

DÉVORÉ et ANNEQUIN

COURS DE PHYSIQUE

PRÉPARATION AUX GRANDES ÉCOLES SCIENTIFIQUES
PROPÉDEUTIQUE

Electricité II
Electromagnétisme et Magnétisme
MATHÉMATIQUES SPÉCIALES, PROPÉDEUTIQUE

VUIBERT

COURS DE PHYSIQUE

à l'usage des
élèves des classes préparatoires aux Grandes Écoles Scientifiques
et des étudiants de Propédeutique

PAR

G. DÉVORÉ & R. ANNEQUIN

PROFESSEURS AGRÉGÉS AU LYCÉE CHAPTAL

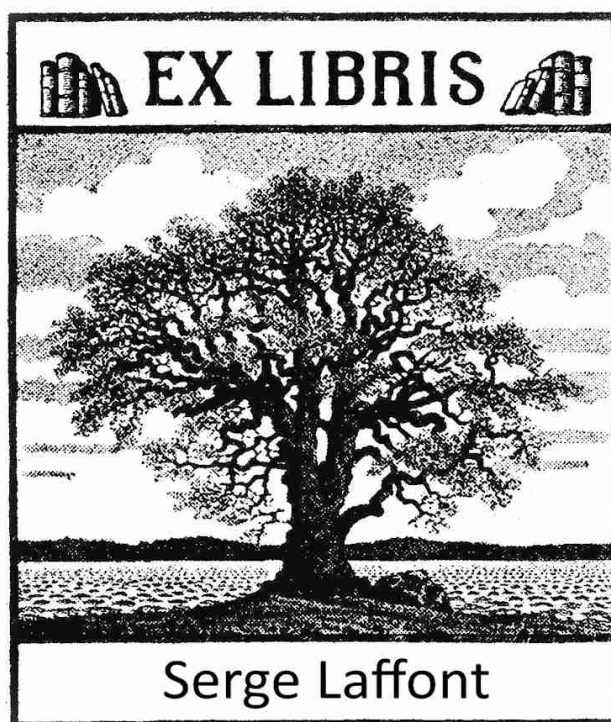
ÉLECTRICITÉ II

(*Mathématiques spéciales, Propédeutique.*)

TROISIÈME ÉDITION

PARIS
LIBRAIRIE VUIBERT
BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1966



© *Librairie Vuibert*, 1964.

COURS DE PHYSIQUE

A LA MÊME LIBRAIRIE

DES MÊMES AUTEURS

Cours de Physique pour la préparation aux Grandes Écoles Scientifiques et Propédeutique. Vol. 16/24 cm :

UNITÉS ET MESURES. STATIQUE DES FLUIDES (Math. sup., Propédeutique), 3 ^e édition	14 F
THERMODYNAMIQUE ET CHALEUR I (Math. sup., Propédeutique), 3 ^e édition	22 F
THERMODYNAMIQUE ET CHALEUR II (Math. spé., Propédeutique), 3 ^e édition	14 F
OPTIQUE I (Math. sup., Propédeutique), 3 ^e édition	20 F
OPTIQUE II (Math. spé., Propédeutique), 2 ^e édition	25 F
ÉLECTRICITÉ I (Math. sup., Propédeutique), 3 ^e édition	25 F

De MM. DÉVORÉ et RIVAUD

Cours de Physique pour la préparation aux Grandes Écoles Scientifiques et Propédeutique. Vol. 16/24 cm :

MÉCANIQUE I (Math. sup., Propédeutique), 2 ^e édition	18 F
MÉCANIQUE II (Math. spé., Propédeutique), 2 ^e édition	28 F

De M. DÉVORÉ

Problèmes de Physique et de Chimie avec solutions, à l'usage des candidats aux Grandes Écoles et des étudiants de M.G.P., M.P.C., S.P.C.N. et de licence.

— Vol. 16/24 cm, 4^e édition

32 F

Nouveaux Problèmes de Physique, à l'usage des candidats aux Grandes Écoles et des étudiants de M.G.P., M.P.C., S.P.C.N. et de licence. — 2 vol. 16/24 cm :

Tome I. — ÉLECTRICITÉ, 2^e édition

22 F

Tome II. — MÉCANIQUE, CHALEUR ET THERMODYNAMIQUE, OPTIQUE ..

28 F

Problèmes de Chimie avec solutions à l'usage des candidats aux Grandes Écoles et des étudiants de Propédeutique. — Vol. 16/24 cm, 3^e édition

18 F

Chimie organique. Les Grandes Fonctions simples, à l'usage des candidats aux examens de P.C.B., S.P.C.N., M.P.C. et de licence et aux Grandes Écoles Scientifiques (programmes B et C). — Vol. 16/24 cm, 2^e édition

50 F

PREMIÈRE PARTIE

ÉLECTROMAGNÉTISME. CIRCUITS ÉLECTRIQUES ET AIMANTS DANS LE VIDE

- Chap. I. — Les vecteurs fondamentaux $\vec{M}$ et $\vec{B}$. L'électromagnétisme.
- Chap. II. — Postulat fondamental : la formule d'Ampère.
- Chap. III. — Formule de Biot et Savart. Détermination du flux d'induction.
- Chap. IV. — Potentiel-vecteur $\vec{A}$ du vecteur induction $\vec{B}$. Conservation du flux d'induction.
- Chap. V. — Circulation du vecteur induction. Théorème d'Ampère.
- Chap. VI. — Potentiel scalaire du vecteur induction.
- Chap. VII. — Loi de Laplace. Forces appliquées à un circuit dans un champ magnétique.
- Chap. VIII. — Travail des forces électromagnétiques. Loi de Maxwell. Inductance propre d'un circuit.
- Chap. IX. — Les aimants permanents dans le vide. Mesures magnétiques.

CHAPITRE PREMIER

LES VECTEURS FONDAMENTAUX $\vec{M}$ ET $\vec{B}$ DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

Le but de l'électromagnétisme est l'étude des forces qui s'exercent entre des circuits parcourus par des courants (nous dirons plus simplement courants ou circuits), entre des aimants, ou encore entre courants et aimants. Le magnétisme est plus particulièrement l'étude des aimants.

Dans ce premier chapitre nous définirons d'emblée les deux grandeurs essentielles, *moment magnétique* et *induction magnétique*, et nous montrerons que les vecteurs qui les représentent ont *le caractère axial*, ce que nous représentons par $\vec{M}$ et $\vec{B}$.

Jusqu'à nouvel ordre nous supposons que :

a) *Aimants et courants sont placés dans le vide* ou, ce qui revient au même avec une excellente approximation, dans l'air.

b) *L'aimantation des aimants est rigide* (ou permanente) : cela signifie que les propriétés des aimants ne sont pas modifiées lorsqu'on les transporte au voisinage de courants ou d'autres aimants.

c) Sauf dans des cas très exceptionnels *les circuits sont linéaires*, c'est-à-dire formés de conducteurs filiformes.

1-1. Les deux corps d'épreuve : magnétomètre et boucle de courant.

1° Magnétomètre.

Un aimant est un morceau d'acier qui a subi un traitement spécial appelé aimantation; il a ainsi acquis les propriétés d'attirer le fer et de

s'orienter au voisinage de la Terre ou d'un courant, ou encore d'un autre aimant.

On donne aux aimants des formes variées, barreau, en U,... Nous ne considérons pour le moment que des *aiguilles aimantées*, qui sont des aimants dont les dimensions transversales sont très petites par rapport à leur longueur; un tel objet est un *aimant linéaire*, on peut parler de ses extrémités ou *pôles* et de son *axe*, droite définie par les pôles. Pour la commodité du langage nous appelons *magnétomètre* un aimant linéaire de longueur très réduite (nous préciserons plus loin ce qu'il faut entendre par là), un tel aimant étant l'organe essentiel d'un appareil de mesure qui en porte le nom (9-8).

2° Boucle de courant.

Les formes de circuit (ou le plus souvent de parties de circuit) sont très diverses. Les plus couramment considérées sont le *courant rectiligne*, le *courant circulaire*, formé d'une seule spire ou de plusieurs spires (bobine circulaire plate), et le *solénoïde*. *Un solénoïde est un enroulement hélicoïdal de fil conducteur dont le pas de l'hélice est petit; on peut en première approximation le considérer comme formé de spires égales coaxiales régulièrement réparties sur un cylindre et parcourues par la même intensité.*

Le second corps d'épreuve de l'électromagnétisme est une *boucle de courant*, il est formé d'une *spire de très petites dimensions* (nous préciserons plus loin ce qu'il faut entendre par là) parcourue par un courant d'intensité constante. Une boucle de courant est définie par sa surface s (petite) et par l'intensité i du courant; son orientation est déterminée par celle de son axe.

Magnétomètre et boucle de courant sont les deux objets élémentaires ou corps d'épreuve de l'électromagnétisme. Nous les supposons mobiles autour de leur centre de gravité O de sorte que leur axe peut s'orienter dans toutes les directions autour de ce point.

1-2. Axe magnétique d'un magnétomètre et d'une boucle de courant.

Un champ magnétique est une région de l'espace où un magnétomètre ou une boucle de courant prend, en chacun de ses points, une position d'équilibre bien déterminée. La Terre, les courants et les aimants produisent des champs magnétiques. Écarté de sa position d'équilibre, le magnétomètre oscille; retourné bout par bout, il tend à reprendre sa position première après des oscillations plus ou moins amorties. Il y a donc lieu de distinguer les pôles d'un magnétomètre.

1° Axe magnétique d'un magnétomètre.

Éloigné d'autres aimants ou de masses de fer (ou de substances dites ferromagnétiques) et de tout courant, un magnétomètre prend, au voisinage de la Terre, une orientation déterminée dans un plan vertical appelé plan méridien magnétique, plan voisin du plan méridien géographique au lieu considéré (9-7). Nous appelons pôle nord N le pôle qui est tourné vers le nord et pôle sud S celui qui est tourné vers le sud. L'axe orienté dans le sens SN est *l'axe magnétique du magnétomètre*. Dans ce qui suit nous nous placerons dans des conditions où l'action directrice du champ magnétique terrestre est négligeable par rapport aux actions exercées par des courants ou par des aimants.

