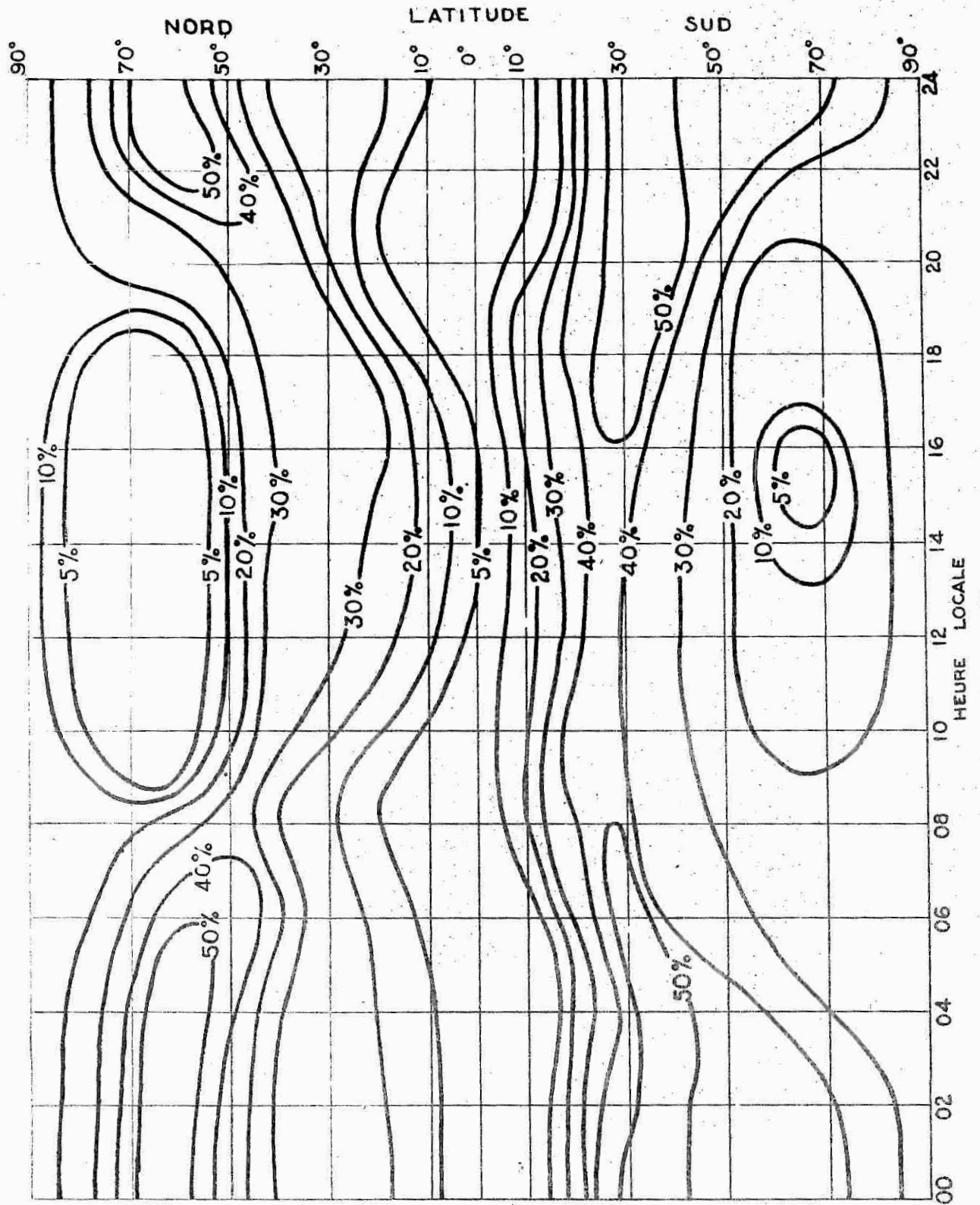


Fig. 673

668 - On peut aussi dresser des courbes de la fréquence critique médiane de la couche E sporadique ; on désigne ainsi la fréquence qui est atteinte ou dépassée pendant 50% du temps total . La fig. 674 donne la distribution de cette fréquence médiane en mégacycles par seconde telle qu'elle était prévue pour le mois de Janvier 1947 .

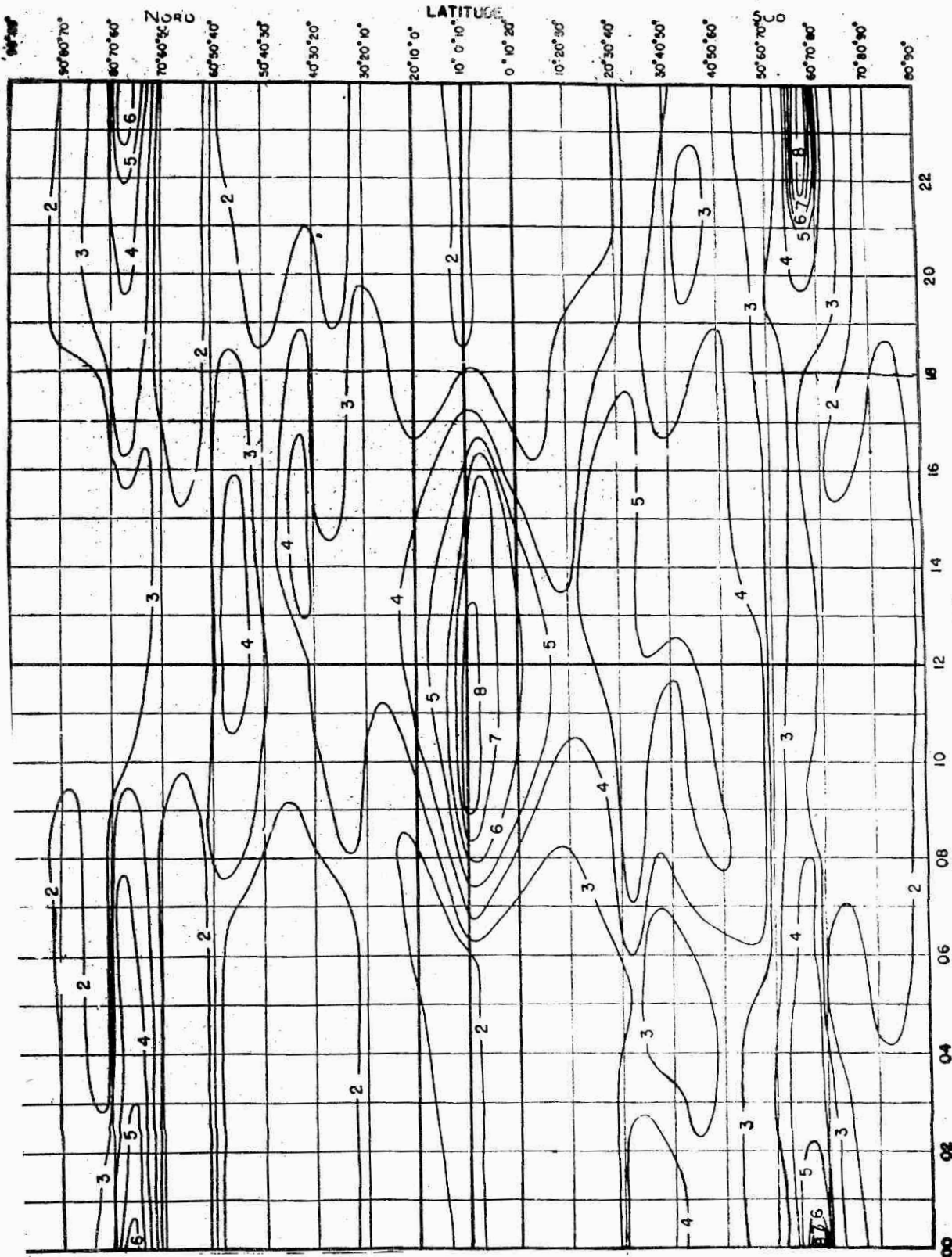


Fig. 674

Modes de propagation des ondes ionosphériques.

681 - Connaissant :

- d'une part les lois de la propagation dans les milieux ionisés (§§ 601 à 656 ci-dessus),
- d'autre part la structure de l'ionosphère (§§ 657 à 666) à une époque donnée,

il est possible de déterminer le comportement des ondes ionosphériques.

Considérons un émetteur rayonnant un étroit faisceau d'ondes radioélectriques de fréquence f et supposons que l'ionosphère soit réduite à une seule couche ionisée, par exemple, comme il est représenté sur la fig. 681.

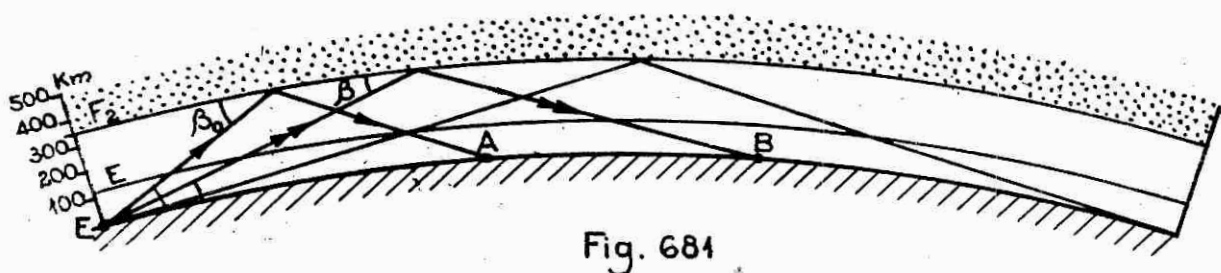


Fig. 681

La fréquence f de l'émetteur est supposée supérieure à la fréquence critique f_c de cette couche ($f > f_c$). Supposons le faisceau horizontal dirigé tout d'abord suivant la verticale. Comme f est supérieur à f_c , les ondes traversent de part en part la couche ionisée, il ne revient rien à la surface du sol, aucune communication n'est possible avec le faisceau de fréquence f et cette direction d'émission.

Diminuons progressivement l'inclinaison du faisceau, les ondes continuent de traverser la couche ionisée jusqu'à ce que (§ 651) l'angle β d'attaque de la couche, en diminuant, arrive à satisfaire la relation :

$$\cos \beta_0 = n$$

où n représente l'indice de réfraction maximum dans la couche.

Or cet indice est lié à la fréquence critique f_c par les deux équations :

$$n = \sqrt{1 - \frac{81 N}{f_{(kc)}^2}} \quad (\S 605)$$

et

$$0 = \sqrt{1 - \frac{81 N}{f_c^2(kc)}} , \text{ ou bien } N = \frac{f_c^2(kc)}{81}$$

On en déduit :

$$n = \sqrt{1 - \frac{81 f_c^2}{81 f^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} ,$$

ce qui donne :

$$\cos \beta_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} ,$$

soit encore :

$$f \sin \beta_0 = f_c .$$

Cette relation définit l'angle limite β_0 sous lequel les ondes doivent attaquer la couche ionisée pour que le faisceau soit renvoyé vers la terre. Les ondes seront renvoyées vers le sol à condition que l'on ait :

$$\beta \leq \beta_0 .$$

c'est-à-dire : $f \sin \beta \leq f_c$.

On voit que la réflexion vers le sol nécessite des angles d'attaque β d'autant plus faibles que la fréquence f est plus élevée. Or cet angle β_0 est lié d'une part à l'inclinaison des ondes au départ du poste émetteur, et d'autre part à la hauteur de la couche ionisée (voir courbes de la fig. 655) .

Il existe donc une certaine inclinaison de départ δ_0 à partir de laquelle le faisceau émis sur la fréquence f revient vers la terre ; nous désignerons par A le point d'arrivée de ce premier faisceau sur le sol (fig. 681) .

Si le faisceau émis par l'émetteur E est envoyé suivant une direction plus proche de l'horizontale ($\delta < \delta_0$) l'angle β est également diminué ($\beta < \beta_0$) et les ondes sont renvoyées vers le sol sans avoir, d'ailleurs, été obligées de pénétrer aussi profondément.

dans la couche ionisée (§ 651). Ce nouveau faisceau retombe sur la surface de la terre en un point B plus éloigné que A, de l'émetteur E.

Distance de "saut" ou distance de "bond"

682 - Il est clair qu'aucune onde ionosphérique de fréquence f n'est susceptible d'atteindre le sol dans l'intervalle EA. Cet intervalle s'appelle la distance de saut (Skip distance) pour la fréquence et la couche ionisée considérées (fig. 681).

683 - Enfin si l'on continue d'abaisser l'inclinaison du faisceau envoyé par l'émetteur jusqu'au voisinage de l'horizon, la couche ionisée est frappée en des points de plus en plus éloignés, et le point d'arrivée au sol se trouve de plus en plus reculé. Sa limite, pour $\delta_0 \cong 0^\circ$, peut se calculer d'après les courbes de la fig. 655. Cette distance est uniquement fonction de la hauteur h de la couche qui intervient, pourvu que la fréquence ne soit pas, bien entendu, par trop élevée (afin que la relation $f \sin \beta < f_c$ demeure satisfaite). La courbe de la fig. 682 indique comment varie cette distance l en fonction de h . Il est aisé de voir (fig. 683) que l'on a :

$$l = 2 r_0 \text{ Arc Cos } \frac{1}{1 + \frac{h}{r_0}}.$$

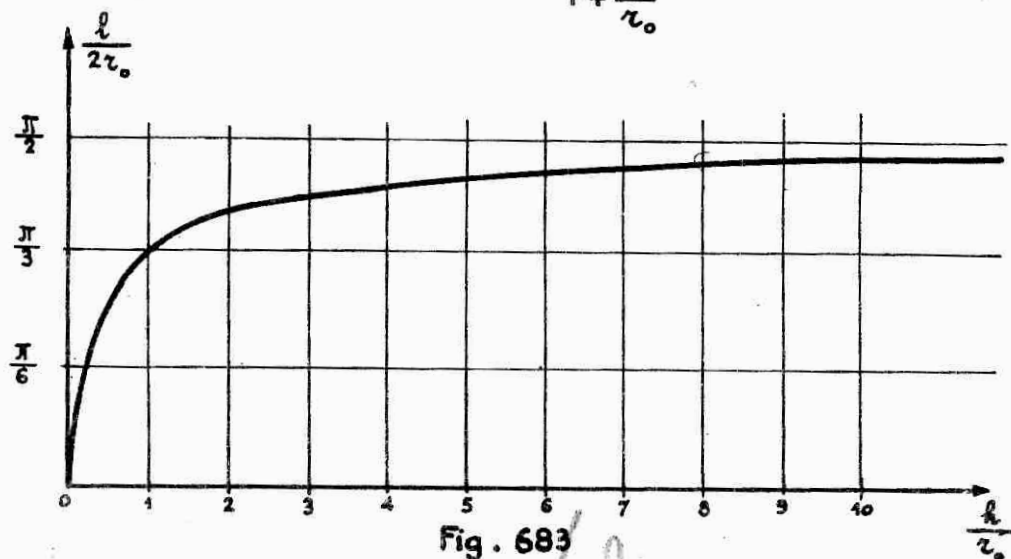


Fig. 683

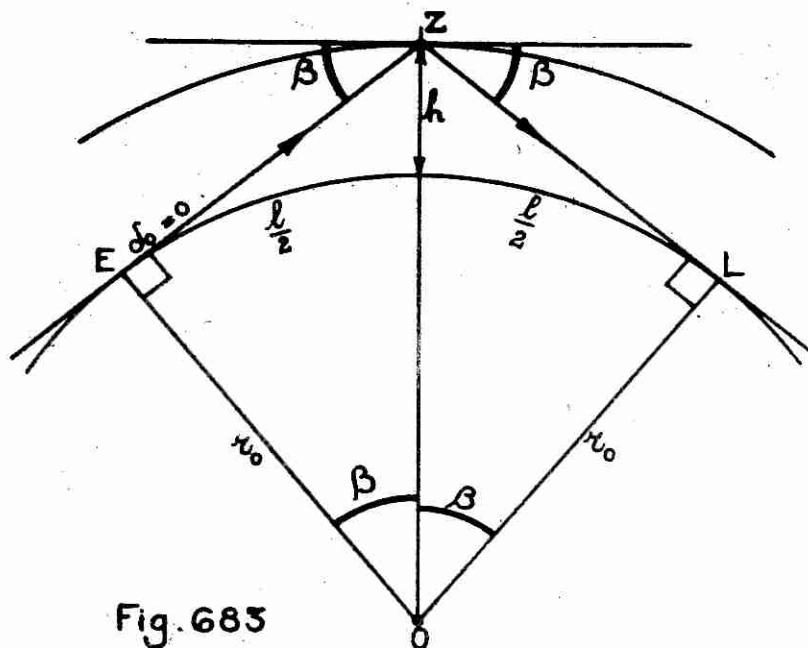


Fig. 683

684 - Il faut toutefois se garder d'attribuer trop d'importance à la limite théorique donnée par la formule

$$l = 2 r_0 \text{ Arc Cos } \frac{1}{1 + \frac{h}{r_0}}$$
 ci-dessus, pour les trois raisons suivantes :

1^{re} : Ainsi qu'on le verra au Chap. VIII, il est très difficile, pratiquement, d'envoyer un faisceau radioélectrique dans une direction très rapprochée de l'horizontale ($\delta \leq 3^\circ$), à cause de l'absorption provoquée par le sol.

2^{de} : en toute rigueur, la hauteur h à faire intervenir, n'est pas la hauteur virtuelle de la couche, laquelle correspond à la fréquence critique de la couche, mais la hauteur virtuelle correspondant à la fréquence de trafic f .

3^{de} : l'expérience tend à prouver que les ondes qui frappent l'ionosphère avec de faibles angles (incidences presque rasantes), sont capables d'atteindre des points situés bien au delà de la limite donnée par la formule trigonométrique précédente.

Il semble que les ondes puissent effectuer des trajets plus ou moins longs à l'intérieur de l'ionosphère et notamment dans l'intervalle de deux couches ionisées avant de revenir au sol (fig. 684).

4° : Enfin les ondes qui atteignent le sol en B après une première réflexion sur l'ionosphère sont susceptibles de se réfléchir par le sol et par conséquent de repartir vers l'ionosphère, d'où un nouveau bond dans l'espace, qui les conduit en un point B' tel que $OB' = 2 \times OB$. L'énergie qui repart du point B dépend du coefficient de réflexion r en B (voir § 138 ci-dessus). Une nouvelle réflexion peut encore intervenir en B' et ainsi de suite, on est en présence d'une transmission par "bonds multiples".

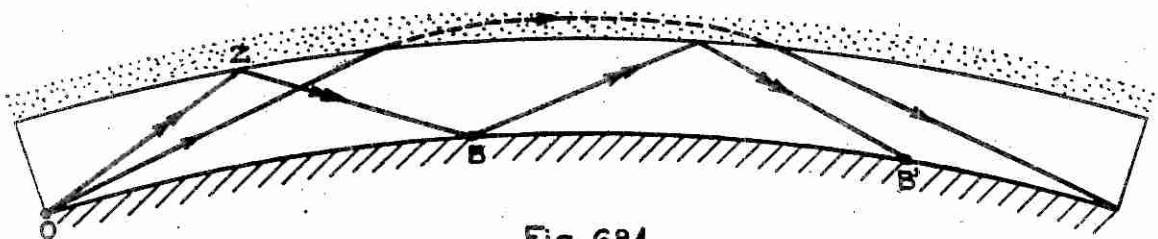


Fig. 684

Zones de silence .

685 - Lorsqu'un émetteur rayonne, en même temps que l'onde ionosphérique considérée actuellement, une onde de sol, celle-ci est reçue à la surface du sol, jusqu'à une certaine distance de l'émetteur. Cette distance n'est autre que la portée de l'onde de sol ; cette portée, on l'a vu, décroît quand la fréquence augmente.

Lorsque cette portée est inférieure à la distance de saut, (ce qui arrive pratiquement dès que f dépasse quelques mégacycles, il existe tout un intervalle où ne parviennent ni l'onde de sol, ni

aucune onde ionosphérique .

Cet intervalle est appelé la zone de silence de l'émetteur considéré (fig. 681) .

Fréquences maxima utilisables .

686 - Inversement, on peut dire que la relation $f \sin \beta_0 \leq f_c$ définit la fréquence maximum qui est renvoyée vers le sol, pour un angle d'attaque β_0 donné de l'ionosphère .

C'est donc la fréquence maximum utilisable (en abrégé f.m.u.) pour atteindre le point A au moyen d'une onde ionosphérique issue de l'émetteur E .

Cette fréquence maximum utilisable, pour une portée donnée, dépend non seulement de la fréquence critique f_c mais aussi de la hauteur de la couche (puisque celle-ci intervient dans la détermination de l'angle β_0) .

687 - La connaissance de la hauteur virtuelle et de la fréquence critique d'une couche en fonction de la latitude et de l'heure locale (voir fig. 666 et 667) permet de tracer la carte des fréquences maxima utilisables pour une portée donnée, par exemple : 2000 km ou bien 4000 km .

La fig. 685 donne ainsi les courbes de f.m.u. - 4000 km pour la couche F_2 dans la zone W en Janvier 1947 . Cette figure est à rapprocher de la fig. 669 qui donne la fréquence critique (c'est-à-dire la f.m.u. - zéro) $f_{F_2}^x$ de la même couche à la même époque .

Enfin la fig. 686 donne, de même, les valeurs de f.m.u. - 2000 km pour la couche E . La fréquence maximum utilisable lue en chaque point de ces ^{différentes} cartes s'entend évidemment pour les radio-communications dont le point de réflexion sur l'ionosphère coïncide avec le point considéré .

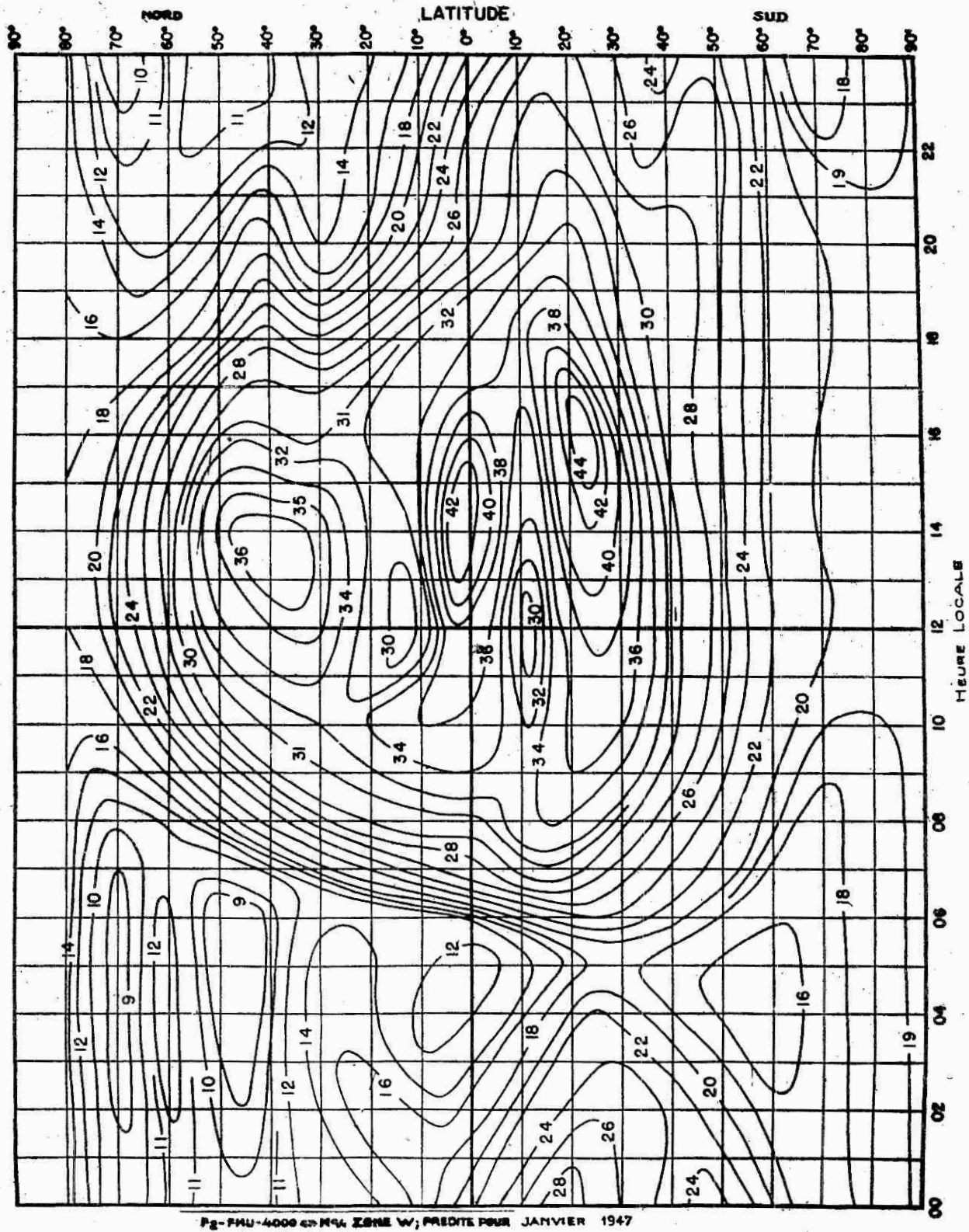


Fig. 684

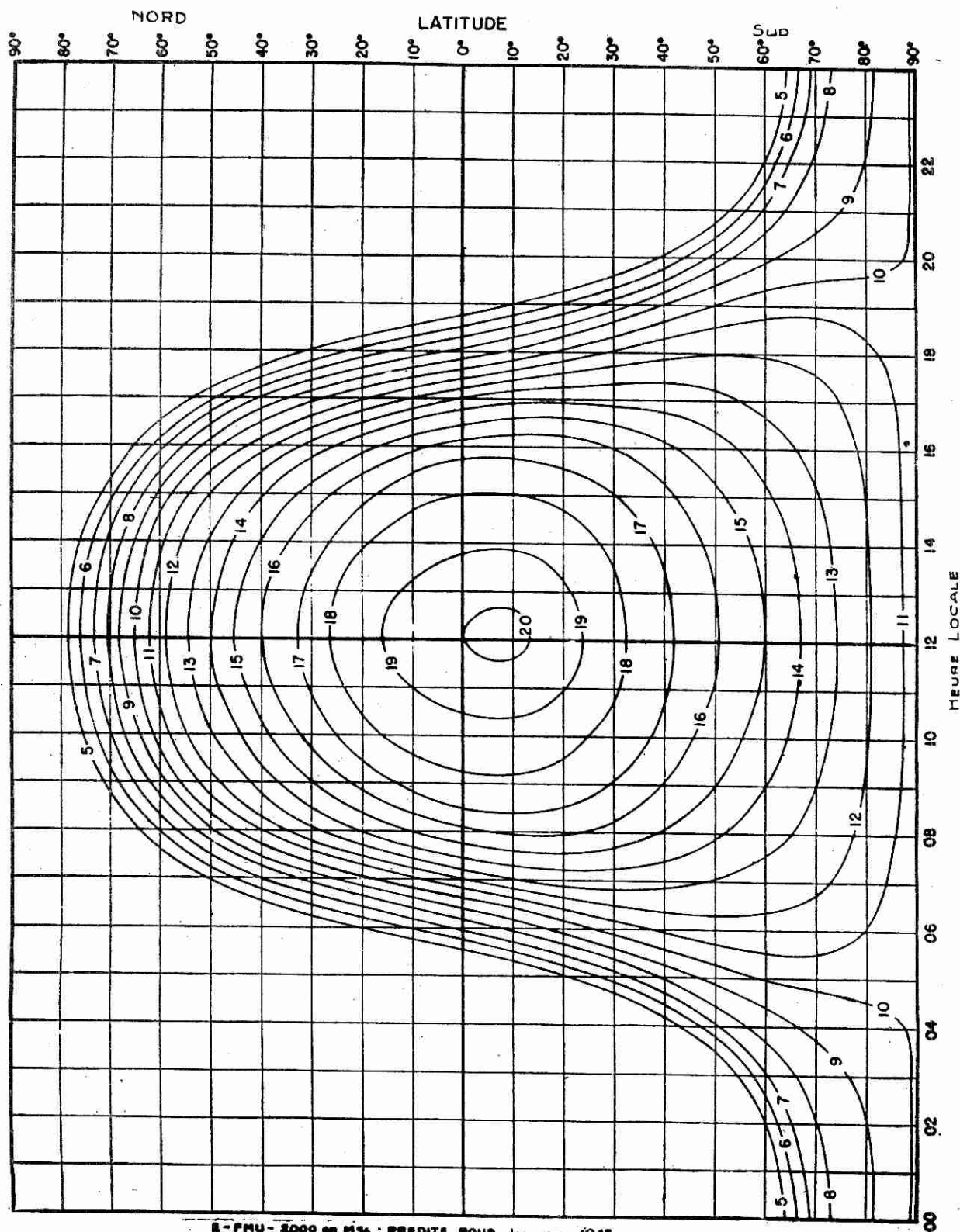


Fig. 685

Utilisation pratique des cartes donnant les f.m.u.

688 - Connaissant la hauteur virtuelle et la fréquence critique en tout point d'une couche donnée, il est évidemment possible de tracer la carte des f.m.u. correspondant à une portée quelconque comprise entre zéro et la limite l du § 683.

Cette méthode conduit à tracer, pour une seule couche, autant de cartes qu'il y a de portées à considérer. Dans la pratique, on opère différemment. On utilise une seule carte, par exemple celle qui donne la f.m.u. pour la portée maxima (F_2 - f.m.u. - 4000 par exemple) et, de la f.m.u. - 4000, on déduit la valeur de la f.m.u. pour la portée désirée, au moyen de tables ou de courbes construites une fois pour toutes.

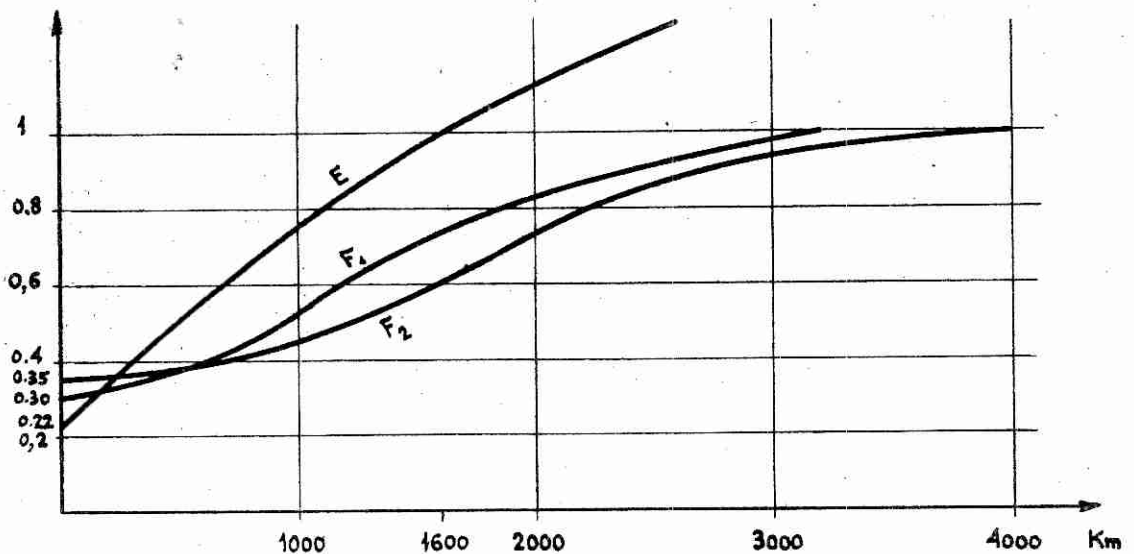


Fig. 688

Les trois courbes de la fig. 688 donnent les coefficients par lesquels il faut multiplier respectivement :

- la f.m.u. pour 1600 km avec la couche E (courbe marquée E-1600)
 - la f.m.u. pour 3200 km avec la couche F₁ (courbe marquée F₁-3200)
 - et la f.m.u. pour 4000 km avec la couche F₂ (courbe marquée F₂-4000),
- pour obtenir la fréquence maximum utilisable pour une portée donnée p .

La valeur pratique à retenir est évidemment la plus grande des valeurs obtenues ; on voit que, selon le cas, la réflexion pourra intervenir, soit la couche F_2 , soit la couche F_1 soit encore sur la couche E.

Pour les distances inférieures à 1600 km on obtient des résultats plus précis en multipliant le f.m.u. zéro (c'est-à-dire la fréquence f_E ou la fréquence $f_{F_2}^*$) par les coefficients donnés par les courbes de la fig. 689. La fréquence à retenir est la plus grande des valeurs données par les courbes marquées E zéro et F_2 zéro.

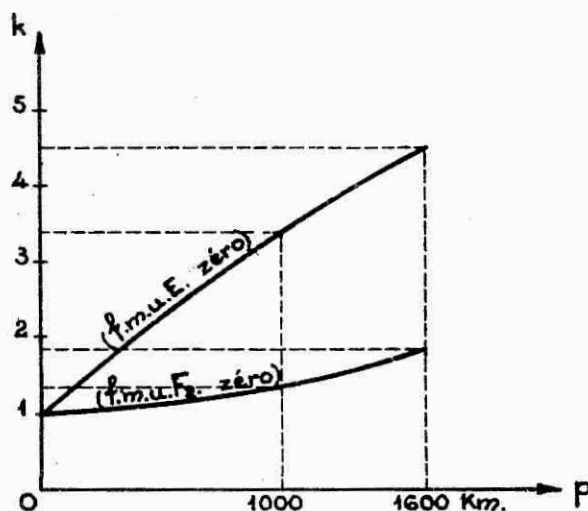


Fig. 688^{bis}

689 - Ce qui a été dit au § précédent (n° 688) s'applique aux portées inférieures à 4000 km.

La méthode est alors la suivante :

Étant donné un poste émetteur situé en O et un récepteur situé en R. On commence par déterminer la position du point de réflexion sur l'ionosphère (dans l'hypothèse d'une transmission par simple bond). C'est le milieu M de l'arc de grand cercle OR ; ce milieu s'obtient facilement si l'on dispose d'une carte (sur calque) des arcs de grands cercles (fig. 690) centrés sur l'équateur et qu'on peut faire glisser sur le planisphère. Ayant mesuré la longueur du parcours et établi la correspon-

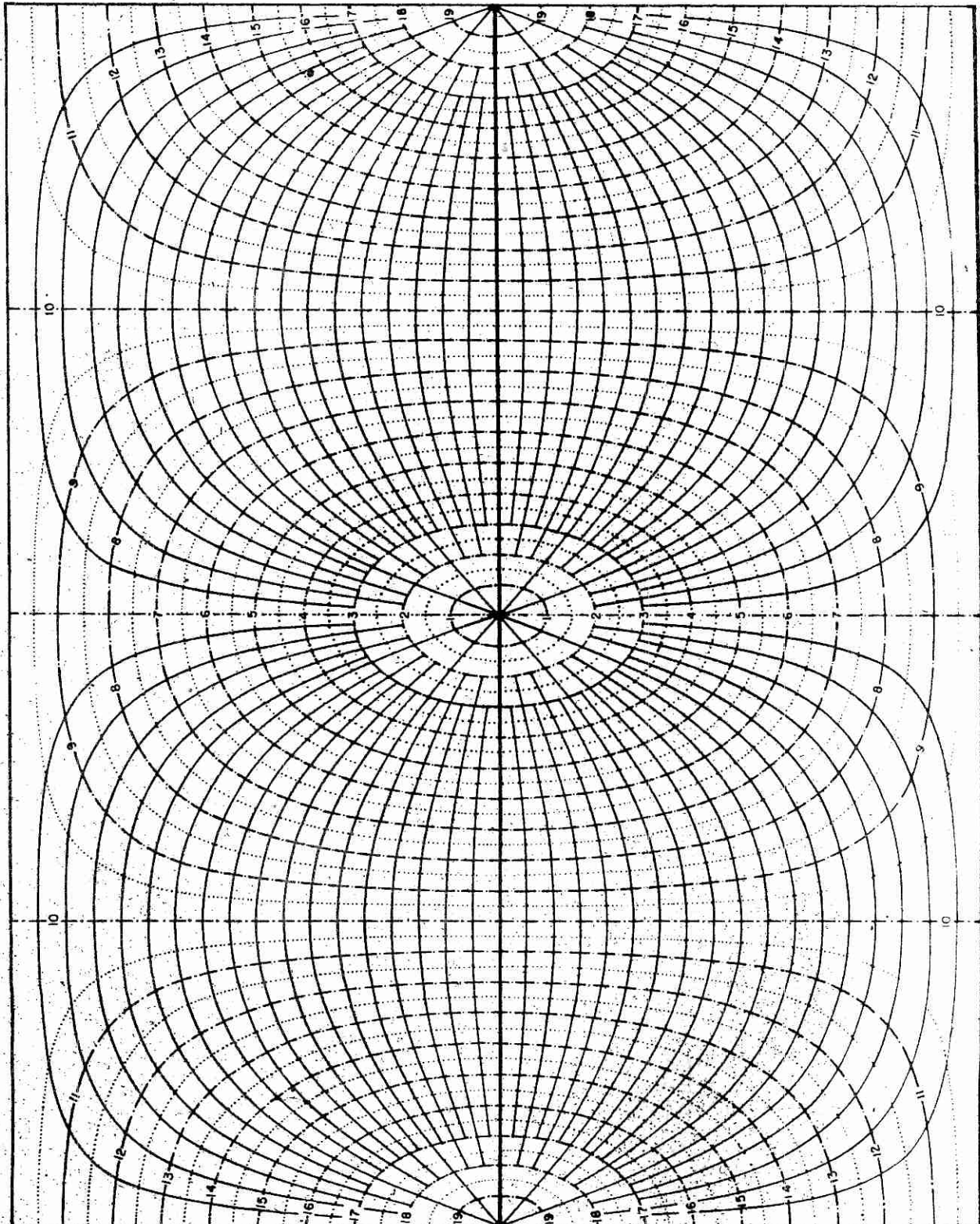


Fig. 2- CARTE DES GRANDS CERCLES/ CENTRE SUR L'EQUATEUR. LES TRAIT/ PLEIN/ REPRESENTENT LES GRANDS CERCLES/ LES COURBES/ EN TRAIT/ MIXTES/ NUMÉROTÉES/ DONNENT LES DISTANCES/ LE LONG DES GRANDS CERCLES/ EN MILLIERS/ DE KM.

dance entre l'heure locale au point de réflexion M et l'heure locale au point d'émission O (ou de réception R), on détermine, comme il a été dit au § 688 ci-dessus, les f.m.u. correspondants aux heures prévues pour le trafic (ou bien toutes les 2 heures de 0 à 24 heures). C'est la plus haute des f.m.u. E, f.m.u. F_1 et f.m.u. F_2 obtenues à chaque heure considérée, qui devra être retenue.

690 - Si la distance à franchir excède 4000 km, la méthode doit être modifiée comme suit :

1° : au lieu du point milieu M de l'arc de grand cercle OR, on détermine deux points caractéristiques N et N' situés sur le même grand cercle, symétriquement sur cet arc de grand cercle, par rapport à O et R (fig. 691).

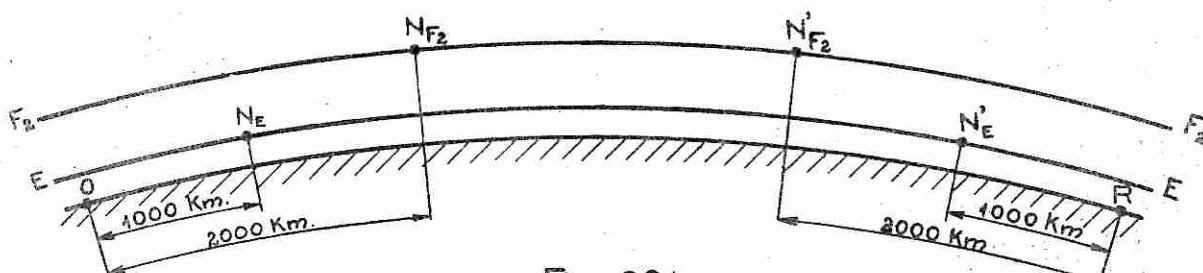


Fig. 691

Pour les calculs faisant intervenir la couche E, ces points sont pris à 1000 km de O et de R, pour la couche F₂ ces points sont pris à 2000 km de ces mêmes points O et R.

2° : Au moyen des cartes de f.m.u. E-2000 et f.m.u. F₂-4000, on détermine les f.m.u. aux points N_E, N'_E et N_{F₂} et N'_{F₂}, aux différentes heures prévues pour le trafic, comme si

la réflexion avait lieu en N_E ou N'_E pour la couche E ou en N_{F₂} ou N'_{F₂} pour la couche F₂. On note pour chacune des heures de trafic la plus haute des deux valeurs ainsi trouvées, soit f.m.u. - N cette

valeur.