L'expérience historique d'Ørsted (1820) montre qu'un courant électrique crée un champ magnétique. Plaçons un long fil conducteur rectiligne au voisinage d'un magnétomètre (fig. 1); le magnétomètre

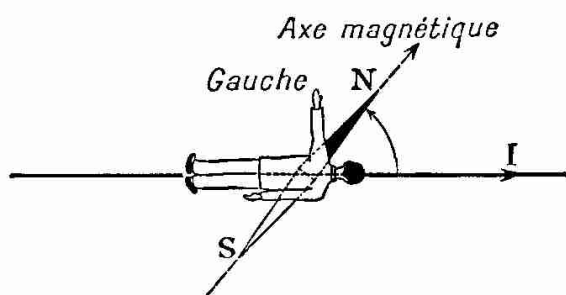


FIG. 1.

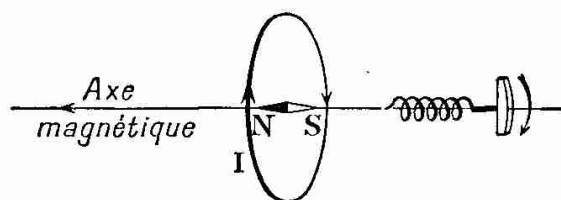


FIG. 2.

s'oriente en croix avec le fil dès qu'on fait passer dans celui-ci un courant suffisamment intense. Invertissons le sens du courant : le magnétomètre se retourne bout pour bout. Il y a donc encore lieu de choisir un sens sur l'axe du magnétomètre, sens lié à celui du courant. Nous pourrions le faire indépendamment de la distinction entre pôle nord et pôle sud qui résulte d'une expérience dans le champ magnétique terrestre.

La règle de l'observateur d'Ampère met en accord les deux possibilités de choix :

Le sens SN de l'axe magnétique du magnétomètre va de la droite vers la gauche de l'observateur couché le long du courant qui le traverse des pieds vers la tête et regardant le magnétomètre.

Cette règle reste valable lorsque le circuit a une forme quelconque. Par exemple, lorsque le courant est circulaire, nous plaçons notre corps d'épreuve au centre du circuit, il s'oriente suivant l'axe du courant et la gauche de l'observateur donne le sens SN. Dans ce cas, il est plus commode d'utiliser la règle du tire-bouchon (fig. 2) :

Le sens de l'axe magnétique est celui de la progression d'un tire-bouchon qui tourne dans le sens du courant.

2° Axe magnétique d'une boucle de courant.

Remplaçons le magnétomètre par une boucle de courant; nous observons des phénomènes tout à fait semblables, l'axe de la boucle jouant le rôle de celui du magnétomètre. Il est commode de distinguer la face nord N et la face sud S de la boucle, l'axe magnétique la traversant dans le sens SN. Les deux corps d'épreuve présentent cependant une différence essentielle : alors que *l'axe magnétique d'un magnétomètre est bien déterminé* puisque nous supposons son aimantation rigide, *le sens de celui d'une boucle dépend du sens du courant dans la boucle*. Il doit donc être possible de déterminer son axe magnétique en accord avec celui d'un magnétomètre; l'expérience montre qu'il est donné par les règles équivalentes suivantes :

a) *L'observateur d'Ampère étant placé sur la boucle de façon que le courant le traverse des pieds vers la tête et regardant vers l'intérieur du circuit voit l'axe magnétique se diriger vers sa gauche.*

b) *Un tire-bouchon tournant dans le sens du courant progresse dans le sens de l'axe magnétique.*

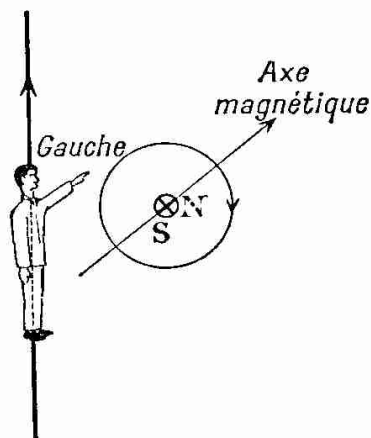


FIG. 3.

c) *La face nord de la boucle est celle où l'on voit le courant tourner dans le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre.*

La figure 3 montre la position prise par une boucle au voisinage d'un courant rectiligne. La boucle se retourne face pour face si l'on inverse le sens de l'un ou de l'autre courant.

Remarquons que l'emploi de notre deuxième corps d'épreuve peut nous amener à appliquer deux fois l'une des règles précédemment énoncées : pour la détermination de l'axe magnétique et pour celle de son

orientation en présence d'un courant.

1-3. Champ magnétique. Ligne de champ. Exploration du champ.

Nous allons être amenés à définir un champ magnétique par un vecteur en chaque point, le *vecteur induction magnétique* $\vec{B}$. Pour ne pas alourdir le langage nous dirons le plus souvent champ magnétique au lieu de champ d'induction magnétique. Par raison de commodité nous emploierons un magnétomètre comme corps d'épreuve pour explorer un champ magnétique.

Par définition, la direction et le sens du vecteur induction magnétique en un

point sont ceux de l'axe magnétique du magnétomètre placé en ce point. Le champ magnétique est uniforme si, en tous ses points, l'axe magnétique prend la même orientation; c'est sensiblement le cas du champ magnétique terrestre et celui du champ à l'intérieur d'un long solénoïde.

Les lignes de champ ou lignes d'induction sont les enveloppes des directions prises par le magnétomètre, donc *les enveloppes du vecteur induction magnétique*. Ce sont des droites parallèles lorsque le champ est uniforme.

Si le magnétomètre a une longueur suffisamment petite (1-1, 1°) le champ magnétique peut être considéré comme uniforme dans le petit domaine où il s'oriente. Cette remarque serait valable si nous utilisions une petite boucle de courant comme corps d'épreuve (1-1, 2°). Dans ces conditions, le magnétomètre se dispose tangentielllement à une ligne de champ, et, de proche en proche, il est possible de déterminer les lignes du champ. Ce résultat est obtenu plus rapidement et plus simplement par *la méthode des spectres magnétiques* :

Projetons de la limaille de fer sur un carton convenablement disposé par rapport à un aimant ou à un courant (2-4, 3-3, 3-4, 9-2, 9-3). Chaque grain étant devenu un minuscule aimant, si l'on tapote le carton pour libérer la limaille des forces de frottement, nous voyons la limaille dessiner les lignes du champ. Nous utiliserons ce procédé pour étudier la configuration d'ensemble des champs magnétiques des courants et des aimants; il n'est cependant pas applicable dans le cas des champs de faible intensité comme le champ magnétique terrestre.

1-4. Induction magnétique. Vecteur induction magnétique $\vec{B}$.

L'expérience montre que *le système (torseur) des forces magnétiques qu'exerce un champ magnétique uniforme sur un magnétomètre est équivalent à un couple*. Dans le cas du champ terrestre on vérifie que le poids d'une aiguille d'acier ne change pas lorsqu'on l'aimante et que, placée sur un bouchon plat flottant sur un liquide, elle s'oriente en faisant tourner le bouchon sans que l'ensemble subisse de translation horizontale. Les composantes de la résultante générale sur la verticale et sur le plan horizontal sont donc nulles : le torseur des forces est donc bien réduit à un couple.

Une méthode statique (9-9) permet de mesurer le moment Γ de ce couple magnétique en l'équilibrant par un couple de torsion. On vérifie, aussi bien dans le cas du champ magnétique que dans celui d'un autre champ uniforme (à l'intérieur d'un long solénoïde par exemple), que Γ , nul pour la position d'équilibre ($\theta = 0$), croît proportionnellement au sinus de l'angle d'écart θ , pour prendre sa valeur maximale Γ_m lorsque l'axe magnétique est normal à la direction du champ ($\theta = \frac{\pi}{2}$).

Transportons successivement le magnétomètre (supposé très petit) en deux points P et P' d'un champ magnétique non uniforme; en chacun d'eux sa position d'équilibre détermine la direction et le sens des vecteurs induction magnétique $\vec{B}$ et $\vec{B}'$. Mesurons en P et P', les moments Γ_M et Γ'_M des couples agissant sur le magnétomètre disposé normalement à sa position d'équilibre.

Par définition, le rapport de ces moments mesure le rapport des inductions magnétiques B et B' en ces points :

$$\frac{B}{B'} = \frac{\Gamma_M}{\Gamma'_M}.$$

Nous venons de définir la grandeur induction magnétique en montrant la possibilité d'en effectuer des *mesures relatives*. Nous la représentons en chaque point par un vecteur $\vec{B}$ dont la direction et le sens sont, comme nous l'avons dit, ceux de l'axe magnétique d'un magnétomètre en équilibre au point considéré. Par suite, le sens de $\vec{B}$ peut se déterminer dans le cas d'un courant par la règle de l'observateur d'Ampère ou par celle du tire-bouchon.

La définition précédente reste valable si nous remplaçons le magnétomètre par une boucle de courant; celle-ci, placée dans une induction uniforme faisant l'angle θ avec son axe, est également soumise à un couple dont le moment est proportionnel à $\sin \theta$.

1-5. Vecteur moment magnétique d'un magnétomètre ou d'une boucle de courant.

1° Moment magnétique d'un magnétomètre.

Plaçons successivement deux magnétomètres M_1 et M_2 normalement à leur position d'équilibre (donc normalement au vecteur induction) au même point P d'un champ magnétique, et mesurons les moments Γ_{1M} et Γ_{2M} des couples qui agissent sur eux; ces moments ne dépendent que des magnétomètres :

Par définition, le rapport des moments des couples magnétiques mesure le rapport des moments magnétiques $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ des deux magnétomètres :

$$\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_2} = \frac{\Gamma_{1M}}{\Gamma_{2M}}.$$

Nous venons de définir la grandeur moment magnétique d'un magnétomètre; nous la représentons par un vecteur dont la direction et le sens sont ceux de son axe magnétique.

Remarquons que la définition précédente reste valable pour deux aiguilles aimantées, car il suffit de placer celles-ci dans un champ magnétique uniforme.