3° : Recommencer l'opération avec les points N'_E et N'_{F_2} comme il a été fait pour N_E et N_{F_2} . Soit $f.m.u - N'$, la plus haute des deux valeurs trouvées.

4° : La $f.m.u.$ à retenir, et pour chaque heure, pour le trafic est la plus basse des deux valeurs $f.m.u - N$ et $f.m.u - N'$ trouvées ci-dessus pour cette même heure.

691 - Pour les longs parcours, il y a lieu de tenir compte de ce fait que la communication ne se fait pas nécessairement

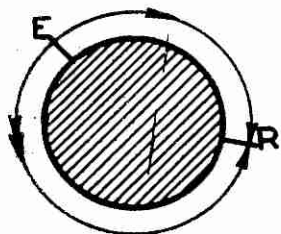


Fig. 692

suisant l'arc de grand cercle le plus petit, mais qu'elle peut aussi s'établir par le plus long (fig. 692). Il y a donc lieu de faire également le calcul des $f.m.u$ (comme il a été dit au § 691 ci-dessus), pour les "points caractéristiques" situés sur ce nouvel arc de grand cercle.

Prédictions des $f.m.u.$ plusieurs mois à l'avance.

692 - Les bureaux ionosphériques mondiaux publient, régulièrement, des cartes donnant, plusieurs mois à l'avance, les valeurs moyennes mensuelles prévues pour les $f.m.u.$ sur les couches E , F_1 et F_2 dans les zones E, I et W.

Ces prédictions sont établies en combinant l'étude des moyennes mensuelles relevées pendant les divers mois d'un cycle de 11 ans, avec les observations récentes fournies par un nombre aussi grand que possible de stations de sondage réparties à travers le monde.

Variations des f.m.u. autour des moyennes mensuelles.

692 - Même si l'on ne considère que les journées calmes, exemptes des perturbations ionosphériques dont il a été question au § 596 ci-dessus, les fréquences maxima utilisables ne sont pas exactement les mêmes un jour après l'autre. Elles se distribuent de part et d'autre des valeurs moyennes mensuelles dont il a été question précédemment; ces variations journalières sont imprévisibles, mais il est possible d'indiquer l'ordre de grandeur des écarts à prévoir. On sait par exemple que les écarts sont plus faibles pour f_E^o que pour f_{F1}^o , f_{F1}^x , f_{F2}^o et f_{F2}^x et que les déviations des fréquences critiques f_{F2}^o et f_{F2}^x sont généralement les plus importantes à l'époque de l'équinoxe de printemps. Ces variations sont aussi plus grandes, le matin et le soir, aux moments où la courbe de la variation journalière de la fréquence critique considérée présente la pente la plus grande (voir fig. 663). Les variations des fréquences critiques entraînent celles des f.m.u., mais celles-ci sont encore aggravées par la suite des variations des hauteurs virtuelles, lesquelles interviennent dans la détermination des f.m.u.

En général, ces variations des f.m.u. sont de l'ordre de quelques centièmes pour la couche E, mais elles peuvent atteindre 5% pour la couche F_2 .

Fréquence optimum de trafic. (f.o.t.).

693 - Pour se prémunir contre les inconvénients qui peuvent résulter des variations de la f.m.u. dont on vient de parler (§ 692) il est indispensable de ménager une marge de sécurité entre la fréquence adoptée pour le trafic et les f.m.u. moyennes calculées. La nouvelle fréquence ainsi obtenue est, par définition, la fréquence optimum de trafic (f.o.t., en abrégé).

Alors qu'il suffit de diminuer la f.m.u. E. de 3% ou même moins, la diminution à apporter est de 15% pour les radiocommunications utilisant la couche F_2 .

Fréquences minima utilisables.

694 - En utilisant des fréquences inférieures aux f.m.u. précédemment calculées, on se prémunit contre les variations accidentelles de ces f.m.u., mais en même temps, on diminue le champ reçu au récepteur, parce que l'absorption des ondes augmente quand la fréquence diminue. Il convient donc de réserver le plus possible les fréquences de travail des f.m.u. véritables.

La fréquence minima utilisable dépend principalement :

- 1° : de la puissance rayonnée par l'antenne d'émission,
- 2° : des pertes dues à l'absorption des ondes dans l'ionosphère,
- 3° : des propriétés directives de l'antenne d'émission (voir §§ 241 à 410 ci-dessus) en azimut et en site.
- 4° : du niveau de bruit à la réception.
- 5° : de l'entraînement de l'opérateur de réception.
- 6° : du type de service exécuté (téléphonie, télégraphie imprimée, télégraphie au son, radiogoniométrie ou radioquidage, etc ...).

Ayant calculé le champ en microvolts par mètre à la réception, on le compare avec le champ minimum nécessaire.

Affaiblissement des ondes ionosphériques.

Détermination du champ reçu.

700 - En traversant les régions non ionisées de l'atmosphère, les ondes s'affaiblissent proportionnellement à la distance. En d'autres termes, le champ varie comme $\frac{1}{r}$. On a vu, en effet,

au § 277 ci-dessus que le champ électrique produit à la distance r par un dipôle vertical au contact du sol et rayonnant une puissance de P kilowatts avait pour amplitude, en millivolts par mètre :

$$E_{\text{eff}} = 300 \frac{\sqrt{P}}{r} \sin \theta ,$$

θ étant la colatitude de la direction du faisceau considéré .

Dans la réalité, le champ est un peu plus faible parce que le sol n'est pas parfaitement conducteur .

Pour les directions voisines de l'horizontale (θ voisin de $\frac{\pi}{2}$), le champ E est constitué pour une partie par l'onde de surface, laquelle n'atteint pas l'ionosphère, en sorte que le diagramme de directivité (dans le plan vertical) à utiliser pour les calculs relatifs aux ondes ionosphériques est différent du diagramme mesuré à petite distance de l'émetteur (1 km par exemple) .

Pour obtenir le champ de l'onde ionosphérique, on peut, en première approximation, multiplier le champ qui serait produit au-dessus d'un sol parfaitement conducteur, par le coefficient : $\frac{1+\tau}{2}$, où τ est le coefficient de réflexion défini au § 139 ci-dessus .

Fluctuation du champ reçu . Fading des ondes ionosphériques .

701 - Par suite de la constitution déjà complexe des couches régulières de l'ionosphère (hauteurs différentes, degrés d'ionisation différents et variables d'un point à un autre) sans compter les irrégularités qui ont déjà été signalées et qui seront étudiées en détail aux §§ 730 et suivants, les ondes émises par un émetteur O sont susceptibles d'emprunter simultanément des trajets différents pour parvenir en un point de réception donné R .

On notera que, parmi les diverses composantes qui

arrivent en R, peut évidemment figurer l'onde de sol (onde directe, onde réfléchiée par le sol et onde de surface qui ont été étudiées aux §§ 501 à 561 de ce chapitre).

Les trajets suivis par les diverses ondes qui atteignent le récepteur R ont, dans le cas général, des longueurs différentes qui, au surplus, varient avec le temps. Leurs champs électriques respectifs présentent des différences de phase considérables (par exemple des milliers de fois 2π), différences de phases qui varient avec le temps. Par ailleurs, ces divers champs composants ont des polarisations différentes. Le champ qui agit sur le récepteur est la résultante de ces diverses composantes, compte tenu, le cas échéant, de la directivité de l'antenne de réception, dans le plan vertical. Son amplitude sera donc variable plus ou moins profondément et plus ou moins rapidement, selon les amplitudes relatives des diverses composantes.

Ce phénomène est connu sous le nom de fading (de l'anglais *to fade* : s'évanouir), car les variations d'amplitude peuvent naturellement aller jusqu'à la disparition de la réception.

Une cause importante de fading réside dans la superposition de l'onde de surface et de l'onde ionosphérique, quand cette circonstance se rencontre.

Le fading sera d'ailleurs, en général, différent pour les diverses fréquences composant le spectre des signaux transmis. Une déformation des signaux s'ajoutera donc à ses variations d'amplitude. Ce type de fading, qui altère les signaux et peut rendre la téléphonie totalement incompréhensible s'appelle le "fading sélectif".

702 - Les données qui vont suivre ont été établies dans l'hypothèse d'antennes d'émission ayant les caractéristiques suivantes :

- 1° : pour les distances supérieures à 800 km (correspondant à des directions de rayonnement faisant avec l'horizontale un angle δ inférieur ou égal à 40°) : antenne verticale de faible longueur vis-à-vis de la longueur d'onde, rayonnant une puissance de 1 kw.
- 2° : Pour les distances de l'ordre de grandeur de 160 km ou moins (correspondant à une direction de rayonnement faisant avec l'horizontale un angle supérieur ou égal à 60°) : antenne demi-onde (voir Chap. VIII. §) située à un quart de longueur d'onde au-dessus du sol.
- 3° : Pour les directions de rayonnement comprises entre 40° et 60° , le champ est interpolé entre les deux cas précédents.

Champ en l'absence d'absorption ionosphérique.

703 - C'est le champ qui serait celui de l'onde ionosphérique si celle-ci n'avait pas subi l'affaiblissement dû à l'ionisation des couches traversées.

Ce champ est déjà inférieur à celui qui résulte des formules du § 700 (loi de l'inverse de la distance), pour les deux raisons suivantes :

- 1° : rupture de l'homogénéité de l'onde transmise d'où résulte du fading et une amplitude moyenne inférieure à celle de l'onde homogène initiale (voir § 701 ci-dessus)
- 2° : perte d'énergie à l'occasion des réflexions sur le sol dans les transmissions par bonds multiples (fig. 684).

La fig. 703 donne les valeurs de ce champ E_{eff} en l'absence d'absorption ionosphérique, en fonction de la distance, pour une puissance de 1 Kw rayonnée par les antennes spécifiées au § 602 ci-dessus.

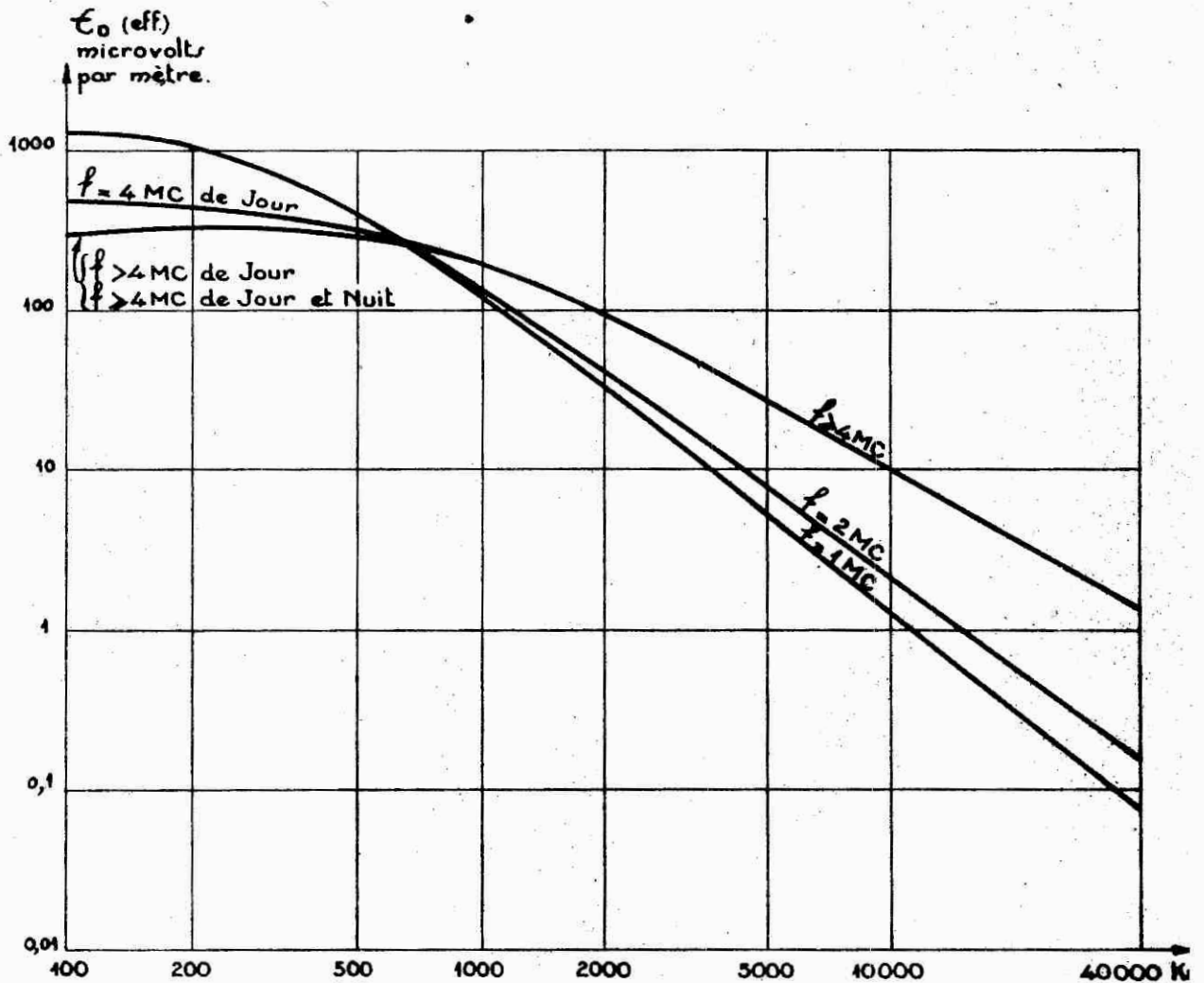


Fig. 703

Absorption dans l'ionosphère .

704 - On a vu au § 641, des expressions de la constante d'affaiblissement α des ondes en milieu ionisé, ne tenant pas compte du champ magnétique terrestre.

Dans la réalité, la présence de ce champ complique très sérieusement la question. En général le rayon extraordinaire est plus fortement absorbé que le rayon ordinaire, spécialement au voisinage de la gyrofréquence (§ 632). Au voisinage de la fréquence critique du rayon ordinaire, c'est le contraire. La proportionnalité à l'inverse du carré de la fréquence est aussi modifiée, spécialement aux fréquences les plus basses.

La fig. 704 donne, à titre d'exemple, en fonction de la fréquence, les variations du coefficient d'absorption à la verticale (rapport du champ incident au champ réfléchi), pour le rayon ordinaire, en Janvier 1942 à midi à Washington. Ces variations sont exprimées en décibels, eux-mêmes portés sur une échelle logarithmique, ce qui revient à dire que les ordonnées sont proportionnelles au logarithme du logarithme du rapport des champs précités ($\log \log \frac{E_1}{E_2}$).

On observe un premier maximum au voisinage de la gyrofréquence, puis deux remontées brusques correspondant aux fréquences critiques de la couche E et de la couche F₂.

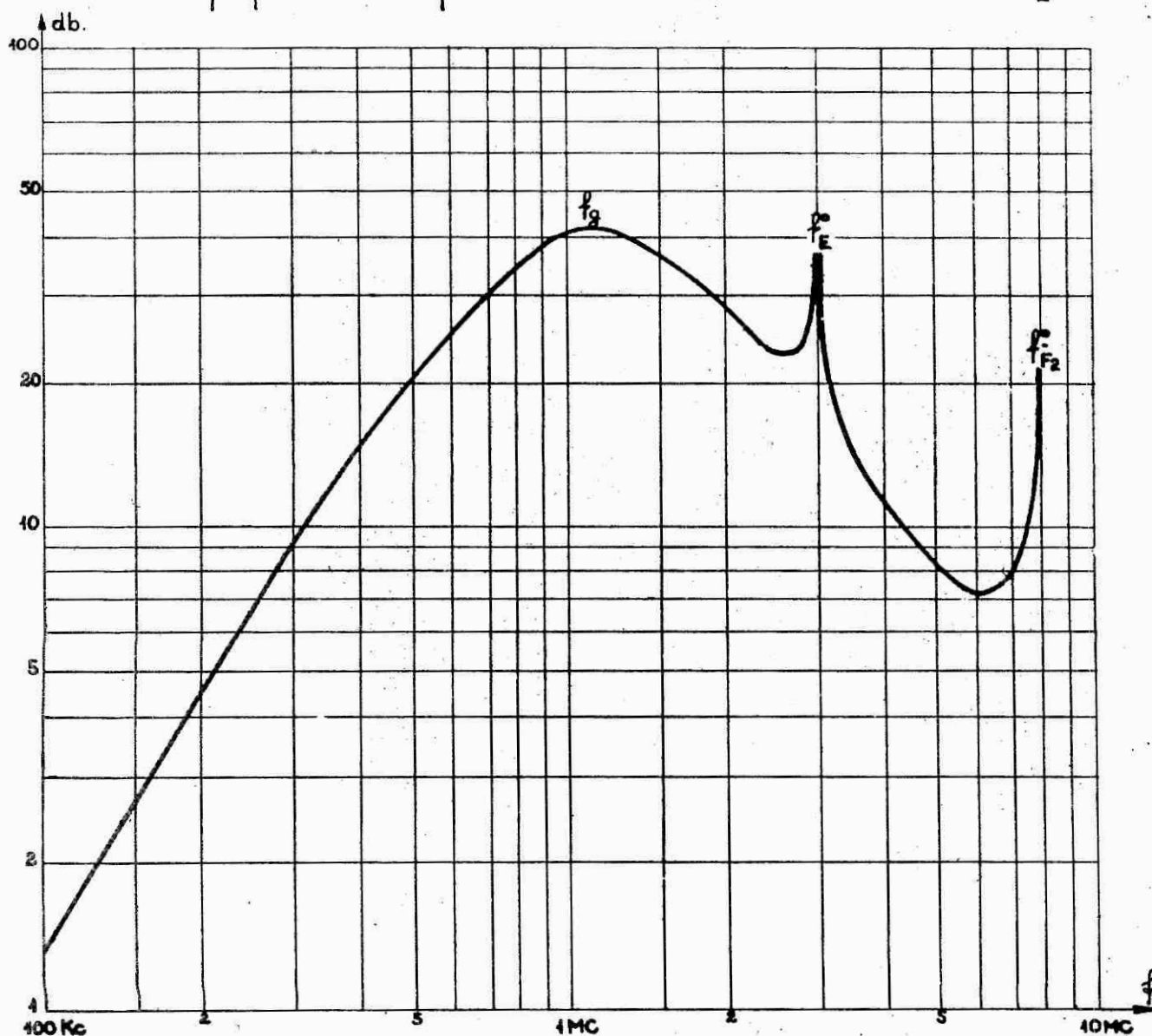


Fig. 704

705 - Pendant les heures de nuit, en dehors de la zone des aurores boréales, lorsque la couche $F = F_2$ est la seule à présenter une ionisation importante, l'absorption dans l'ionosphère est négligeable, pour la plupart des fréquences supérieures à 2 ou 3 mégacycles. Cela tient à la petitesse de la fréquence ν des collisions, à l'altitude de la couche F_2 . Il y a seulement une légère absorption pour les fréquences voisines de la f.m.u., à cause de l'allongement des trajets dans la couche ionisée. Cet allongement correspond à la déviation du trajet suivi par les ondes d'où le nom d'absorption de déviation donné à cette absorption. Comme les fréquences critiques pour le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire sont légèrement différentes, les maxima d'absorption de déviation se présentent pour des fréquences légèrement différentes, et ceci explique pourquoi, le rayon extraordinaire étant le plus susceptible d'absorption, la situation se trouve cependant renversée pour les fréquences voisines de la fréquence critique (ou la fréquence maximum utilisable) pour le rayon ordinaire.

706 - De jour, il y a un affaiblissement dû à l'absorption de déviation pour les fréquences voisines de la f.m.u. de chacune des couches traversées.

Cependant la plus grande perte d'énergie se produit dans la couche D (§ 594) où la fréquence ν des collisions entre les électrons et les molécules gazeuses est considérablement plus élevée que pour les autres couches (voir § 582). Ce type d'absorption n'est pas accompagné de déviation des ondes intéressées.

L'ionisation de la couche D, due principalement au rayonnement du soleil, se produit à une altitude où la recombinaison des ions est très rapide. C'est pourquoi, en pratique cette ionisation varie comme l'intensité de la lumière solaire incidente. Elle est maximum à midi et à peu près proportionnelle au cosinus de l'angle d'incidence des rayons solaires sur le globe terrestre.

(pour plus de précisions voir § 710)

Détermination du coefficient d'absorption de l'ionosphère

707 - On désigne ainsi le logarithme décimal du rapport de l'amplitude du champ qui atteint l'ionosphère à l'amplitude de celui qui est réfléchi par elle.

Ce coefficient varie d'une façon régulière avec le temps, selon le jour, la saison et l'époque dans le cycle solaire de 11 ans. Il varie aussi avec le degré orageux de l'ionosphère.

Enfin, il dépend de la fréquence, de la distance, de la position géographique et de l'angle d'incidence des ondes sur l'ionosphère.

Deux méthodes peuvent être employées pour mesurer ce coefficient :

- ou bien mesurer les amplitudes au départ et au retour des impulsions déjà employées pour mesurer les hauteurs virtuelles et les fréquences critiques (§ 657).

- ou bien enregistrer l'amplitude au champ à la réception d'émetteurs effectuant un trafic continu et, connaissant les conditions de la propagation, en déduire (par un processus inverse de celui qui sera décrit ci-après (§ 708)) le coefficient d'absorption qui intervient

708 - L'analyse de nombreux enregistrements de champs à la réception (voir § 707 ci-dessus) a conduit aux conclusions suivantes :

L'absorption sur un parcours donné peut être exprimée par la relation :

$$\epsilon = \epsilon_0 \times 10^{-\frac{1}{2} S}$$

ϵ est la valeur médiane (1) du champ reçu, ϵ_0 est celle du champ en l'absence d'absorption ionosphérique (§ 703). De nuit pour les fréquences supérieures ou égales à 4 Mégacycles, ce champ est pratiquement égal à la valeur de ϵ).

La relation précédente peut s'écrire :

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 10^{-\frac{S}{2}}$$

ou bien

$$\log_{10} \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = -\frac{S}{2}$$

$$2 \log_{10} \frac{\epsilon_0}{\epsilon} = S ,$$

ce qui montre que S est tout simplement, mesuré en Bel (voir Chap. I_a - § 65), l'affaiblissement du champ ϵ par rapport au champ ϵ_0 . Il sera commode, par la suite, d'exprimer les champs ϵ et ϵ_0 en décibels à partir d'un certain champ de référence, par exemple 1 microvolt par mètre. On aura alors la relation :

$$\epsilon^{db} = \epsilon_0^{db} - 10 S .$$

709 - Dans le cas général, la constante S est donnée par le produit de 3 facteurs :

- la constante d'absorption solaire zénithale S_0 .
- l'indice d'absorption K
- la distance d ,

$$S = S_0 K d .$$

710 - L'indice d'absorption K dépend de l'élévation du soleil au-dessus de l'horizon, il est maximum à midi pour

(1) On appelle ainsi la valeur du champ atteinte pendant un temps égal à 50% du temps total.

une latitude donnée, et atteint l'unité lorsque le soleil est au zénith. Il décroît ensuite quand la hauteur ψ du soleil ^{diminue} pour s'annuler lorsque le soleil se trouve à 9° ou 10° au-dessous de l'horizon.

Ce coefficient est donné par la relation empirique ci-après :

$$K = 0,142 + 0,858 \cos \psi \quad \text{pour } \psi \leq 99,5$$

$$K = 0 \quad \text{pour } \psi > 99,5,$$

qui n'est cependant pas valable pour la zone des aurores boréales (§ 721).

Ses fig. 707 à 709 représentent, à titre d'exemple, des cartes des indices d'absorption pour les mois de Juin, Septembre et Décembre, respectivement.

711 - La constante d'absorption solaire zénithale S_0 est égale à la constante d'absorption vraie S , lorsque l'on a $d = 1$ et $K = 1$. C'est donc, par définition, le rapport exprimé en Bels des champs électriques incidents et réfléchis mesurés à une distance égale à l'unité de longueur au voisinage du point où le soleil est au zénith.

Dans les développements qui suivent, et en particulier dans la fig. 710 qui donne les valeurs de S_0 en fonction de la fréquence, cette unité a été choisie égale à 1000 km.

On a donc finalement :

$$\epsilon^{db} = \epsilon_0^{db} - 10 S_0 K d$$

ϵ_0^{db} étant le champ en l'absence d'absorption ionosphérique (§ 703), exprimé en décibels, et d la distance exprimée en milliers de kilomètres.

Pour un émetteur rayonnant p décibels (par rapport à kilowatt) la formule devient :

$$\epsilon^{db} = \epsilon_0^{db} - 10 S_0 K d + p^{db}$$

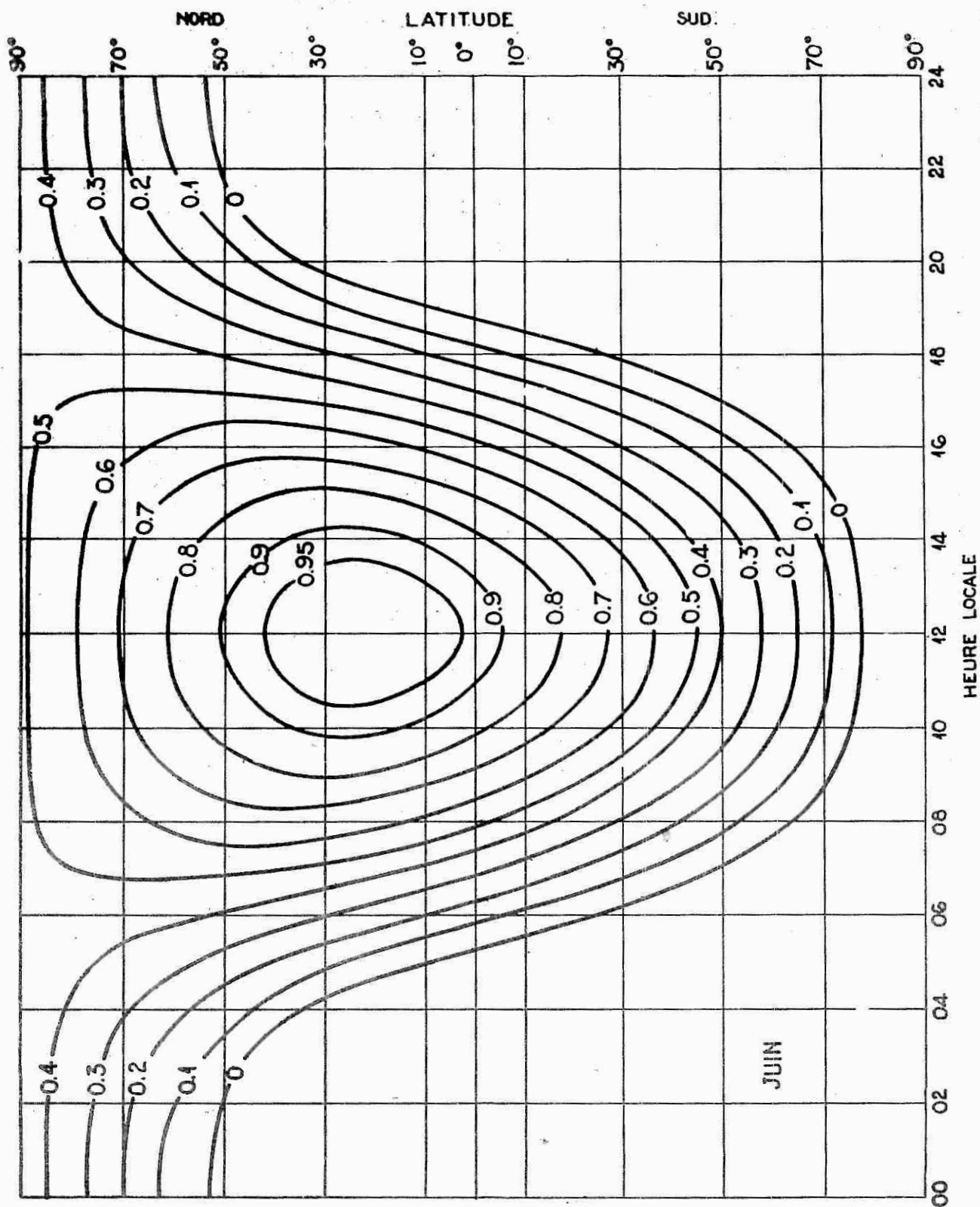


Fig. 707

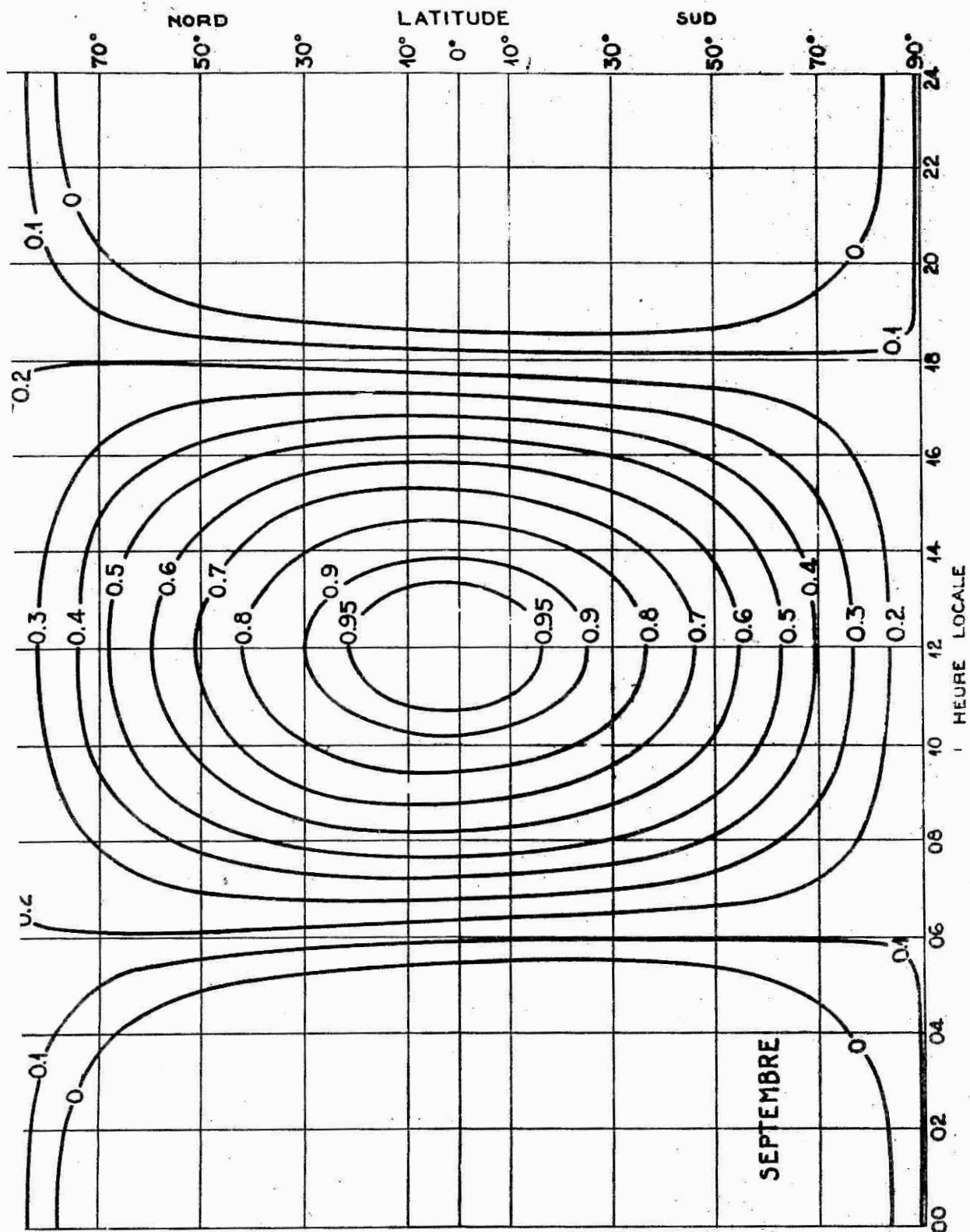


Fig. 708

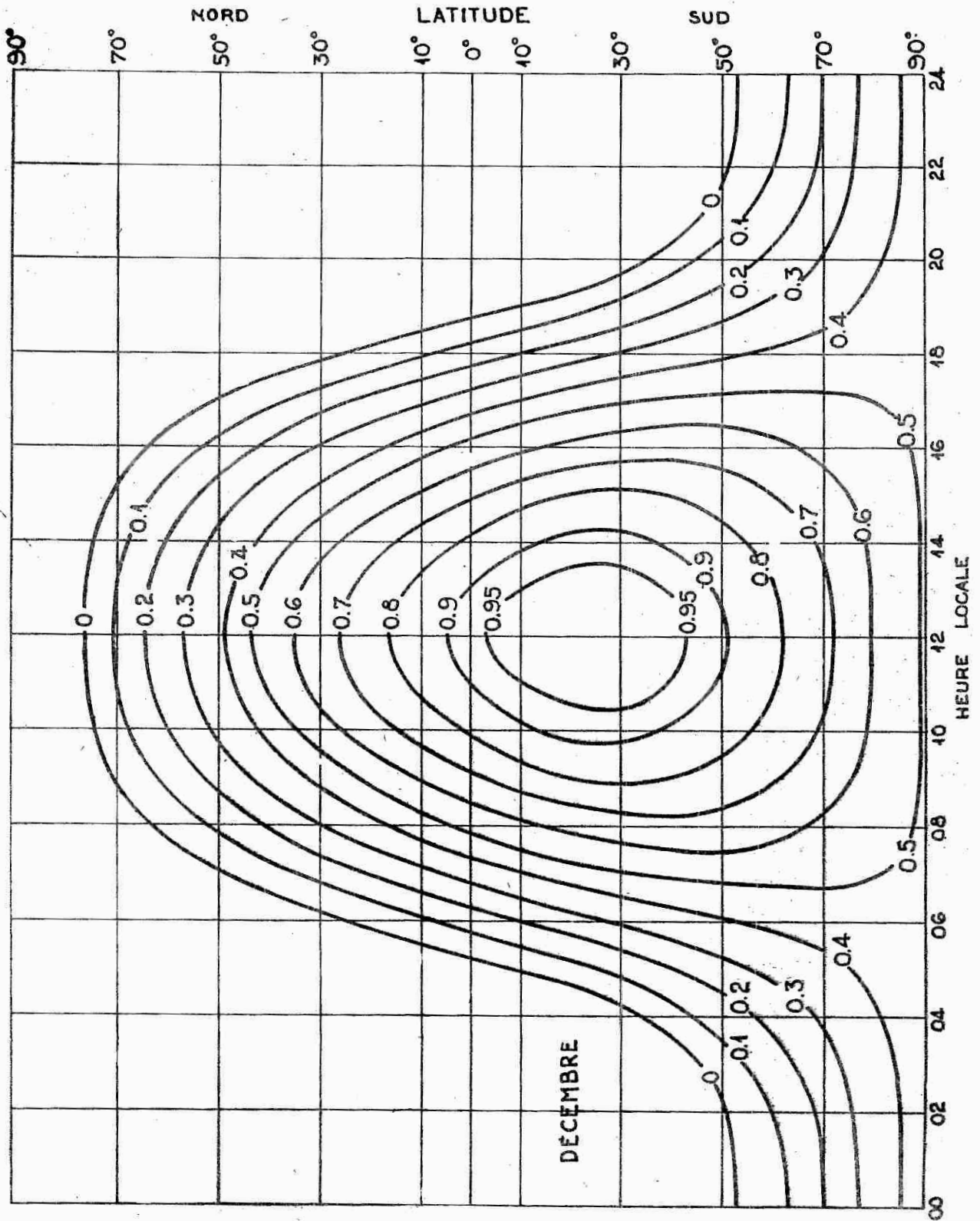


Fig. 709

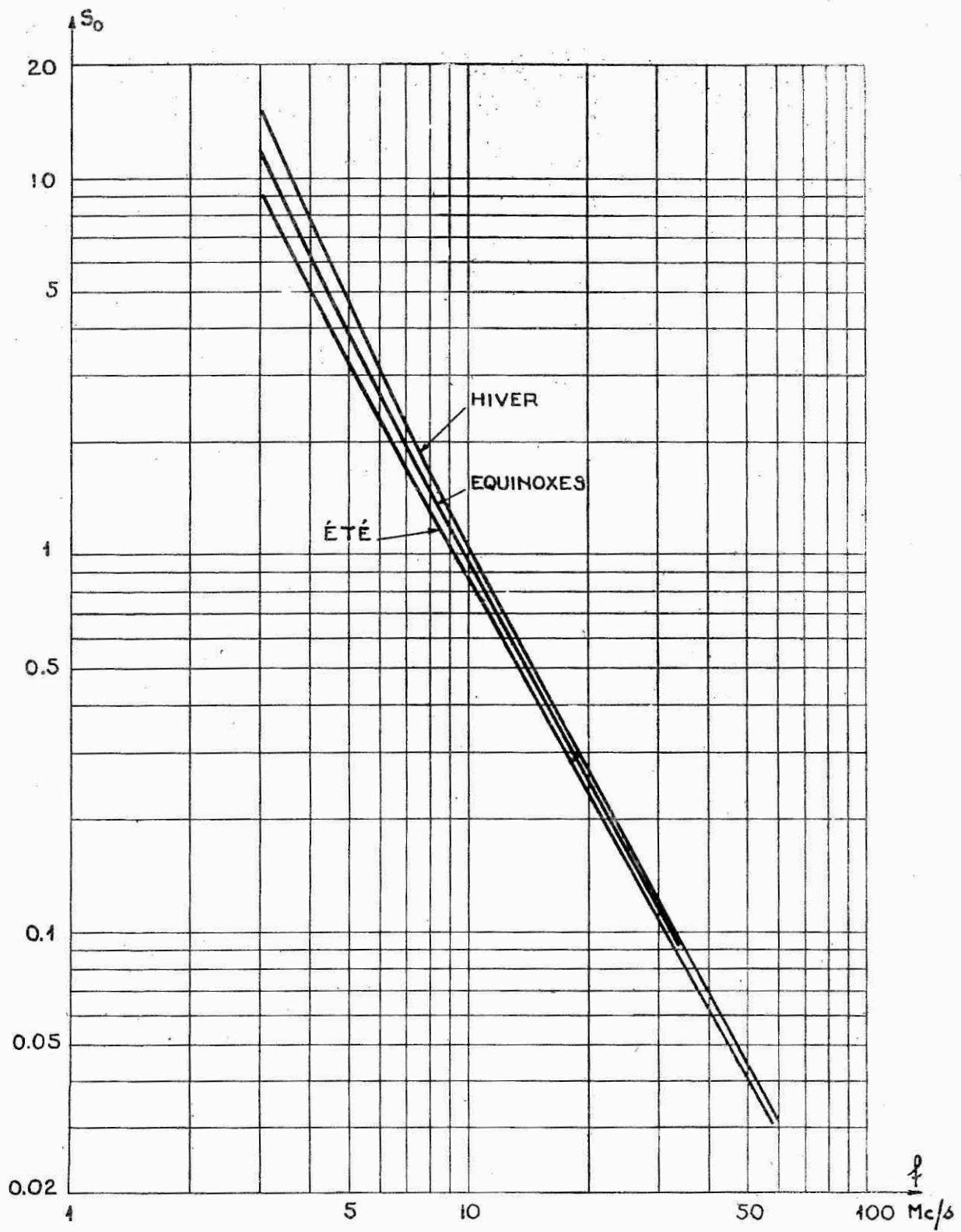


Fig. 710

712 - Si la distance entre l'émetteur et le récepteur excède 800 kilomètres, il faut prendre pour indice d'absorption, l'indice moyen $\bar{K}$ le long du parcours, et écrire :

$$\epsilon^{db} = \epsilon_0^{db} - 10 S_0 \bar{K} d + \mu^{db}.$$

L'indice moyen d'absorption $\bar{K}$ se détermine en fonction des indices K_1 et K_2 aux deux extrémités du parcours (l'un des deux indices, ou les deux à la fois, pouvant être nuls, si les extrémités du parcours tombent dans la région extérieure à la courbe $K=0$ des fig. 707 à 709). Il est donné par la formule suivante : $\bar{K} = \left[0,142 + \frac{\text{tg } \frac{1}{2} D'}{D'} (K_1 + K_2 - 0,284) \right] \frac{D'}{d}$,

où D' représente une fraction du parcours d , la fraction qui emprunte des régions où l'indice K est différent de zéro.

Le produit $\bar{K} d$ peut d'ailleurs être obtenu par la formule :

$$\bar{K} d = 0,142 D' + \text{tg } \frac{D'}{2} (K_1 + K_2 - 0,284).$$

La fig. 711 reproduit un nomogramme permettant de trouver $\bar{K} d$ quand on connaît D' , K_1 et K_2 .

Comme pour la fréquence maxima utilisable (§ 686) le calcul doit être fait pour chacune des heures susceptibles d'être utilisées pour le trafic. Il doit aussi être refait pour les différents parcours possibles s'il en existe.

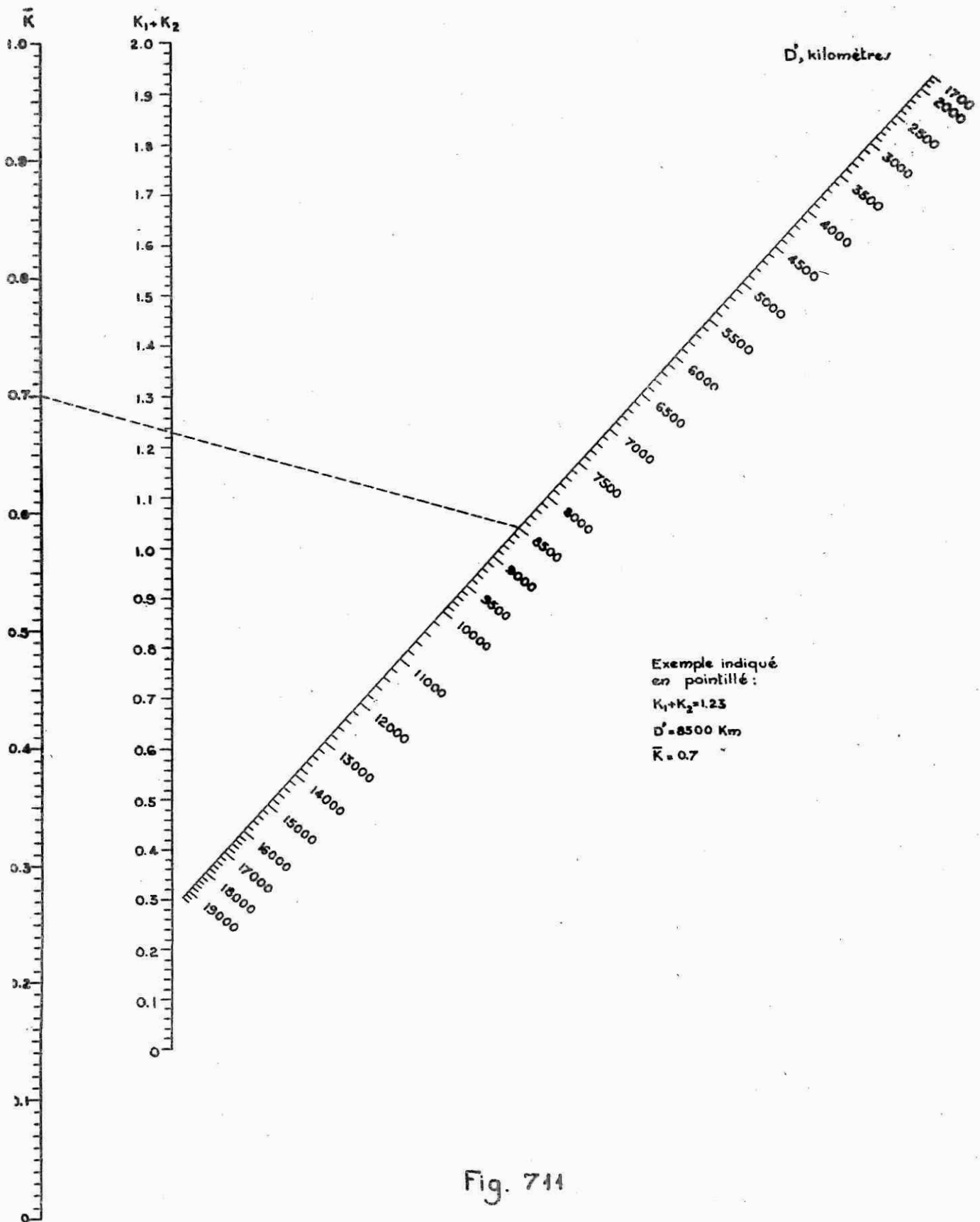


Fig. 744

Champs nécessaires à la réception.

713 - Pour que le signal reçu puisse être convenablement utilisé, il est nécessaire que le champ, au lieu de réception, soit supérieur à une certaine valeur. Cette valeur minima est désignée sous le nom de "champ minimum nécessaire" à la réception. Elle dépend de la sensibilité de l'appareillage de réception, de l'habileté des opérateurs et de l'importance des "bruits" susceptibles de couvrir les signaux (voir Chap. V - § 451), bruits qui sont de diverses sortes :

- bruit propre du récepteur.
- bruits ou parasites artificiels produits dans la station de réception ou à son voisinage.
- bruits ou parasites atmosphériques naturels.

714 - Le champ minimum nécessaire à la réception dépend naturellement du mode de transmission utilisé. Le tableau ci-dessous donne, par rapport au champ ϵ nécessaire pour une téléphonie commerciale, les champs ϵ nécessaires pour divers autres modes de transmissions :

Mode de Transmission.	Rapport ϵ/ϵ_1		Log ₁₀ ϵ/ϵ_1	
	Tout juste bon.	Parfaitement bon.	Tout juste bon.	Parfaitement bon.
Téléphonie commerciale.	1.0	6.0	0.0	0.8
Radiodiffusion.	1.6	13.0	0.2	1.1
Télégraphie (au son)	0.2	0.5	-0.7	-0.3
Télégraphie (automatique)	1.0	2.5	0.0	0.4
Télégraphie (imprimante)	1.5	4.5	0.2	0.6
Radiogoniométrie (au cadre)	13.0	10.0	1.1	1.6
Radiogoniométrie (moderne)	2.0	6.0	0.3	0.7
Transmission d'images.	1.0	2.5	0.0	0.4

Bruits (ou parasites) atmosphériques.

715 - L'étude des bruits atmosphériques dans le monde a montré que ceux-ci proviennent des orages. En un lieu donné, l'intensité du bruit est la résultante :

- 1° : des bruits provenant de "centres rapprochés" (orages à des distances comprises entre quelques kilomètres et quelques centaines de kilomètres).

- 2° : des bruits provenant d'un ou plusieurs "centres éloignés" et qui se sont propagés suivant les lois de la propagation des ondes radioélectriques. Ces centres se rencontrent dans les zones d'activité orageuse intense de l'Afrique équatoriale, de l'Amérique centrale et des Indes. Les emplacements et l'activité des différents centres varient avec les saisons.

Suivant l'intensité de l'activité orageuse, on a été amené à diviser la surface du globe en zones correspondant à 5 degrés différents. Ses fig. 713 et 714 donnent le tracé de ces zones pour les périodes s'étendant de Mai à Septembre et de Novembre à Mars, respectivement.

Les zones marquées 5 et 4 sont celles où les orages sont les plus fréquents (journaliers ou presque journaliers). La zone 1 est la zone la plus éloignée des centres orageux principaux, et dans laquelle on n'observe qu'un faible bruit atmosphérique, y compris celui qui provient des centres principaux, (après propagation ionosphérique à grande distance). Les zones 2 et 3 sont intermédiaires entre les précédentes.

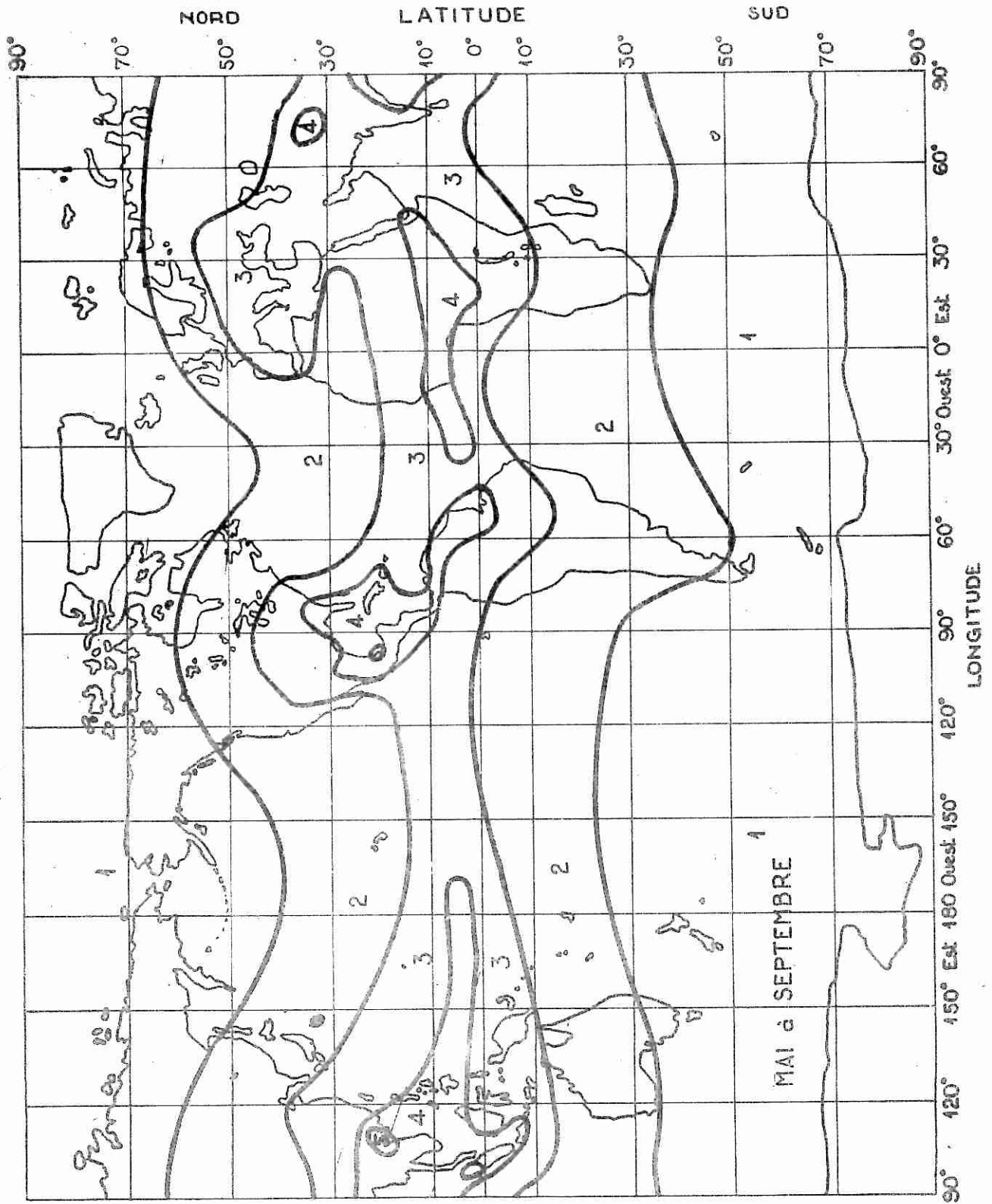


Fig. 713

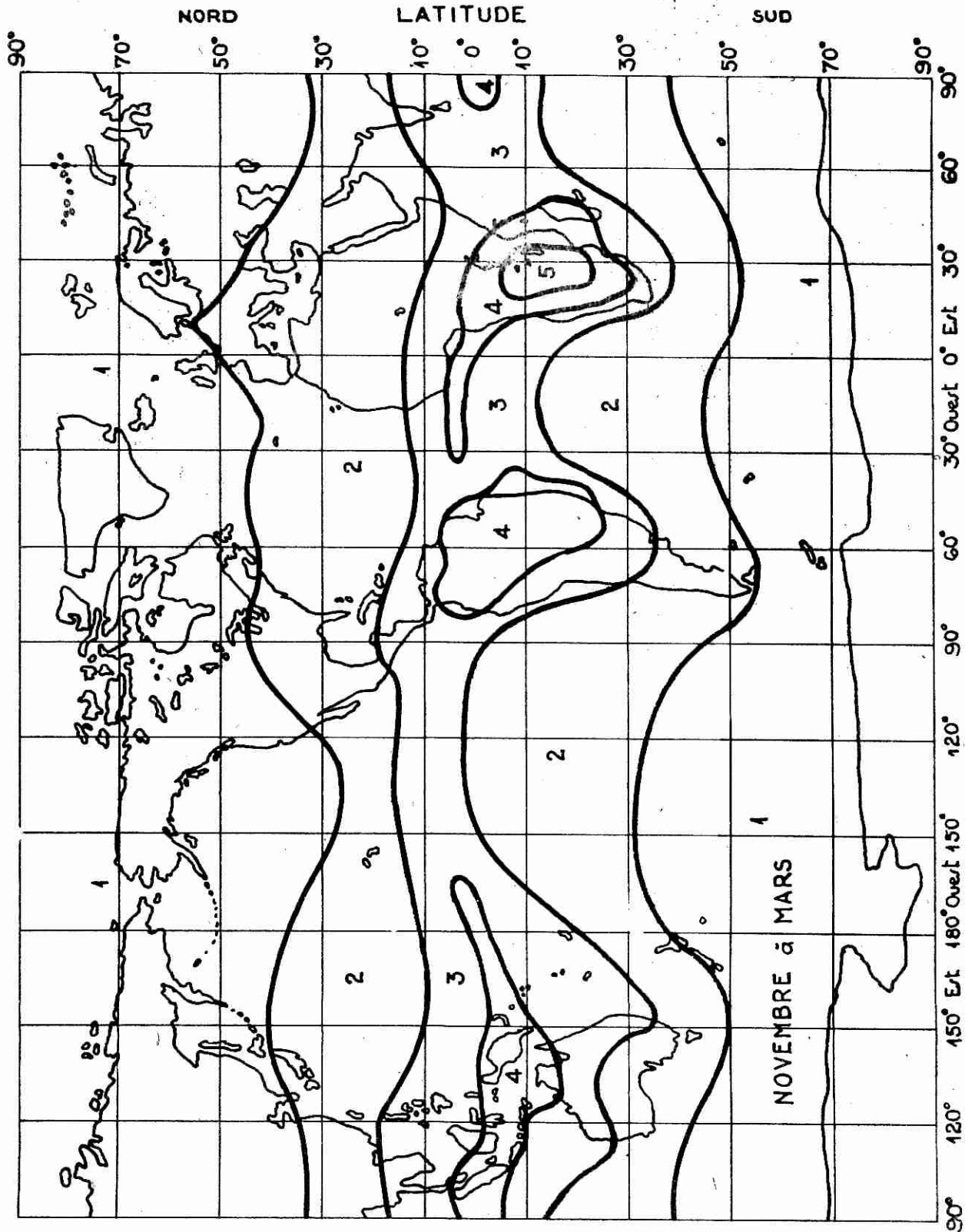


Fig. 714

Détermination des champs minima nécessaires .

716 - Pour chacune des 5 zones ainsi définies, les fig. 715 à 719, respectivement, représentent les courbes donnant, en fonction de la fréquence le "champ minimum indispensable" à diverses heures de la journée. Ces champs sont donnés pour une réception téléphonique; pour les autres types de transmission, il y a lieu d'appliquer les coefficients du § 574.

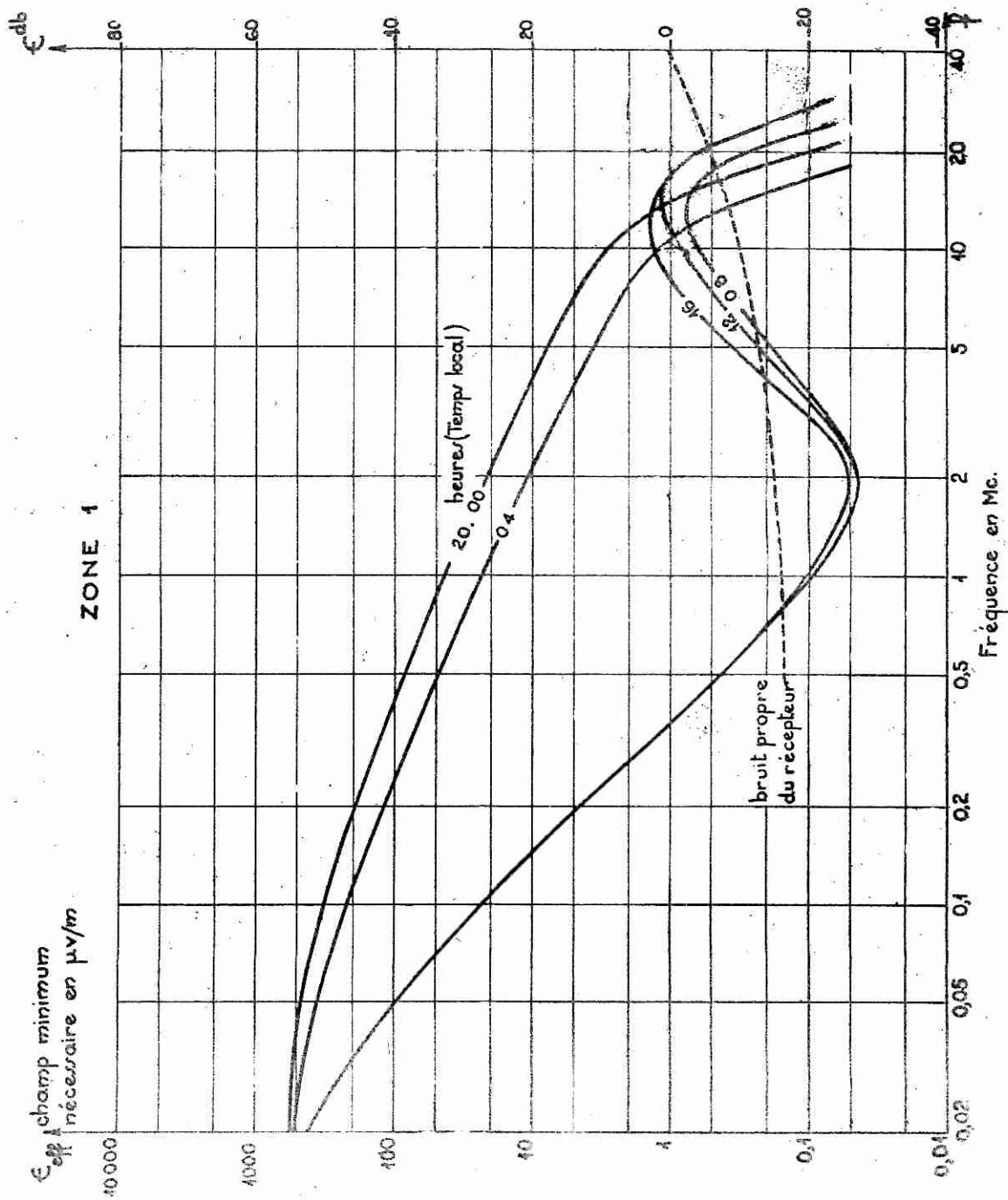
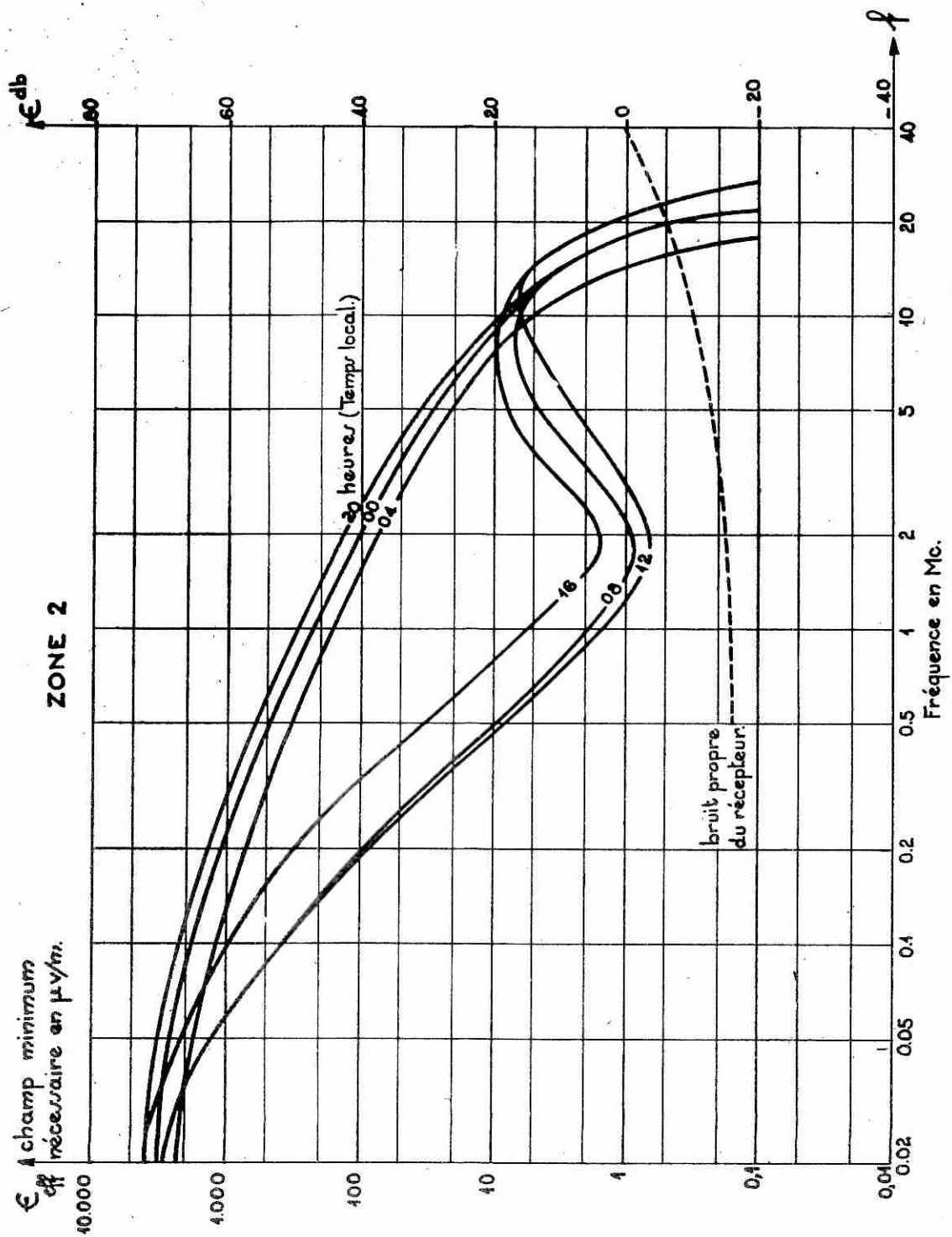
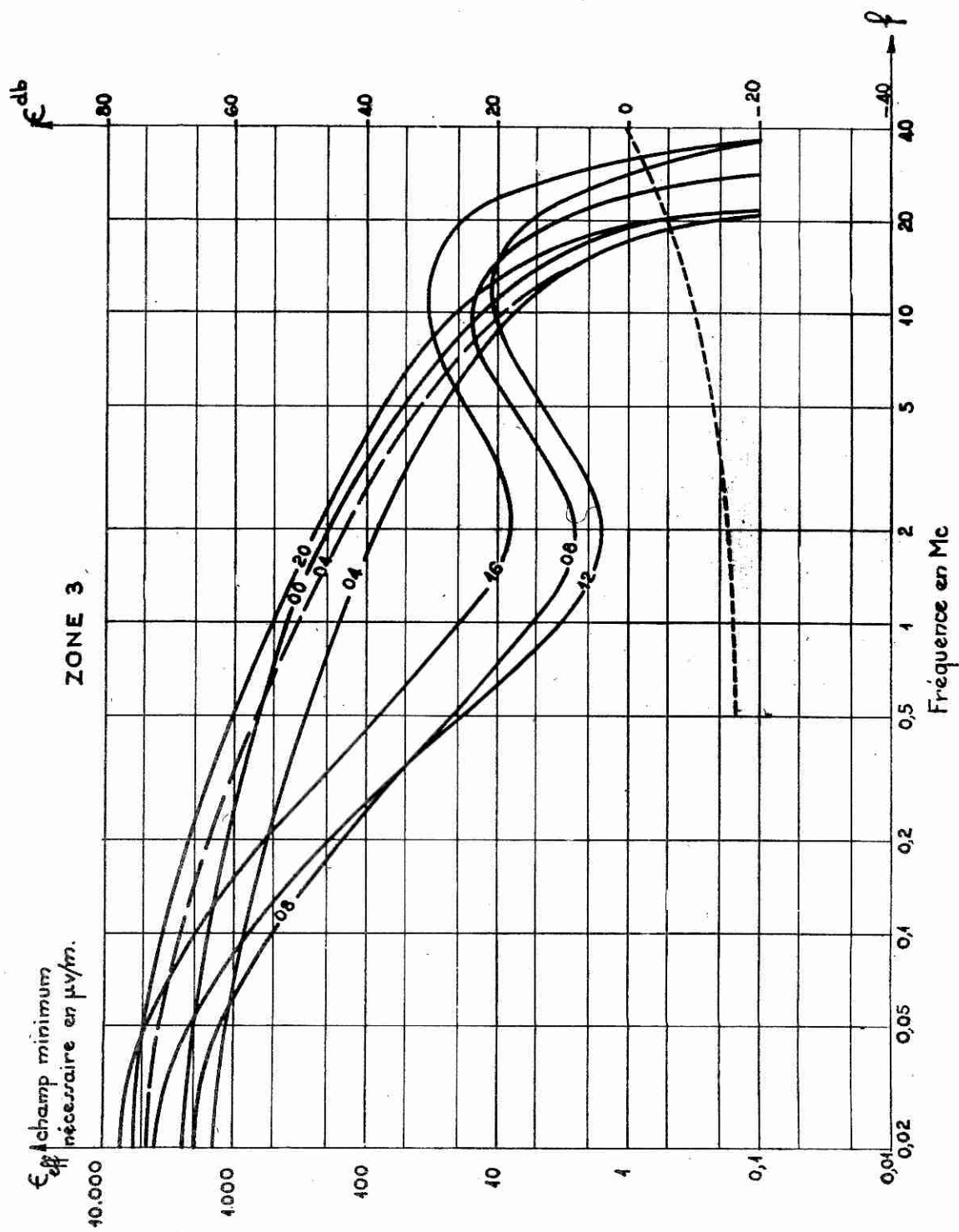


Fig. 715





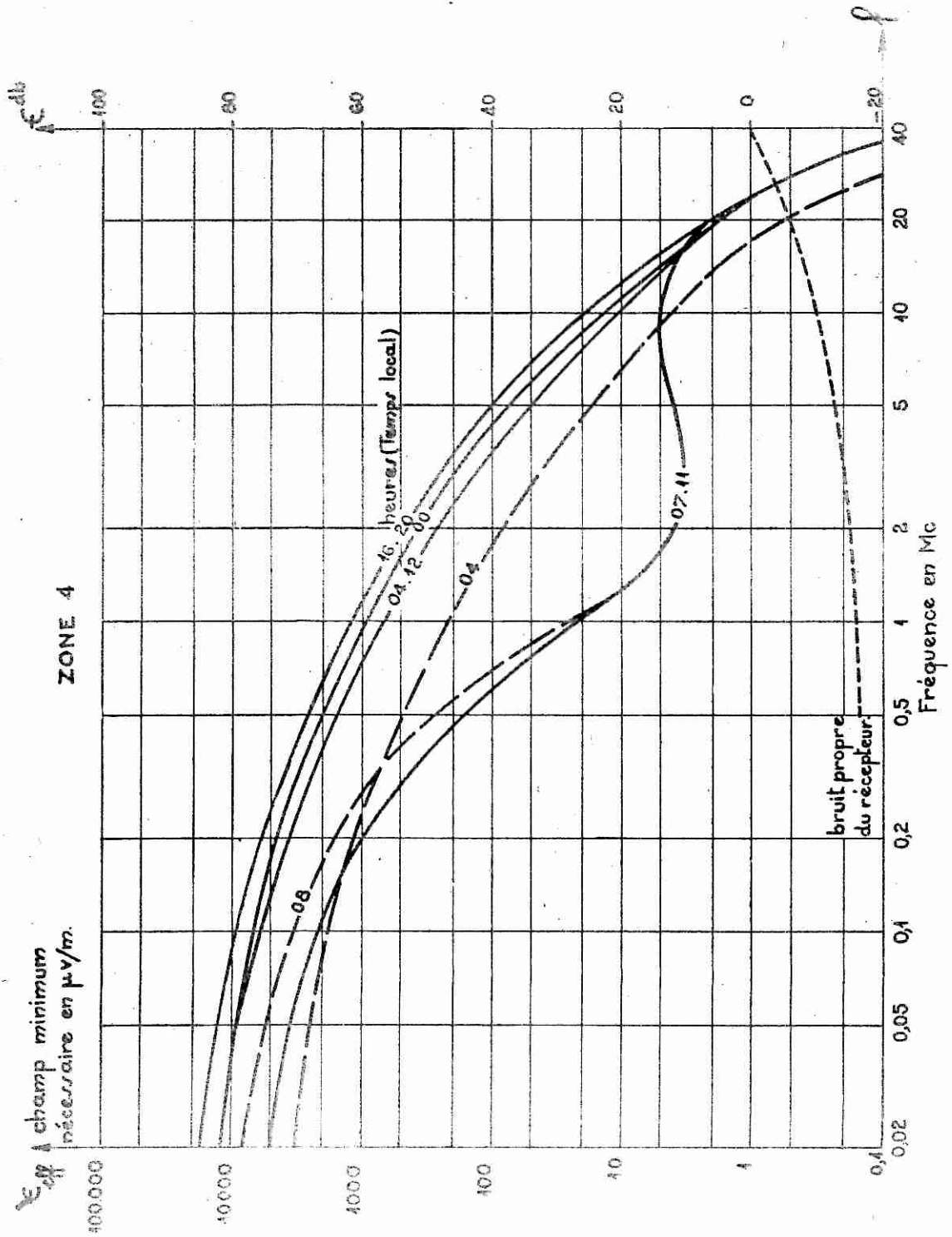


Fig. 718

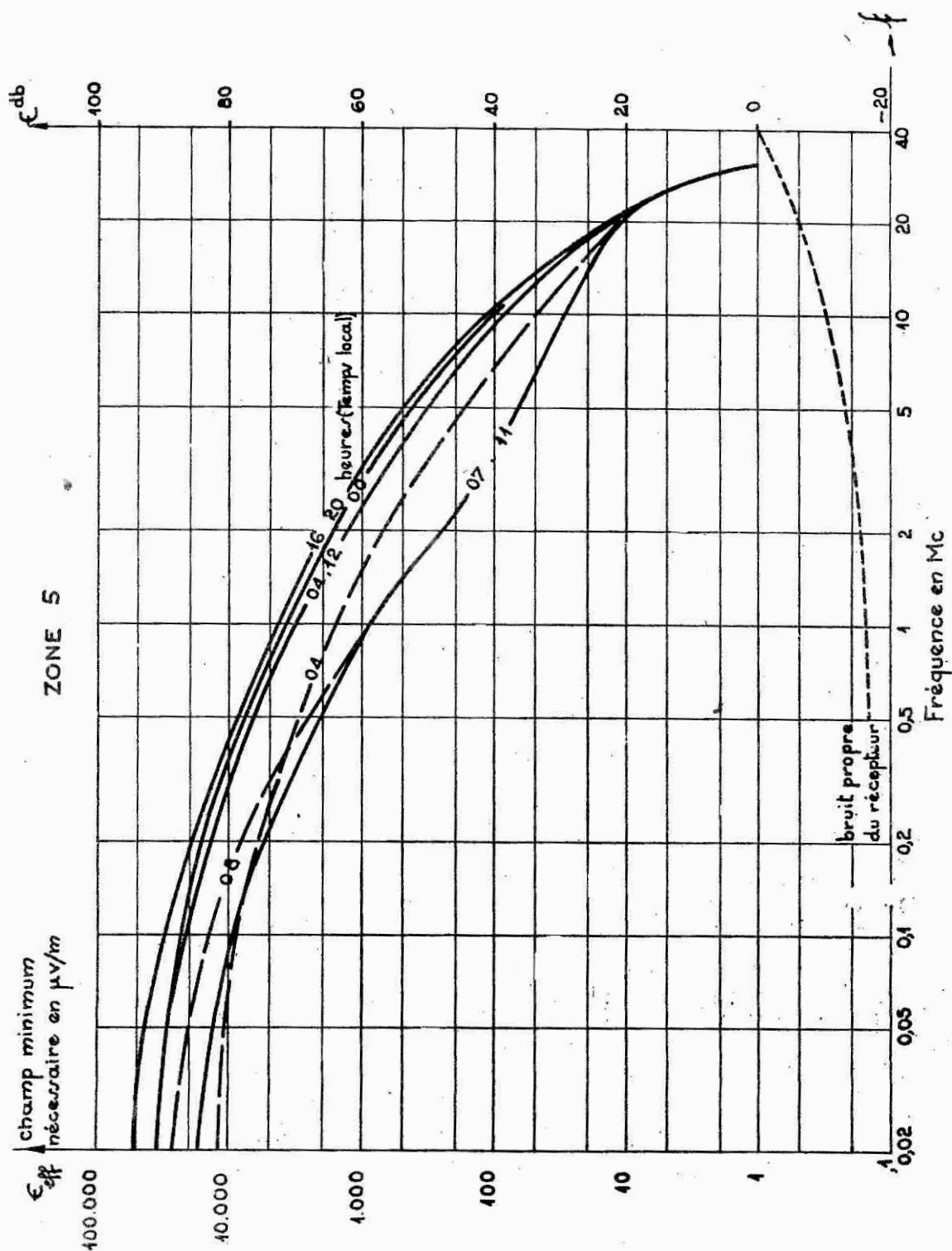


Fig. 719

Détermination des fréquences minima utilisables.

717 - Cette détermination se fait en calculant, pour diverses fréquences :

1^{re} : le champ réellement produit à la réception (§§ 694 et suivants) .

2^{re} : le champ minimum indispensable (§§ 713 et suivants) .

La fréquence pour laquelle ces deux champs sont égaux est la fréquence minima utilisable .

Trajets empruntant la zone des aurores boréales.

721 - Lorsque les ondes traversent des latitudes supérieures à environ 50° , elles peuvent rencontrer des régions où l'absorption est anormalement élevée . Le champ à la réception est alors très affaibli et présente des variations plus profondes et plus brutales que pour les autres trajets . Ce phénomène provient de caractéristiques particulières de la "zone des aurores", c'est-à-dire de la région où dominent les aurores boréales visibles . Dans cette zone, les orages ionosphériques se manifestent d'une façon à peu près permanente .

Contrairement à ce qui se passe dans la couche D (voir calcul du coefficient K de la formule $S = S_0 K d$ du § 710) l'absorption dans la zone des aurores est fonction de la longitude géographique et non pas de l'heure locale .

Le coefficient d'absorption supplémentaire K' dû à la zone des aurores est donné par la carte de la fig. 721 qui donne une indication des coefficients d'absorption supplémentaires observés K' dans la zone des aurores . Comme le montre cette carte, l'absorption se trouve localisée dans deux bandes étroites, à peu près centrée sur les pôles magnétiques .

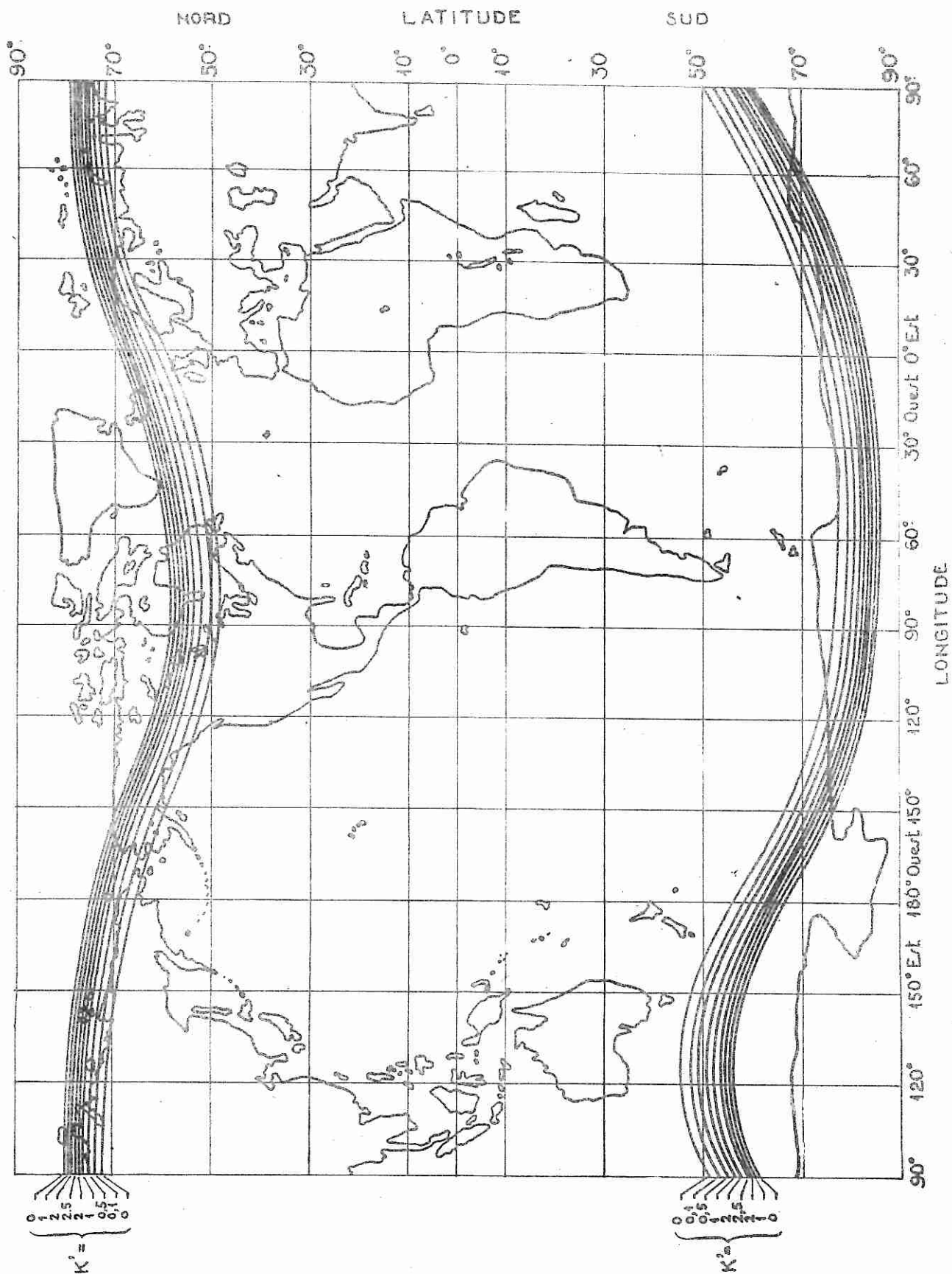


Fig 724

Il est difficile de prévoir avec exactitude le champ à la réception d'une onde dont le trajet emprunte la zone des aurores, pour les raisons suivantes :

- 1° : les radiocommunications sont très irrégulières et leurs performances extrêmement variables .
- 2° : l'absorption est considérable , spécialement de jour (les fréquences inférieures à 6 Mc ne peuvent être entendues à aucune grande distance) .
- 3° : la zone des aurores est particulièrement sujette aux orages ionosphériques , par exemple durant 50% du temps à certaines époques) . Des orages violents et prolongés s'y produisent fréquemment , au cours desquels (l'absorption augmentant) la fréquence minima utilisable augmente tandis que diminue la f.m.u . La bande des fréquences utilisables diminue et peut même s'annuler .
- 4° : Fréquemment , aussi , pendant les orages ionosphériques , on observe des transmissions puissantes , à grande portée , par la couche E sporadique , pouvant durer plusieurs heures sans interruption (voir § 730 ci-après) .

722 - On peut néanmoins obtenir un ordre de grandeur du champ à la réception en utilisant la méthode suivante , qui s'applique à des journées exemptes de perturbations ionosphériques : Pour chaque mode de transmission possible (en un bond, deux bonds, etc...) déterminons les points où les ondes traversent la couche D . Ces points sont situés de part et d'autre des points de réflexion sur le sol , à une distance égale au sixième de la longueur D_n d'un bond.

Pour chaque mode de transmission , ajouter les coefficients K' correspondant à ces points de traversée de la couche D et multiplier le total K'' ainsi obtenu par le coefficient S donné en fonction de D_n par la courbe de la fig. 722 .