2° Moment magnétique d'une boucle de courant.

Il se définit comme dans le cas du magnétomètre :

Plaçons successivement deux boucles de courant C_1 et C_2 au même point P d'un champ magnétique, de façon que leur axe magnétique soit normal à la direction de l'induction en ce point. Mesurons les valeurs maximales des moments Γ_{1M} et Γ_{2M} des couples qui agissent sur elles dans cette position :

Par définition, le rapport des moments des couples magnétiques mesure le rapport des moments magnétiques $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ des deux boucles.

Nous venons de définir la grandeur moment magnétique d'une boucle; le vecteur moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ qui le représente est porté par son axe magnétique.

En faisant varier l'intensité i du courant dans la boucle et en utilisant des boucles de différentes formes (les dimensions transversales restant petites) et de surfaces différentes, on vérifie que *le moment magnétique $\mathcal{M}$ est proportionnel à l'intensité i du courant et à la surface s de la boucle.*

Quelle que soit la forme de la boucle, son moment magnétique est donné par

$$\mathcal{M} = kis,$$

le facteur k ne dépendant que des unités.

Dans le système S.I.,

$$\mathcal{M} = is,$$

i est exprimé en ampères, s en mètres carrés, $\mathcal{M}$ en **ampères $\times$ mètres carrés** (A.m²).

Représentons la surface s par un vecteur de module s porté par l'axe magnétique et de même sens que celui-ci; nous avons, i étant pris positif,

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}} = i\vec{s}.}$$

1-6. Formule fondamentale. Équivalence boucle de courant et magnétomètre.

Plaçons notre corps d'épreuve, magnétomètre ou boucle de courant, de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$, au point P où l'induction magnétique est $\vec{B}$; dans la position d'équilibre $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires. Écartons-le

de l'angle $\theta = (\vec{\mathcal{M}}, \vec{B})$ de cette position : l'expérience montre dans les deux cas que le moment du couple qui tend à le ramener à la position d'équilibre est proportionnel à $\sin \theta$; d'après les définitions des grandeurs $\mathcal{M}$ et B , il est proportionnel à $\mathcal{M}B$ et par suite à $\mathcal{M}B \sin \theta$; Γ est donc de la forme

$$\Gamma = k\mathcal{M}B \sin \theta,$$

expression dans laquelle k ne dépend que des unités choisies pour mesurer les grandeurs qui y figurent.

Dans le système S.I. (2-6), l'unité d'induction magnétique, le tesla (T), est rattachée comme unité secondaire à l'ampère, unité fondamentale d'intensité électrique; nous verrons que ce choix entraîne $k = 1$ et, par suite, nous avons

$$\Gamma = \mathcal{M}B \sin \theta.$$

Le plan du couple étant celui des vecteurs $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{B}$ puisque ce couple tend à amener les deux vecteurs à être colinéaires, son axe est représenté par le vecteur $\vec{\Gamma}$ normal à ce plan, son sens étant tel que le trièdre $(\vec{\mathcal{M}}, \vec{B}, \vec{\Gamma})$ soit direct. Nous avons par suite la relation vectorielle

(1)

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

qui définit le couple agissant sur le corps d'épreuve placé dans un champ magnétique uniforme. Le sens de $\vec{\Gamma}$ s'obtient par application d'une des règles qui définissent un trièdre direct (fig. 4) :

a) *L'observateur d'Ampère étant couché le long de $\vec{\mathcal{M}}$ qui le traverse des pieds vers la tête et regardant dans la direction de $\vec{B}$ a le vecteur $\vec{\Gamma}$ vers sa gauche.*

b) *Un tire-bouchon, tournant de $\vec{\mathcal{M}}$ vers $\vec{B}$ dans le sens du plus petit angle de ces vecteurs, progresse dans le sens de $\vec{\Gamma}$.*

Remarquons que nous avons pris l'ordre $\vec{\mathcal{M}}, \vec{B}, \vec{\Gamma}$ pour appliquer les règles précédentes; les successions $\vec{B}, \vec{\Gamma}, \vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{\Gamma}, \vec{\mathcal{M}}, \vec{B}$, obtenues par permutation circulaire, correspondent au même trièdre direct.

Dans le cas particulier où $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{B}$ sont rectangulaires, le moment est maximal et égal à $\mathcal{M}B$, le trièdre direct $(\vec{\mathcal{M}}, \vec{B}, \vec{\Gamma})$ est alors trirectangle. Lorsque $\theta = 0$, le moment Γ est nul, le corps d'épreuve est en équilibre;

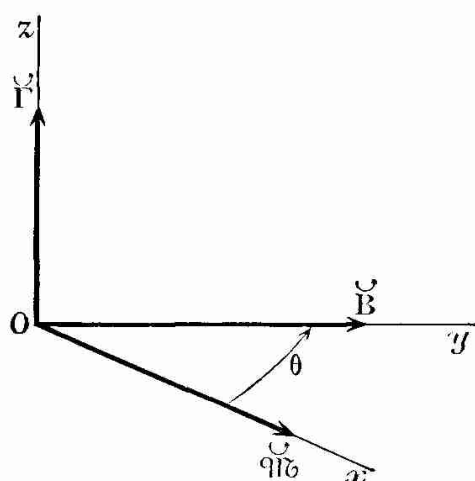


FIG. 4.

il en est de même lorsque $\theta = \pi$ ($\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{B}$ sont alors de sens contraires). On montre facilement que l'équilibre est stable dans le premier cas, instable dans le second.

La formule fondamentale (1) établit une équivalence entre magnétomètre et boucle de courant; pour celle-ci elle s'écrit

$$\vec{\Gamma} = i \vec{s} \wedge \vec{B};$$

la connaissance de s et de i permet de calculer $\mathcal{M}$ en ampères $\times$ mètres carrés. Or nous pouvons comparer le moment $\mathcal{M}'$ d'un magnétomètre à $\mathcal{M}$ par la méthode dont nous avons donné le principe, on a :

$$\frac{\mathcal{M}'}{\mathcal{M}} = \frac{\mathcal{M}'}{is} = \frac{\Gamma'_M}{\Gamma_M}.$$

Il est donc possible d'effectuer des mesures relatives de moments magnétiques de petites aiguilles aimantées et de les exprimer en A.m².

Il est logique d'assimiler un magnétomètre de moment magnétique $\mathcal{M}$ à une boucle de courant de surface s , il suffira de faire passer dans cette boucle équivalente un courant d'intensité i définie par $\mathcal{M} = si$.

*Nous pouvons donc raisonner sur un objet élémentaire unique défini par un vecteur moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$; nous l'appelons **boucle ampérienne** ou **ampérien**.*

Cet objet, placé dans un champ magnétique en un point où l'induction magnétique est $\vec{B}$, est soumis à un couple dont le moment est défini par la relation (1).

Nous admettons de plus que :

L'équivalence d'un petit aimant linéaire à une boucle de courant (donc à un ampérien) est valable non seulement pour les actions subies mais aussi pour les actions exercées, celles-ci résultant de la connaissance de l'induction produite en un point par un ampérien.

1-7. Induction magnétique produite par un ampérien.

Le champ magnétique est en $\frac{I}{r^3}$.

L'objet élémentaire de l'électrostatique est une quantité d'électricité (grandeur scalaire) portée par un point et la loi fondamentale (ou postulat fondamental) est la loi de Coulomb, qui s'exprime par la formule vectorielle

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \vec{u},$$

avec $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9$ S.I. (rationalisé).

Il en découle que le champ électrique $\vec{E}$ d'une charge ponctuelle dérive d'un potentiel V :

$$(1) \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V.$$

Par suite V varie comme $\frac{1}{r}$ et E comme $\frac{1}{r^2}$. On exprime ces faits en disant que **le champ électrique est un champ newtonien**.

En électromagnétisme il n'existe rien de comparable, même au point de vue purement formel, à une grandeur scalaire que l'on appellerait quantité de magnétisme; cela est évident dans le cas d'une boucle de courant et ne l'est pas moins dans celui d'un petit aimant, comme le montre l'expérience classique de l'aimant brisé (9-2). Il en découle que *le champ magnétique n'est pas un champ newtonien*.

Le dipôle électrique (Élect. I, 2-14 et 15) n'est pas un objet élémentaire de l'électrostatique mais seulement une association particulière de charges. De la loi de Coulomb se déduisent, accessoirement en somme, les propriétés d'un dipôle, propriétés qui font intervenir son moment électrique $\vec{p} = q\vec{a}$.

Les résultats essentiels sont les suivants :

a) Le flux du champ électrique E_d d'un dipôle, comme celui d'une répartition quelconque de charges, est conservatif : $\text{div } E_d \equiv 0$.

b) Le champ électrique d'un dipôle dérive d'un potentiel électrique V_d :

$$(2) \quad V_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{r^2}, \quad \vec{E}_d = -\overrightarrow{\text{grad}} V_d.$$

Par suite V_d varie comme $\frac{1}{r^2}$ et E_d comme $\frac{1}{r^3}$. On exprime ces faits en disant que *le champ électrique d'un dipôle est un champ en $\frac{1}{r^3}$* .

Compte tenu du fait que dans les expressions qui définissent $\vec{E}_d$ n'intervient que le seul vecteur $\vec{p}$, nous pouvons faire abstraction des charges associées $+q$ et $-q$ et considérer un dipôle électrique comme défini par ce vecteur.

Un champ en $\frac{1}{r^3}$ est donc produit par un objet élémentaire représenté par un vecteur; le vecteur champ, dérivé d'un potentiel, est défini par des relations du type (2). Par contre, un champ newtonien est produit par un objet élémentaire scalaire et le vecteur champ, dérivé d'un potentiel, est défini par des relations du type (1).

L'objet élémentaire de l'électromagnétisme, l'ampérien, étant défini par un vecteur, le champ magnétique ne peut être un champ newtonien.

L'ensemble des résultats de l'expérience montre que l'on peut fonder l'électromagnétisme du vide sur le **postulat fondamental** suivant :

Le champ magnétique dans le vide est un champ en $\frac{1}{r^3}$.

De ce postulat découlent les propriétés du champ magnétique d'un ampérien :

- a) *Le flux du vecteur induction magnétique est conservatif.*
- b) *L'induction magnétique dérive d'un potentiel magnétique $\mathcal{V}$. On a, dans un système rationalisé d'unités,*

$$\mathcal{V} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \vec{u} \cdot d\vec{u}, \quad \vec{B} = - \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{V},$$

μ_0 étant une grandeur à individualité unique qui caractérise le vide au point de vue électromagnétique, μ_0 est la *perméabilité du vide*.

Indiquons dès maintenant que le choix de la valeur

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

définit le système S.I. (rationalisé).

Des considérations précédentes découle que nous pourrions transposer (6-6) les résultats obtenus pour un dipôle électrique à un ampérien sans avoir à rechercher une analogie phénoménale (qui n'existe pas). Profitant d'une similitude purement formelle, la transposition se fait en remplaçant

$$V \text{ par } \mathcal{V}, \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{ par } \frac{\mu_0}{4\pi}, \quad p \text{ par } \text{Ab} \quad \text{et} \quad E_d \text{ par } B.$$

1-8. Vecteurs polaires et vecteurs axiaux. Axialité des vecteurs $\vec{M}$ et $\vec{B}$.

1° Vecteurs polaires.

Certaines grandeurs sont représentables par un vecteur dont le sens résulte de la définition même de la grandeur sans qu'une convention particulière soit nécessaire. Ce sens est en somme imposé par la nature même du phénomène que le vecteur représente. De tels vecteurs sont appelés vecteurs polaires et l'on écrit symboliquement $\vec{P}$.

Les vecteurs déplacement $\overrightarrow{MM'}$, vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ sont des vecteurs polaires; il en est de même du vecteur force dont le sens est celui du déplacement initial du point matériel auquel serait appliquée la force agissant seule.

Le vecteur accélération

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m}$$

est également un vecteur polaire; d'une façon générale, *la dérivée géométrique d'un vecteur polaire est un vecteur polaire et ce caractère polaire n'est modifié, ni par la multiplication, ni par la division par un scalaire.*

Le vecteur champ électrique $\vec{E}$ est également un vecteur polaire puisque sa définition résulte de l'égalité $\vec{F} = q\vec{E}$; c'est aussi le cas du vecteur moment du dipôle électrique $\vec{p} = q\vec{a}$.

La symétrie d'un vecteur polaire est celle d'un cylindre de révolution en translation suivant son axe.

2° Vecteurs axiaux.

Certaines grandeurs ne peuvent être représentées par un vecteur que moyennant une convention liant une translation à une rotation (convention de rotation); leurs vecteurs représentatifs sont appelés vecteurs axiaux et ces grandeurs sont dites à caractère axial. On écrit symboliquement $\vec{A}$.

Le sens d'un vecteur axial n'est pas prédéterminé puisqu'on l'inverse en inversant la convention de rotation.

a) Une grandeur définie par le produit vectoriel de deux vecteurs polaires

$$\vec{A} = \vec{P} \wedge \vec{P}'$$

a le caractère axial.

D'après la définition même du produit vectoriel, le trièdre $(\vec{P}, \vec{P}', \vec{A})$ est direct; nous dirons que cette définition utilise *la convention du trièdre direct*. Le sens de $\vec{A}$ est inversé par la convention du trièdre inverse (fig. 5).

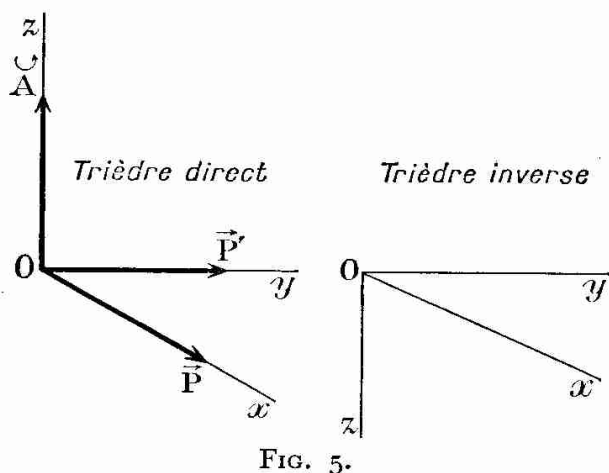


FIG. 5.

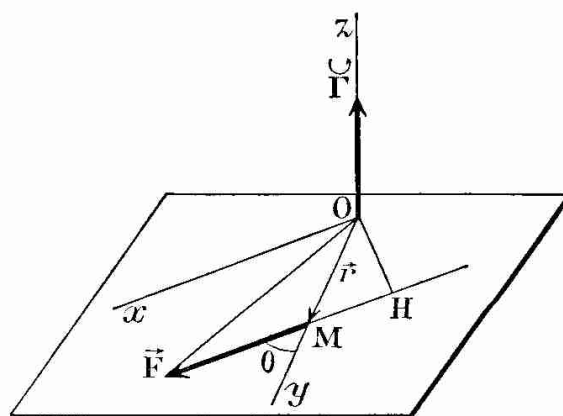


FIG. 6.

Par exemple, le moment d'une force par rapport à un point (fig. 6)

est représenté par le vecteur axial

$$(1) \quad \vec{\Gamma} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F}.$$

Si M appartient à un corps mobile autour de l'axe Oz , l'inversion de la convention de rotation change bien le sens du vecteur moment mais elle ne modifie en rien l'action mécanique de la force F .

b) Le vecteur $\vec{A}$ défini par la relation

$$\vec{P} = \vec{A} \wedge \vec{P}'$$

est axial. En effet, $\vec{P}$ étant un vecteur polaire, l'inversion de la convention de rotation ne change pas le sens de $\vec{P}$ (ni celui de $\vec{P}'$), elle change à la fois le signe du produit vectoriel et le sens de $\vec{A}$.

Par exemple (fig. 7), les vecteurs vitesse linéaire $\vec{v}$ et rayon vecteur $\vec{r}$ étant des vecteurs polaires, le vecteur vitesse angulaire ou rotation instantanée $\vec{\omega}$, défini par la relation

$$(2) \quad \vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r},$$

est un vecteur axial. Il en est de même du vecteur moment cinétique $m\vec{\omega}$.

c) Le produit vectoriel de deux vecteurs axiaux est un vecteur axial. Soit, par exemple,

$$(3) \quad \vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B};$$

si l'on inverse la convention de rotation, les sens de $\vec{M}$ et de $\vec{B}$ sont inversés en même temps que le produit vectoriel change de signe; il faut donc que le sens de $\vec{\Gamma}$ soit aussi inversé.

La symétrie d'un phénomène à caractère axial est celle d'un cylindre de révolution tournant autour de son axe; le sens du vecteur axial porté par l'axe est lié à une convention de rotation.

3° Convention de rotation du trièdre direct.

Deux conventions de rotation étant possibles, on conçoit qu'on ne puisse employer tantôt l'une, tantôt l'autre, sans créer beaucoup de confusion. La définition du produit vectoriel utilisant la convention du trièdre direct, c'est celle-ci que nous emploierons exclusivement.

Les règles de l'observateur d'Ampère et du tire-bouchon permettent d'appliquer cette convention. On peut en faire l'application aux formules (1), (2) et (3) en considérant les figures correspondantes.

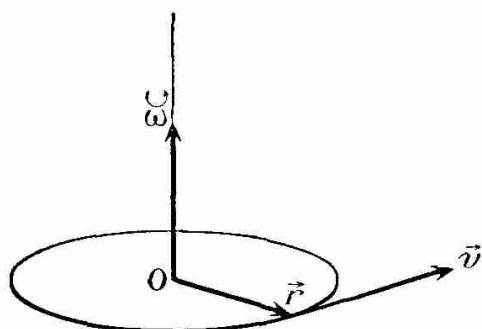


FIG. 7.

Nous en tenant à une convention de rotation unique, l'introduction des vecteurs axiaux n'apporte pas de complications dans le calcul vectoriel. Les vecteurs axiaux deviennent alors des *vecteurs pseudo-polaires*, qui peuvent être traités comme des vecteurs polaires en ce qui concerne leur composition (par exemple, composition de vecteurs moments de forces).

Toutefois, dans une relation vectorielle, les vecteurs qui figurent additivement sont nécessairement de même nature, polaire ou axiale; une somme telle que $\vec{P} + \vec{A}$ (vectoriellement non homogène) ne peut correspondre à rien puisqu'elle exprimerait l'addition de représentations de grandeurs de natures forcément différentes car de symétries différentes.

4° Les vecteurs $\vec{M}$ et $\vec{B}$ sont des vecteurs axiaux.

Le moment magnétique d'un ampérien est représenté par un vecteur axial.

Nous avons vu en effet que le sens du vecteur $\vec{M}$ est lié à celui du courant dans la boucle par la convention du trièdre direct.

La détermination du sens de $\vec{M}$ à l'aide d'une expérience faite dans le champ magnétique pourrait nous abuser et nous conduire à considérer le vecteur comme polaire. En fait, il ne faut pas oublier que le sens ainsi déterminé doit être le même que celui qui, dans l'expérience d'Ørsted, est lié au sens du courant; si nous inversons la convention de rotation, il nous faut changer le sens de $\vec{M}$ dans les deux expériences.

Le caractère axial du vecteur induction magnétique peut sembler moins évident si l'on s'en tient à la similitude formelle du champ électrique d'un dipôle électrique et du champ magnétique d'un ampérien, puisque le premier de ces champs a le caractère polaire. Les deux phénomènes sont cependant bien différents. Les deux champs sont tous deux en $\frac{1}{r^3}$, mais, le premier est polaire parce qu'il est produit par un objet élémentaire représenté par le vecteur polaire $\vec{p}$, le second est axial parce qu'il est produit par un objet élémentaire représenté par le vecteur axial $\vec{M}$. Pour prospector le champ électrique d'un dipôle, nous utilisons une charge ponctuelle unité qui est soumise en un point à la force $\vec{E}$; pour prospector le champ magnétique d'un ampérien nous utilisons un autre ampérien qui, placé en un point, est soumis à un couple. Un changement de convention de rotation inverserait à la fois les sens des moments magnétiques, de l'induction magnétique et du moment $\vec{I}$ dans la relation (3). Ainsi le vecteur induction magnétique est bien un vecteur axial.