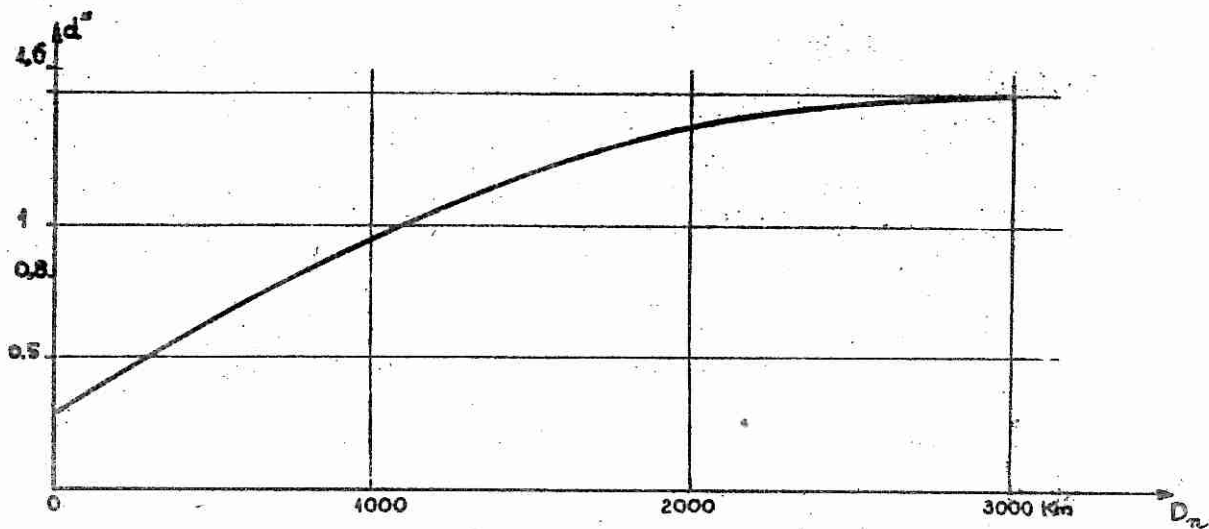


Fig. 722

Le minimum des produits $K''S$ obtenus avec les différents modes de propagation considérés, donne le coefficient $K''S$ qui doit être ajouté au produit $\bar{K} \cdot d$ dans la formule du § 712 pour obtenir la réception lorsque le trajet des ondes emprunte la zone des aurores.

Propagation par la couche E sporadique .

730 - A côté des transmissions sur les couches "régulières" de l'ionosphère, dont il a été question ci-dessus (§§ 686 à 722), on observe, à des moments irréguliers et imprévisibles, des transmissions radioélectriques très puissantes sur des fréquences beaucoup plus élevées que les fréquences maxima utilisables précédemment calculées. Ces phénomènes proviennent de réflexions produites par la couche E sporadique (§ 607). Souvent de bonnes réceptions sont obtenues à l'intérieur de la zone de saut (§ 682). D'autre part, la hauteur relativement faible de la couche qui permet des angles d'attaque extrêmement faibles, rend quelquefois possible des transmissions à grandes distances sur des fréquences dépassant 60 Mégacycles.

Le caractère sporadique (fait de pièces et de morceaux, à la fois dans l'espace et dans le temps) fait que la probabilité de transmission sous une incidence oblique avec une fréquence donnée, est plus grande que celle d'obtenir des réflexions, à la verticale, sur une fréquence égale à la fréquence d'incidence oblique multipliée par le sinus de l'angle d'attaque de la couche (§ 681).

Enfin, on observe pas de variations de la hauteur virtuelle de la couche E sporadique, en fonction du temps.

On a été amené à distinguer deux aspects de cette couche :

1° : le type "réfléchissant" donnant peu d'absorption et probablement dû à une variation rapide de l'ionisation en fonction de la hauteur (gradients élevés).

2° : le type "absorbant" complètement opaque à toutes fréquences radio auxquelles il est observé. Ce type qui accompagne généralement les aurores dans les régimes polaires et les orages ionosphériques dans les régimes tempérés, paraît

C'est
différent

Reflexion aurorale

au contraire comporter des intensités d'ionisation élevées.

Autres propagations anormales. - Réflexions diffuses.

731 - D'après ce que l'on a vu au § 656, les ondes de fréquences suffisamment élevées pour traverser la couche E subissent sur les différents "nuages" (ou morceaux) constituant la couche, une diffusion plus ou moins intense dans toutes les directions de l'espace. Ces réflexions diffuses peuvent fournir des transmissions à l'intérieur de la zone normale de silence mais celles-ci sont irrégulières et entachées d'un fading sélectif considérable qui les rend à peu près inutilisables pour la téléphonie. Ces réflexions diffuses sont aussi la cause de relevements complètement erronés, en radiogoniométrie (Ch. IX).

On doit distinguer à ce sujet :

- d'une part, les réflexions qui se produisent à la surface inférieure des nuages ioniques et qui atteignent directement le récepteur, c'est la diffusion "courte"
- d'autre part, celles qui ont lieu à la surface supérieure et qui arrivent au récepteur après réflexion sur la couche F_2 , ces nuages ayant eux-mêmes été atteints par l'intermédiaire de la couche F_2 . C'est la diffusion "longue".

La diffusion courte, provenant de nuages largement espacés et éphémères, donne généralement des signaux de médiocre qualité, tandis que la diffusion longue est capable de donner de bons signaux pouvant être utilisés en télégraphie automatique avec une vitesse modérée.

Cette diffusion longue est capable de procurer des trajets de propagation en dehors de l'arc de grand cercle, lorsque les communications normales suivant celui-ci sont impossibles, par exemple lorsque la f.m.u., en l'un des points directeurs N ou N²

de la fig. 691, tombe au-dessous de la fréquence de trafic, par suite d'une diminution de l'intensité de l'ionisation en ce point.

Ses caractéristiques générales des nuages responsables de ces diffusions, sont les suivantes :

- leur coïncidence apparente, en altitude, avec la couche E
- leur apparition fréquente et leur brève existence, produisant l'effet d'une couche à fluctuations rapides.
- le fait que l'intensité du rayon diffusé décroît quand la fréquence augmente.

Il semble d'autre part que certains centres de diffusion existeraient aussi dans le corps de la couche F_2 , lesquels renverraient des ondes qui auraient traversé cette couche.

Les orages ionosphériques.

732 - Un troisième genre de réflexions complexes se manifeste pendant les orages ionosphériques ; il est probablement dû aux caractéristiques troublées de l'ionosphère à ce moment. Ce type de réflexions est prédominant dans la zone des aurores (voir § 721).

Par définition, un orage ionosphérique est une période de perturbation de l'ionosphère caractérisée par des valeurs très anormales :

- des fréquences critiques,
- des hauteurs virtuelles,
- de l'absorption.

La couche ionisée paraît se briser en morceaux qui varient rapidement dans le temps et dans l'espace. Ces perturbations sont probablement causées par des irrptions de particules électrisées provenant du soleil et sont généralement accompagnées d'anomalies du magnétisme terrestre.

Elles rendent irrégulière la propagation en provoquant les effets suivants :

- diminution de la f. m. u.
- augmentation de la distance de bond
- augmentation de la hauteur des couches ionisées
- abaissement des intensités de réception .

Dans les premières heures des forts orages et, aux hautes latitudes, même pour les petits orages, l'ionosphère est très agitée et les radiocommunications sont faibles et désordonnées. Dans les heures qui suivent, on observe que les f. m. u. sont abaissées en même temps que les fréquences minima utilisables sont augmentées.

La bande des fréquences utilisables a ainsi diminué et il arrive qu'elle s'annule. On assiste alors à une extinction complète des transmissions radioélectriques utilisant des fréquences supérieures à quelques centaines de kilocycles. Ce "blackout radio" est fréquent au Groenland, en Alaska et dans l'Antarctique.

L'orage ionosphérique se développe pendant une période qui peut aller de quelques minutes à une heure ou plus. Ses effets sont remarqués d'abord dans la couche F_2 et descendent progressivement aux couches inférieures. Le retour aux conditions normales demande normalement plusieurs jours, il dépend de l'intensité de l'orage et de la latitude géographique.

Perturbations à début brusque.

733 - Les plus surprenantes de toutes les irrégularités de l'ionosphère sont celles qui sont désignées sous le nom de "perturbations à début brusque". Elles se traduisent par un "évanouissement" des transmissions radioélectriques (radio fade out). Ce phénomène est dû à une brusque éruption de rayonnement ionisant solaire, laquelle provoque une augmentation brusque considérable

de l'ionisation dans la couche D, accompagnée de variations correspondantes du magnétisme terrestre. L'absorption dans la couche D augmente brutalement et les transmissions radioélectriques par ondes ionosphériques de fréquences supérieures à 1 Mégacycle disparaissent habituellement. Aux très basses fréquences, susceptibles de se réfléchir sur la couche D, on constate, au contraire, une augmentation de l'onde ionosphérique, par suite de l'augmentation de la conductibilité de cette couche.

La disparition des signaux se produit habituellement en moins d'une minute et le phénomène se manifeste simultanément sur tout l'hémisphère éclairé par le soleil.

Le phénomène disparaît au bout d'un temps allant de 2 minutes à 1 heure ou encore plus, la durée de la perturbation variant dans le même sens que son intensité.

Périodes prolongées d'absorption des couches basses.

734 - Ces phénomènes sont analogues aux perturbations à début brusque, avec cette différence que leur début et leur fin se produisent progressivement et que leur durée est plus longue (plusieurs heures habituellement).

La diminution des réceptions est, en général moins profonde mais peut néanmoins encore aller jusqu'à leur disparition. Ces perturbations sont dues à des augmentations du rayonnement ultra-violet solaire, agissant sur l'intensité d'ionisation dans la couche D.

D. Les guides d'ondes .

751 - Les ondes électromagnétiques, sous certaines conditions (fréquence en particulier), sont susceptibles de se propager à l'intérieur des conducteurs métalliques creux, avec des affaiblissements comparables à ceux que l'on a rencontré dans les lignes à deux conducteurs étudiées au Chap. VI .

Ces conducteurs, en forme de véritables tuyaux, sont désignés sous le nom de guides d'ondes . Les guides d'ondes les plus généralement utilisés sont les guides à section rectangulaire et les guides à section circulaire .

752 - Nous avons déjà étudié, au § 79^{bis} ci-dessus, un type de ligne qui se rapproche du guide à section rectangulaire, c'est la ligne à deux rubans parallèles reproduite sur la fig. 751 .

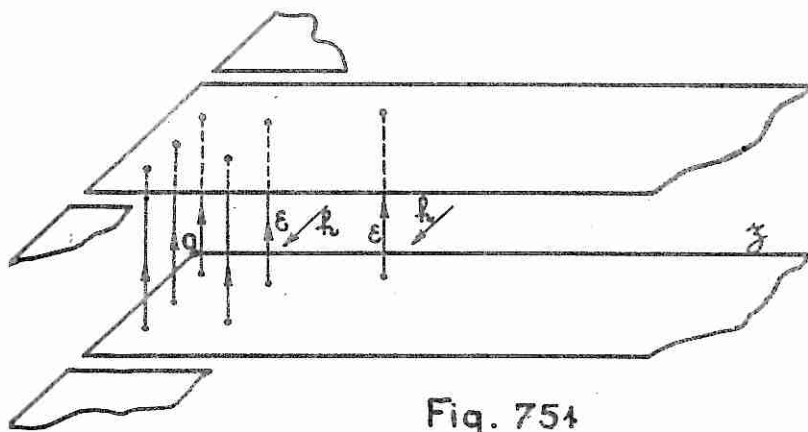


Fig. 751

A condition que la ligne soit encadrée par d'autres lignes semblables, nous avons déjà observé, entre les deux plans conducteurs,

un champ ayant même structure que l'onde plane se propageant dans l'espace libre .

Les guides d'ondes à section rectangulaire

753 - Nous avons étudié au début de ce chapitre le champ électromagnétique résultant de la superposition de deux ondes planes dont les directions de propagation font, entre elles, un angle donné α . Cette étude a montré (fig. 84) qu'il existait sur le terrain un certain nombre d'axes parallèles XX' , X, X' , etc..., le long desquels le champ est constamment nul. Plaçons suivant deux quelconques des lignes des plans métalliques verticaux que nous supposerons indéfinis et parfaitement conducteurs. En raison de la symétrie existante, chaque onde peut être considérée comme provenant de la réflexion de l'autre sur ces plans conducteurs. Des ondes peuvent donc se propager dans l'intervalle qui sépare les deux plans, le champ étant nul à l'extérieur de ces deux plans.

754 - Nous avons ainsi réalisé un guide d'ondes, mais celui-ci possède une dimension indéfiniment étendue dans l'espace. Il est facile de voir que cette dimension peut, elle aussi, être limitée. En effet, nous avons admis que les ondes composantes E_1 et E_2 supposées polarisées verticalement intéressaient tout l'espace. Ses conclusions auraient été les mêmes si l'on avait considéré deux ondes E_1 et E_2 se propageant au-dessus d'un plan horizontal parfaitement conducteur, puisque les conditions aux limites (§124) sont respectées, à savoir :

- composante horizontale nulle pour le champ électrique.
- composante verticale nulle pour le champ magnétique.

De même si les ondes s'étaient propagées au-dessous d'un semblable plan, ou encore entre deux plans conducteurs horizontaux

Les ondes du mode TE .

755 - Il ne reste plus qu'à combiner deux plans verticaux espacés comme il a été dit au § 753 ci-dessus, et deux plans

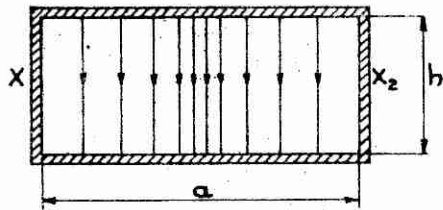


Fig. 755

horizontaux précédents, lesquels peuvent, d'ailleurs, être séparés par un intervalle quelconque, pour obtenir un guide rectangulaire. (fig. 755.)

Fréquence de coupure .

756 - Désignons par n le nombre d'intervalles tels que $xx_1, x_1x_2, \dots, x_{n-1}x_n$ qui séparent les deux parois verticales :
On a :

$$\begin{aligned} n x_1x_2 &= a \text{ (largeur du guide),} \\ \text{ou} \quad x_1x_2 &= \frac{\lambda}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

d'où la relation :

$$\frac{n \lambda}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = a$$

ou bien :

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{n \lambda}{2a}$$

Comme $\cos \frac{\alpha}{2}$ est nécessairement inférieur ou égal à 1, on sait que le système suppose la condition :

$$\frac{n \lambda}{2} \leq a$$

$$\text{ou} \quad \lambda \leq \frac{2a}{n} .$$

D'autre part, n est un nombre entier au minimum égal à 1.
Il s'en suit que la longueur d'onde la plus longue qui puisse être transmise dans un guide de largeur a est, dans le cas qui nous occupe :

$$\lambda = 2a$$

la $1/2$ longueur d'onde doit être inférieure à la largeur du guide.
Le guide se comporte comme un filtre passe-haut et sa fréquence de coupure est :

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda}$$

$$f_0 = \frac{c}{2a} .$$

Vitesses de propagation.

757 - Tout comme au § 607 ci-dessus, il y a lieu de distinguer la vitesse de phase et la vitesse de groupe. La vitesse de phase est la vitesse de déplacement de l'ensemble des lignes de force représentées sur les fig. 84, 93 et 94.

Nous avons vu au § 88 qu'elle était :

$$v_\varphi = \frac{c}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

Quant à la vitesse de groupe, c'est la vitesse avec laquelle est transportée l'énergie. Cette énergie est, en réalité, transportée par les deux ondes composantes, lesquelles suivent un trajet brisé à l'intérieur du guide (fig. 756), et dont les différents segments font un angle $\frac{\alpha}{2}$ avec l'axe longitudinal du guide (fig. 756). Il s'en suit que, par rapport à cet axe, l'énergie progresse à la vitesse :

$$v_g = c \cos \frac{\alpha}{2} .$$

C'est la vitesse de groupe dans le guide.

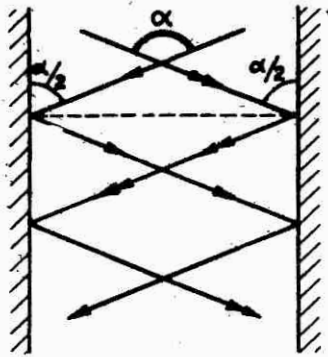


Fig. 756

On remarque immédiatement que v_φ et v_g vérifient la relation :

$$v_\varphi v_g = c^2.$$

L'angle α s'exprime en fonction de la fréquence et de la largeur a du guide (§ 756.) par la formule :

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{n\lambda}{2a} = \frac{n}{2a} \frac{c}{f}$$

d'où la vitesse de phase :

$$v_\varphi = c \frac{2a}{n\lambda} = \frac{2a}{n} \times f$$

et la vitesse de groupe :

$$v_g = c \frac{n\lambda}{2a} = c^2 \frac{n}{2af}$$

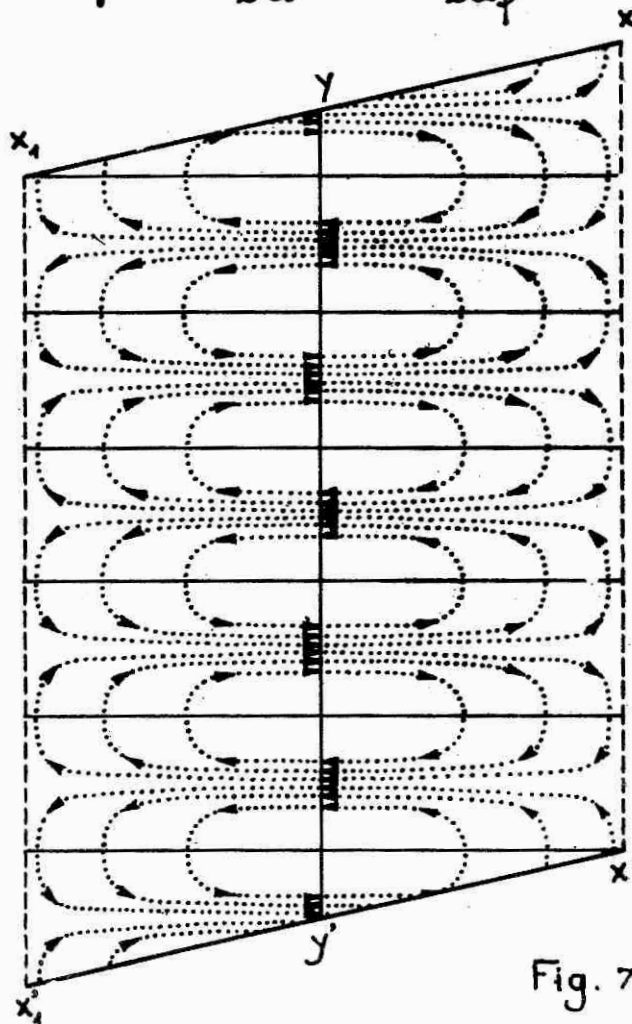


Fig. 757

758 - La fig. 757 qui reproduit la fig. 94 dans sa partie comprise entre les axes XX' et $X_1X'_1$, représente les lignes de force du champ magnétique dans le cas où $n=1$.

Tandis que le champ magnétique dessine dans chaque plan horizontal des courbes fermées, et possède, par conséquent, une composante dirigée suivant l'axe longitudinal du guide, le champ électrique, composé uniquement de lignes de force verticales est purement transversal par rapport à l'axe du guide. Une telle

structure d'onde est désignée par l'indice TE_{01} . Ses deux lettres TE indiquent que le champ électrique est purement transversal, l'indice 1 indique que l'amplitude de ce champ est distribuée, dans une dimension suivant une demi-sinusoïde, tandis que l'indice zéro indique que cette amplitude demeure constante le long de l'autre dimension.

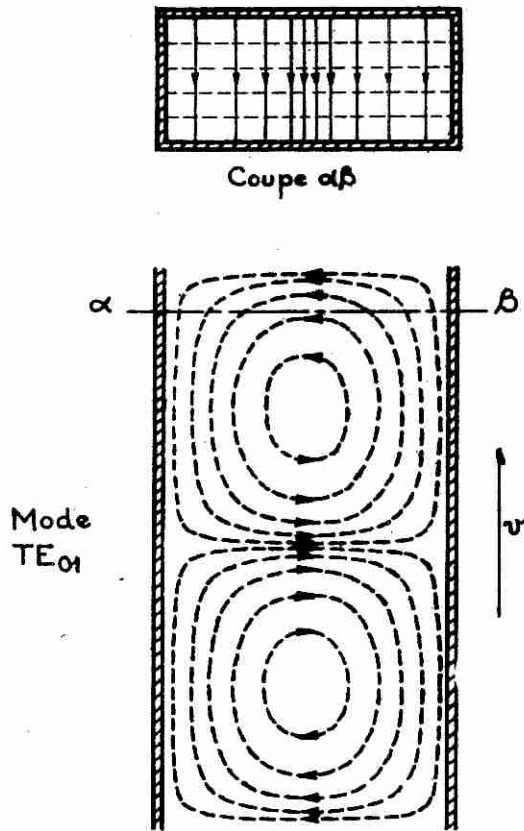


Fig. 758

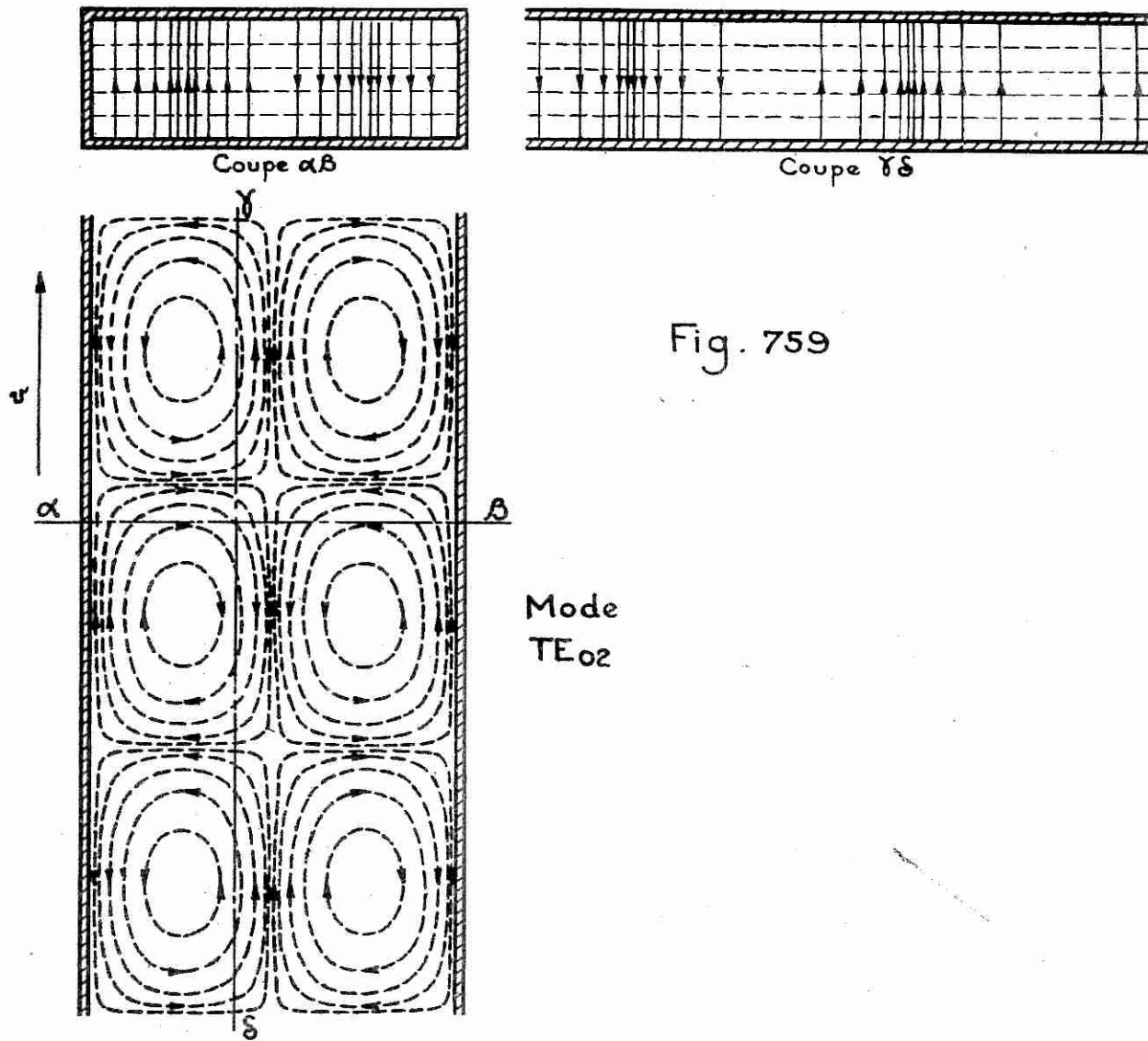


Fig. 759

La figure 759 représente la structure du mode: TE_{02} .
On représenterait aussi facilement les structures du type TE_{03} ... TE_{04}
etc.....

759 — Enfin la fig. 760 montre la surface repré-
sentative de la grandeur du champ électrique, à un instant donné,
dans un plan horizontal quelconque du guide. Quand le temps
s'écoule, cette surface se déplace en bloc le long du guide, avec
la vitesse de phase v , comme le font d'ailleurs toutes les courbes
(lignes de force en particulier) représentatives du champ électrique
et du champ magnétique dans des sections longitudinales du guide

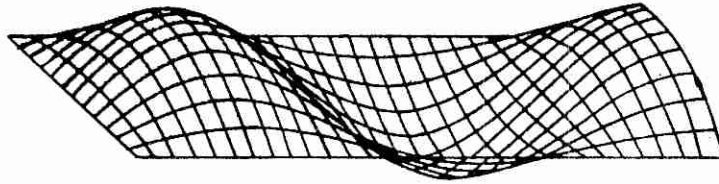


Fig. 760

760 — Ce qui précède a fait apparaître le champ dans le guide comme la résultante de deux ondes composantes qui se réfléchissent sur les deux parois latérales du guide, alternativement.

Le même raisonnement était applicable également aux deux parois horizontales du guide, lesquelles peuvent également servir de réflecteurs pour deux nouvelles ondes faisant chacune avec l'axe du guide, un angle $\frac{\beta}{2}$. La seule différence est que le champ électrique des ondes composantes est parallèle à la surface réfléchissante au lieu de lui être perpendiculaire. Ce cas a déjà été indiqué au § 129 ci-dessus (fig. 127).

Il s'en suit que dans le cas général, l'onde qui se propage dans le guide doit être considérée comme la résultante de 4 ondes qui se réfléchissent sur les 4 parois du guide. Le résultat, conforme à la théorie qui sera donnée plus loin (§ 801), est que la loi sinusoïdale de distribution de l'amplitude est valable pour les deux dimensions, et non pas seulement dans la direction transversale.

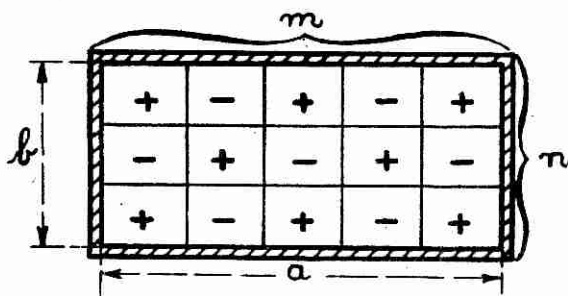


Fig. 761

L'onde la plus générale du type TE est désignée par le symbole $TE_{m,n}$ où les indices m et n indiquent que la variation de l'amplitude comprend m demi-sinusoïdes

dans une dimension et n dans l'autre.

La section transversale du guide se trouve donc divisée en $m \times n$ petits rectangles juxtaposés où, à un instant donné, le champ électrique est alternativement positif et négatif (fig. 761)

760 - La fig. 762 indique la structure de l'onde la plus simple de ce type, à savoir l'onde TE_{11} . On voit notamment, sur cette figure, que le champ électrique et le champ magnétique sont constamment nuls le long de l'axe central du guide, lequel constitue une ligne nodale pour le champ.

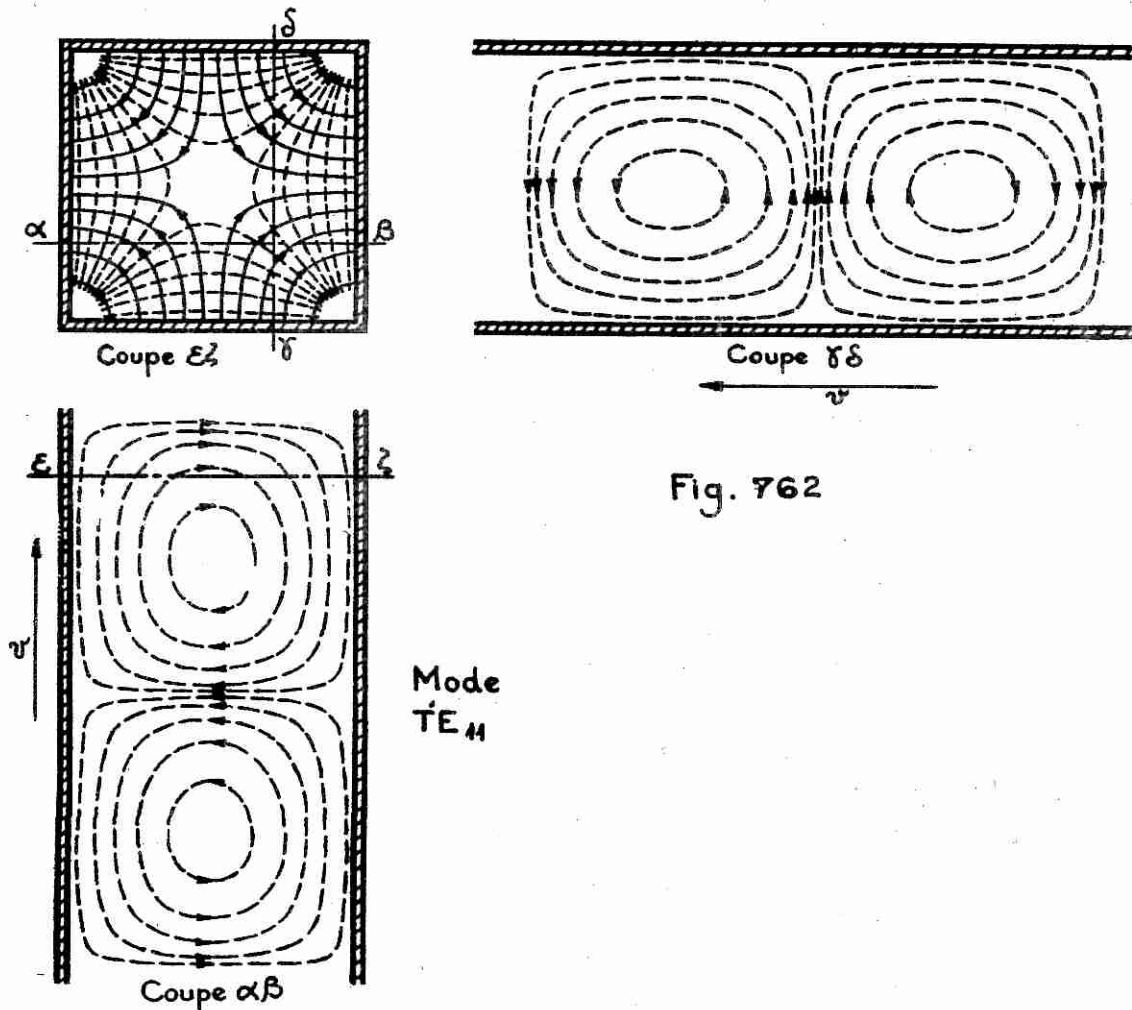


Fig. 762

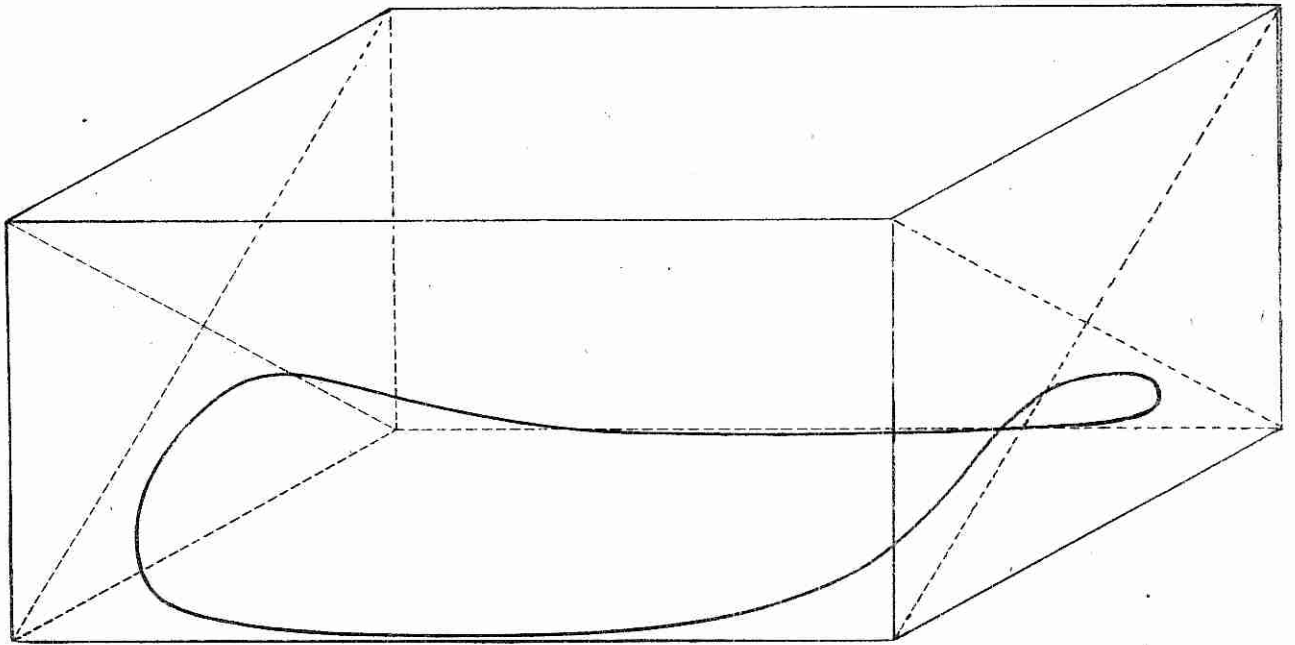
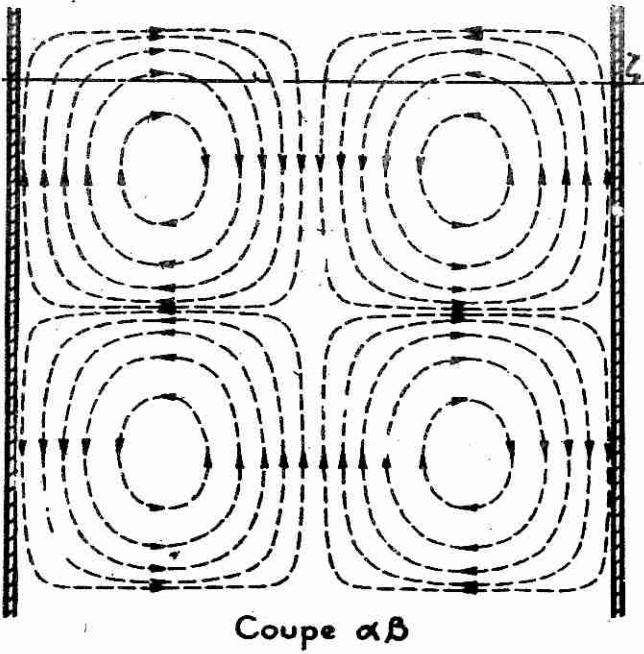
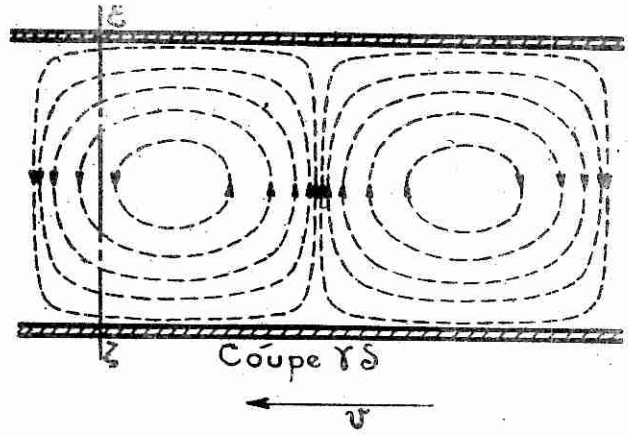
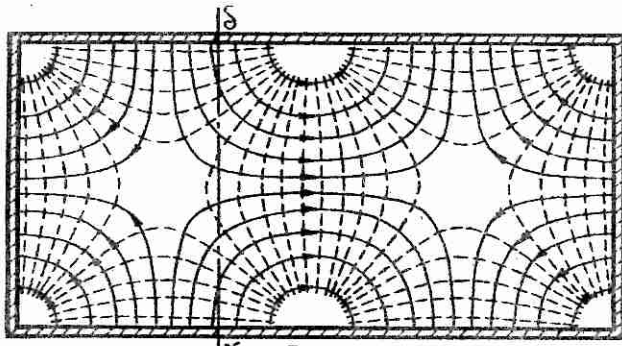


Fig. 763

761 — On aperçoit aisément la position, dans l'espace, des lignes de force du champ électrique, puisque celles-ci restent des courbes planes perpendiculaires à l'axe longitudinal du guide (champ électrique transversal); mais l'interprétation du tracé des lignes de force du champ magnétique est plus délicate; en effet, ces lignes de force ne sont plus des courbes planes (comme dans les fig. 758 et 759), mais des courbes gauches, lesquelles ne peuvent être représentées sur les figures que par leurs projections sur les plans de coupe considérés ($\alpha\beta$ ou $\beta\gamma$). La fig. 763 donne un aspect perspectif de ces lignes, tracées dans le quart inférieur du guide supposé parcouru par une onde TE_{11} .

762 — Enfin la figure 764 représente la structure des ondes du mode TE_{12} . On représenterait de la même manière les modes supérieurs tels que TE_{13} TE_{22} TE_{23} TE_{33} etc.....



Mode
 TE_{12}

Fig. 764

Les ondes du mode TM

781 - Il existe aussi tout un ensemble de types d'ondes dans lesquels c'est le champ magnétique qui est purement transversal. On s'en rend compte immédiatement en se reportant à la fig. 126 (§ 128) qui représentait le champ résultant de la superposition d'une onde incidente polarisée verticalement, et de l'onde réfléchie par un sol supposé parfaitement conducteur. Dans ce cas, c'est le champ magnétique qui demeure polarisé rectilignement tandis que le champ électrique devient elliptique. Ses lignes de force de ce dernier champ dessinent alors des courbes fermées, analogues à celles que dessinait le champ électrique dans la fig. 757.

Des considérations analogues à celles qui ont été développées dans le § 754 ci-dessus, nous montrent immédiatement que les guides rectangulaires peuvent être le siège d'ondes ayant un champ magnétique purement transversal ; ce sont les ondes du mode TM.

782 - On remarquera seulement que les conditions aux limites (§ 124) empêchent l'existence du type TM_{01} . En effet, cette structure supposerait l'existence de lignes de force magnétique atteignant, perpendiculairement, les parois du guide (voir fig. 758), ce qui est impossible puisque la composante normale du champ magnétique doit nécessairement être rigoureusement nulle à la surface d'un conducteur parfait.

La fig. 781 représente les lignes de force de l'onde la plus simple du type considéré, à savoir l'onde TM_{11} .