Les grandeurs essentielles de l'électromagnétisme, $\vec{M}$ et $\vec{B}$, ont donc la symétrie axiale alors qu'en électrostatique la charge électrique est une grandeur scalaire et que le champ électrique est représenté par

un vecteur polaire. On comprend que *les règles d'application de la convention de rotation* interviennent si souvent en électromagnétisme alors qu'on peut les ignorer en électrostatique si ce n'est lorsqu'une grandeur mécanique à symétrie axiale (moment d'un couple) entre en jeu. Nous sommes ainsi justifiés d'avoir, dans l'étude des phénomènes électriques, passé sous silence la symétrie des phénomènes.

1-9. Actions entre courants. Plan d'étude.

Dans cette première partie intitulée Électromagnétisme nous étudions tout d'abord *les actions entre courants dans le vide*. Cette étude peut être scindée en deux :

a) Détermination du champ magnétique produit par un circuit linéaire C.

b) Détermination des actions de ce champ magnétique sur un second circuit linéaire C'.

Nous allons montrer que dans les actions entre courants *un circuit linéaire peut être remplacé par une répartition d'ampériens sur une surface*.

Soit un circuit linéaire C (fig. 8, a) parcouru par un courant d'intensité constante I. Les deux circuits ANBA et ABMA (fig. 8, b), parcourus

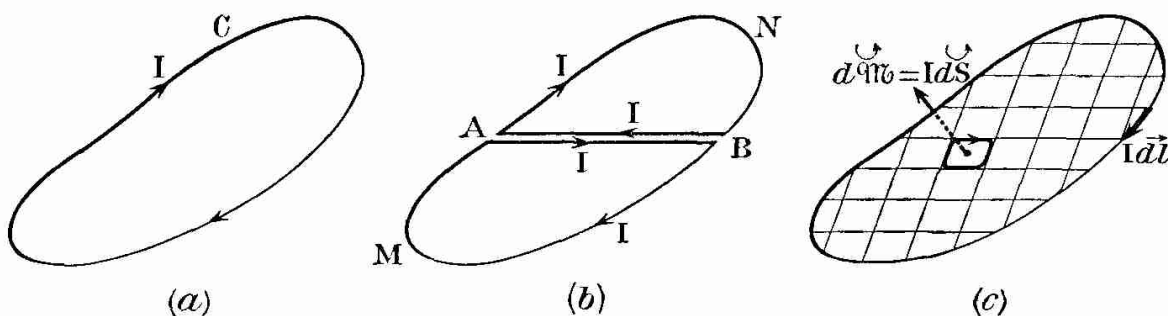


FIG. 8.

par des courants de même intensité I, exercent et subissent les mêmes actions électromagnétiques que le circuit C si nous admettons, avec Ampère, que les courants opposés I dans la branche double AB exercent et subissent des actions opposées. Il suffit de répéter un très grand nombre de fois cette dichotomie pour remplacer le circuit C par un très grand nombre d'ampériens de très petites surfaces dS répartis sur une surface S limitée par le contour C (fig. 8, c). Le vecteur moment magnétique $d\vec{M} = I d\vec{S}$ d'un ampérien est normal à la surface S, son sens étant donné par la règle du tire-bouchon.

Nous serions ainsi amenés, pour rechercher les actions d'un circuit C sur un circuit C', à déterminer le champ magnétique produit par *le « tapis » d'ampériens* répartis sur S, puis à calculer l'action de ce champ

magnétique sur le tapis d'ampériens répartis sur S' limitée par le contour C' . Ces opérations s'effectueraient en tenant compte de ce que le champ magnétique d'un ampérien est en $\frac{1}{r^3}$ et de ce que l'action subie par un ampérien $d\mathcal{M}' = I' d\vec{S}'$ est un couple. Il en résulterait que le torseur des forces appliquées à C' (ainsi que celui appliqué à C) serait proportionnel au produit II' .

Cette méthode, parfaitement logique, correspond bien à la « *conception ampérienne* » de l'Électromagnétisme et conduit à des résultats en accord avec l'expérience. Nous ne l'adopterons cependant pas sous cette forme, car nous allons utiliser un artifice de calcul qui en permet une application plus facile. Cet artifice est basé sur les considérations suivantes :

Reprenons le circuit C et supprimons tous les ampériens intérieurs à C et toutes les parties d'ampériens contiguës au contour C mais ne se trouvant pas sur ce contour; nous pouvons le faire puisque les actions exercées ou subies par cet ensemble supprimé sont nulles. Il ne nous reste que des éléments de courant $I d\vec{l}$ répartis sur C .

Nous remplaçons ainsi l'ampérien, objet élémentaire réel puisqu'il peut être conçu seul dans le vide, par un objet élémentaire $I d\vec{l}$, fictif parce que inséparable du circuit auquel il appartient.

Nous sommes ainsi conduits à rechercher une loi de forces régissant les interactions entre deux éléments $I d\vec{l}$ et $I' d\vec{l}'$ des deux circuits C et C' (fig. 9, p. 23), cette loi devant conduire par une double intégration à des résultats en conformité avec l'expérience. La formule d'Ampère, qui fait l'objet du chapitre suivant, satisfait à cette condition, mais ce qui montre bien son caractère d'artifice de calcul, c'est qu'on peut en trouver d'autres (ce qu'avait fait Ampère) et que *aucune de ces formules ne satisfait au principe de l'égalité de l'action et de la réaction.*

La formule d'Ampère étant adoptée, nous la scinderons en deux :

a) *La formule de Biot et Savart*, qui donne l'expression (fictive) de l'induction magnétique élémentaire produite par un élément de courant.

b) *La formule de Laplace*, qui donne l'expression de la force élémentaire (réelle, comme nous le verrons) agissant sur un élément de courant placé dans un champ magnétique.

Ajoutons que le calcul du travail des forces électromagnétiques, en faisant intervenir le flux d'induction magnétique dans les résultats, nous conduira à des expressions commodes pour déterminer les forces appliquées à un circuit.

Nous étudierons ensuite les actions exercées et subies par les aimants permanents dans le vide.

Nous avons ainsi fixé les grandes lignes de notre plan d'étude.

CHAPITRE II

POSTULAT FONDAMENTAL. LA FORMULE D'AMPÈRE

2-1. La formule d'Ampère.

Considérons (fig. 9) deux circuits linéaires rigides C et C', immobilisés dans le vide dans des positions relatives déterminées, circuits dans lesquels les intensités I et I' sont maintenues constantes (régime stationnaire).

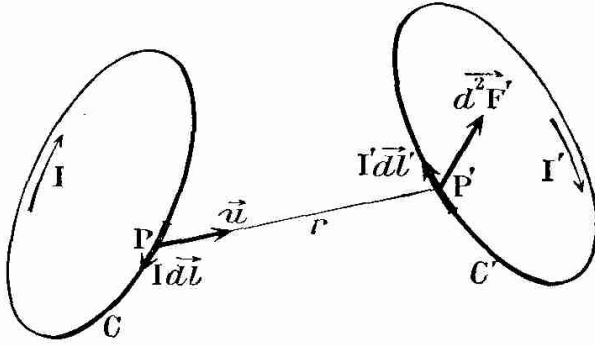


FIG. 9.

Le circuit C exerce sur le circuit C' un système de forces, constituant le torseur T', appliqué à C'. Nous postulons que T' peut être déterminé à l'aide de la formule d'Ampère qui donne l'expression d'une force

élémentaire $\vec{d^2F'}$, force qu'exercerait un élément de courant $I \vec{dl}$ de C sur un élément de courant $I' \vec{dl'}$ de C'; $\vec{d^2F'}$ est donc appliquée à C'.

Posons $PP' = r$ et soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté, dans le sens de P vers P', par la droite qui joint les deux éléments. Nous avons

$$\vec{PP'} = \vec{r} = r\vec{u}.$$

La formule d'Ampère est

$$\vec{d^2F'} = I' \vec{dl'} \wedge \left(k \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2} \right) = I' \vec{dl'} \wedge \left(k \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{r}}{r^3} \right),$$

k ne dépendant que des unités employées. Dans un système rationalisé d'unités $k' = \frac{\mu_0}{4\pi}$, et par suite

(1)

$$\vec{d^2F'} = I' \vec{dl'} \wedge \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2} \right).$$

Dans le système S.I. rationalisé

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}.$$

Les longueurs étant exprimées en mètres, les intensités en ampères, la force est donnée en newtons. On peut donc considérer que *le choix de la valeur de μ_0 , perméabilité du vide, entraîne la définition de l'ampère.*

2-2. Remarques sur la formule d'Ampère.

La force élémentaire $\overrightarrow{d^2F}$ que l'élément $I' d\vec{l}'$ exerce sur l'élément $I d\vec{l}$ a pour expression, $\vec{u}' = -\vec{u}$ étant le vecteur unitaire porté par $P'P$ dans le sens de P' vers P ,

$$(2) \quad \overrightarrow{d^2F} = I d\vec{l} \wedge \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I' d\vec{l}' \wedge \vec{u}'}{r^2} \right) = -I d\vec{l} \wedge \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I' d\vec{l}' \wedge \vec{u}}{r^2} \right).$$

Les expressions (1) et (2) montrent que les forces élémentaires $\overrightarrow{d^2F'}$ et $\overrightarrow{d^2F}$ ont en général des supports distincts et des modules différents :

Le principe de l'égalité de l'action et de la réaction est en défaut pour les forces élémentaires $\overrightarrow{d^2F'}$ et $\overrightarrow{d^2F}$ que donne la formule d'Ampère.

Ces forces n'ont donc pas de réalité physique : *la formule d'Ampère est un simple artifice de calcul.* Ce qui le montre bien, c'est que l'on a pu trouver d'autres formules qui conduisent à des résultats en accord avec l'expérience, *les forces élémentaires ne satisfaisant pas au principe de l'égalité de l'action et de la réaction.* On peut également s'en rendre compte de la façon suivante :

Les forces fictives d^2F' , appliquées en P' , exercées par l'ensemble des éléments tels que $I d\vec{l}$ qui constituent le circuit C , admettent une résultante dF' qui a une réalité physique. dF' est une force réelle; nous verrons qu'il est possible de la mettre en évidence et même de la mesurer (balance de Cotton, 7-4). Si le principe de l'égalité de l'action et de la réaction s'appliquaient aux forces d^2F' et d^2F , il en résulterait que l'élément $I' d\vec{l}'$ exercerait sur le circuit C , supposé quelconque, un torseur de forces équivalent à la force unique $-\overrightarrow{dF'}$. Ce résultat inadmissible tient au fait que *seule l'action du circuit C sur un élément de C' (et sur le circuit C') correspond à une réalité physique.* Il n'est pas possible d'isoler l'action particulière de l'élément $I' d\vec{l}'$ sur l'ensemble du circuit C , car cette action a un caractère fictif; son calcul, si l'on est conduit à le faire, est un simple artifice.

Par une deuxième intégration nous pouvons déterminer le torseur T' des forces dF' appliquées à l'ensemble des éléments $I' dl'$ qui constituent le circuit C' ; comme les forces dF' qui le constituent, ce torseur a évidemment une réalité physique.

L'emploi de la formule d'Ampère, artifice de calcul, se justifie par le fait que les résultats auxquels elle conduit dans la détermination des actions de l'ensemble d'un circuit sur un élément, sur une partie ou sur l'ensemble d'un autre circuit, sont confirmés par l'expérience.

D'après ce que nous venons de voir il résulte que le principe de l'action et de la réaction n'est applicable qu'aux torseurs T' et T des forces appliquées aux circuits entiers, autrement dit *la somme des deux torseurs T' et T est un torseur nul.*

Remarquons encore que nous ne nous sommes pas préoccupés des forces qui s'exercent entre éléments d'un même circuit; nous n'avions pas à le faire, car ces forces sont intérieures au circuit et, comme celui-ci est rigide, *le torseur des forces intérieures est équivalent à zéro.*

2-3. Dichotomie de la formule d'Ampère.

La formule d'Ampère permet donc, par deux intégrations, de déterminer le torseur T' des forces exercées par le circuit C sur le circuit C' .

Posons

$$(1) \quad \vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2};$$

la formule d'Ampère s'écrit

$$d^2\vec{F}' = I' \vec{dl}' \wedge \vec{dB}.$$

Au point P' dont la position est définie à partir de celle du point P par le vecteur unitaire $\vec{u}$ et la distance r (fig. 10) le champ magnétique créé par l'élément de courant $I \vec{dl}$ se caractérise par le vecteur $\vec{dB}$, *vecteur induction élémentaire créé par $I \vec{dl}$ au point P' .*

La formule (1) est **la formule de Biot et Savart**; elle permet de

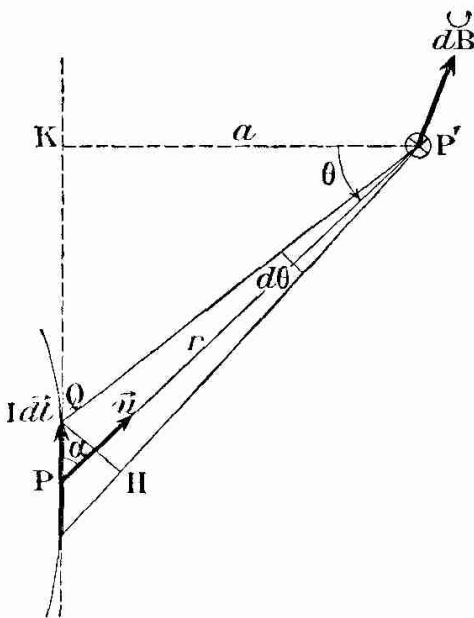


FIG. 10.

scinder la détermination du torseur T' des forces appliquées au circuit C' en deux opérations :

1° Détermination de l'induction magnétique

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2},$$

produite par le circuit C au point P' .

Cette induction est responsable de la force $\vec{dF}'$ exercée par le circuit C sur l'élément de courant $I' \vec{dl}'$; cette force est donnée par la formule d'Ampère intégrée qui constitue **la formule de Laplace**:

$$(2) \quad \boxed{\vec{dF}' = I' \vec{dl}' \wedge \vec{B}.}$$

Le vecteur élémentaire $\vec{dB}$ constitue, comme le vecteur $\vec{d^2F}'$, un simple artifice. Par contre le vecteur $\vec{B}$, comme la force $\vec{dF}'$, a une signification physique puisqu'il en permet le calcul par application de la formule de Laplace.

2° Détermination du torseur T' appliqué au circuit C' par intégration de la formule de Laplace.

Cette intégration peut présenter des difficultés parce que *le torseur T' n'équivaut en général ni à une force unique, ni à un couple unique*. Nous verrons cependant qu'elle est facilitée par les propriétés du flux du vecteur induction magnétique.

2-4. Champ magnétique d'un courant rectiligne indéfini.

En vue de définir l'ampère nous allons, dans ce paragraphe, déterminer l'induction magnétique d'un courant rectiligne indéfini. Pour cela, donnons les expressions du module dB de l'induction magnétique élémentaire; nous avons, avec les notations de la figure 10,

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2},$$

$$\vec{dl} \wedge \vec{u} = dl \sin \alpha = QH = r d\theta,$$

$d\theta$ étant l'angle sous lequel l'élément dl est vu du point P' .

Nous avons d'autre part

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \text{et} \quad a = P'K = \frac{r}{\cos \theta},$$

a étant la distance du point P' au support de dl .

Par suite

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\theta}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} d(\sin \theta).$$

Considérons (fig. 11) un courant rectiligne indéfini d'intensité I . Le support de l'induction élémentaire $d\vec{B}$ produite en P par l'élément de courant $I d\vec{l}$ est normal au plan défini par le courant et le point P , son sens est donné par la règle du tire-bouchon (ou celle de l'observateur d'Ampère).

La direction et le sens de ce vecteur élémentaire sont les mêmes pour tous les éléments du courant : le vecteur induction magnétique $\vec{B}$ au

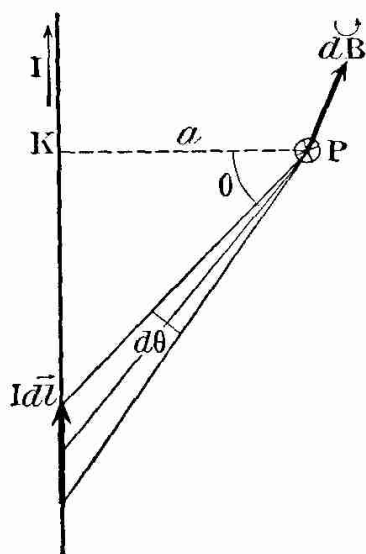


FIG. 11.

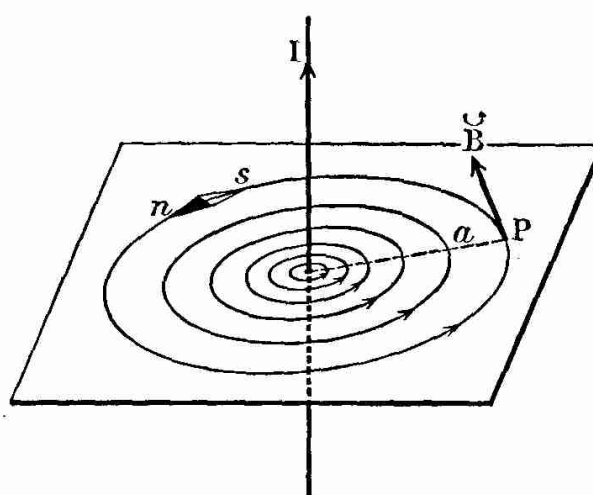


FIG. 12.

point P a donc lui aussi cette même direction et ce même sens.

Il en résulte que $\vec{B}$ a la symétrie axiale et que *les lignes d'induction sont des cercles axés sur le courant*. On vérifie expérimentalement ce résultat en réalisant le spectre magnétique dans le plan d'un carton normal au fil (fig. 12).

Nous pouvons nous attendre à ce que le module de $\vec{B}$ ne dépende (fig. 11) que de la distance $PK = a$; en effet

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d(\sin \theta),$$

d'où

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}.$$

2-5. Actions entre deux courants rectilignes indéfinis parallèles.

Considérons dans le plan de la figure 13 deux courants rectilignes indéfinis et parallèles C et C', d'intensités I et I'. L'action de l'un, C par exemple, sur une portion A'B' de l'autre, a une réalité physique.

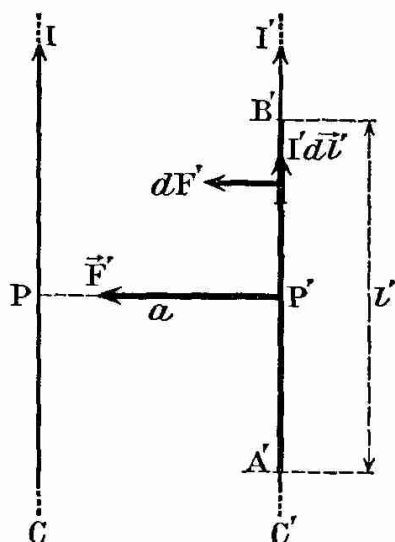


FIG. 13.

D'après la loi de Laplace, la force $d\vec{F}'$ qu'exerce C sur l'élément $I' d\vec{l}'$ de C' est définie par

$$d\vec{F}' = I' d\vec{l}' \wedge \vec{B}.$$

Or $\vec{B}$ est normal au plan de C et du point P', donc normal au plan des deux courants; le support de $d\vec{F}'$ est donc P'P, normal à C et à C'. De plus, l'application de la règle de l'observateur d'Ampère montre que son sens est celui de $\vec{P'P}$ si les courants sont de

même sens (c'est le cas de la figure) et celui de $\vec{PP'}$ dans le cas contraire. Le même raisonnement pouvant être fait en intervertissant les rôles symétriques joués par les deux courants, il en résulte qu'il y a attraction lorsque les courants ont le même sens et répulsion lorsque leurs sens sont contraires.