Ses lignes de force électrique y prennent l'aspect allongé qu'avaient les lignes de force magnétique de la fig. 762 (mode TE_{11}).

mais avec cette différence que ces lignes partent des parois du guide sous l'incidence normale (voir conditions aux limites et y retournent de même

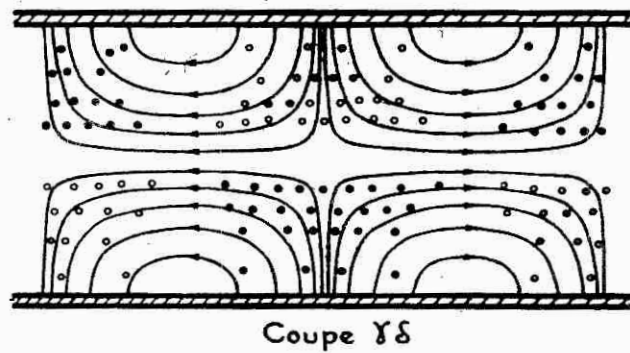
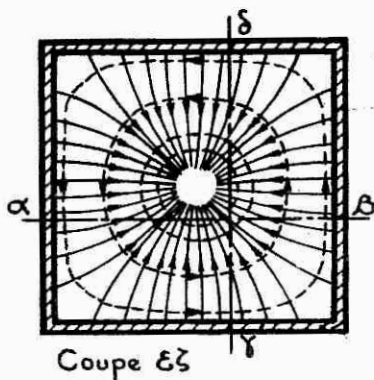
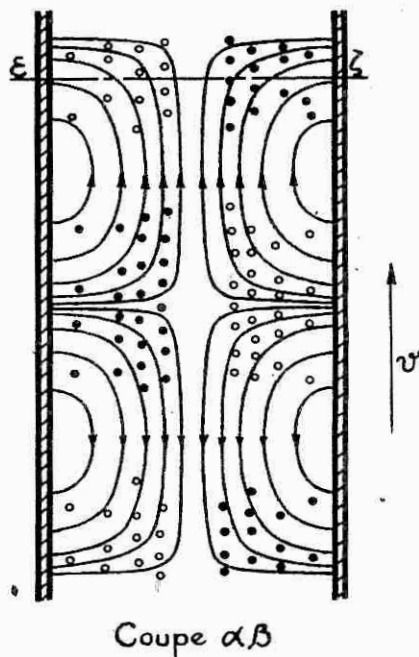


Fig. 765



Mode
 TM_{12}

Ces lignes de force sont des courbes gauches, tout comme l'étaient les lignes de force magnétique des ondes des types TE_{11} , TE_{12} etc ...

La fig. 765 donne la structure de l'onde TM_{12} . On représenterait de la même manière l'onde du type général

TM_{mn} , où m désigne le nombre de demi-sinusoides qui figurent dans la distribution de l'amplitude du champ magnétique dans le sens d'une dimension transversale du guide, et n dans la dimension transversale perpendiculaire.

Expressions des composantes du champ électrique et du champ magnétique dans les guides rectangulaires.

791 - Les diverses structures d'ondes susceptibles de se propager dans les guides rectangulaires se retrouvent par le calcul.

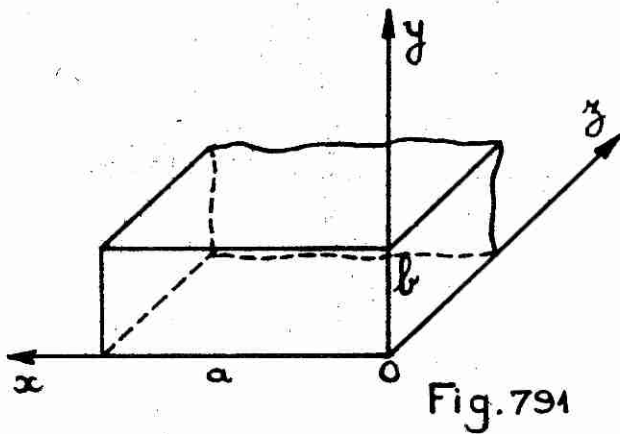


Fig. 791

Il s'agit, en effet, de trouver les expressions des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ qui satisfont à la fois aux équations de Maxwell (§ 22) et aux conditions de continuité à la surface des parois du guide.

Nous traiterons le problème pour des ondes sinusoïdales de pulsa-

tion $\omega = 2\pi f$, en utilisant la notation imaginaire.

Nous prendrons comme plan des xy , une section droite du guide, l'axe ox étant dirigé suivant le côté de longueur a , et l'axe oy suivant le côté de longueur b (fig. 791). L'axe oz sera donc en coïncidence avec une arête longitudinale du guide;

792 - Écrivons les équations de Maxwell en notation imaginaire, sans faire tout d'abord d'hypothèse sur les composantes E_x, E_y, E_z du champ électrique $\vec{E}$ en un point quelconque de l'espace, ni sur les composantes H_x, H_y, H_z au même point. Tenant compte de ce que $\frac{dE_x}{dt} = j\omega E_x$, $\frac{dE_y}{dt} = j\omega E_y$, etc..., les expressions analytiques des équations de Maxwell deviennent les suivantes :

$$1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\mu\omega H_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\mu\omega H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\mu\omega H_z \end{array} \right.$$

$$\text{II} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} = \left(4\pi\sigma + j \frac{K}{c^2} \omega \right) \mathcal{E}_x \\ \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} = \left(4\pi\sigma + j \frac{K}{c^2} \omega \right) \mathcal{E}_y \\ \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} = \left(4\pi\sigma + j \frac{K}{c^2} \omega \right) \mathcal{E}_z \end{array} \right.$$

$$\text{III} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

793 - Les conditions aux limites doivent exprimer que les composantes tangentielles du champ électrique sur les parois sont nulles, et que les composantes normales du champ magnétique y sont également nulle : ces conditions s'expriment ainsi :

$$\text{IV} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_z = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = a \\ \mathcal{E}_x = \mathcal{E}_z = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ et } y = b \end{array} \right.$$

$$\text{V} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_x = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = a \\ \mathcal{H}_y = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ et } y = b \end{array} \right.$$

Nous cherchons les conditions à satisfaire pour qu'il y ait propagation suivant l'axe Oz . Soit $\gamma = \beta + j\alpha$ la constante de cette propagation (voir Chap. VI - § 72.). En fonction de z , les champs électriques et magnétiques devront être de la forme :

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_{0x} e^{-\gamma z}, \quad \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_{0y} e^{-\gamma z}, \quad \mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{0z} e^{-\gamma z}$$

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_{0x} e^{-\gamma z}, \quad \mathcal{H}_y = \mathcal{H}_{0y} e^{-\gamma z}, \quad \mathcal{H}_z = \mathcal{H}_{0z} e^{-\gamma z}$$

$\mathcal{E}_{0x}, \mathcal{E}_{0y}$ etc... sont les valeurs de $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y$ etc... dans le plan $z = 0$;
 $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{H}_x$ etc... sont, comme $\mathcal{E}_{0x}, \mathcal{E}_{0y}$ etc..., des fonctions

complexes (phase et amplitude) des deux variables x et y . Le problème consiste, précisément, à déterminer les six fonctions $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{H}_x$, $\mathcal{H}_y$, $\mathcal{H}_z$ (de x et y) et la constante de propagation γ .

794 - Nous allons voir qu'il existe deux systèmes de solutions :

Dans l'un, on a $\mathcal{E}_z = 0$, pour toutes valeurs de x et y (c'est le système des ondes du type TE précédemment étudié).

Dans l'autre, on a $\mathcal{H}_z = 0$ pour toutes valeurs de x et y (ce sont les ondes du type TM du § 781 ci-dessus)

1° : Ondes du mode TE (champ électrique transversal)

795 - Faisons $\mathcal{E}_z = 0$ dans les équations I à III du § 792 ci-dessus, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{aligned}
 \text{I}^{\text{bis}} \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} &= -j \mu \omega \mathcal{H}_x \\ \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} &= -j \mu \omega \mathcal{H}_y \\ \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} &= -j \mu \omega \mathcal{H}_z \end{aligned} \right. \\
 \text{II}^{\text{bis}} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} &= \left(4\pi\sigma + j \frac{K}{c^2} \omega \right) \mathcal{E}_x \\ \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} &= \left(4\pi\sigma + j \frac{K}{c^2} \omega \right) \mathcal{E}_y \\ \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right. \\
 \text{III}^{\text{bis}} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

796 - D'autre part, puisque l'on a posé que toutes les composantes $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y, \mathcal{H}_z$ sont des fonctions exponentielles de la forme $e^{-\gamma z}$, on a les relations :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} = -\gamma \mathcal{E}_x, \quad \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} = -\gamma \mathcal{E}_y, \quad \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} = -\gamma \mathcal{H}_x, \text{ etc } \dots$$

Le système d'équations I^{er} à III^{er} peut donc encore s'écrire :

$$\text{I}^{\text{er}} \left\{ \begin{array}{l} \gamma \mathcal{E}_y = -j \mu \omega \mathcal{H}_x \quad (1) \\ -\gamma \mathcal{E}_x = -j \mu \omega \mathcal{H}_y \quad (2) \\ \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} = -j \mu \omega \mathcal{H}_z \quad (3) \end{array} \right.$$

$$\text{II}^{\text{er}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} + \gamma \mathcal{H}_y = \left(4\pi\sigma + j \frac{K}{c^2} \omega \right) \mathcal{E}_x \quad (4) \\ -\gamma \mathcal{H}_x - \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} = \left(4\pi\sigma + j \frac{K}{c^2} \omega \right) \mathcal{E}_y \quad (5) \\ \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} = 0 \quad (6) \end{array} \right.$$

$$\text{III}^{\text{er}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} = 0 \quad (7) \\ \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial y} - \gamma \mathcal{H}_z = 0 \quad (8) \end{array} \right.$$

Examinons ce nouveau système d'équations :

Les deux premières expriment $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_y$ en fonction de $\mathcal{H}_x$ et $\mathcal{H}_y$

$$\frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}_y} = \frac{\mathcal{E}_y}{-\mathcal{H}_x} = \frac{j \mu \omega}{\gamma} = \frac{Z_{TE}}{4\pi} \quad (9)$$

Remplaçons dans la 3^e équation, $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_y$ en fonction de $\mathcal{H}_x$ et $\mathcal{H}_y$: Il vient :

$$-\frac{j \mu \omega}{\gamma} \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial x} - \frac{j \mu \omega}{\gamma} \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial y} = -j \mu \omega \mathcal{H}_z$$

Cette équation est équivalente à la dernière équation du système.

En faisant la même opération dans les équations (4) et (5) nous obtenons des expressions de $\mathcal{H}_x$ et $\mathcal{H}_y$ en fonction des dérivées de $\mathcal{H}_z$:

$$\mathcal{H}_x = \frac{-\gamma}{\gamma^2 - j\mu\omega \left(4\pi\sigma + j\frac{K}{c^2}\omega \right)} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} \quad (10)$$

$$\mathcal{H}_y = \frac{-\gamma}{\gamma^2 - j\mu\omega \left(4\pi\sigma + j\frac{K}{c^2}\omega \right)} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} \quad (11)$$

Enfin, on vérifie aisément que les équations (6) et (7) sont automatiquement satisfaites, si l'on tient compte des équations (9), (10) et (11). Il ne reste donc plus que la troisième ou la huitième équation :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} = -j\mu\omega \mathcal{H}_z$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial y} = \gamma \mathcal{H}_z$$

En remplaçant les autres composantes par leurs valeurs exprimées en fonction de $\mathcal{H}_z$ (équations (10) et (11)), on obtient l'équation suivante en $\mathcal{H}_z$:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}_z}{\partial y^2} + \left[\gamma^2 - j\mu\omega \left(4\pi\sigma + j\frac{K}{c^2}\omega \right) \right] \mathcal{H}_z = 0$$

ou bien :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}_z}{\partial y^2} + k^2 \mathcal{H}_z = 0 \quad (12)$$

$$\text{avec } k^2 = \gamma^2 - j\mu\omega \left(4\pi\sigma + j\frac{K}{c^2}\omega \right). \quad (13)$$

797 - L'équation (12) est une équation d'ondes dans l'espace à deux dimensions, tout comme l'équation des télégraphistes du Chap. VI (§ 27) représente une équation d'ondes dans l'espace à une dimension.

Cette équation (12), compte tenu des conditions aux limites, détermine $\mathcal{H}_z$ en fonction de x, y, z . Ayant $\mathcal{H}_z$, les équations

(10) et (11) donnent $\mathcal{H}_x$ et $\mathcal{H}_y$ et l'on obtient finalement $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_y$ par les équations (9).

Ce qui précède est valable quelle que soit la forme de la section transversale du guide (section parallèle au plan xoy); nous admettons seulement que la paroi du guide est une surface cylindrique ayant ses génératrices parallèles à oz .

798 — Considérons la première des équations (9) :

$$\frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}_y} = \frac{\mathcal{E}_y}{-\mathcal{H}_x} = \frac{j\mu\omega}{\gamma} = \frac{Z}{4\pi};$$

Cette équation montre que les composantes transversales $\vec{\mathcal{E}}_T = \vec{\mathcal{E}}_x + \vec{\mathcal{E}}_y$ et $\vec{\mathcal{H}}_T = \vec{\mathcal{H}}_x + \vec{\mathcal{H}}_y$ (dans le plan xoy) du champ électrique sont perpendiculaires l'une à l'autre, et que la grandeur du champ électrique est égale à celle du champ magnétique multipliée par $\frac{Z}{4\pi}$.

799 — Cette remarque nous montre, en particulier, que les deux conditions aux limites, pour un conducteur parfait, se ramènent en réalité à une seule, puisque la condition d'avoir la composante tangentielle du champ électrique nulle à la surface du conducteur entraîne automatiquement que la composante normale du champ magnétique soit nulle également.

800 — D'autre part, les relations (10) et (11) expriment que la composante transversale $\mathcal{H}_T$ du champ magnétique est égale au gradient de la quantité $-\frac{\gamma}{k^2} \mathcal{H}_z$ considérée comme une fonction de x et y .

Ceci veut dire que le champ magnétique $\mathcal{H}_T$ est normal à la courbe $\mathcal{H}_z = \text{Constante}$.

Il s'en suit :

- 1° : que les lignes de force de la composante $\mathcal{H}_T$ (ou bien les projections sur le plan xoy , des lignes de force du

champ $\mathcal{H}$ dans l'espace) forment un réseau de courbes orthogonales aux courbes $\mathcal{H}_3 = \text{Cte}$.

2° : que, (par voie de conséquence) les lignes de force du champ électrique (perpendiculaires au champ magnétique) sont confondues avec les courbes $\mathcal{H}_3 = \text{Cte}$.

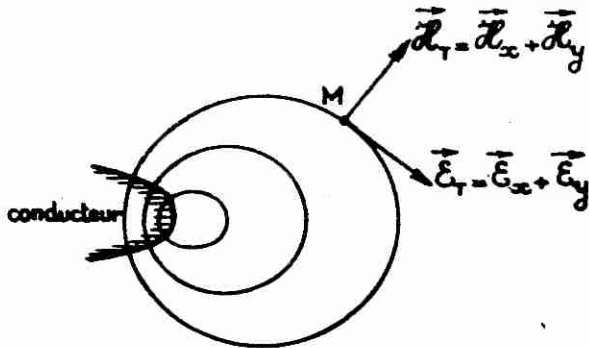


Fig. 799

801 - Enfin la surface du conducteur doit être partout normale aux courbes $\mathcal{H}_3 = \text{Cte}$, afin que le champ électrique soit tangentiel et le champ magnétique normal.

802 - Revenons aux guides d'ondes rectangulaires. L'équation d'ondes (12) sera satisfaite par une fonction $\mathcal{H}(x, y)$ qui variera sinusoïdalement avec x et avec y . Il faut en plus que cette fonction satisfasse aux conditions aux limites (équation 14). Sa condition $\mathcal{H}_x = 0$ pour $x = 0$ et $x = a$ est équivalente à $\frac{\partial \mathcal{H}_3}{\partial x} = 0$ d'après l'équation (10). On devra, de même, avoir $\frac{\partial \mathcal{H}_3}{\partial y} = 0$ pour $y = 0$ et $y = b$ (équation (11)). Il est donc indiqué de prendre comme solution $\mathcal{H}_3$ une solution de la forme :

$$\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_0 \cos \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b} e^{-\tau z}, \quad (14)$$

où m et n représentent deux nombres entiers quelconques.

Remplaçons, dans l'équation d'ondes (12), le champ $\mathcal{H}_3$ par cette expression (14) et les dérivées $\frac{\partial^2 \mathcal{H}_3}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 \mathcal{H}_3}{\partial y^2}$ par leurs valeurs déduites de (14).

On obtient l'équation :

$$\left[- \left(\frac{m \pi}{a} \right)^2 - \left(\frac{n \pi}{b} \right)^2 + k^2 \right] \mathcal{H}_3 = 0$$

$\mathcal{H}_3$ étant supposé non identiquement nul, on doit nécessairement avoir la relation :

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k^2 \quad (15)$$

A chaque couple de valeurs de m et de n correspond une valeur bien déterminée de k , à laquelle l'équation (13) fait correspondre une valeur également bien déterminée de γ .

803 - Des équations (9) et (11) nous déduisons les expressions de $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{H}_x$, $\mathcal{H}_y$ et $\mathcal{H}_z$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_x = \frac{j\mu\omega}{k^2} \frac{n\pi}{b} \mathcal{H}_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-\gamma z} \\ \mathcal{E}_y = -\frac{j\mu\omega}{k^2} \frac{m\pi}{a} \mathcal{H}_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-\gamma z} \\ \mathcal{E}_z = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_x = \frac{\gamma}{k^2} \frac{m\pi}{a} \mathcal{H}_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-\gamma z} \\ \mathcal{H}_y = \frac{\gamma}{k^2} \frac{n\pi}{b} \mathcal{H}_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-\gamma z} \\ \mathcal{H}_z = \mathcal{H}_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-\gamma z} \end{array} \right.$$

Ces expressions sont les expressions générales du champ électrique et du champ magnétique dans l'onde du type $TE_{m,n}$. On vérifie aisément que l'un des deux nombres m ou n peut être nul, mais pas les deux à la fois.

2° : Ondes du mode TM (Champ magnétique transversal).

811 - Les expressions des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ dans le cas d'une onde du mode TM peuvent être obtenues d'une manière semblable à celle qui a été utilisée pour le mode TE. Dans ce cas, toutes les composantes, sauf H_z sont différentes de zéro. Nous trouvons E_x et E_y à partir de E_z par des équations identiques à (10) et (11) sauf que la lettre E doit être substituée à H. E_z satisfait une équation d'ondes exactement semblable à (12). Le rapport $\frac{E_x}{H_y} = \frac{E_y}{-H_x}$ a une valeur différente de celle trouvée dans le cas des ondes TE. On a cette fois :

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{E_y}{-H_x} = \frac{\gamma}{4\pi\sigma + j\frac{K}{c^2}\omega} = \frac{Z_{TM}}{4\pi}$$

Tenant compte des conditions aux limites, on trouve pour E_x , E_y , E_z , H_x et H_y les expressions :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = -\frac{\gamma}{k^2} \frac{m\pi}{a} E_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-\gamma z} \\ E_y = -\frac{\gamma}{k^2} \frac{n\pi}{b} E_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-\gamma z} \\ E_z = E_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-\gamma z} \\ H_x = \frac{4\pi\sigma + j\frac{K}{c^2}\omega}{k^2} \frac{n\pi}{b} E_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-\gamma z} \\ H_y = -\frac{4\pi\sigma + j\frac{K}{c^2}\omega}{k^2} \frac{m\pi}{a} E_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-\gamma z} \\ H_z = 0 \end{array} \right.$$

les constantes k et γ étant toujours définies par les équations (13) et 15. Contrairement au cas des ondes TE, on constate cependant qu'aucun des deux nombres m ou n ne peut être nul. Nous avons déjà vu en effet que l'onde $TM_{0,n}$ ne peut pas exister.

812 - Σ' équation :

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{E_y}{-H_x} = \frac{\gamma}{4\pi\sigma + j\frac{k}{c^2}\omega} = \frac{Z}{4\pi}$$

montre que les deux vecteurs $\vec{E}_T = \vec{E}_x + \vec{E}_y$ et $\vec{H}_T = \vec{H}_x + \vec{H}_y$ sont encore perpendiculaires l'un à l'autre, et que leurs grandeurs sont proportionnelles. On constaterait, de même qu'au § 799 ci-dessus relatif aux ondes du mode TE que :

- 1° : le champ électrique transversal est proportionnel au gradient de la quantité E_z considérée comme une fonction des deux variables x et y .
- 2° : que les lignes de force du champ magnétique (transversal) se confondent avec les courbes $E_z = \text{Constante}$
- 3° : que la surface du conducteur constitue l'une des courbes $E_z = \text{Cte}$.

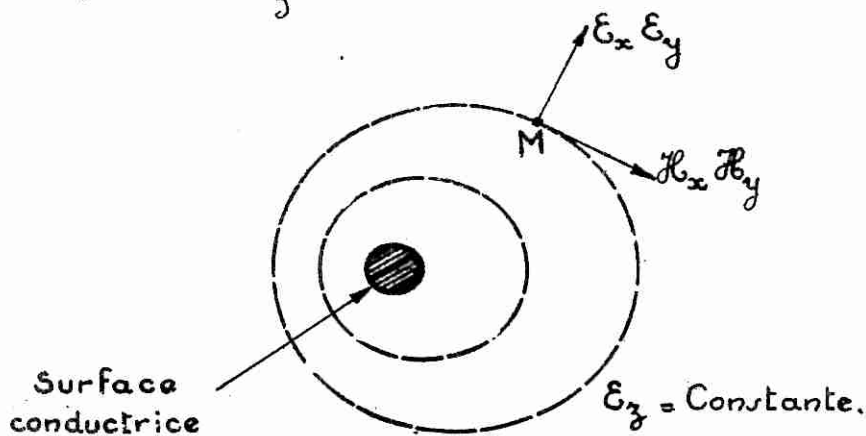


Fig. 811

Vitesse de propagation.

821 — Dans l'équation (13), remplaçons k par sa valeur (15) Il vient :

$$\begin{aligned}\gamma &= k^2 + j\mu\omega \left(4\pi\sigma + j\frac{K}{c^2}\omega \right) \\ &= \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + j\mu\omega \left(4\pi\sigma + j\frac{K}{c^2}\omega \right).\end{aligned}$$

Nous supposons que le milieu qui remplit le guide est parfaitement isolant ($\sigma = 0$), l'expression de γ^2 devient :

$$\gamma^2 = -\frac{K\mu}{c^2}\omega^2 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2.$$

Pour les basses fréquences, la somme des deux derniers termes est supérieure à $\frac{K\mu}{c^2}\omega^2$, γ^2 est positif et γ réel, il n'y a pas de propagation, les champs s'amortissent exponentiellement en fonction de z .

Aux hautes fréquences, au contraire, le premier terme l'emporte sur les deux autres, γ^2 devient négatif et γ imaginaire pur. L'onde considérée se propage, sans atténuation, dans le guide.

La fréquence de coupure $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ est donnée par l'égalité :

$$\frac{K\mu}{c^2}\omega_0^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 ;$$

D'où l'on tire :

$$\omega_0 = \frac{c}{\sqrt{K\mu}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}.$$

Or (§ 37) $\frac{c}{\sqrt{K\mu}}$ représente la vitesse v des ondes dans un milieu illimité de constantes K et μ , donc :

$$\omega_0 = v \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2},$$

ce qu'on peut écrire :

$$2f_0 = v \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

ou encore, en explicitant la longueur d'onde λ_0 dans le même milieu, supposé illimité, $\lambda_0 = \frac{v}{f_0}$.

$$\frac{2}{\lambda_0} = \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Ces équations montrent que la fréquence de coupure f_0 est d'autant plus élevée que les indices m et n sont plus élevés, pour un guide de dimensions a et b données.

822 - Réciproquement, le nombre de modes d'ondes possibles, pour un guide de dimensions données, sera d'autant plus grand que la fréquence sera plus élevée. Si l'on fait décroître cette fréquence, il vient un moment où un seul mode d'onde demeure possible, c'est le mode TE_{01} ou TE_{10} (suivant que b sera plus grand ou plus petit que a), puisque TM_{01} n'existe pas.

823 - La vitesse de phase est, comme d'habitude (voir Chap. VI - § 72) donnée par le coefficient de j dans l'expression de $\gamma = \beta + j\alpha$. Dans le cas actuel on a $\beta = 0$ et par conséquent :

On a (§ 821) pour les fréquences v_q supérieures à la fréquence de coupure :

$$\gamma = j \sqrt{\frac{K\mu}{c^2} \omega^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

d'où :

$$\alpha = \frac{\omega \sqrt{K\mu}}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{m}{2a} \frac{v}{f}\right)^2 - \left(\frac{n}{2b} \frac{v}{f}\right)^2}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \left(\frac{m}{2a} \frac{v}{f}\right)^2 - \left(\frac{n}{2b} \frac{v}{f}\right)^2}$$

d'où :

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{m}{2a} \frac{v}{f}\right)^2 - \left(\frac{n}{2b} \frac{v}{f}\right)^2}}$$

Nous voyons que cette vitesse v_{φ} est supérieure à la vitesse v des ondes dans le milieu considéré, et qu'elle devient infinie à la fréquence de coupure.

Impédance du guide rectangulaire.

824 - Cette impédance, comme l'impédance d'espace, en espace libre (§ 79) est, par définition, le rapport $\frac{E_x}{H_y}$ multiplié par 4π .

Ce rapport a déjà été exprimé précédemment, on a vu qu'il est différent dans le cas des ondes du type TE et des ondes du type TM.

On trouve pour les ondes du mode TE :

$$\begin{aligned} \frac{E_x}{H_y} &= \frac{j\mu\omega}{\gamma} = \frac{j\mu\omega}{\frac{j\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{m}{2a} \frac{v}{f}\right)^2 - \left(\frac{n}{2b} \frac{v}{f}\right)^2}} \\ &= c \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{m}{2a} \frac{v}{f}\right)^2 - \left(\frac{n}{2b} \frac{v}{f}\right)^2}} \end{aligned}$$

L'impédance Z est une grandeur réelle, proportionnelle à la vitesse de phase v_{φ} . E_x et H_y sont en phase ; de même que E_y et H_x sont en opposition de phase.

Pour les ondes du mode TM, on trouve, au contraire :

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{E_y}{-H_x} = c \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1 - \left(\frac{m}{2a} \frac{v}{f}\right)^2 - \left(\frac{n}{2b} \frac{v}{f}\right)^2}.$$

L'impédance $Z = 4\pi \frac{E_x}{H_y}$ est inversement proportionnelle à la vitesse de phase v_{φ} dans le guide.

Atténuation des ondes

dans les guides rectangulaires.

831 - Dans ce qui précède nous avons supposé que les guides d'ondes avaient des parois parfaitement conductrices, c'est-à-dire de conductibilité infinie ($\sigma = \infty$). C'est la raison pour laquelle on a trouvé une constante de propagation purement imaginaire ($\gamma = j\alpha$) pour les fréquences supérieures à la fréquence de coupure.

Dans la pratique, une certaine fraction de l'énergie se trouve dissipée sous forme de chaleur et la constante de propagation présente une partie réelle β qui est la constante d'amortissement :

$$\gamma = \beta + j\alpha.$$

832 - Dans le cas de la ligne à deux conducteurs que nous avons étudiée au Chap. VI (§ 95) nous avons exprimé le coefficient β en fonction des constantes linéaires : L_1 , C_1 , R_1 :

$$\alpha = \frac{R_1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{L_1}}.$$

Nous pouvons appliquer cette formule par la ligne constituée par deux rubans parallèles du § 79^{bis} ci-dessus et qui représente la transition entre les lignes du Chap. VI et les guides du présent chapitre.

On a vu en effet que les constantes linéaires L_1 et C_1 avaient respectivement pour valeurs $L_1 = 4\pi\mu b$ et $C_1 = \frac{K}{4\pi c^2 b}$ b étant l'intervalle qui sépare les deux rubans, supposés de largeur égale à l'unité.

Il reste à déterminer la résistance linéaire R_1 . Elle est

égale à deux fois la résistance de l'unité de longueur du conducteur, c'est-à-dire :

$$R_1 = \frac{2}{\delta \sigma_m} ,$$

en désignant par σ_m la conductivité du conducteur et par δ la profondeur de pénétration .

Or, d'après le § 115 ci-dessus, on a :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_m\sigma_m\omega}} ,$$

μ_m étant la perméabilité du conducteur .

$$\text{d'où : } R_1 = \frac{2}{\delta \sigma_m} = 2 \sqrt{\frac{2\pi\mu_m\omega}{\sigma_m}} .$$

Le coefficient d'amortissement s'écrira finalement :

$$\beta = \frac{R_1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} = \frac{2}{2} \sqrt{\frac{2\pi\mu_m\omega}{\sigma_m}} \times \sqrt{\frac{K}{4\pi c^2 b \times 4\pi \mu b}}$$

$$\beta = \frac{1}{2cb} \sqrt{\frac{\mu_m\omega}{2\pi\sigma_m}} \sqrt{\frac{K}{\mu}} .$$

Cette formule nous montre que l'amortissement de la ligne varie comme la racine carrée de la fréquence, de la résistivité et de la perméabilité du métal constituant la ligne .

C'est un résultat général que nous retrouverons par la suite .

833 - La méthode précédente n'est évidemment pas applicable au cas des guides d'ondes proprement dits . Pour calculer l'amortissement dans les guides réels, il conviendrait, en toute rigueur, d'établir tout d'abord les équations du nouveau champ électrique et du nouveau champ magnétique tels qu'ils existent réellement en présence de parois de conductibilité finie σ_0 . Ce procédé est extrêmement laborieux et on préfère utiliser une méthode approchée, basée sur le fait que, dans la pratique, les parois utilisées ont

toujours une conductibilité élevée et que, par suite, les champs réels ne diffèrent pas beaucoup de ceux qui ont été calculés en supposant σ_0 infini. Au § 114 ci-dessus, nous avons déjà vu que, dans un bon conducteur la constante de propagation des ondes était donnée par la formule :

$$\gamma_0 = \beta_0 + j\alpha_0 = \sqrt{2\pi\omega\sigma_m\mu_m} (1+j),$$

et que l'impédance d'espace dans ce milieu était :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{2\pi\omega\mu_m}{\sigma_m}} (1+j),$$

σ_m et μ_m étant la conductivité et la perméabilité du métal considéré.

A l'intérieur du conducteur, au voisinage de la surface, la propagation a lieu à peu près exactement dans la direction de la normale à la surface. Le champ électrique et le champ magnétique, sont pratiquement tangents à la surface ; le rapport de la composante tangentielle de E à la composante tangentielle de H est égal à $\frac{Z_0}{4\pi}$ et ce sont deux vecteurs perpendiculaires l'un à l'autre ; mais nous avons vu que Z_0 était toujours petit, il en est donc de même de la composante tangentielle E_T de E .

La méthode consistera à déterminer H comme s'il n'y avait pas d'amortissement, et à en déduire E_T par la relation :

$$E_T = \frac{Z_0}{4\pi} H$$

834 — La connaissance des champs E_T et H à la surface de la paroi va permettre de déterminer la constante de propagation $\gamma = \beta + j\alpha$ dans le guide. En effet, le coefficient β mesure la décroissance de la puissance transmise le long de l'axe oz . Cette perte de puissance est elle-même en rapport avec le flux d'énergie qui pénètre à l'intérieur des parois du guide et ce flux est obtenu en intégrant le secteur de Poynting (§ 161) dans toute

l'étendue de la paroi considérée. D'autre part, les amplitudes du champ électrique et le champ magnétique décroissent avec z , comme l'exponentielle $e^{-\beta z}$, par suite le vecteur de Poynting, produit vectoriel de $\mathbf{E}$ par $\mathbf{h}$, décroît, comme la puissance, proportionnellement à l'exponentielle $e^{-2\beta z}$. D'après les propriétés de la fonction exponentielle, la dérivée du flux d'énergie par rapport à z est égale au produit de ce même flux par l'exposant -2β .

Or ce flux se confond avec le flux du vecteur de Poynting à travers la section du guide; sa dérivée par rapport à z est donc, au signe près, l'énergie perdue par unité de longueur du guide, c'est-à-dire le flux du vecteur de Poynting à travers la paroi d'une unité de longueur du guide. La grandeur du vecteur de Poynting est égale à $\frac{1}{8\pi}$ multiplié par la partie réelle du produit du champ électrique $\mathbf{E}$ par la quantité imaginaire conjuguée du champ magnétique $\mathbf{H}$:

$$p = \frac{1}{8\pi} \text{ Partie réelle de } (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*),$$

ou bien :

$$p = \frac{1}{8\pi} \text{ Re } (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*),$$

en désignant par $\mathbf{H}^*$ l'imaginaire conjuguée de $\mathbf{H}$.

On a donc :

$$-2\beta = \frac{\int_{\text{section paroi}} \text{Re} (\mathbf{E} \mathbf{H}^*) dS}{\int_{\text{section guide}} \text{Re} (\mathbf{E} \mathbf{H}^*) dS}.$$

Le dénominateur, qui représente l'énergie transmise par le guide, peut être calculée dans chaque cas particulier, dès que l'on connaît les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ en chaque point de la section du guide.

Explicitons le numérateur N ; pour exprimer le flux du vecteur de Poynting à travers la paroi, nous ferons le produit de la surface par la composante normale de p . Cette composante est $\frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}_T \times \mathbf{H}_T^*)$

où $\mathcal{E}_T$ et $\mathcal{H}_T$ représentent les composantes tangentielles des champs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$.

Or, d'après le § 832 on a : $\frac{\mathcal{E}_T}{\mathcal{H}_T} = \frac{Z_0}{4\pi}$,

donc :

$$p_0 = \frac{1}{8\pi} \operatorname{Re} (Z_0 \mathcal{H}_T \mathcal{H}_T^*) .$$

On sait que le produit d'un nombre complexe par son imaginaire conjuguée est réelle et égale au carré de son module. D'autre part, la partie réelle de Z_0 est (§ 833) :

$$\operatorname{Re} (Z_0) = \sqrt{\frac{2\pi \omega \mu_m}{\sigma_m}}$$

D'où :

$$p_0 = \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{2\pi \omega \mu_m}{\sigma_m}} H_T^2$$

Cette formule représente la perte de puissance par centimètre carré de paroi du guide. Cette perte est fonction de la fréquence; cherchons son expression; on trouve immédiatement ($K=1$) :

$$\begin{aligned} p_{0 \text{ par cycle}} &= \frac{2\pi}{\omega} \times p_0 = \frac{2\pi}{\omega} \times \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{2\pi \omega \mu_m}{\sigma_m}} H_T^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \mu_m \sigma_m \omega}} \times \frac{\mu_m}{8\pi} H_T^2 \end{aligned}$$

D'après le § 115, $\frac{1}{\sqrt{2\pi \mu \sigma_m \omega_m}}$ représente la profondeur de pénétration δ (c'est-à-dire la profondeur à laquelle le champ se trouve réduit dans la proportion de e à 1).

D'autre part $\frac{\mu_m}{8\pi} H_T^2$ représente (Chap. II_a § 423) l'énergie accumulée, par unité de volume, par le champ magnétique.

Nous arrivons à la conclusion que l'énergie dissipée par cycle, dans le conducteur, est égale à l'énergie magnétique qui serait contenue dans une couche d'épaisseur égale à la profondeur de pénétration, le champ magnétique y étant

supposé uniformément égal à la composante tangentielle à la surface de la paroi. Cette épaisseur est toujours faible pour les bons conducteurs comme le cuivre, ce qui prouve que la perte d'énergie est une faible fraction de l'énergie totale par le guide.

835 - Par analogie avec les circuits oscillants⁽¹⁾, nous définirons le coefficient de surtension du guide considéré comme le produit par 2π du rapport existant entre l'énergie contenue dans un élément de guide et l'énergie dissipée par ce même élément pendant un cycle.

On démontre, dans le cas des lignes que le coefficient Q ainsi défini est égal au rapport $\frac{\alpha}{2\beta}$. En effet, soient L_1 , C_1 et R_1 les constantes linéaires de cette ligne. La puissance moyenne p_t transmise en un point de la ligne est :

$$p_t = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (V \times J^*)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (Z_c J \times J^*) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} I^2 \end{aligned}$$

L'énergie contenue dans un élément de longueur Δx est :

$$w_e = p_t \times \frac{\Delta x}{v} = \frac{\Delta x}{2v} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} I^2$$

(1) Dans le circuit oscillant, en effet, le coefficient de surtension $Q = \frac{L\omega}{R}$ représente, au facteur 2π près, le rapport de l'énergie contenue dans le circuit à l'énergie dissipée par le même circuit pendant un cycle.

L'énergie contenue dans le circuit est :

$$w_t = \frac{1}{2} L I^2$$

L'énergie perdue pendant un cycle est :

$$w_p = \frac{1}{2} R I^2 \times T$$

d'où le rapport :

$$\frac{w_t}{w_p} = \frac{L}{RT} = \frac{L f}{R} = \frac{1}{2\pi} \frac{L\omega}{R} = \frac{Q}{2\pi}$$

La puissance perdue dans le même élément de ligne est :

$$P_p = \frac{1}{2} R_1 \Delta x \times I^2 .$$

Pendant une période, l'énergie perdue est :

$$W_p = \frac{1}{2} R_1 \Delta x \times I^2 T ,$$

$$\text{ou : } W_p = \frac{1}{2} R_1 \Delta x \times \frac{2\pi}{\omega} I^2 ;$$

D'où l'expression du coefficient de surtension Q :

$$Q = 2\pi \frac{W_e}{W_p} = \frac{L_1 \omega}{R_1} ,$$

qu'on peut finalement écrire :

$$Q = \frac{\omega \sqrt{L_1 C_1}}{2 \frac{R_1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{L_1}}} = \frac{\alpha}{2\beta} .$$

836 - Dans cette relation, remplaçons α par $\frac{\omega}{v}$ v étant la vitesse de propagation dans le guide et β par son expression trouvée au § 834 ci-dessus. Il vient :

$$Q = \frac{\omega}{v} \times \frac{\text{Puissance moyenne transmise dans le guide}}{\text{Puissance moyenne perdue par unité de longueur du guide}} ,$$

ou bien :

$$Q = \frac{2\pi}{v} \times \frac{\text{Puissance moyenne transmise dans le guide}}{\text{Énergie perdue par unité de longueur du guide et par cycle}}$$

Nous avons vu que l'énergie se propage avec une vitesse v_g toujours inférieure à la vitesse de phase v dont il est question dans la formule ci-dessus. Il est bien évident que le produit de la vitesse v_g par l'énergie contenue dans l'unité de longueur mesure la puissance transmise par le guide.

Supposons que la fréquence soit suffisamment éloignée de la fréquence de coupure pour que la vitesse de groupe soit peu

différente de la vitesse de phase.

Dans cette hypothèse, on peut écrire :

$$Q = \frac{\text{Énergie contenue dans l'unité de longueur du guide}}{\text{Énergie perdue par unité de longueur du guide et par cycle.}}$$

D'autre part, la perte d'énergie par cycle (§ 834) est égale à l'énergie magnétique contenue dans une couche d'épaisseur égale à la profondeur de pénétration δ dans le métal constituant la paroi. On peut donc en déduire que le coefficient Q est de l'ordre de grandeur du rapport de la section du guide à la section de pénétration des ondes dans les parois du guide. Ceci explique les valeurs élevées obtenues dans la pratique.

Nous appliquerons tout d'abord la méthode au cas de la propagation entre les deux rubans parallèles considérés au §§ 79^{bis} et 752 ci-dessus. Le champ magnétique est tangent aux conducteurs; le champ électrique est normal et égal au précédent multiplié par $c \sqrt{\frac{\mu}{K}}$. De plus, il existe une petite composante tangentielle du champ électrique, à cause de la conductibilité finie du métal. Cette composante, qui est perpendiculaire au champ magnétique, est dirigée dans le sens de la propagation (axe oz de la fig. 751). Elle a évidemment des sens opposés sur les deux conducteurs opposés, mais le vecteur de Poynting est dirigé, dans les deux cas, vers l'intérieur du métal.

L'amplitude de cette composante E_z est :

$$E_z = \frac{Z_0}{4\pi} \mathcal{H} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2\pi\mu_m\omega}{\sigma_m}} (1+j) \mathcal{H}.$$

La valeur moyenne de la composante normale du vecteur de Poynting pénétrant dans la paroi est :

$$\frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{2} (E_z \mathcal{H}^*) = \frac{1}{32\pi^2} \sqrt{\frac{2\pi\mu_m\omega}{\sigma_m}} H^2.$$

La puissance perdue dans les deux parois de l'unité de longueur de ligne (dont la largeur est déjà supposée égale à l'unité)

est :

$$r_r = \frac{1}{16 \pi^2} \sqrt{\frac{2 \pi \mu_m \omega}{\sigma_m}} H^2 .$$

Calculons, d'autre part, l'expression de la puissance transmise par la ligne. La valeur moyenne de la composante du vecteur de Poynting dirigée suivant oz est :

$$\frac{1}{8\pi} c \sqrt{\frac{\mu}{K}} H^2 .$$

L'écartement des parois étant b , la puissance transmise sera :

$$P_t = \frac{bc}{8\pi} \sqrt{\frac{\mu}{K}} H^2 .$$

Le rapport $\frac{P_r}{P_t}$ nous donne deux fois l'amortissement β cherché :

$$\beta_{TEM} = \frac{1}{2} \frac{P_r}{P_t} = \frac{1}{2cb} \sqrt{\frac{K}{\mu}} \sqrt{\frac{\mu_m \omega}{2\pi \sigma_m}} .$$

Nous retrouvons bien la formule déjà trouvée au §832 ci-dessus en nous appuyant sur la théorie ordinaire des lignes à deux conducteurs.

837 - Utilisons cette expression de β pour exprimer la valeur du coefficient de surtension $Q = \frac{\alpha}{2\beta}$ de la ligne. Sachant que α est égal à $\frac{\omega}{v}$ ou $\frac{\omega}{c} \sqrt{K\mu}$, on a :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\frac{\omega}{c} \sqrt{K\mu}}{\frac{1}{cb} \sqrt{K\mu} \sqrt{\frac{\mu_m \omega}{2\pi \sigma_m}}} = b \frac{\mu}{\mu_m} \sqrt{2\pi \mu_m \sigma_m \omega} , \\ &= \frac{b}{\delta} \frac{\mu}{\mu_m} , \end{aligned}$$

δ étant, comme précédemment, la profondeur de pénétration des ondes dans la paroi du guide. Nous retrouvons dans le rapport $\frac{b}{\delta}$ le rapport de la section du guide à la section de pénétration des

ondes dans la paroi du même guide, rapport dont il était question au § 835 qui précède.

Amortissement dans le cas du mode TE₀.

841 - Il est également intéressant de calculer l'amortissement des ondes du type TE se propageant entre deux bandes parallèles, ou plutôt entre deux plans indéfinis parallèles (voir effet de bords, § 79^{bis}). Les expressions du champ se déduisent de celles qui ont été écrites pour le guide rectangulaire, en y faisant tendre a vers l'infini.

On trouve des expressions qui contiennent en facteur $\sin \frac{n\pi}{b} y$ ou $\cos \frac{n\pi}{b} y$, n étant un entier positif quelconque :

$$E_x = c \sqrt{\frac{\mu}{K}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2}} H_0 \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-\gamma z}$$

$$H_y = H_0 \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-\gamma z}$$

$$H_z = H_0 \frac{-j \frac{n\lambda}{2b}}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2}} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-\gamma z}$$

λ étant la longueur d'onde $2\pi \frac{v}{\omega}$ dans l'espace libre.

Le vecteur de Poynting contient le facteur $\sin^2 \frac{n\pi}{b} y$ dont la valeur moyenne de 0 à b est $\frac{1}{2}$; le flux total est donc égal à la valeur maxima du vecteur multipliée par $\frac{b}{2}$.

On trouve :

$$P_t = \frac{bc}{16\pi} \sqrt{\frac{\mu}{K}} \frac{H^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2}}$$

Pour calculer la puissance perdue p_p il faut calculer la composante tangentielle de H . Dans le cas actuel (mode TE) cette composante est H_z qui, d'après le § 833 ci-dessus, pourra

être calculée comme si la conductibilité des parois était infinie.

La puissance moyenne qui pénètre dans l'unité de surface de la paroi métallique est :

$$\frac{1}{2} \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{2\pi\mu_m\omega}{\sigma_m}} H_3^2.$$

Au contact de la paroi on a $\cos \frac{n\pi}{b} = 1$. Pour les deux parois intéressées, la perte de puissance par mètre de longueur de la ligne est donc :

$$P_r = \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{2\pi\mu_m\omega}{\sigma_m}} \frac{\left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2}{1 - \left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2} b_0^2.$$

Comme précédemment (§ 836) nous aurons le coefficient d'amortissement cherché, par la formule :

$$\beta_{TE_0} = \frac{1}{2} \frac{P_r}{P_t} = \frac{1}{2cb} \sqrt{\frac{K}{\mu}} \sqrt{\frac{\mu_m\omega}{2\pi\sigma_m}} \frac{\left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2}}$$

$$\beta_{TE_0} = \beta_{TEM} \times \frac{\left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2}},$$

en mettant en évidence l'amortissement précédemment calculé pour l'onde purement transversale (§ 836).

842 - Cette formule conduit à une conclusion extrêmement importante, à savoir que l'amortissement dans le mode TE_0 entre deux plans indéfinis décroît quand la fréquence augmente, contrairement à ce qui se passe pour les autres structures d'ondes et en particulier pour les ondes du mode TEM qui a été précédemment examiné (1). On peut s'en rendre compte de la façon suivante : Aux fréquences notablement plus élevées que la fréquence de coupure on a : $\left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2 \ll 1$, et β_{TE} devient sensiblement :

$$\beta_{TE} = \beta_{TEM} \left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2$$

(1) On retrouvera pourtant cette propriété dans les guides circulaires avec le mode TE_{01} (§ 923)

Nous avons vu (§ 636) que β_{TEM} varie comme $\sqrt{\omega}$; $\left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2$ varie comme $\frac{1}{\omega^2}$; le produit varie donc comme $\omega^{-\frac{3}{2}}$, il décroît et tend vers zéro quand la fréquence augmente. On voit aussi que l'amortissement croît indéfiniment quand la fréquence se rapproche de la fréquence de coupure $\left(\lambda_0 = \frac{2b}{n}\right)$, le dénominateur du second facteur tendant vers zéro.

Amortissement dans le mode TM.

845 - On peut calculer, par la même méthode, l'amortissement dans le cas des ondes TM entre deux plans conducteurs.

Le résultat du calcul est le suivant :

$$\beta_{TM} = \frac{1}{2cb} \sqrt{\frac{K}{\mu}} \sqrt{\frac{\mu_m \omega}{2\pi\sigma_m}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2}},$$

ou encore :

$$\beta_{TM} = \beta_{TEM} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{2b}\right)^2}}$$

Cette formule montre :

- 1^{re} : que l'amortissement croît indéfiniment quand la fréquence augmente indéfiniment.
- 2^{de} : que l'amortissement tend également vers l'infini quand la fréquence se rapproche de la fréquence de coupure.
- 3^e : que l'amortissement présente un minimum pour une certaine fréquence f_m supérieure à la fréquence de coupure f_c .

846 - La fig. 845 représente les variations de β en fonction de la fréquence pour les différentes structures envisagées ci-dessus.

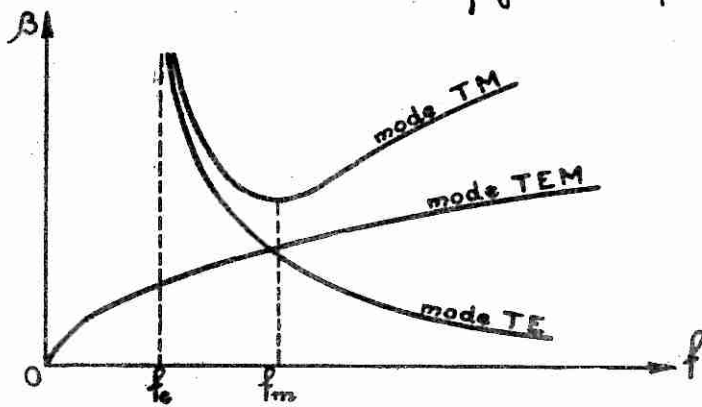


Fig. 845.

847 - Dans ce qui précède on a étudié le cas simplifié des guides

constitués par deux plans conducteurs parallèles indéfinis.

Le cas des guides rectangulaires se traite d'une manière analogue, en faisant intervenir les pertes dans les deux paires de côtés opposés. Nous nous bornerons à donner les résultats pratiques du calcul des courbes représentatives de l'affaiblissement β dans quelques cas particuliers.

848 - Cet affaiblissement varie avec les dimensions et la forme du guide. La fréquence optimale (donnant l'affaiblissement minimum) pour un périmètre donné du guide, dépend du rapport $\frac{a}{b}$ des deux côtés du rectangle, et il existe un rapport pour lequel cet affaiblissement minimum passe lui-même par un minimum. Ce rapport est voisin de 1,2 dans le cas de l'onde TE_{11} par exemple.

849 - La fig. 846 représente les variations de l'affaiblissement en fonction de la fréquence, pour les modes TE_{01} , TM_{11} et TE_{11} dans un guide carré de 10 cm de côté.

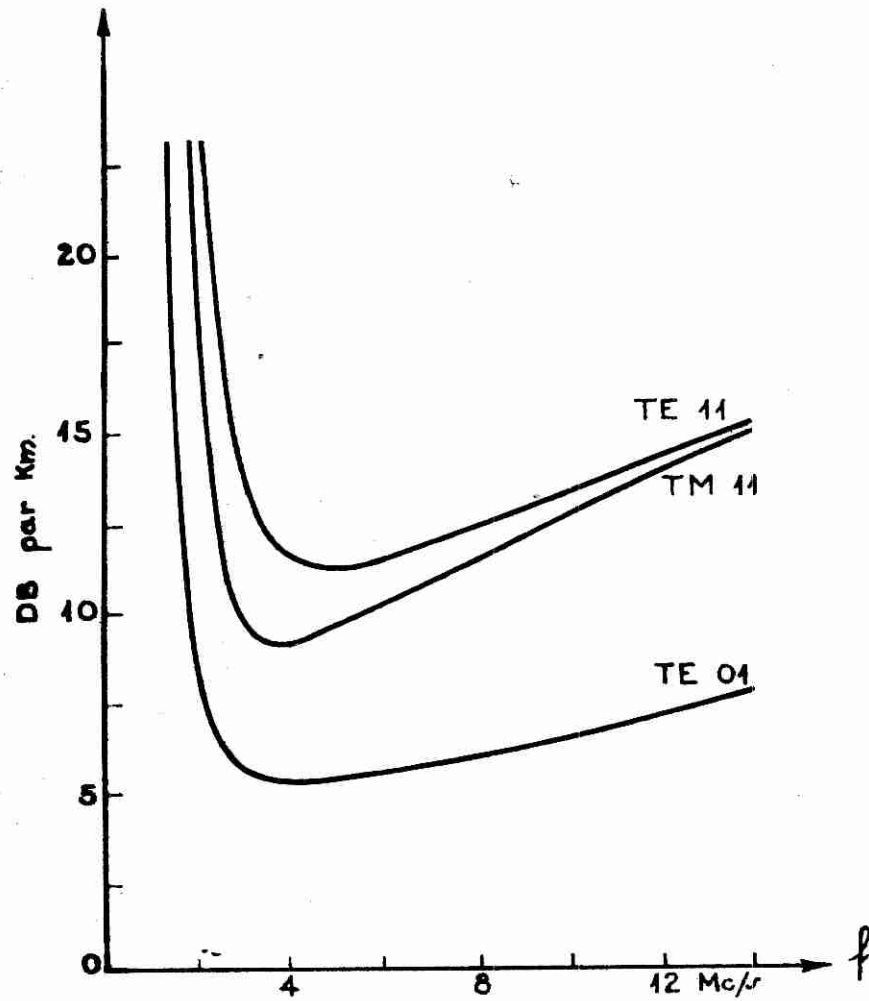


Fig. 846

Les guides d'ondes à section circulaire et les lignes coaxiales

861 - La théorie des guides d'ondes à section circulaire se conduit d'une manière toute semblable à celle des guides d'ondes rectangulaires,

sous réserve d'utiliser les coordonnées cylindriques (θ, r, z) au lieu des coordonnées rectangulaires. On est amené à faire dans les équations de Maxwell le changement de variable :

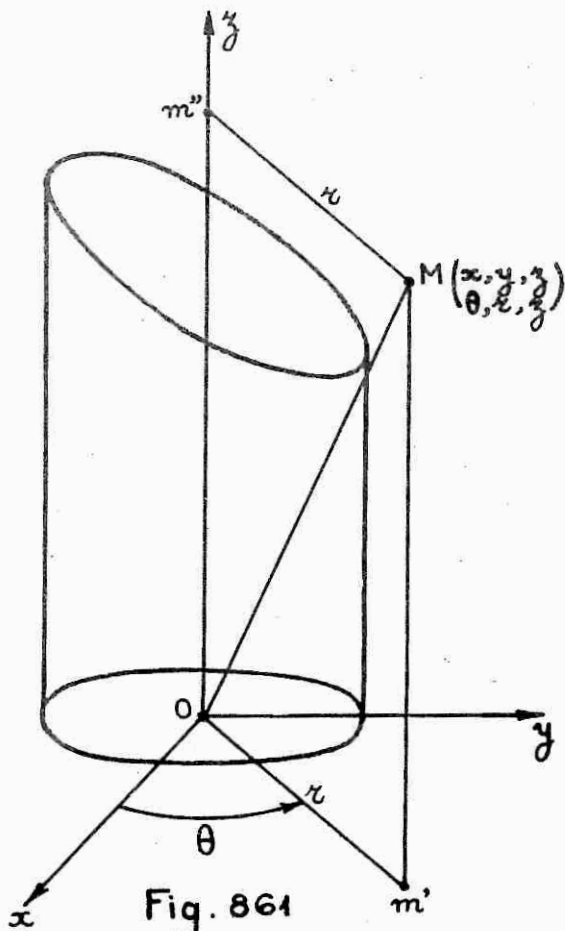
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Par un processus analogue à celui qui a été développé du § 791 au § 812, on trouve qu'il existe encore deux types d'ondes :

1^{re} : des ondes du mode TE, dans lesquelles le champ électrique

est purement transversal ($E_z = 0$)

2^{de} : des ondes du mode TM, dans lesquelles c'est le champ magnétique qui est purement transversal ($H_z = 0$).



Dans tous les cas, il existe une composante axiale, soit du champ magnétique (onde du mode TE) soit du champ électrique (ondes du mode TM).

A. Cas particulier des lignes coaxiales.

862 - C'est l'existence de cette composante axiale qui marque la différence essentielle existant entre les guides cylindriques et les lignes à conducteurs coaxiaux dont il a déjà été question au Chap. VI (§ 322).

Dans les lignes coaxiales que nous avons considérées, le champ électrique et le champ magnétique étaient tous deux purement transversaux; le premier était axial tandis que le second

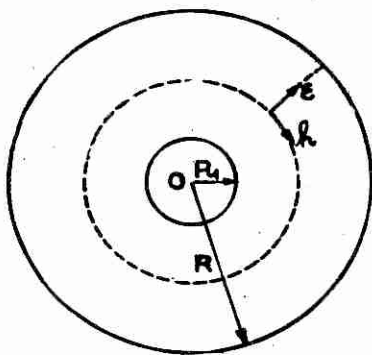


Fig. 862

était tangent aux cercles centrés sur l'axe de la ligne (fig. 862). L'intensité des champs E et h était constante tout au long de ces cercles, par raison de symétrie.

Ce type d'onde, où le champ électrique et le champ magnétique sont tous deux transversaux est désigné sous

le nom de type TEM, et nous avons eu un premier exemple avec les ondes planes (§ 60) en milieu indéfini ou bien entre deux plans parallèles orientés perpendiculairement au champ électrique (§ 79)

863 - On peut d'ailleurs regarder la ligne coaxiale comme dérivant d'une ligne à deux conducteurs plans parallèles infiniment larges. La forme annulaire (fermée sur elle-même) du milieu de propagation élimine, en effet, les effets des bords (c'est-à-dire les conditions aux limites) grâce à quoi le champ

électromagnétique peut y prendre la même structure que dans

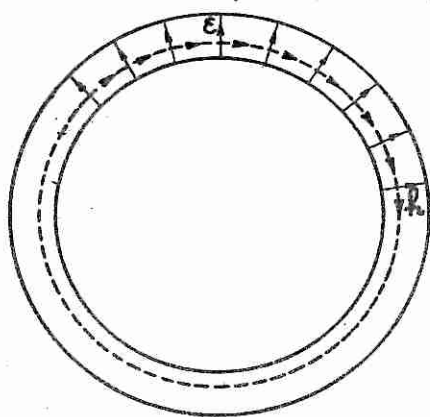


Fig. 863

une ligne à deux conducteurs plans infiniment larges. Ce fait devient évident si l'on considère une ligne coaxiale construite avec deux conducteurs de rayons très voisins l'un de l'autre (fig. 863).

Il peut naturellement exister, dans les lignes coaxiales de même qu'entre deux plans parallèles, bien d'autres

structures d'ondes que le type TEM, mais ces types d'ondes n'ont pas d'applications pratiques. Par contre, la ligne coaxiale représente le seul type de guide (section fermée) dans lequel une onde du type TEM puisse se propager.

864 - Au chapitre VI, nous avons traité les lignes coaxiales en leur appliquant brutalement la théorie des lignes à deux conducteurs, basée sur l'existence des trois coefficients C_1 , L_1 , et R_1 représentant respectivement la self-induction, la capacité et la résistance par unité de longueur.

Ses coefficients C_1 et L_1 sont donnés par les lois de l'électrostatique et de l'électromagnétisme ordinaire. On avait, en effet :

$$\begin{cases} L_1 = 2 \text{ Log } \frac{R}{R_1} \\ C_1 = \frac{1}{2 c^2 \text{ Log } \frac{R}{R_1}} \end{cases}, \quad \begin{array}{l} (R_1 \text{ étant le rayon du} \\ \text{conducteur intérieur et} \\ R \text{ le rayon du conducteur} \\ \text{extérieur - voir fig. 862}). \end{array}$$

d'où l'on a tiré l'impédance caractéristique :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = 2 c \text{ Log } \frac{R}{R_1}$$

865 - Dans ce qui va suivre, nous traiterons le problème autrement, en nous attachant à étudier ce qui se passe dans le milieu qui sépare ces deux conducteurs. C'est bien, en effet, en ce milieu que se tient et que se propage l'énergie, aussi bien dans les câbles coaxiaux que dans les guides creux à un seul conducteur précédemment considérés.

Or, précisément, dans l'étude des guides rectangulaires, nous avons été amenés à établir, aussi bien pour les ondes du mode TE que celles du mode TM, des formules générales valables quelle que soit la forme de la section du guide, pourvu que celui-ci soit un guide cylindrique ayant ses génératrices parallèles à l'axe oz (§§ 792 à 800 ; 811 et 812).

Cette théorie est donc immédiatement applicable aux lignes coaxiales et nous en concluons tout d'abord que celles-ci peuvent admettre, comme les guides creux, des ondes du mode TE et du mode TM.

866 - En ce qui concerne, en particulier, la disposition des lignes de force électrique et magnétique dans une section transversale, les conclusions des §§ 799 et 800 pour les ondes TE et celles du § 812 pour les ondes TM sont parfaitement valables pour la ligne coaxiale.

Dans le cas des ondes TE, les lignes de force du champ électrique (qui se confondent avec les courbes $H_3 = Cte$) sont normales aux parois de la ligne.

Dans le cas des ondes du mode TM, les lignes de force du champ magnétique se confondent avec les courbes $E_3 = Cte$, et les conducteurs se confondent avec les courbes particulières $E_3 = 0$.

867 - Dans le cas des ondes du mode TE, les solutions sont données par l'équation (12) :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}_z}{\partial y^2} + k^2 \mathcal{H}_z = 0$$

avec $k^2 = \gamma^2 + \frac{K\mu}{c^2} \omega^2$ (en supposant $\sigma = 0$).

Dans le cas des ondes du mode TM, elles sont, au contraire, données par l'équation analogue où $\mathcal{H}_z$ est remplacé par $\mathcal{E}_z$:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial y^2} + k^2 \mathcal{E}_z = 0.$$

Nous allons voir que la ligne coaxiale admet une solution de plus que les guides creux, à savoir la solution $k = 0$. En effet l'équation (12), par exemple, devient :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}_z}{\partial y^2} = 0,$$

et l'on a : $\gamma = j \frac{\omega \sqrt{K\mu}}{c}$.

C'est la valeur que nous avons trouvée pour l'onde plane se propageant dans un espace indéfini. Quant à la valeur de l'impédance Z , elle devient, aussi bien dans le cas de l'onde TE (équation (9)) que celui de l'onde TM :

$$\begin{cases} Z_{TE} = 4\pi \frac{j\mu\omega}{j \frac{\omega \sqrt{K\mu}}{c}} = 4\pi c \sqrt{\frac{\mu}{K}} \\ Z_{TM} = 4\pi \frac{j \frac{\omega \sqrt{K\mu}}{c}}{j \frac{K}{c^2} \omega} = 4\pi c \sqrt{\frac{\mu}{K}} \end{cases}.$$

Nous retrouvons la valeur de l'impédance d'espace calculée, à propos des ondes planes, au § 79 ci-dessus. Nous voyons aussi que l'on a $\mathcal{H}_z = 0$, puisque le rapport $\frac{\mathcal{H}_z}{k^2}$ (voir § 799) doit demeurer fini. On ferait un raisonnement analogue pour les ondes du mode TM.

La conclusion commune est que l'on a simultanément :

$$\mathcal{E}_z = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_z = 0.$$

Il n'y a ni composante électrique ni composante magnétique dans la direction de la propagation.

L'onde correspondante ($k = 0$) est une onde purement transversale (TEM) comme l'onde plane en milieu indéfini. Ce type d'onde est généralement désigné sous le nom de type ou de mode principal.

868 - Désignons par Φ la quantité :

$$\Phi = \frac{\gamma}{k^2} \mathcal{H}_z,$$

qui tend vers une limite finie lorsque k tend vers zéro, puisque son gradient représente précisément le champ magnétique transversal (§ 799) :

$$\mathcal{H}_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \mathcal{H}_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

avec : $\mathcal{E}_x = c \sqrt{\frac{\mu}{K}} \mathcal{H}_y$ et $\mathcal{E}_y = -c \sqrt{\frac{\mu}{K}} \mathcal{H}_x$.

La fonction Φ satisfait l'équation :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0,$$

qui n'est autre chose que l'équation de Laplace dans l'espace à deux dimensions.

Nous aurions pu aussi bien partir d'une onde du mode TM et poser :

$$\Psi = \frac{\gamma}{k^2} \varepsilon_z ,$$

à la suite de quoi ε_x et ε_y sont définies par les relations :

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \varepsilon_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

Comme la fonction Φ , la fonction Ψ satisfait à l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

Cette fonction Ψ représente le potentiel de la composante transversale $\varepsilon_T = \varepsilon_x + \varepsilon_y$. Quant aux champs $\mathcal{H}_x$ et $\mathcal{H}_y$, ils sont liés à ε_x et ε_y par les mêmes formules que précédemment :

$$\varepsilon_x = c \sqrt{\frac{\mu}{K}} \mathcal{H}_y \quad \varepsilon_y = -c \sqrt{\frac{\mu}{K}} \mathcal{H}_x$$

Il s'en suit, que tout réseau de trajectoires orthogonales satisfaisant à l'équation de Laplace, constitue une solution du problème.

869 - Étant donné un guide d'onde dont la section est une courbe fermée quelconque, nous devons trouver une fonction Ψ qui satisfait à l'équation de Laplace et qui s'annule en chaque point de la paroi du guide.

Or, on sait que, mathématiquement, il n'existe aucune fonction satisfaisant à ces conditions excepté $\Psi = 0$. Le mode purement transversal ou TEM ne peut donc pas exister dans les guides composés d'un seul conducteur creux.

870 - Nous avons déjà rencontré ce résultat dans le cas des guides à section rectangulaire ; il aurait fallu

en effet, avoir simultanément $m = 0$ et $n = 0$, c'est-à-dire une répartition uniforme du champ dans les deux dimensions rectangulaires de la section du guide, ce qui est impossible à cause des conditions aux limites.

L'onde du mode TEM dans la ligne coaxiale.

871 - Dans ce mode d'ondes, d'après ce qui a été dit précédemment, le champ électrique est radial; nous le

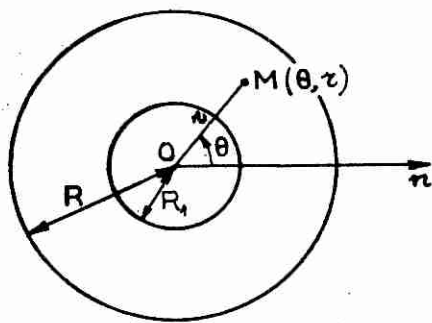


Fig. 871

désignerons par $E = E_r$, tandis que le champ magnétique est tangentiel (fig. 871); nous le désignerons par $H = H_\theta$.

Le champ E dérive d'un potentiel Ψ satisfaisant à l'équation de Laplace $\Delta \Psi = 0$ et prenant la valeur Ψ_1 , potentiel du conducteur intérieur, pour

$r = R_1$ et la valeur Ψ_2 , potentiel du conducteur extérieur pour $r = R$. Ce potentiel est, comme dans le cas du condensateur cylindrique de rayons R_1 et R et comme on peut aisément le vérifier, une grandeur proportionnelle à $\log r$, d'où il suit que le champ électrique est proportionnel à $\frac{1}{r}$. On trouve :

$$E_r = \frac{c}{r} \sqrt{\frac{\mu}{K}} A_0 e^{-\gamma z}, \quad (A_0 \text{ étant une constante complexe.})$$

d'où l'on tire d'après les relations existant entre les composantes de E_x E_y H_x et H_y (§ 868) :

$$H_\theta = \frac{A_0}{r} e^{-\gamma z},$$

avec, dans les deux cas : $\gamma = j \frac{\omega \sqrt{K\mu}}{c}$;

les autres composantes de E et de H sont nulles.

Nous voyons qu'une onde du mode principal (ou TEM) peut se propager dans une ligne coaxiale, et que sa vitesse est la même que dans un milieu indéfini de mêmes constantes que le diélectrique qui remplit l'intervalle des deux conducteurs de la ligne.

872 - Nous observons aussi qu'il n'existe pas de fréquence de coupure dans la ligne coaxiale.

873 - Nous pouvons enfin nous proposer de calculer l'impédance caractéristique de la ligne.

Cette impédance est donnée par le rapport $\frac{V}{I}$.

V est égal à l'intégrale du champ E_r prise depuis $r = R_1$ jusqu'à $r = R$:

$$V = \int_{r=R_1}^{r=R} \frac{c}{r} \sqrt{\frac{\mu}{K}} \mathcal{H}_0 e^{-\gamma z} dr$$

$$V = c \sqrt{\frac{\mu}{K}} \mathcal{H}_0 \text{Log} \frac{R}{R_1} e^{-\gamma z}.$$

D'autre part, la loi d'Ampère nous a appris que la circulation du champ magnétique autour d'un contour fermé comprenant le courant i était égale à $4\pi i$. On en tire :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4\pi} \int_c \mathcal{H}_0 ds = \frac{1}{4\pi} \times 2\pi R \times \frac{\mathcal{H}_0}{R} e^{-\gamma z} \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{H}_0 e^{-\gamma z} \end{aligned}$$

On a finalement :

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{c \sqrt{\frac{\mu}{K}} \mathcal{H}_0 \text{Log} \frac{R}{R_1} e^{-\gamma z}}{\frac{1}{2} \mathcal{H}_0 e^{-\gamma z}} = 2c \sqrt{\frac{\mu}{K}} \text{Log} \frac{R}{R_1}.$$

B. Cas des guides d'ondes à section circulaire.

881 - Comme il a déjà été dit au § 861, l'étude des guides d'ondes à section circulaire se conduit en coordonnées cylindriques, d'une manière analogue à celle qui a été utilisée, en coordonnées cartésiennes, pour les guides à section rectangulaire.

Ses équations de Maxwell en coordonnées cylindriques s'écrivent :

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z} (r \mathcal{E}_\theta) \right\} = -j \omega \mu \mathcal{H}_r \quad (1')$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial r} = -j \omega \mu \mathcal{H}_\theta \quad (2')$$

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \mathcal{E}_\theta - \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial \theta}) \right\} = -j \omega \mu \mathcal{H}_z \quad (3')$$

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z} (r \mathcal{H}_\theta) \right\} = 4 \pi \sigma \mathcal{E}_r \quad (4')$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial r} = 4 \pi \sigma \mathcal{E}_\theta \quad (5')$$

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \mathcal{H}_\theta) - \frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial \theta} \right\} = 4 \pi \sigma \mathcal{E}_z \quad (6')$$

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \mathcal{E}_r) + \frac{\partial \mathcal{E}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} (r \mathcal{E}_z) \right\} = 0 \quad (7')$$

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \mathcal{H}_r) + \frac{\partial \mathcal{H}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} (r \mathcal{H}_z) \right\} = 0 \quad (8')$$

Comme au § 794 ci-dessus, on trouve qu'il existe deux systèmes de solutions correspondant encore aux deux modes TE ($\mathcal{E}_z = 0$) et TM ($\mathcal{H}_z = 0$).

882 - Dans le cas du mode TE, on trouve que $\mathcal{E}_r$ et $\mathcal{E}_\theta$ sont liés à $\mathcal{H}_r$ et $\mathcal{H}_\theta$ par les relations suivantes, analogues aux relations (9) du § 795 :

$$\frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{H}_\theta} = -\frac{\mathcal{E}_\theta}{\mathcal{H}_r} = \frac{j\mu\omega}{\gamma} = \frac{Z_{TE}}{4\pi} \quad (9')$$

Le champ électrique et le champ magnétique transversal sont perpendiculaires l'un à l'autre et leurs intensités sont proportionnelles.

Ces champs sont définis, en fonction du champ magnétique longitudinal par les relations (analogues aux relations (10) et (11) du § 795 :

$$\mathcal{H}_r = -\frac{\gamma}{k^2 r} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial r} \quad (10')$$

$$\mathcal{H}_\theta = \frac{\gamma}{k^2 r} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial \theta} \quad , \quad (11')$$

$$\text{avec } k^2 = \gamma^2 - j\mu\omega \left(4\pi\sigma + j\frac{K}{c^2}\omega \right) \quad (13)$$

Enfin, on trouve que le champ $\mathcal{H}_z$ est donné par l'équation différentielle du second ordre suivante, analogue à l'équation d'onde (12) du § 795 :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_z}{\partial \theta^2} + k^2 \mathcal{H}_z = 0 \quad (12')$$

883 - Dans le cas du mode TM ($\mathcal{H}_z = 0$), on trouve des relations analogues, et en particulier :

$$\frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{H}_\theta} = -\frac{\mathcal{E}_\theta}{\mathcal{H}_r} = \frac{\gamma}{j\frac{K}{c^2}\omega} = \frac{Z_{TM}}{4\pi} \quad (9'')$$

$$\mathcal{E}_r = \frac{\gamma}{k^2} \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial r} \quad (10'')$$

$$\mathcal{E}_\theta = \frac{\gamma}{k^2 r} \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial \theta} \quad (11'')$$

toujours avec :

$$k^2 = \gamma^2 - j \mu \omega \left(4\pi\sigma + j \frac{K}{c^2} \omega \right). \quad (13'')$$

Finalement le champ électrique longitudinal est donné par l'équation d'ondes (à deux dimensions) :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial \theta^2} + k^2 \mathcal{E}_z = 0 \quad (12'')$$

884 - On peut aisément vérifier que les fonctions $\mathcal{E}_z$ et $\mathcal{H}_z$ qui satisfont cette équation différentielle ont la forme d'un produit de deux termes :

- le premier, fonction de θ seul, est une fonction sinusoïdale de la forme :

$\sin n\theta$ ou $\cos n\theta$, où n est un nombre entier

- le second, est une fonction de Bessel de première espèce, d'ordre n , de la variable kr .

En effet, si, dans l'équation différentielle, on remplace $\mathcal{E}_z$ par la fonction :

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{U}(r) \cos n\theta,$$

on trouve que $\mathcal{U}(r)$ doit satisfaire l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \mathcal{U} = 0,$$

qui est une équation de Bessel d'ordre n .

885 - On a vu au Chap. I_a (§ 251) qu'il y avait pour chaque valeur de n , deux solutions indépendantes de l'équation de Bessel :

- la fonction de première espèce $J_n(x)$,
- la fonction de 2^{ème} espèce $Y_n(x)$.

Ces fonctions ont l'aspect donné par les courbes de la fig. 881, sauf J_0 qui part de l'origine pour $x = 0$, au lieu de partir de l'unité. Toutes deux sont vaguement sinusoïdales

avec une amplitude qui décroît en gros comme l'inverse de la racine carrée de la variable. Elles possèdent, l'une par rapport à l'autre une relation de phase semblable à celle qui relie $\sin x$ à $\cos x$, chacune ayant ses maxima et ses zéros en coïncidence avec

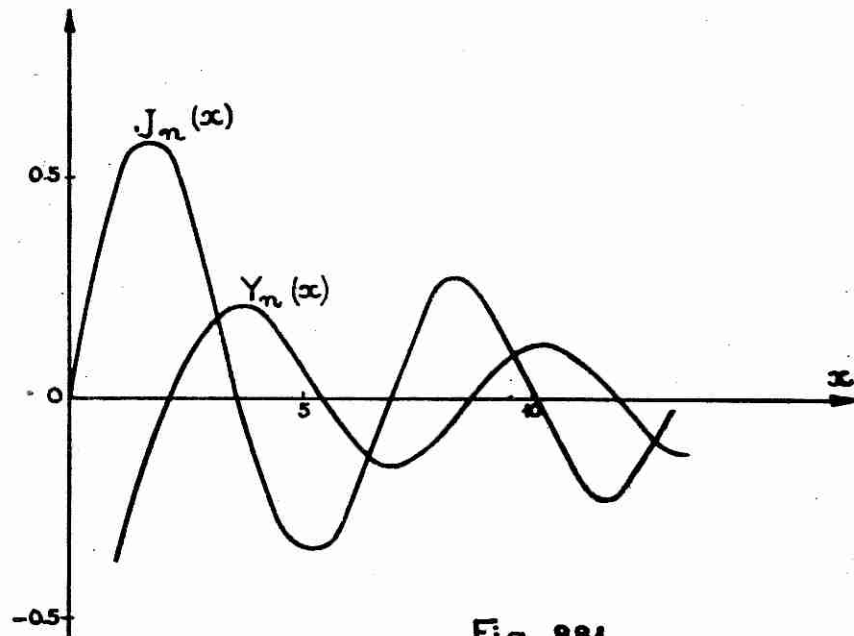


Fig. 884

les zéros et les maxima de l'autre ; pour $x = 0$, on a $J_n(x) = 0$ et $Y_n(x)$ infini : La solution générale est une combinaison linéaire de $J_n(x)$ et de $Y_n(x)$, choisie de manière à satisfaire les conditions aux limites sur les conducteurs.

886 - Dans le cas qui nous occupe, la fonction de deuxième espèce doit être éliminée parce que le champ E_z ne peut être infini à l'origine, c'est-à-dire sur l'axe du guide. La fonction $U(kr)$ sera donc, à un coefficient près, égale à $J_n(kr)$ et le champ E_z (ou H_z) sera de la forme de $\sin n\theta$ ou $\cos n\theta$ multiplié par $J_n(kr)$. Les conditions aux limites sont différentes dans le cas des ondes du mode TE ou du mode TM.

887 - Dans le cas des ondes TE, d'après le § 799 ci-dessus, la dérivée de H suivant la normale en un point de la surface du conducteur doit être nulle. Cela signifie que la fonction J_n doit présenter un maximum ou un minimum quand on y fait r égal au rayon du guide. Par un choix convenable de k , nous pouvons faire en sorte que $J_n(kr)$ ait son maximum ou minimum d'indice m sur la surface du guide ($r = R$). Nous avons alors une onde du mode $TE_{n,m}$.

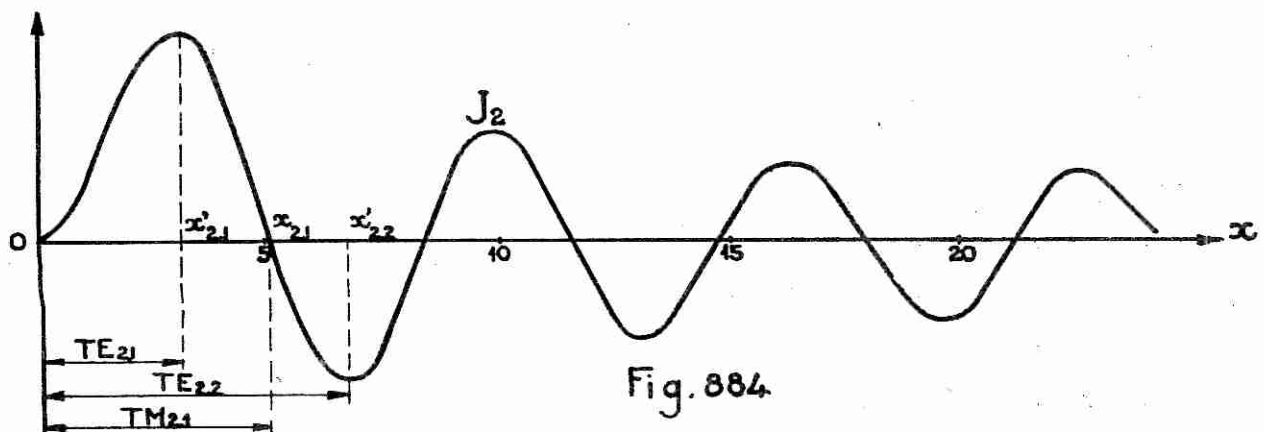
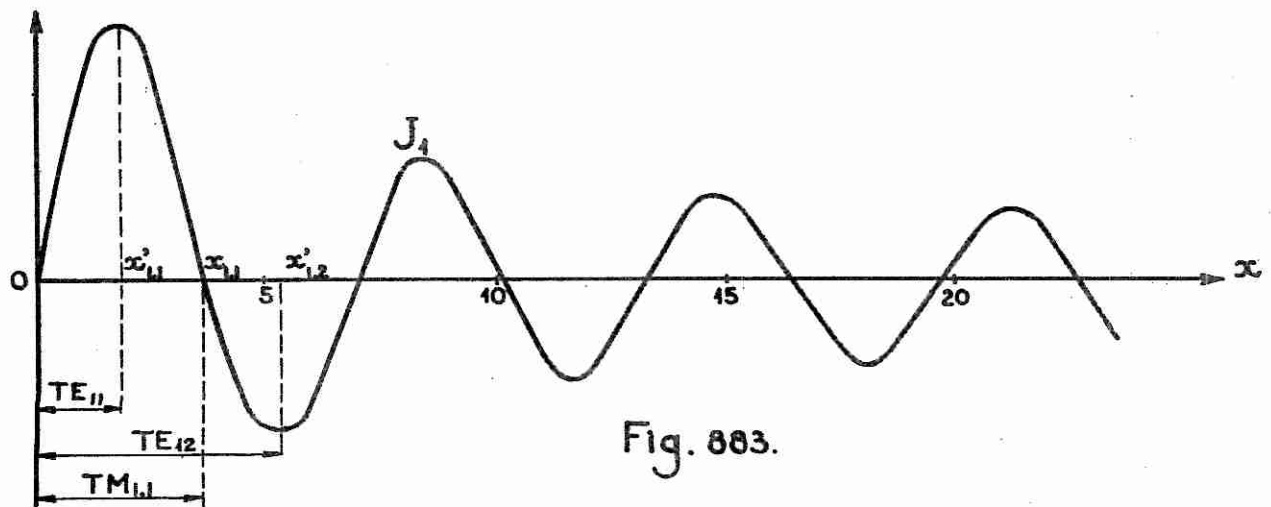
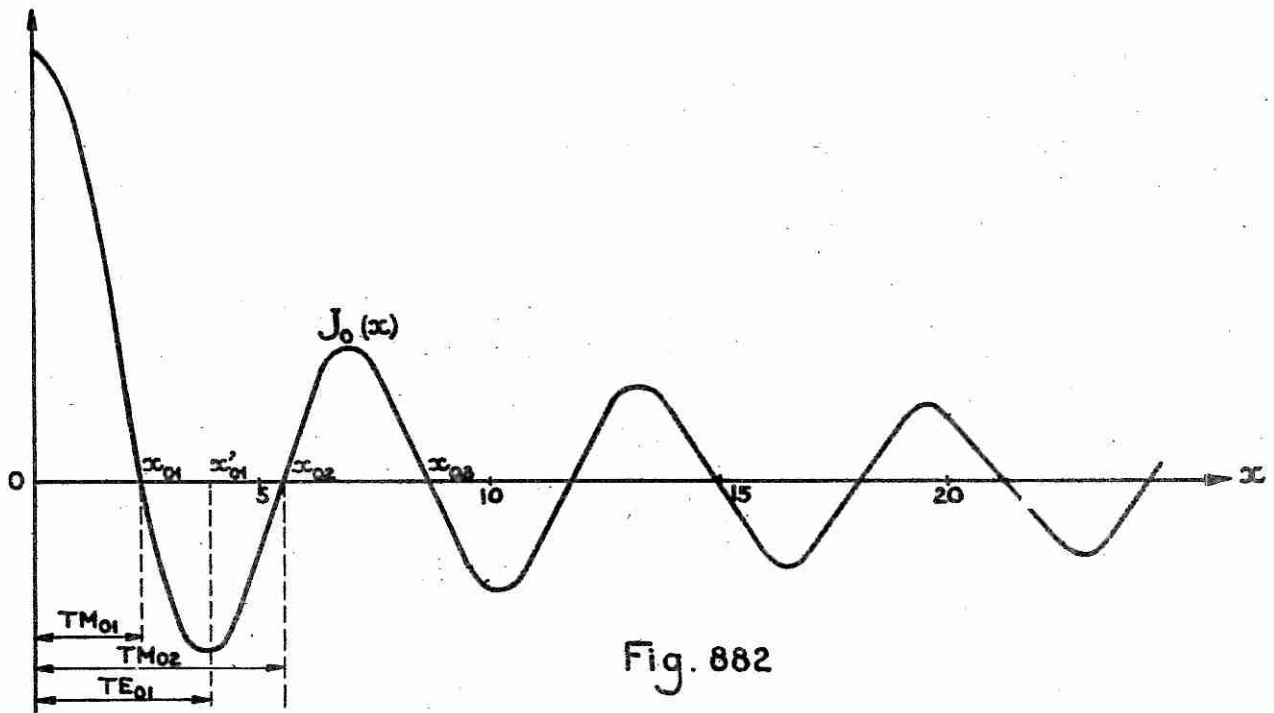
888 - Si nous voulons une onde du mode TM, nous devons avoir $E_z = 0$ à la surface du conducteur. Dans ce cas nous devons choisir k de façon que J_n ait son zéro d'indice m (sans compter l'origine) pour $r = R$. Nous avons alors une onde du mode $TM_{n,m}$.