Le module de $d\vec{F}'$,

$$dF' = I' dl' B = \frac{\mu_0}{2\pi a} II' dl',$$

est proportionnel à dl' ; par suite, le système des forces parallèles et de même sens appliquées à $A'B' = l'$ admet une résultante F' normale aux deux courants et appliquée au milieu de A'B'. Elle est dirigée vers C (attraction) lorsque I et I' sont de même sens; son module est

$$(1) \quad F' = \frac{\mu_0}{2\pi a} \cdot II' l'$$

dans un système d'unités rationalisé, et

$$(1') \quad F' = 2 \cdot 10^{-7} II' \frac{l'}{a}$$

dans le système S.I.(R.).

2-6. Définition légale de l'ampère. Unité S.I. d'induction magnétique.

Le système S.I. est le système M.K.S. de la Mécanique auquel est adjointe une quatrième unité fondamentale, l'ampère, unité d'intensité de courant électrique.

Fixer la valeur de μ_0 dans la formule d'Ampère,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7},$$

détermine le choix de l'ampère comme unité d'intensité de courant électrique.

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ est la valeur de la perméabilité du vide dans le système S.I. rationalisé. La perméabilité du vide est une grandeur dimensionnée à détermination unique.

Nous avons vu que la formule d'Ampère n'est qu'un artifice de calcul et que la force dont elle donne l'expression est une force fictive; cette formule ne permet donc pas de définir directement l'ampère. Par contre, une formule de définition est utilisable si, conséquence de la formule d'Ampère, elle fournit l'expression d'une force réelle en fonction de la perméabilité μ_0 du vide, de grandeurs mécaniques et de l'intensité électrique.

On comprend que la formule (1) du paragraphe précédent (2-5) ait été retenue pour la définition de l'ampère; si dans cette formule nous faisons $I = I' = 1 \text{ A}$, $l' = 1 \text{ m}$ et $a = 1 \text{ m}$, nous avons $F' = 2 \cdot 10^{-7}$ newton.

D'où la **définition internationale de l'ampère** (texte de la 8^e Conférence Générale des Poids et Mesures de 1933, rendu légal en France par la loi du 14 janvier 1948, confirmé par le décret du 3 mai 1961) :

L'ampère (A), unité d'intensité de courant électrique, est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à $2 \cdot 10^{-7}$ newton par mètre de longueur.

La définition de l'ampère, unité fondamentale, entraîne celle de l'unité d'induction magnétique, unité dérivée dont la formule de Laplace est une formule de définition : cette unité s'appelle le *tesla* (symbole T).

Considérons un segment l de longueur égale à 1 mètre appartenant à un circuit parcouru par un courant $I = 1 \text{ A}$; disposé normalement à une induction magnétique uniforme $B = 1 \text{ tesla}$, il est soumis à une force F de 1 newton :

$$F = IlB \sin \alpha = 1 \text{ newton.}$$

Les dimensions de B sont

$$[B] = FL^{-1}I^{-1} = MT^{-2}I^{-1};$$

nous avons donc

$$1 \text{ tesla} = 1 \text{ N.m}^{-1}.\text{A}^{-1} = 1 \text{ kg.s}^{-2}.\text{A}^{-1}.$$

2-7. Le système d'unités S.I. (rationalisé).

La définition de l'ampère revient à faire **un choix rigoureux** de la perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ dans le système S.I. rationalisé.

La perméabilité μ_0 et la permittivité ϵ_0 du vide qui intervient en électrostatique dans l'expression de *la loi de Coulomb* :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2},$$

sont liées à la célérité de la lumière c dans le vide (vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide) par **la relation de Maxwell**

$$\epsilon_0\mu_0c^2 = 1.$$

Si l'on veut éviter l'emploi de deux systèmes d'unités électriques distincts, l'un pour l'électrostatique, l'autre pour l'électromagnétisme (domaines entre lesquels il n'y a pas de cloison étanche), il convient de faire un choix unique de la valeur de l'une des grandeurs à individualité unique ϵ_0 et μ_0 .

L'ampère étant défini, ce qui revient à prendre $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (S.I. rationalisé), *la valeur de ϵ_0 en découle* :

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2}.$$

Si nous prenons pour c la valeur

$$c = 2,997\,893 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1},$$

dont la précision relative semble être de l'ordre de 10^{-6} , ce qui donne

$$c^2 = 8,987\,36 \cdot 10^{16} \text{ S.I.},$$

on obtient pour valeur numérique de la permittivité du vide

$$\epsilon_0 = 8,854\,37 \cdot 10^{12} \text{ S.I. (rationalisé)},$$

connue avec une précision relative de 10^{-6} .

Comme nous avons

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} = 10^{-7} c^2 = 8,987\,56 \cdot 10^9 \text{ S.I. (R)},$$

il est commode de retenir la valeur numérique

$$\boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9 \text{ S.I. (R)},}$$

dont la précision relative, de l'ordre de $1,5 \cdot 10^{-4}$, est suffisante pour la plupart des calculs dans lesquels elle intervient, par exemple dans le calcul de la capacité d'un condensateur.

La valeur numérique de μ_0 est rigoureuse, par contre, celle de ϵ_0 est approchée et doit bénéficier de l'amélioration de la précision sur c .

Remarquons que dans le système S.I. non rationalisé il convient de remplacer dans les formules

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \text{ par } \mu'_0 = 10^{-7} \quad \text{et} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{ par } \frac{1}{\epsilon'_0} \simeq 9 \cdot 10^9.$$

Seules les formules où figurent les valeurs littérales de la perméabilité et de la permittivité du vide sont modifiées, tandis que celles où sont explicitées leurs valeurs numériques sont inaltérées. Quant à la relation de Maxwell, elle conserve la même forme $\epsilon'_0 \mu'_0 c^2 = 1$.

Bornons-nous aux expressions des lois de Coulomb et de Biot et Savart dans le système S.I. (R) et (NR) :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} = \frac{1}{\epsilon'_0} \frac{qq'}{r^2} \simeq 9 \cdot 10^9 \frac{qq'}{r^2},$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \sin \alpha}{r^2} = \mu'_0 I \frac{dl \sin \alpha}{r^2} = 10^{-7} I \frac{dl \sin \alpha}{r^2},$$

et à celle de la capacité du condensateur plan :

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{e} = \frac{\epsilon'_0}{4\pi} \frac{S}{e} \simeq \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{S}{e}.$$

L'ampère, quatrième unité fondamentale du système S.I., ayant été défini, toutes les unités dérivées de l'électrostatique, de l'électrocinétique et, comme nous le verrons, de l'électromagnétisme, en découlent sans que la rationalisation modifie les définitions de la plupart d'entre elles.

CHAPITRE III

FORMULE DE BIOT ET SAVART. DÉTERMINATION DU VECTEUR INDUCTION

3-1. Loi de Biot et Savart. Conditions d'application.

La loi de Biot et Savart traduit la signification de la formule déjà donnée (2-3)

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}.$$

L'induction magnétique élémentaire produite dans le vide au point P par un élément de courant $I \vec{dl}$ est représentée par un vecteur d'origine P :

1° Dont le support est normal au plan défini par l'élément et le point P.

2° Dont le sens est celui pour lequel le trièdre $(\vec{dl}, \vec{u}, \vec{dB})$ est direct.

3° Dont le module a pour expression (fig. 14)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\theta \mu_0 I}{r 4\pi a} = d(\sin \theta).$$

Ce vecteur $\vec{dB}$ intervient dans la formule d'Ampère qui définit une force fictive; il est lui-même un *vecteur fictif* qui permet, par un

artifice de calcul, de déterminer l'induction magnétique $\vec{B}$ produite par le circuit C et par suite, grâce à la formule de Laplace, la force réelle qu'exerce C sur un élément d'un second circuit C'.

Nous avons déjà déterminé l'induction magnétique d'un courant rectiligne indéfini en vue de calculer les actions entre courants rectilignes parallèles.

Le calcul de $\vec{B}$ n'est simple que dans quelques cas particuliers importants que nous étudierons. Il est quelquefois possible de scinder l'intégrale qui donne $\vec{B}$ en décomposant artificiellement le circuit C en parties produisant au point P les inductions partielles $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \dots, \vec{B}_i, \dots$;

on a alors, compte tenu des propriétés du produit vectoriel,

$$\vec{B} = \int_C d\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_i + \dots = \Sigma \vec{B}_i.$$

Les vecteurs partiels $\vec{B}_i$ n'ont pas plus de réalité physique que le vecteur $d\vec{B}$.

Considérons par exemple un circuit dont une partie est un segment P_1P_2 . Le vecteur induction magnétique partiel $\vec{B}_{P_1P_2}$ au point P est perpendiculaire au plan de P_1P_2 et de P. Nous avons

$$dB_{P_1P_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} d(\sin \theta);$$

par suite, si K est entre P_1 et P_2 (fig. 15 a),

$$\begin{aligned} B_{P_1P_2} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2), \end{aligned}$$

et, si P_1 et P_2 sont du même côté de K (fig. 15 b),

$$B_{P_1P_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} |\sin \theta_2 - \sin \theta_1| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} |\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1|.$$

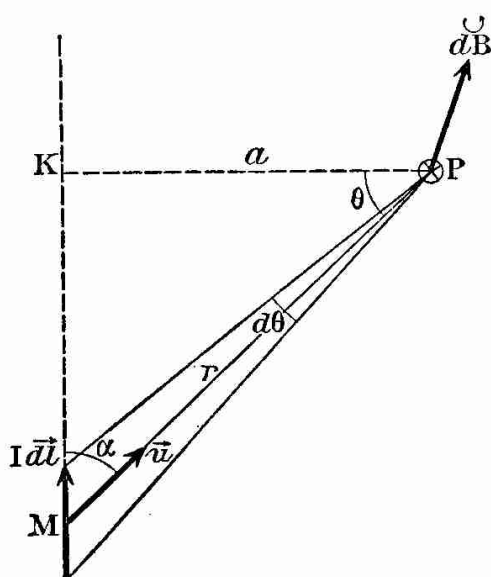


FIG. 14

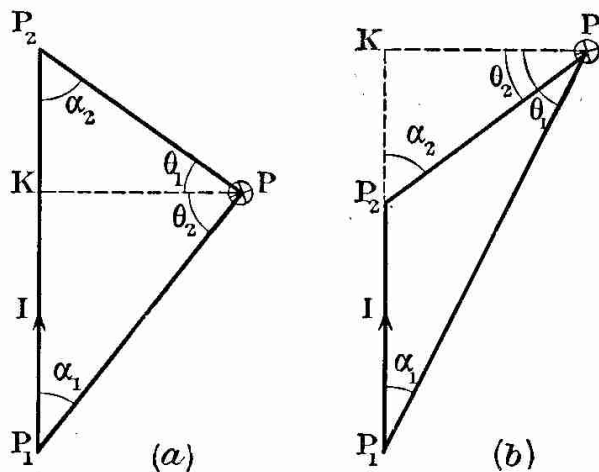


FIG. 15.