Le tableau ci-dessous nous donne les premières valeurs de $kr = x$ pour lesquelles :

J_n est maximum ou minimum [$J'_n(x) = 0$]
 J_n est nul [$J_n(x) = 0$].

	J_0		J_1		J_2	
m	TE (Racines de J'_0)	TM (Racines de J_0)	TE (Racines de J'_1)	TM (Racines de J_1)	TE (Racines de J'_2)	TM (Racines de J_2)
1	3,832	2,045	1,842	3,832	3,05	5,135
2	7,016	5,520	5,330	7,016	6,71	8,417

889 - Les fig. 882 à 884 déduites de la fig 140 du Chap. I_a représentent les variations des trois fonctions J_0 , J_1 , et J_2 dont les racines figurent avec celles des dérivées J'_0 , J'_1 , J'_2 dans le tableau ci-dessus.



890 - Des valeurs de x_{nm} données par le tableau ci-dessus, on déduit k par la relation suivante :

$$kR = x_{nm},$$

$$\text{d'où } k = \frac{x_{nm}}{R}.$$

Ayant k , nous en déduisons, comme au § 795, la valeur correspondante de γ par la relation :

$$k^2 = \gamma^2 + \frac{K\mu\omega^2}{c^2},$$

c'est-à-dire :

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \frac{K\mu\omega^2}{c^2}},$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{x_{nm}^2}{R^2} - \frac{k\mu\omega^2}{c^2}}.$$

891 - Pour qu'il y ait propagation, il faut que γ soit imaginaire $\gamma = j\alpha$, c'est-à-dire que la quantité sous radical soit négative :

$$\frac{x_{n,m}^2}{R^2} < \frac{K\mu\omega^2}{c^2}$$

c'est-à-dire :

$$\omega^2 > \frac{x_{nm}^2 c^2}{K\mu R^2}$$

ou :

$$\omega > \frac{c}{\sqrt{K\mu}} \times \frac{x_{nm}}{R}.$$

Cette inégalité définit la fréquence de coupure du guide pour l'onde $TE_{n,m}$:

$$2\pi f_0 = \omega_0 = \frac{c}{\sqrt{K\mu}} \frac{x_{n,m}}{R}$$

ou bien :

$$\lambda_0 = \frac{v}{f_0} = \frac{2\pi R}{x_{nm}}$$

892 - Pour toutes les fréquences supérieures à la fréquence de coupure, la constante de propagation s'écrit :

$$\gamma = j \frac{\omega \sqrt{K\mu}}{c} \sqrt{1 - \frac{\alpha_{nm}^2 c^2}{R^2 K\mu \omega^2}},$$

ou, plus simplement, en fonction de la pulsation de coupure ω_0 :

$$\gamma = j \frac{\omega \sqrt{K\mu}}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}.$$

893 - L'expression de ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{c}{\sqrt{K\mu}} \frac{\alpha_{nm}}{R},$$

montre que la fréquence de coupure est d'autant plus basse que α_{nm} est plus petit.

Le tableau des racines de J_n et de J'_n nous montre que la plus petite valeur de α_{nm} est la première racine de J'_1 , à savoir : $\alpha = 1,842$, correspondant au premier maximum de J_1 . L'onde la plus longue qui pourra se propager dans un guide à section circulaire de rayon R donné est donc l'onde du mode TE_{11} .

La racine suivante est $\alpha_{01} = 2,405$, première racine de J_0 . Elle donne une onde de mode TM_{01} , avec une fréquence de coupure plus élevée que pour le mode TE_{11} précédent.

Toutes les ondes de fréquences comprises entre ces deux fréquences ne sont susceptibles de se propager dans le guide que sur le mode TE_{11} .

Les ondes du mode TE_{11} .

901 - D'après ce qui précède, nous voyons que le champ H_z sera de la forme ($m = 1, n = 1$) :

$$J_1(kr) \sin \theta$$

$$\text{ou } J_1(kr) \cos \theta$$

La fonction J_1 part de zéro pour $r = 0$ et atteint son premier maximum à la surface du conducteur.

Simultanément, $\cos \theta$ décrit un cycle complet lorsque θ fait un tour complet, présentant deux maxima de signes contraires dans deux directions opposées.

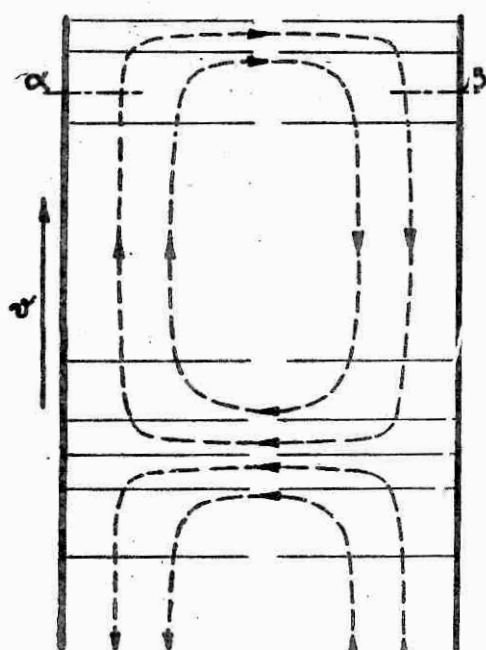
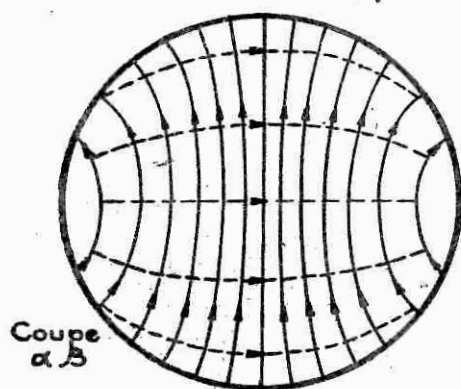
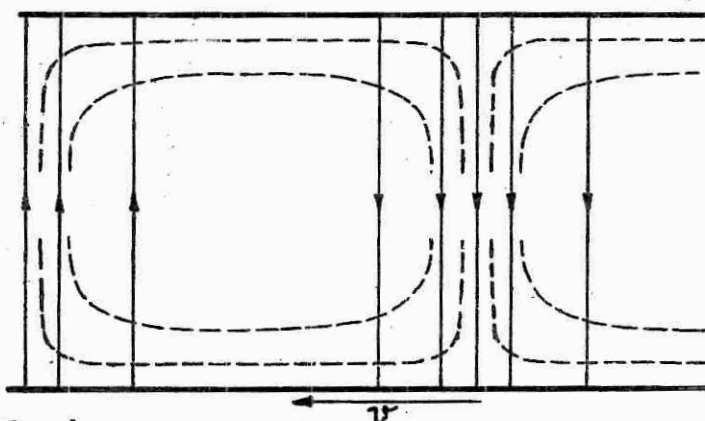


Fig. 901



La fig. 901 représente les lignes de force du champ électrique, lesquelles coïncident avec les courbes $H_z = Cte$ comme on l'a vu au §

Quant aux lignes de force magnétique, ce sont les trajectoires orthogonales des précédents, elles sont représentées en pointillé sur la même figure.

Cet ensemble de lignes de force présente une grande analogie avec celles du mode TE_{01} dans les guides à section rectangulaire. Ces deux modes sont, en

effet, celle qui correspondent, pour chaque type de guide, à la fréquence de coupure la plus basse. Ses dimensions sont aussi comparables. Dans le guide rectangulaire, la largeur doit être au moins égale à $\frac{\lambda}{2}$, λ étant la longueur d'onde dans l'espace libre, tandis que le diamètre du guide circulaire doit être au moins égal à $\frac{1,842}{\pi} \lambda = 0,584 \lambda$.

Les ondes du mode TM_{01} .

902 - Tant que le produit $\omega R \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c}$ est compris entre $\alpha_{0,1} = 2,405$ et $\alpha'_{2,1} = 3,05$ (voir tableau du § 888) le guide est susceptible de propager des ondes des deux seuls modes TE_{11} et TM_{01} . Ce dernier mode d'ondes est intéressant parce qu'il présente, comme d'ailleurs les modes TE_{0n} ou TM_{0n} une symétrie circulaire; cette symétrie est particulièrement utile lorsqu'il s'agit d'installer des joints tournants. Dans les modes TM_{0n} , par exemple, le champ E_z est, d'après le § 884, proportionnel à :

$$J_n(kr) \times \sin n\theta$$

ou $J_n(kr) \times \cos n\theta$

Comme on a, dans le cas actuel : $n = 0$, il suit que E_z est simplement proportionnel à :

$$J_0(kr),$$

c'est-à-dire fonction de r seul (et pas du tout de l'angle θ).

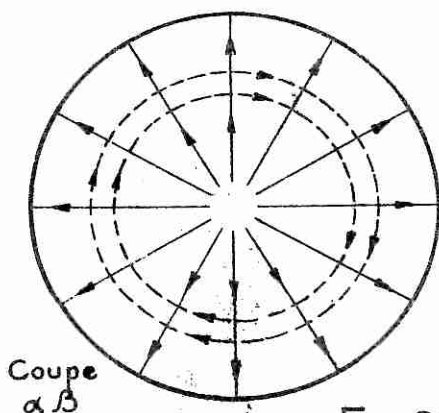
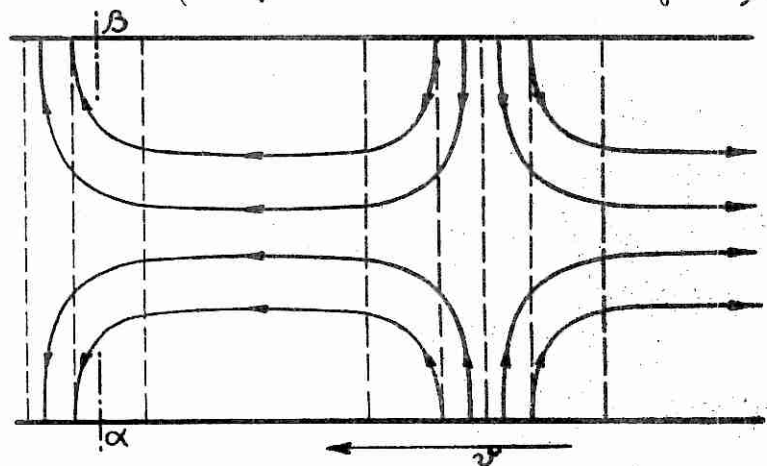


Fig. 902



Les lignes de force magnétique, qui d'après le § 812 se confondent avec les courbes $E_z = Cte$, sont des courbes $kr = Cte$ ou $r = Cte$, c'est-à-dire des cercles ayant leur centre sur l'axe du guide.

Quant aux lignes de force du champ électrique transversal, qui sont les trajectoires orthogonales des précédents, ce sont les rayons de ces mêmes cercles.

Le champ électrique transversal est, d'après le § 812, le gradient de la fonction $-\frac{\gamma}{k^2} E_z$. Il est nul au centre ($r = 0$) et maximum à la paroi ($r = R$).

Enfin le champ magnétique, perpendiculaire au champ électrique transversal a une intensité égale à celle de ce champ, divisée par l'impédance $\frac{Z}{4\pi}$ du § 883 ci-dessus:

$$\frac{Z}{4\pi} = \frac{\gamma}{j \frac{K}{C^2} \omega}$$

La fig. 902 représente les lignes de force du champ électrique et du champ magnétique dans le mode TM_{01} .

903 - Si nous nous reportons au tableau du § 888, nous voyons que dans un guide de rayon donné R , excité par une fréquence progressivement croissante, les modes d'ondes suivants apparaissent successivement comme possibles, après les modes TE_{11} et TM_{01} :

$$\begin{array}{l} TE_{21} \text{ possible pour } 2\pi R_1 f \geq 3,05^{(1)} \\ \left. \begin{array}{l} TE_{01} \\ TM_{11} \end{array} \right\} \text{ possibles pour } 2\pi R_1 f \geq 3,832 \\ TM_{21} \text{ possible pour } 2\pi R_1 f \geq 5,135 \\ \dots \dots \dots \text{ etc} \dots \dots \dots \end{array}$$

Pour étudier les structures de ces différentes ondes, il est préférable de les classer par familles représentant des caractères semblables.

(1) On suppose ici que le milieu qui remplit le guide est l'air ($\frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} = 1$)

Nous commencerons par considérer celles qui dérivent de la fonction J_0 . Comme il a été dit plus haut, toutes ces ondes présentent une symétrie de révolution autour de l'axe du guide parce que la variable θ est éliminée.

Les ondes du mode $TM_{0,m}$.

904 - Nous avons déjà étudié le mode $TM_{0,1}$; comme dans celui-ci, le champ magnétique demeure en toutes circonstances circulaire, mais son intensité, toujours nulle au centre, passe par $(m-1)$ maxima et $(m-1)$ zéro avant de redevenir maximum à la surface du conducteur.

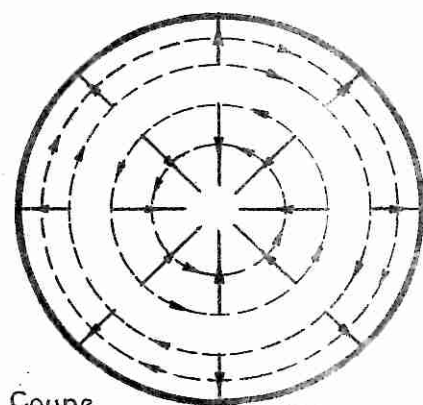
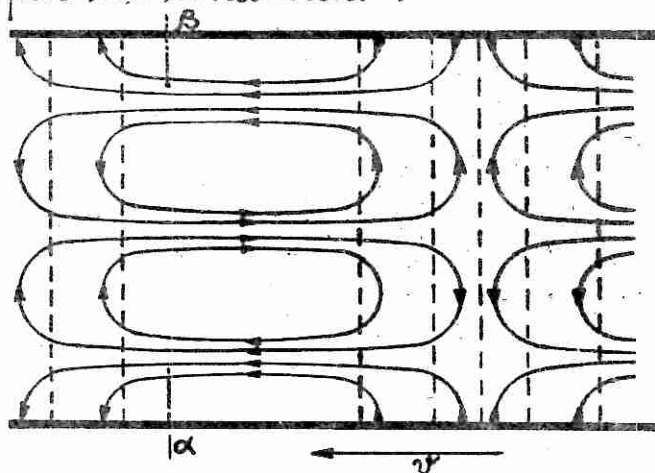


Fig. 904



La fig. 904 représente les différentes lignes de force dans le cas de l'onde $TM_{0,2}$. Ses modes $TM_{0,3}$ et suivants ont des aspects analogues.

Les ondes du mode $TE_{0,m}$.

905 - Considérons tout d'abord le mode $TE_{0,1}$. La courbe 882 montre que H_z présente un maximum au centre, un autre sur la paroi et un zéro entre les deux maxima.

Les lignes de force du champ électrique, qui se confondent avec les courbes $H_z = Cte$, sont, cette fois, composées de

cercles concentriques à l'axe du guide, tandis que le champ transversal s'annule sur l'axe et sur la paroi, en présentant un maximum intermédiaire.

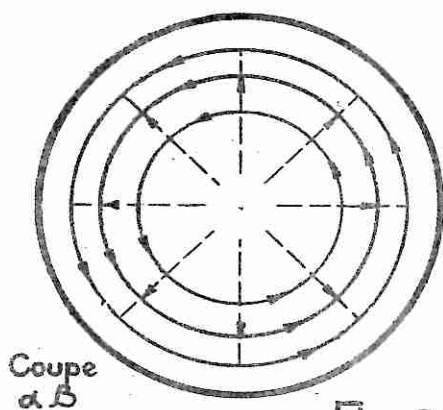


Fig. 905

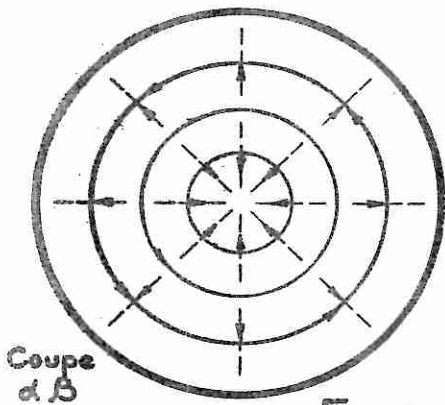
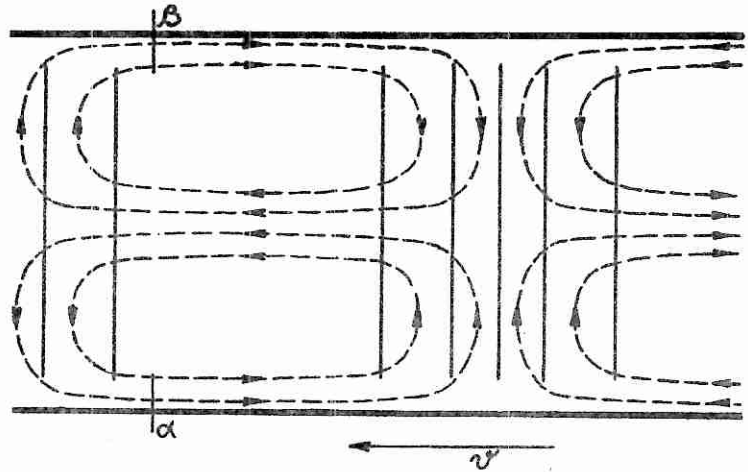
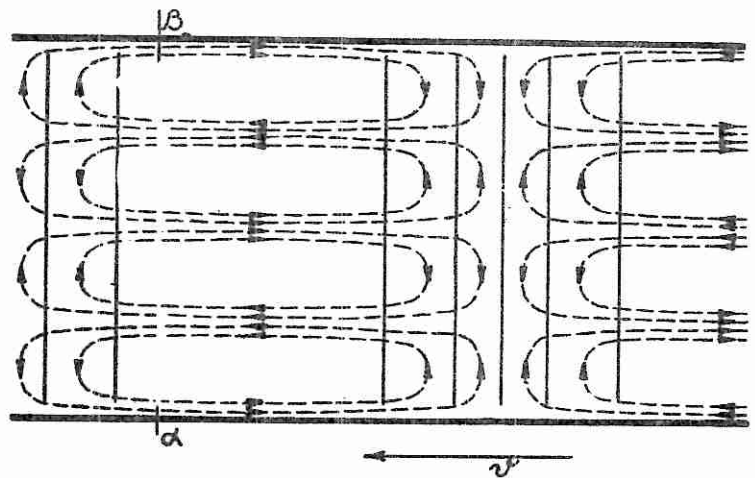


Fig. 906



La fig. 905 donne l'aspect des lignes de force dans ce mode d'ondes.

Dans le cas du mode $TE_{0,2}$, on a, en plus, un maximum et un zéro intermédiaires (fig. 906).

906 - On verra plus loin que ces types d'ondes jouissent d'une propriété remarquable. Ce sont en effet les seuls pour lesquels l'affaiblissement (exprimé en db par km, par exemple) soit constamment décroissant quand la fréquence augmente.

Les modes $TM_{1,m}$ et $TE_{1,m}$

907 - Dans ces modes, la variation du champ longitudinal en fonction de l'azimut θ dans la section, est la fonction sinusoidale $\cos \theta$ ou $\sin \theta$. On connaît déjà le mode TE_{11} . Dans le mode $TE_{1,m}$, le champ est toujours maximum au centre, nul sur la paroi avec $(m-1)$ maxima et $(m-1)$ zéros intermédiaires, l'amplitude des maxima étant naturellement variable avec l'azimut θ . Les fig. 907 et 908 donnent l'aspect des lignes de force dans le cas des ondes TE_{12} et TE_{13} .

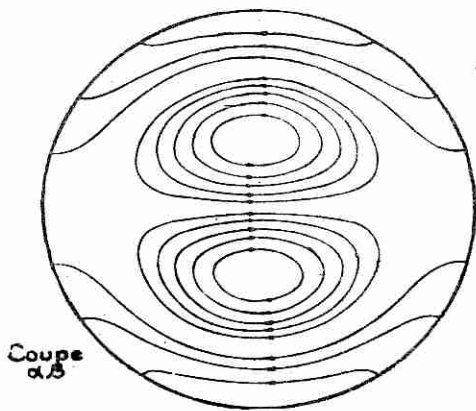


Fig. 907

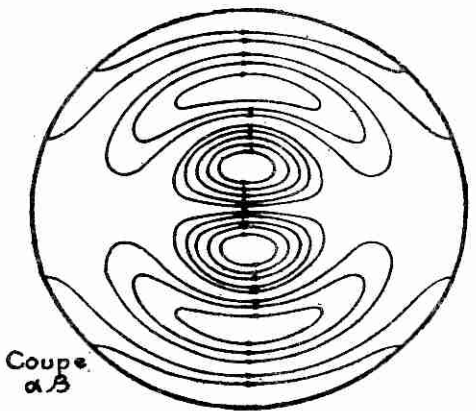
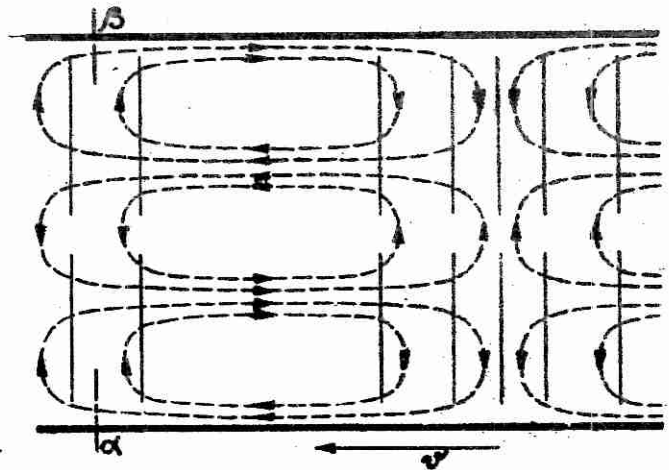
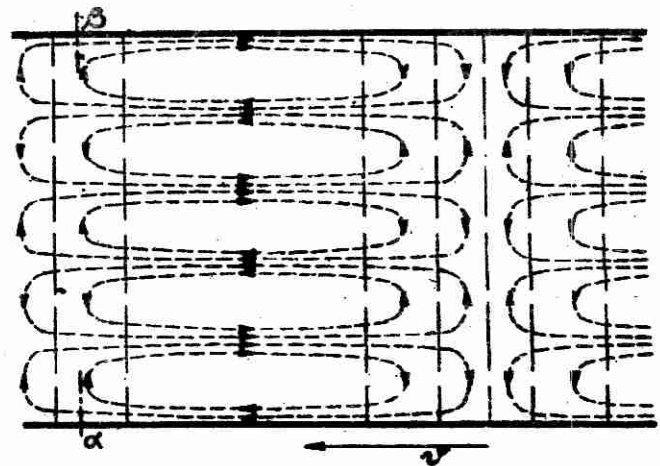


Fig. 908



Les ondes du type TM_n et suivants ont un aspect analogue. La fig. 909 représente la structure du mode TM_{11} et la fig. 910 le mode TM_{12} .

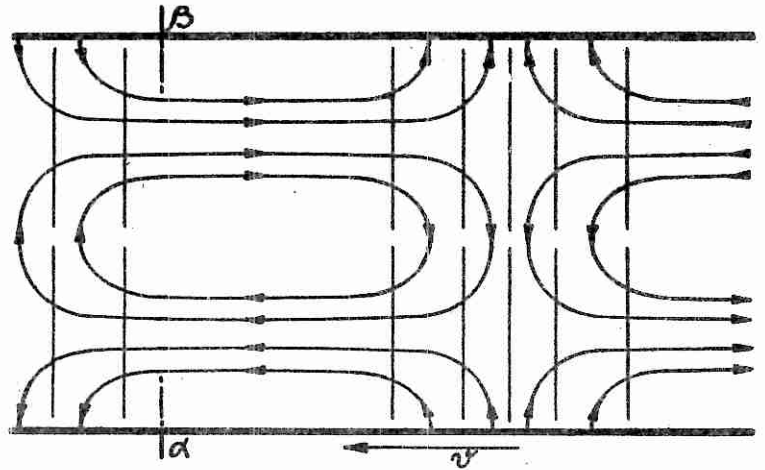
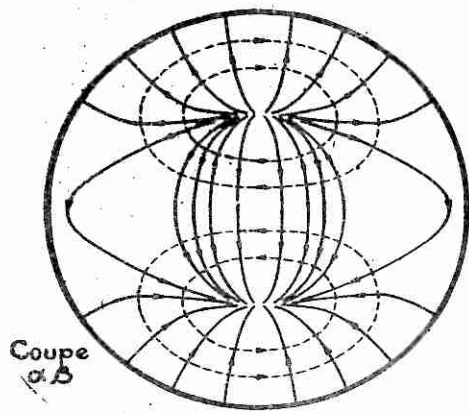


Fig. 909

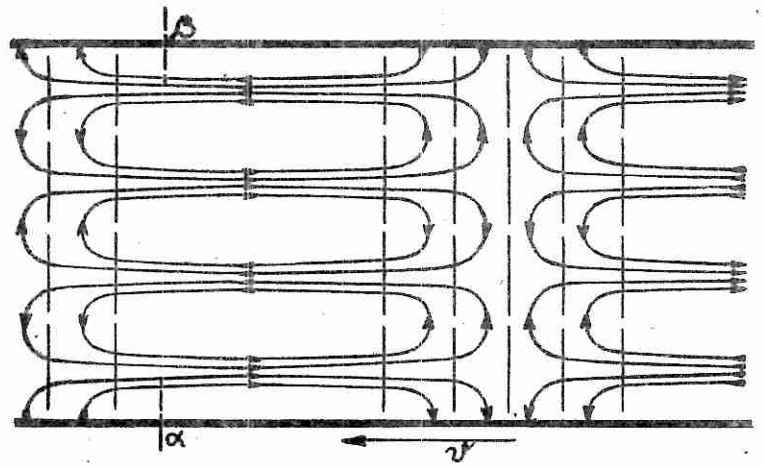
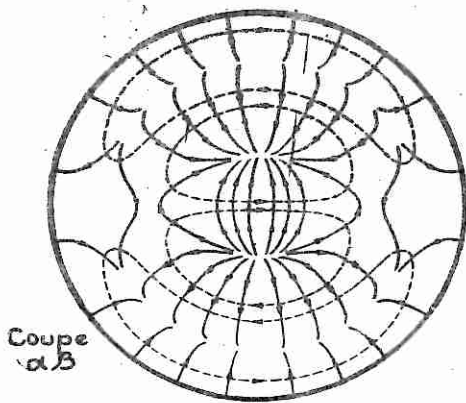


Fig. 910

Les modes $TE_{2,m}$ et $TM_{2,m}$.

911 - Dans ces modes la variation du champ en fonction de θ est de la forme $\sin$ ou $\cos 2\theta$. On observe donc 4 zéros et 4 maxima (valeur absolue) quand le rayon polaire fait un tour du guide. La fig. 911 donne la structure du mode TE_{21} et la fig. 912 celle du mode TE_{22} .

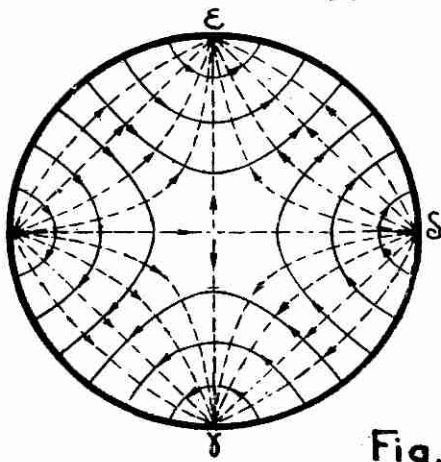


Fig. 911

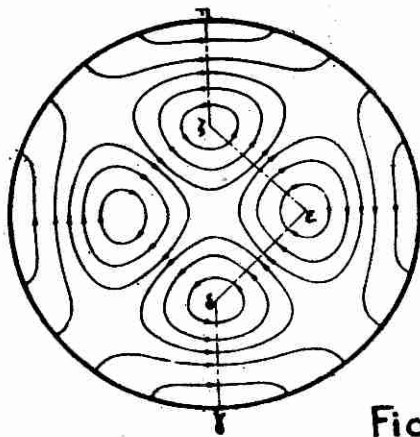
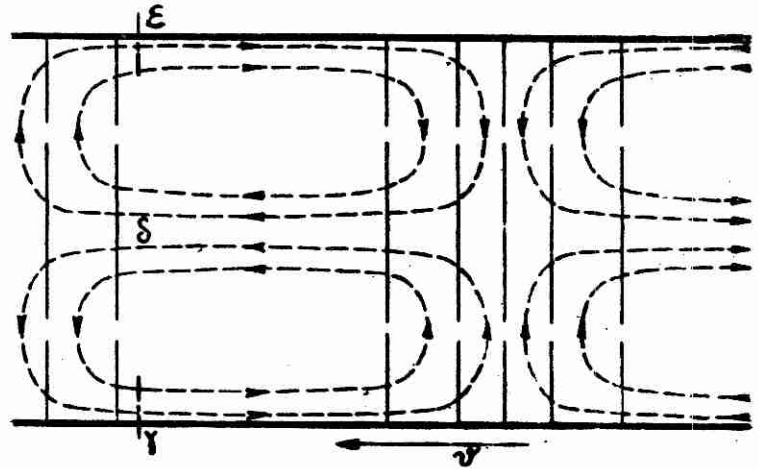
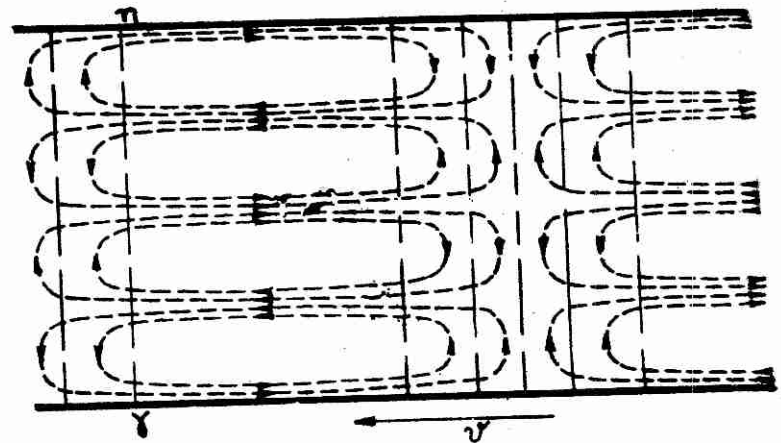


Fig. 912



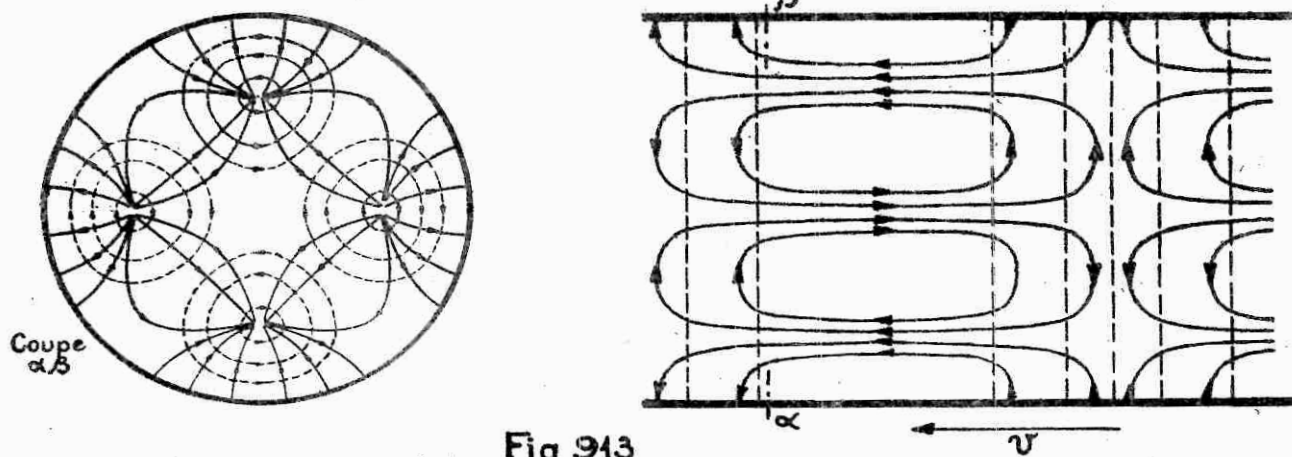


Fig. 913

La fig. 913 est relative au mode TM_{21} .

Les modes d'indices supérieurs.

914 - Au fur et à mesure que l'on augmente les indices m et n , les figures se compliquent.

La fig. 914 donne, à titre d'indication, l'aspect des structures transversales des modes TM_{31} et TM_{32} .

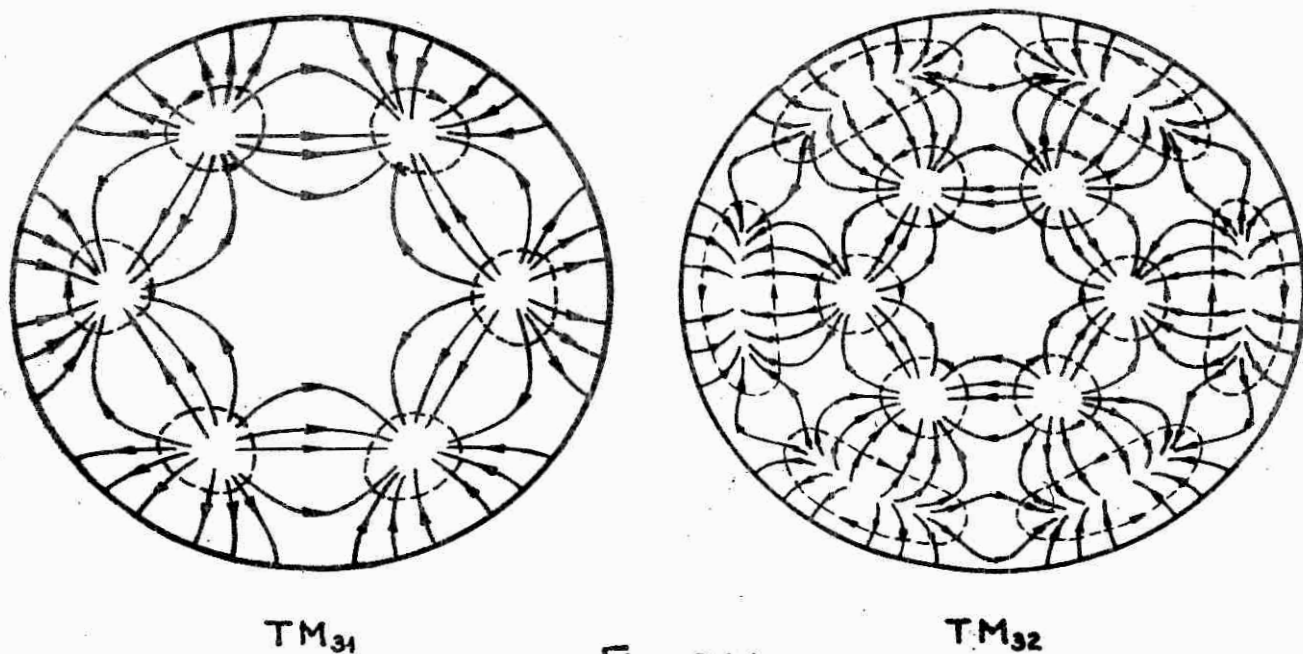


Fig. 914

Atténuation des ondes dans les guides circulaires.

921 - Dans la réalité, les parois des guides circulaires, comme celles des guides rectangulaires, ne sont jamais des conducteurs parfaits, et il subsiste, à leur surface, une petite composante tangentielle du champ électrique ainsi qu'une petite composante normale du champ magnétique. La constante de propagation γ , comme au § 831, cesse d'être une imaginaire pure (pour les fréquences supérieures à la fréquence de coupure) on a :

$$\gamma = \beta + j\alpha \text{ avec } \beta \neq 0,$$

et les différents champs ont la forme suivante :

$$A = A_0 e^{\beta z} e^{j\alpha z}$$

On calcule β par la méthode approchée qui a déjà été utilisée pour les guides rectangulaires (§ 834) et qui consiste à supposer que la distribution du champ électrique et du champ magnétique n'est pas modifiée pratiquement par la présence des pertes ; cette méthode est d'autant plus acceptable que les pertes sont plus faibles, et l'expérience montre qu'elle est parfaitement suffisante dans les conditions habituelles de la pratique.

922 - D'après le théorème de Poynting, la puissance sortant du volume compris entre deux sections transversales d'abscisses z et $z + dz$ est égale au flux du vecteur $\frac{1}{4\pi} \vec{E} \times \vec{h}$ à travers cette même surface. Or l'énergie qui sort pendant le temps dt est égale à la variation d'énergie potentielle $\frac{1}{8\pi} \int_V (\kappa \epsilon^2 + \mu h^2) dV$ diminuée de l'énergie $P_c dz$ consommée dans le tronçon de longueur dz .

Considérée pendant une période, ou un nombre ^{entier} quelconque de périodes, la valeur ^{de la variation} moyenne de $\frac{1}{8\pi} \int_V (\kappa \epsilon^2 + \mu h^2) dV$ est nulle et l'on a :

$$\left. \begin{aligned} \text{val. moy. flux du vecteur de Poynting} \\ \text{sortant d'un élément de longueur } dz \text{ du guide} \end{aligned} \right\} = \text{val. moy. de } (-P_c dz) \\ = -\bar{P}_c dz .$$

Il n'y a pas de flux du vecteur de Poynting à travers la paroi latérale du guide puisque les champs s'annulent dans la paroi du guide. Soit $\bar{P}_z$ le flux moyen à travers la section d'abscisse z et $\bar{P}_z + d\bar{P}_z$ le flux moyen à travers la section d'abscisse $z + dz$. Le flux sortant sera $d\bar{P}_z$ et l'on aura finalement la relation :

$$d\bar{P}_z = -P_c dz ;$$

or $\bar{P}_z$ ne dépend de z que par la relation exponentielle $e^{-2\beta z}$.
On a donc :

$$d\bar{P}_z = P_z \times -2\beta dz ,$$

d'où l'on tire finalement :

$$\beta = \frac{P_c}{2\bar{P}_z} .$$

Il ne suffit plus que de calculer $\bar{P}_z$ et P_c . Comme il a déjà été dit, on calcule $\bar{P}_z$, flux moyen du vecteur de Poynting à travers une section droite du guide, en prenant pour valeurs de E et de H celles qui sont obtenues dans l'hypothèse où il n'y a pas de pertes. Le calcul donne, en particulier, les résultats suivants (où R représente le rayon du conducteur extérieur et R_1 celui du conducteur intérieur dans le cas de la ligne coaxiale) :

$$\text{Câble coaxial: } \bar{P}_z = \frac{1}{4} R^2 \text{Log} \frac{R}{R_1} \epsilon_p (R) H_\theta (R) = \frac{1}{4} R^2 \text{Log} \frac{R}{R_1} \sqrt{\frac{\mu}{K}} \overline{H_\theta (R)}^2$$

$$\text{Mode } TM_{01}: \bar{P}_z = \frac{1}{8} R^2 \epsilon_p (R) H_\theta (R) = \frac{1}{8} R^2 \frac{v}{v'} \sqrt{\frac{\mu}{K}} \overline{H_\theta (R)}^2$$

$$\text{Mode } TE_{01}: \bar{P}_z = \frac{1}{8} R^2 \frac{v v'}{v'^2 - v^2} \sqrt{\frac{\mu}{K}} \overline{H_z (R)}^2$$

Dans ces formules les E et H représentent les amplitudes des diverses composantes du champ électrique et du champ magnétique.

Il nous faut aussi calculer P_c et pour cela connaître

l'amplitude du courant dans les conducteurs du guide. Ce courant est lié au champ magnétique sur la paroi. On a :

$$\text{Onde TM}_{01} : 4\pi I = 2\pi R_2 H_\theta(R) .$$

$$\text{Onde coaxiale} : I = \frac{R}{2} H_\theta(R) .$$

$$\text{Onde TE}_{01} : 4\pi I_\theta = H_z(R) dz .$$

(le courant est circulaire)

Ces formules, combinées avec les précédentes, permettent d'exprimer I en fonction de $\bar{P}_z$. On obtient :

$$\text{Onde TM}_0 : I = \sqrt{2\bar{P}_z \sqrt{\frac{K}{\mu}}} \sqrt{\frac{v'}{v}} .$$

$$\text{Onde coaxiale} : I = \sqrt{\frac{2\bar{P}_z}{2 \log \frac{R}{R_1}}} \sqrt{\frac{K}{\mu}} .$$

$$\text{Onde TE}_0 : I_\theta = \frac{1}{4\pi} \frac{dz}{R} \sqrt{8\bar{P}_z \sqrt{\frac{K}{\mu}}} \sqrt{\frac{v'}{v} - \frac{v}{v'}} .$$

Ces trois expressions permettent de nous rendre compte comment varie ce courant en fonction de la fréquence, la puissance transmise $\bar{P}_z$ étant supposée existante. En effet v' tend vers v quand la fréquence augmente : dans le cas de l'onde TM_0 , il s'en suit que I tend vers une limite finie.

Dans le cas de l'onde coaxiale, l'intensité I ne dépend pas de la fréquence.

Dans le cas de l'onde TE_0 , l'intensité I tend vers zéro. Cela tient à ce fait que le courant I , qui est circulaire, ne correspond pas à une composante du champ magnétique essentielle au phénomène de la transmission de l'énergie dans le guide.

923 - Pour calculer la puissance dissipée P_c il faut connaître la résistance ρ offerte au courant I précédemment calculé : cette résistance doit tenir compte de l'effet de peau dont il a été question au § 115 ci-dessus, et au Chap. II (§ 826).

On trouve, en désignant par μ_m et σ_m la perméabilité et la conductibilité du métal constituant la paroi du guide :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour l'onde TM}_0 : dp = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\mu_m f}{\sigma_m}} dz \\ \text{Pour l'onde coaxiale} : dp = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) \sqrt{\frac{\mu_m f}{\sigma_m}} dz \\ \text{Pour l'onde TE}_0 : p dz = \frac{(2\pi R)^2}{R} \sqrt{\frac{\mu_m f}{\sigma_m}} \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit les valeurs correspondantes de $\bar{P}_c$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour l'onde TM}_0 : \bar{P}_c = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{K\mu_m}{\mu\sigma_m}} \sqrt{f} \frac{v'}{v} \bar{P}_3 \\ \text{Pour l'onde coaxiale} : \bar{P}_c = \frac{1}{R} \frac{1 + \frac{R}{R_1}}{2 \log \frac{R}{R_1}} \sqrt{\frac{K\mu_m}{\mu\sigma_m}} \sqrt{f} \bar{P}_3 \\ \text{Pour l'onde TE}_0 : \bar{P}_c = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{K\mu_m}{\mu\sigma_m}} \sqrt{f} \frac{v'^2 - v^2}{vv'} \bar{P}_3 ; \end{array} \right.$$

D'où finalement les expressions des coefficients d'amortissement α :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Mode TM}_0 : \alpha = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{K\mu_m}{\mu\sigma_m}} \frac{2}{R} \frac{v'}{v} \sqrt{f} \\ \text{Mode coaxial} : \alpha = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{K\mu_m}{\mu\sigma_m}} \frac{2}{R} \frac{1 + \frac{R}{R_1}}{2 \log \frac{R}{R_1}} \sqrt{f} \\ \text{Mode TE}_0 : \alpha = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{K\mu_m}{\mu\sigma_m}} \frac{2}{R} \frac{v'^2 - v^2}{vv'} \sqrt{f} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{avec :} \\ \frac{v'}{v} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_0}{f}\right)^2}} \\ f_0 \text{ étant la fréquence de coupure (§ 821).} \end{array}$$

Ce dernier groupe de formules montre que :

- 1° : Dans le mode TM_0 , l'affaiblissement passe par un minimum lorsque $f = f_0 \sqrt{3}$;
- 2° : Dans la ligne coaxiale, l'affaiblissement croît comme $\sqrt{f}$;
- 3° : Dans le mode TE_0 , l'affaiblissement décroît quand la fréquence augmente.

924 - La fig. 924 donne les variations de ces affaiblissements exprimés en décibels par kilomètre, en fonction de la fréquence, dans les cas suivants :

- 1° : ligne coaxiale de 10 cm de diamètre [courbe A]
- 2° : guide de 10 cm de diamètre parcouru par des ondes du mode TM_{01} , TE_{11} et TE_{01} .

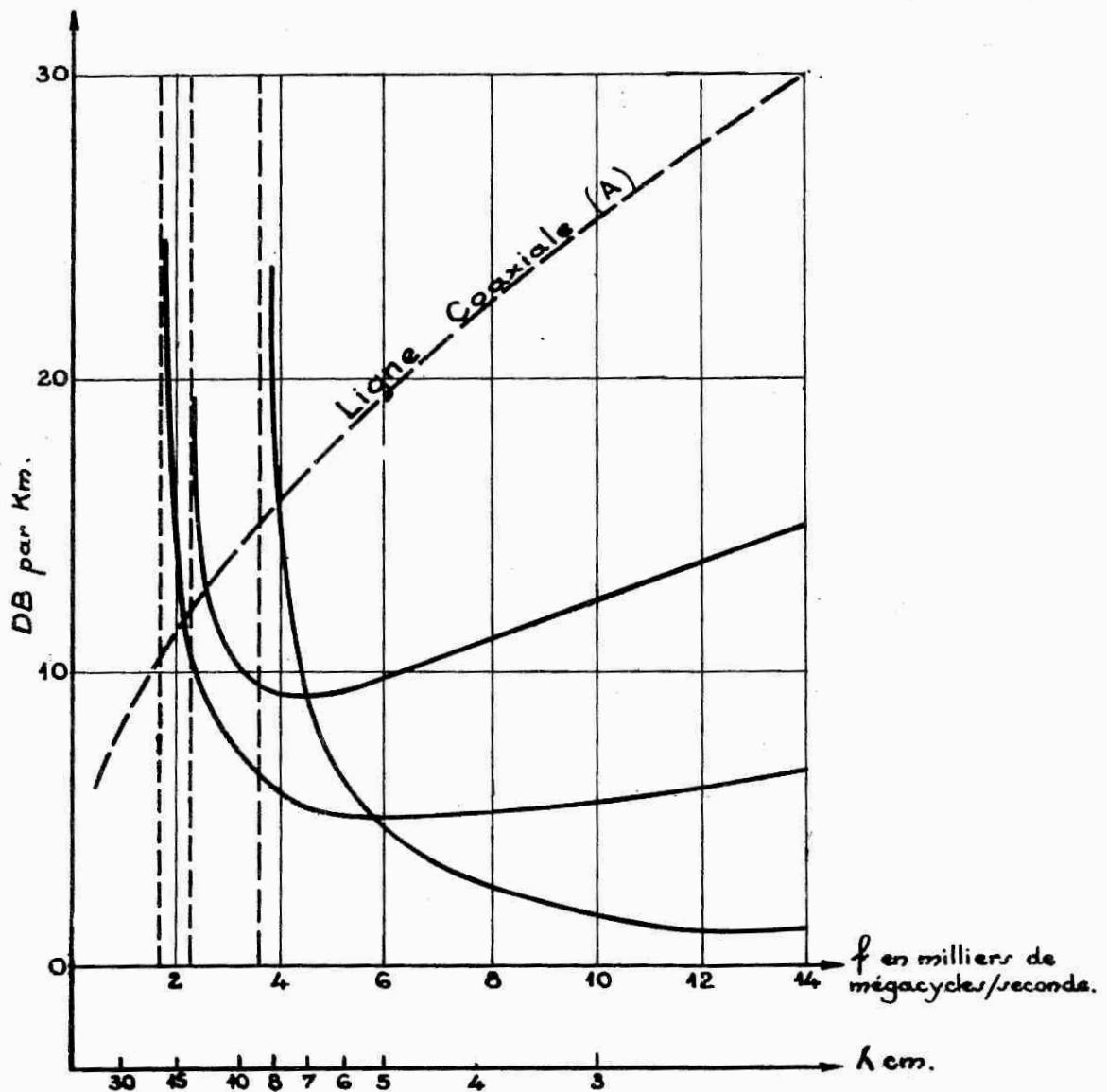


Fig. 924

Réflexions dans les guides d'ondes.

931 - Les guides d'ondes que nous avons considérés jusqu'ici sont supposés à section constante et indéfiniment prolongés des deux côtés.

Comme dans les lignes à deux conducteurs, tout changement dans les caractéristiques du guide provoque une réflexion d'énergie et par conséquent une perte dans la transmission.

932 - Un guide ouvert à son extrémité rayonne du champ à l'extérieur, en même temps que de l'énergie est réfléchi en sens inverse dans le guide.

Si le guide est fermé par une paroi métallique parfaitement conductrice, la réflexion est totale et le guide est le siège d'ondes stationnaires. Nous retrouverons des réflexions de ce genre dans les volumes résonnants du § 961 ci-après.

933 - Une fente pratiquée dans le fond, ou dans une paroi du guide produit un résultat qui diffère considérablement suivant l'orientation de cette fente par rapport aux lignes de force du champ électromagnétique. Si la fente est parallèle aux lignes de

force du champ électrique, ou plus exactement parallèle aux lignes de courant dans la paroi du guide à l'endroit considéré, la fente ne rayonne aucune énergie à l'extérieur et la propagation dans le guide n'est pas modifiée.

Si la fente est oblique (et surtout perpendiculaire) à la direction du champ électrique, une différence de potentiel apparaît à ses bords, d'où rayonnement d'un champ électromagnétique à l'extérieur.

934 - Dans un guide, on peut utiliser une cloison en forme de grille (ce qui est une manière de réaliser un réseau de fentes) pour sélectionner un mode d'ondes parmi plusieurs qui seraient susceptibles de se propager dans ce guide. Il suffit pour cela que les barres ou fils de la grille soient disposés selon la direction des lignes de force de l'onde à arrêter, ou plutôt, perpendiculairement aux lignes de force du champ à conserver. On arrive d'ailleurs à la même conclusion en remarquant que, le long de la cloison, il ne peut subsister de champ électrique parallèlement aux fils de grille. Le champ électrique est donc obligatoirement normal à ces fils.

Ainsi, dans un guide circulaire, on utilisera une grille composée d'anneaux concentriques isolés les uns des autres pour sélectionner l'onde du mode TM_{01} , où la composante transversale du champ électrique est radiale (fig 931).

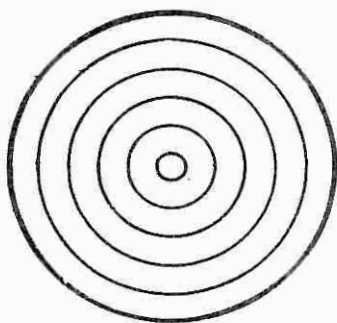


Fig. 931

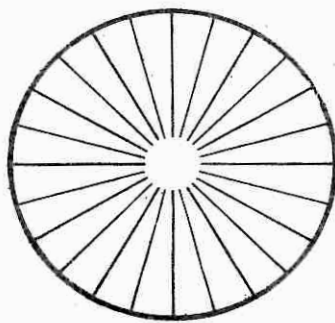


Fig. 932

De même, on utilisera un système de barres rayonnantes (fig. 932) pour sélectionner le mode TE_{01} dont les lignes de force électrique sont des cercles centrés sur l'axe du guide, et ainsi de suite.

935 - Une fenêtre (ou un diaphragme) percé dans une cloison placée en travers du guide permet de régler l'énergie transmise par le guide, tout en provoquant une réflexion partielle des ondes incidentes vers la source qui alimente le guide.

936 - Enfin, on peut absorber l'onde incidente sans donner naissance à une onde réfléchie appréciable, en garnissant le fond du guide d'une substance de constantes électriques K, μ, σ appropriées (gelée de sulfate de cuivre par exemple pour les faibles puissances mises en jeu dans les appareils de mesure).

Effets des changements de caractéristiques du guide.

937 - Les changements de section et d'orientation des guides provoquent des phénomènes analogues. On les atténue

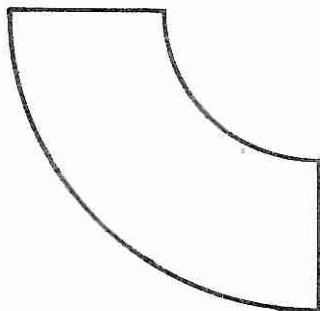


Fig. 933.

en adoptant toujours de grands rayons de courbure, le sens de courbure étant choisi de telle manière qu'il ne modifie pas l'orientation du champ électrique. (voir fig. 933 dans le cas de l'onde TE_{01}).

Utilisation des guides d'ondes.

938 - Les guides d'ondes sont utilisés pour le transport de l'énergie à très haute fréquence. Ils remplacent, à ces fréquences, les lignes à deux conducteurs du Chap. VI, lignes qui présentent des inconvénients croissants quand la fréquence augmente. A ces fréquences, en effet, les lignes à deux

conducteurs parallèles du Chap. VI, rayonnent dans l'espace, une énergie qui croît avec la fréquence, et présentent, par suite, un affaiblissement également croissant avec cette fréquence.

Les lignes coaxiales évitent le rayonnement à l'extérieur, mais pour supprimer les structures d'ondes autres que le mode TEM, nous avons vu que leurs diamètres devaient être d'autant plus petits que la fréquence est plus élevée.

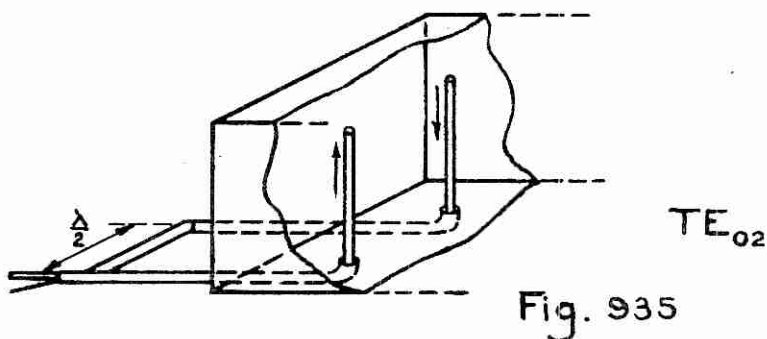
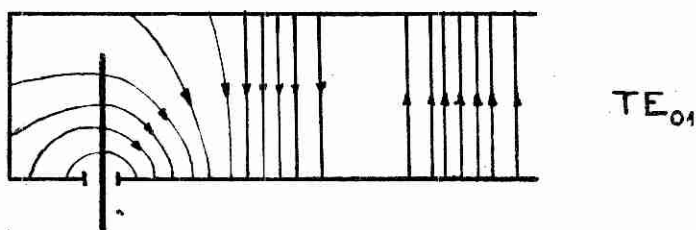
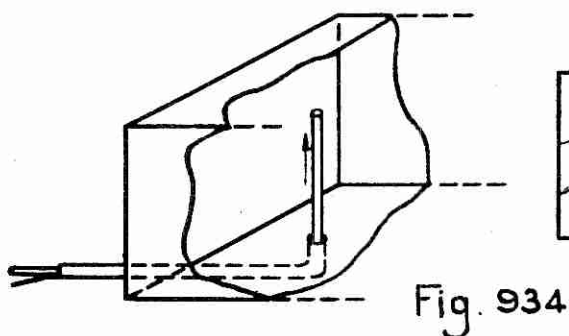
Or, on est limité dans la réduction de l'intervalle entre conducteurs, surtout pour le transport des puissances élevées, par suite de l'effet corona et des pertes diélectriques dans les entretoises qui servent à maintenir le conducteur intérieur dans l'axe

du conducteur extérieur .

A partir d'une certaine fréquence qui se situe vers 1000 ou 3000 Mc/s ($\lambda = 30$ à 10 cm) l'emploi du guide creux, comme moyen de transport de l'énergie HF devient obligatoire dès que la puissance de crête est importante .

Modes de couplage des guides d'ondes .

939 - La méthode générale d'attaque des guides consiste à fermer le guide par une paroi transversale conductrice et à introduire à l'intérieur du guide, un système rayonnant convenablement disposé . Ce système sera constitué au moyen d'une ou plusieurs antennes, ou boucles fermées, agencé de manière à produire un champ de structure aussi voisine que possible de celle du champ qui devra se propager dans le guide . Ses figures 934 à 938 représentent les systèmes d'attaques correspondant à diverses structures d'ondes existant dans les guides rectangulaires .



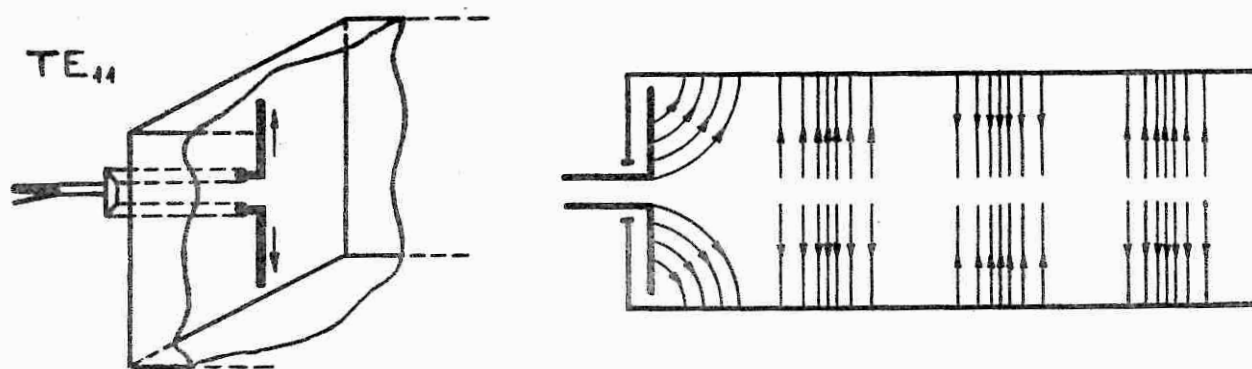


Fig. 936

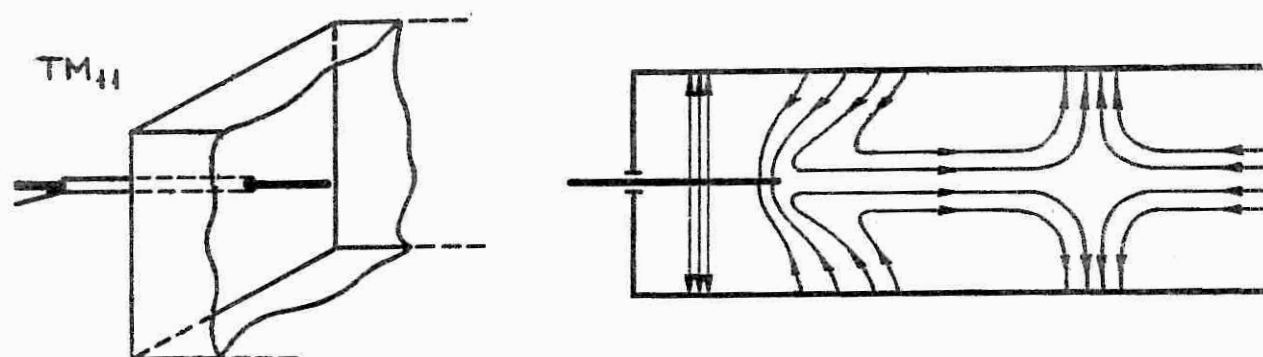


Fig. 937

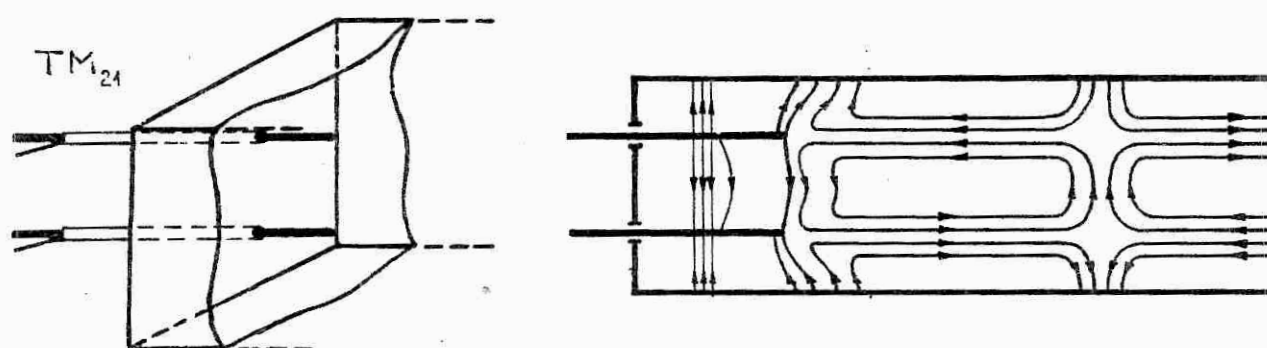


Fig. 938

Cas des guides circulaires .

940 - Le cas des guides circulaires se traite d'une manière analogue . Les figures 940 à 943 indiquent la façon d'attaquer des guides circulaires dans les modes TM_{01} , TM_{11} , TE_{01} , TE_{11} respectivement .

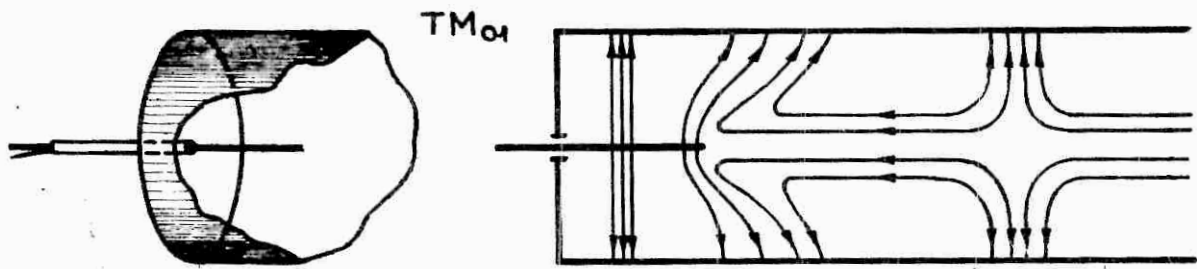


Fig. 940

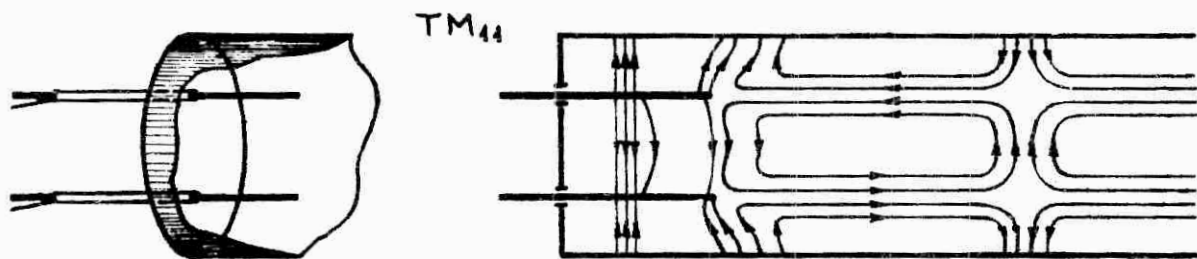


Fig. 941

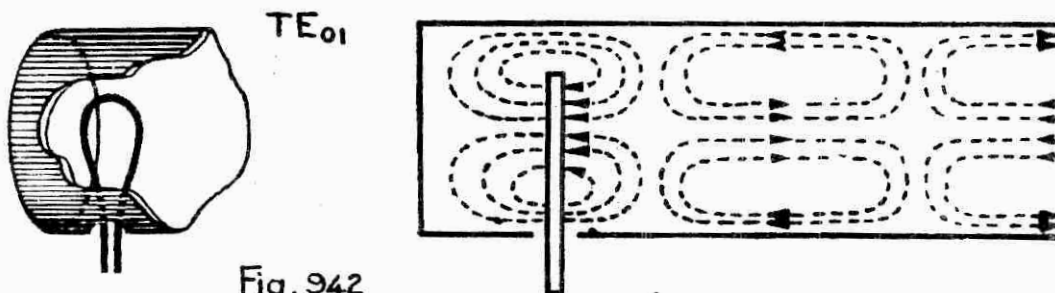


Fig. 942

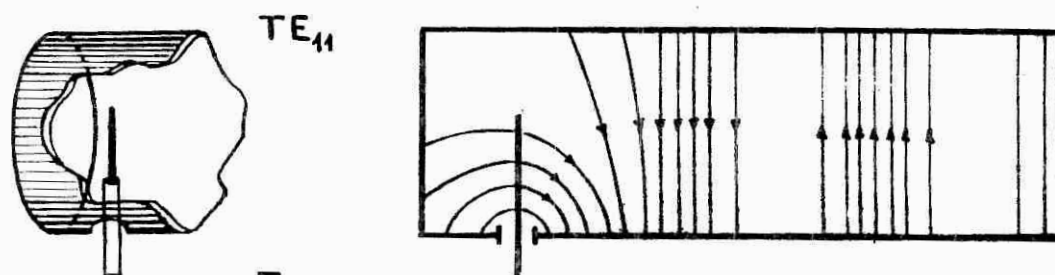
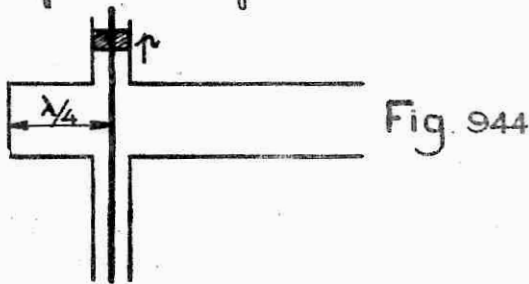


Fig. 943

941 - Dans les figures précédentes, l'élément rayonnant qui attaque le guide est supposé alimenté par une ligne coaxiale de courte longueur, elle-même reliée au générateur MF. La résistance de rayonnement mesurée à la base de l'élément rayonnant dépend de la distance qui existe entre cet élément et le fond du guide. Elle est maximum lorsque cette distance est égale à $\frac{\lambda}{4}$, λ étant la longueur d'onde dans le guide, nulle quand cette distance atteint $\frac{\lambda}{2}$.

942 - D'autre part, on évite la présence d'ondes stationnaires dans la ligne coaxiale en ajustant l'impédance de l'élément rayonnant de manière à la rendre égale à l'impédance caractéristique de la ligne coaxiale. Ce réglage peut s'obtenir en prolongeant la ligne au-delà du guide et en disposant un piston plongeur p capable de modifier l'impédance ajoutée à l'extrémité de l'élément rayonnant P_1 (fig. 944).



plongeur p capable de modifier l'impédance ajoutée à l'extrémité de l'élément rayonnant P_1 (fig. 944).

943 - Les dispositions employées à l'entrée du guide peuvent être reproduites à son extrémité opposée, en vue de transférer à tel appareil d'utilisation qu'on voudra, l'énergie qui s'est propagée tout au long du guide. L'élément rayonnant devient élément récepteur et l'énergie captée est écoulee par la ligne coaxiale dont il constitue le point de départ.

Cornets et pavillons rayonnants.

951 - Mais l'utilisation la plus fréquente de l'énergie HF transmise par les guides consiste à céder cette énergie au milieu extérieur pour réaliser des radiocommunications.

Nous avons vu que ce résultat était déjà partiellement atteint en laissant simplement ouverte l'extrémité du guide, mais :

- d'une part, l'impédance de charge représentée par cette extrémité ouverte ne possède pas la valeur voulue pour éviter une certaine réflexion des ondes vers l'origine du guide, et par suite la présence d'ondes stationnaires dans ce guide.
- D'autre part, le faisceau ainsi émis à l'extérieur ne présente généralement pas une directivité suffisante pour les besoins de la pratique. On verra au Chap. VIII que cette directivité est d'autant plus grande que les dimensions de la surface rayonnante sont plus grandes.

On est donc conduit à terminer le guide par un pavillon de dimensions et de forme adaptées au diagramme de rayonnement recherché.

On trouve dans les formulaires les dimensions minima à donner à ces cornets, en fonction de la longueur d'onde et des dimensions du guide, pour obtenir un gain et une largeur de faisceau déterminés.

Volumes résonnants.

961 — Considérons un guide d'ondes attaqué, à son entrée, comme il est indiqué sur les fig. 934 à 938, et fermons-le à une certaine distance par un plan transversal B supposé

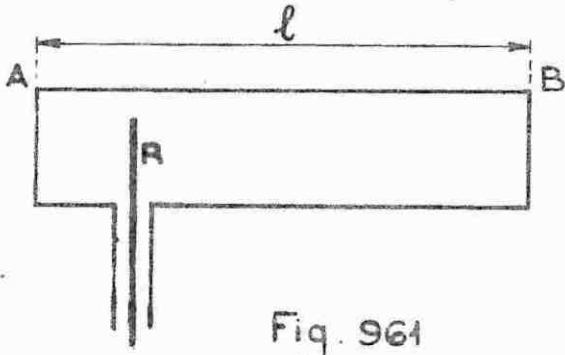


Fig. 961

parfaitement conducteur. (fig. 961). Puisque le guide est déjà fermé à son entrée, nous avons réalisé un espace entièrement fermé ne rayonnant aucune énergie à l'extérieur. Les

ondes se réfléchissent sur cette nouvelle paroi B et un régime d'ondes stationnaires s'établit dans le guide tout comme il s'en établissait au Chap. VI sur une ligne court-circuitée à son extrémité.

L'amplitude du champ dans le guide dépend naturellement de la position du point considéré, mais surtout de la distance existant entre les deux cloisons.

L'expérience montre qu'il existe certaines valeurs bien déterminées de la longueur l pour lesquelles le champ électromagnétique atteint une amplitude considérablement plus élevée que pour les autres, le volume compris entre les deux cloisons A et B est alors dit en résonance.

Comme l'énergie dissipée se réduit aux seules pertes dans les parois latérales et dans les deux parois terminales du guide le coefficient de surtension du système est très élevé. Il peut atteindre, en pratique, des chiffres du même ordre de grandeur que ceux des quartz piézo-électriques ($Q = 20000$ par exemple). Cette propriété est particulièrement intéressante pour la stabilisation des émetteurs à très haute fréquence.

Volumes parallélipédiques .

962 - L'étude théorique des volumes résonnants se conduit d'une manière analogue à celle des guides . On a simplement à tenir compte des conditions aux limites non seulement sur les parois latérales mais aussi sur les deux fonds du volume considéré .

Ses parois étant supposées parfaitement conductrices , le champ électrique tangentiel doit s'y trouver partout nul de même que la composante normale du champ magnétique .

Dans le cas du volume résonnant parallélipédique (dérivant du guide à section rectangulaire) on aboutit , pour le champ électromagnétique , à des expressions qui contiennent en facteur un produit des sinus ou cosinus des trois quantités :

$$k_1 = \frac{m\pi}{a} \quad k_2 = \frac{n\pi}{b} \quad k_3 = \frac{p\pi}{l} ;$$

m , n et p sont des nombres entiers positifs , dont l'un peut éventuellement être nul .

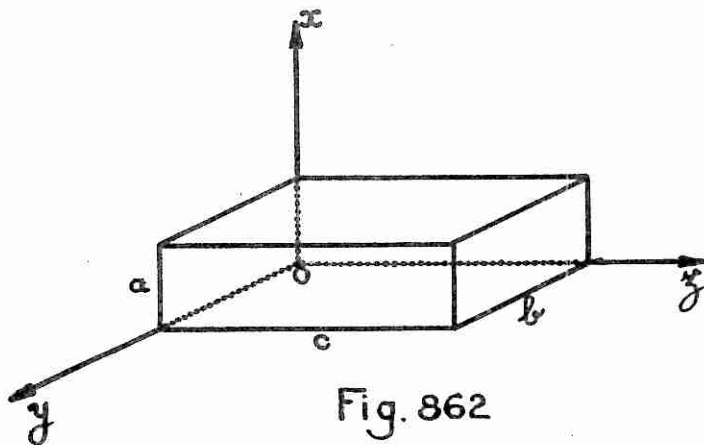


Fig. 862

a , b et l représentent les côtés du parallélipède .

963 - Les expressions du champ sont les suivantes dans le mode TM , où le paramètre p peut éventuellement être nul :

$$E_x = 4\pi c A \sqrt{\frac{\mu}{K}} \frac{k_1 k_3}{k^2} \cos \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} \sin \frac{\pi p z}{l}$$

$$E_y = 4\pi c A \sqrt{\frac{\mu}{K}} \frac{k_2 k_3}{k^2} \sin \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b} \sin \frac{\pi p z}{l}$$

$$E_z = -4\pi c A \sqrt{\frac{\mu}{K}} \frac{k_1^2 + k_2^2}{k^2} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} \cos \frac{\pi p z}{l}$$

$$\mathcal{H}_x = -\frac{k_2}{k} A \sin \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b} \cos \frac{\pi p z}{l}$$

$$\mathcal{H}_y = \frac{k_1}{k} A \cos \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} \cos \frac{\pi p z}{l}$$

$$\mathcal{H}_z = 0$$

Pour alléger l'écriture, on a posé :

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2$$

La longueur d'onde (dans l'espace libre) des oscillations de résonance est donnée par la formule :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}$$

964 - Dans le mode TE, on trouve les équations suivantes, où l'un des deux paramètres m ou n peut éventuellement être nul :

$$\mathcal{E}_x = -4\pi c A \sqrt{\frac{\mu}{K}} \frac{k_2}{k} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{l}$$

$$\mathcal{E}_y = 4\pi c A \sqrt{\frac{\mu}{K}} \frac{k_1}{k} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{l}$$

$$\mathcal{E}_z = 0$$

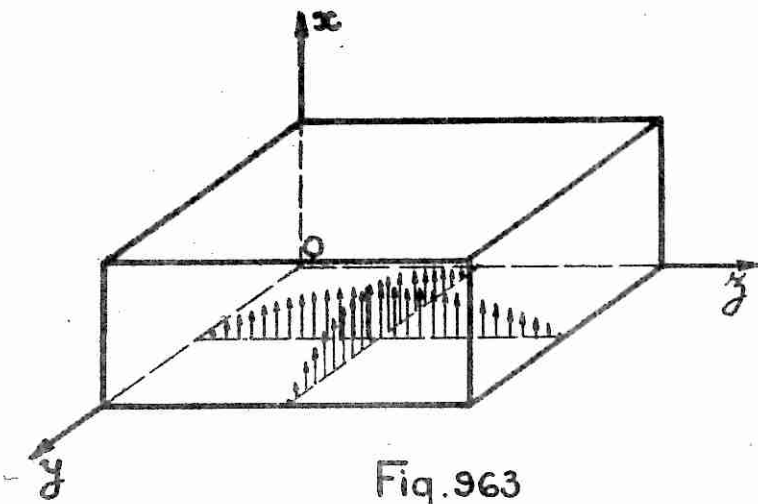
$$\mathcal{H}_x = A \frac{k_1 k_3}{k^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{l}$$

$$\mathcal{H}_y = A \frac{k_2 k_3}{k^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{l}$$

$$\mathcal{H}_z = -A \frac{k_1^2 + k_2^2}{k^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{l},$$

et la longueur d'onde propre du résonateur conserve la même valeur que ci-dessus :

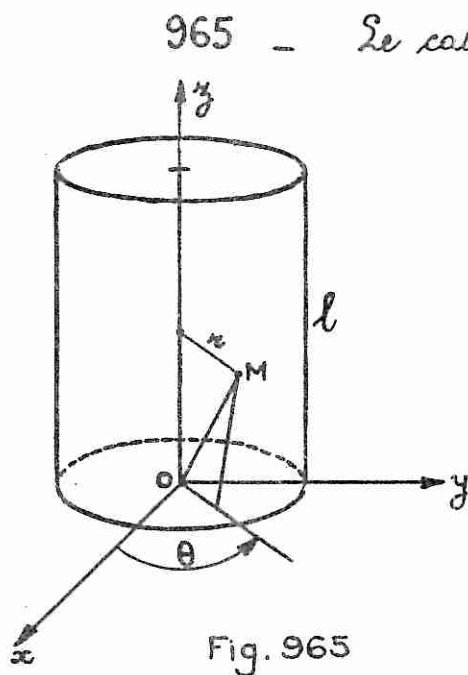
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}$$



La fig. 963 indique la distribution du champ électrique dans le mode TE, le plus simple existant, à savoir celui où l'on a :
 $m = 0 \quad n = 1 \quad p = 1$.
 On a alors, non seulement $E_z = 0$, mais aussi $E_y = 0$.
 La seule composante E_x

restante est indépendante de la cote x puisque $\cos \frac{m\pi x}{a}$ est égal à 1 quel que soit x .

Cas des volumes résonnants cylindriques.



Le cas des volumes cylindriques (fig. 965) se traite de même à la façon des guides cylindriques ; on obtient, pour le champ électromagnétique, des expressions qui ressemblent à celles des guides circulaires (§ 884) mais les nouvelles conditions aux limites y font apparaître un facteur supplémentaire en $\sin$ ou $\cos \frac{p\pi z}{l}$, où l est la longueur du cylindre et p un entier

quelconque non nul.

966 - Dans le mode TM, ces expressions sont les suivantes :

$$\mathcal{E}_r = -4\pi c A \sqrt{\frac{\mu}{K}} \frac{k_3}{k} J'_n(k_1 r) \cos n\theta \sin \frac{n\pi z}{l}$$

$$\mathcal{E}_\theta = 4\pi c A \sqrt{\frac{\mu}{K}} n \frac{k_3}{k} \frac{J_n(k_1 r)}{k_1 r} \sin n\theta \sin \frac{n\pi z}{l}$$

$$\mathcal{E}_z = 4\pi c A \sqrt{\frac{\mu}{K}} \frac{k_1}{k} J_n(k_1 r) \cos n\theta \cos \frac{n\pi z}{l}$$

$$\mathcal{H}_r = -A n \frac{J_n(k_1 r)}{k_1 r} \sin n\theta \cos \frac{n\pi z}{l}$$

$$\mathcal{H}_\theta = -A J'_n(k_1 r) \cos n\theta \cos \frac{n\pi z}{l}$$

$$\mathcal{H}_z = 0$$

Dans ces formules

$k_1 = \frac{r_{nm}}{R}$ où r_{nm} désigne la $m^{\text{ième}}$ racine de l'équation $J_n(x) = 0$, (n pouvant être nul)

$$k_3 = \frac{n\pi}{l} \text{ et } k = \sqrt{k_1^2 + k_3^2}$$

La longueur d'onde des oscillations, mesurée dans l'espace libre est :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{r_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}}$$

967 - Dans le mode TE, les expressions sont analogues :

$$\mathcal{E}_r = -4\pi c A_0 \sqrt{\frac{\mu}{K}} n \frac{J_n(k_1 r)}{k_1 r} \sin n\theta \sin \frac{n\pi z}{l}$$

$$\mathcal{E}_\theta = -4\pi c A_0 \sqrt{\frac{\mu}{K}} J'_n(k_1 r) \cos n\theta \sin \frac{n\pi z}{l}$$

$$\mathcal{E}_z = 0$$

$$\mathcal{H}_r = A \frac{k_3}{k} J'_n(k_1 r) \cos n\theta \cos \frac{n\pi z}{l}$$

$$\mathcal{H}_\theta = -A n \frac{k_3}{k} \frac{J_n(k_1 r)}{k_1 r} \sin n\theta \cos \frac{n\pi z}{l}$$

$$\mathcal{H}_z = A \frac{k_1}{k} J_n(k_1 r) \cos n\theta \sin \frac{n\pi z}{l}$$

toujours avec :

$$k_1 = \frac{r_{nm}}{R},$$

r_{nm} étant cette fois la $m^{\text{ième}}$ racine ($m > 0$) de l'équation $J'_n(x) = 0$,
(avec $n > 0$)

$$k_3 = \frac{n\pi}{l} \quad \text{et} \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_3^2}$$

Les oscillations ont pour longueur d'onde, mesurée dans l'espace libre :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{r_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}}.$$