3-2. Définition provisoire de l'unité S.I. d'induction magnétique : le tesla (T).

Donnons déjà une définition de l'unité d'induction magnétique dans le système S.I., cette unité est **le tesla** (symbole T). L'induction $\vec{dB}$, donnée par la formule de Biot et Savart, est exprimée en teslas si l'on donne à $\frac{\mu_0}{4\pi}$ la valeur 10^{-7} et si l'on exprime l'intensité en ampères et les longueurs en mètres.

En particulier l'expression de l'induction produite par un courant rectiligne (2-4) dans le système S.I. est

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I}{a}.$$

Il en résulte que

Un courant de 1 ampère parcourant un conducteur rectiligne indéfini produit à 1 mètre de distance une induction magnétique de $2 \cdot 10^{-7}$ tesla.

On utilise également, bien que son emploi soit déconseillé, un sous-multiple du tesla, *le gauss*, défini par la relation

$$1 \text{ tesla} = 10^4 \text{ gauss} = 1 \text{ myriagauss}.$$

Exercices.

Exercice 1. — Déterminer l'induction magnétique au centre d'un conducteur linéaire carré de côté a .

Application : $I = 1 \text{ A}$, $a = 10 \text{ cm}$.

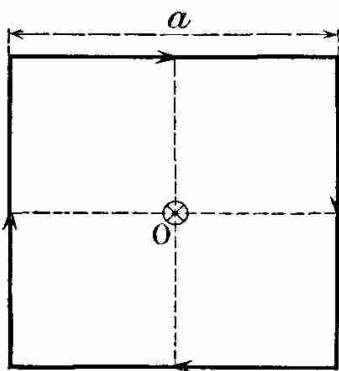


FIG. 16.

$\vec{B}$ est normal au plan du carré et son sens est donné par la règle du tire-bouchon (fig. 16); son module est égal à huit fois celui de l'induction partielle produite par un demi-côté (longueur $\frac{a}{2}$):

$$B = 8 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{a} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{8\sqrt{2}I}{a},$$

$$B = 8\sqrt{2} \cdot 10^{-7} \frac{I}{a} = 1,13 \cdot 10^{-5} \text{ tesla}.$$

Exercice 2. — Déterminer l'induction magnétique au centre d'un conducteur linéaire ayant la forme d'un polygone régulier de n côtés, d'apothème a (rayon du cercle circonscrit R). Quelle est sa limite lorsque n tend vers l'infini?

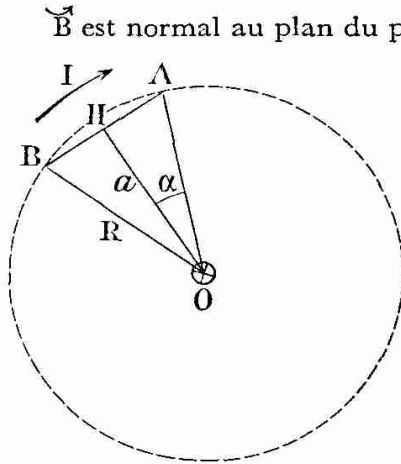


FIG. 17.

$\vec{B}$ est normal au plan du polygone et son sens est donné par la règle du tire-bouchon. Son module est égal à $2n$ fois celui de l'induction produite par un demi-côté (fig. 17) :

$$B = 2n \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \sin \alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{nI}{a} \sin \frac{\pi}{n},$$

ou, comme

$$a = R \cos \alpha = R \cos \frac{\pi}{n},$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{\pi}{n}$ tendant vers

zéro est un infiniment petit équivalent à $\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$;

par suite $n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$ tend vers π et la limite de B est

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Comme le polygone régulier tend vers le cercle de rayon R , l'expression précédente est celle de l'induction magnétique au centre d'un courant circulaire.

3-3. Champ magnétique d'une bobine circulaire plate.

Une bobine circulaire plate est formée de N spires que l'on peut considérer comme situées dans un même plan et comme ayant le même rayon R ; l'induction qu'elle produit en un point est donc celle d'une spire unique (courant circulaire) de même rayon, parcourue par le courant d'intensité NI .

1° Configuration générale du champ d'une spire.

Nous l'obtenons en réalisant le spectre magnétique dans un plan diamétral (fig. 18). L'axe de la spire, axe de symétrie de révolution du champ, est une ligne d'induction par rapport à laquelle les lignes d'induction sont deux à deux symétriques ; le champ présente la symétrie de révolution par rapport à cet axe. Les lignes d'induction, au voisinage du conducteur, sont sensiblement circulaires ; ce fait pouvait être prévu puisque, près du conducteur, l'action d'un élément sensiblement rectiligne du courant est prépondérante.

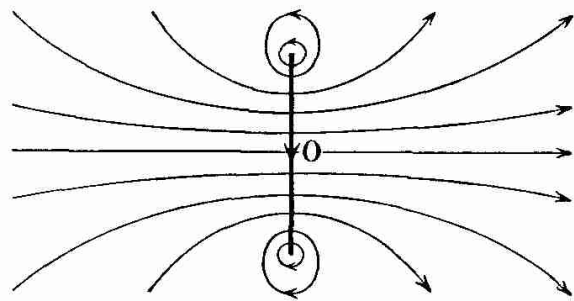


FIG. 18.

Le sens du champ est donné par la règle du tire-bouchon.

2° Induction au centre d'une spire.

D'après la formule de Biot et Savart nous avons $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$

$$dB_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{R^2},$$

d'où

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int dl = \frac{\mu_0 I}{2R},$$

et, pour une bobine plate de N spires,

$$B_0 = \frac{\mu_0 NI}{2R}.$$

3° Induction en un point de l'axe (fig. 19).

Remarquons que le calcul rigoureux de B hors de l'axe n'est pas possible.

Le point M est défini par l'angle $\theta = \widehat{PMO}$ ou encore par son

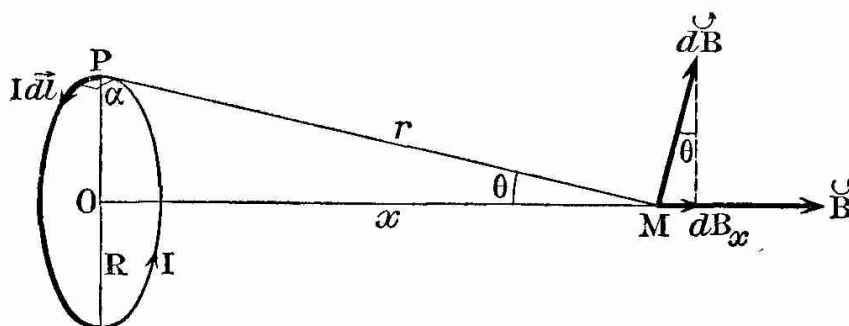


FIG. 19.

abscisse $\overline{OM} = x$. Le champ étant de révolution autour de l'axe, l'induction $\vec{B}$ au point M est dirigée suivant cet axe. Il suffit donc d'intégrer l'expression de la projection dB_x sur l'axe de l'induction élémentaire dB produite par l'élément $I dl$. Nous avons, α étant l'angle de MP avec la tangente en P, $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$dB_x = dB \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \sin^3 \theta dl,$$

par suite,

$$B = \int dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \sin^3 \theta \int dl = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta,$$

ou encore, comme

$$\sin \theta = R(x^2 + R^2)^{-\frac{1}{2}},$$

pour une bobine plate de N spires :

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R} \sin^3 \theta = \frac{\mu_0 NI}{2} R^2 (x^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}} = B_0 \sin^3 \theta = B_0 R^3 (x^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

4° Variation de l'induction le long de l'axe.

Pour obtenir des résultats présentant la plus grande généralité posons

$$u = \frac{x}{R}, \quad b = \frac{B}{B_0} = (1 + u^2)^{-\frac{3}{2}},$$

b et u étant des nombres sans dimensions. Nous avons

$$b = (1 + u^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad \frac{db}{du} = -3u(1 + u^2)^{-\frac{5}{2}},$$

$$\frac{d^2b}{du^2} = 3(1 + u^2)^{-\frac{7}{2}}(4u^2 - 1).$$

La courbe (fig. 22, courbe b_1 ou b_2 de la page 40) $b = f(u)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, sur lequel elle présente le maximum $b = 1$; elle a deux points d'inflexion symétriques : $u = \pm 0,5$; $b = 0,716$, pour lesquels la pente de la tangente d'inflexion est

$$\frac{db}{du} = \mp 0,859.$$

5° Induction en un point très éloigné sur l'axe.

$S = \pi R^2$ étant la surface de la spire, posons

$$\mathcal{M} = SI = \pi R^2 I;$$

nous avons

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M}}{x^3} (x^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M}}{x^3} \left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

x étant très grand par rapport à R , $\frac{R}{x}$ est un infiniment petit du premier ordre et par suite, au second ordre près,

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M}}{x^3};$$

c'est l'expression de l'induction magnétique en un point très éloigné sur l'axe d'un ampérien de moment magnétique $\mathcal{M}$.

Exercices.

Exercice 3. — Calculer l'induction magnétique B produite par un courant circulaire de rayon R et d'intensité I en un point M de son plan dont la distance au centre O , $OM = x$, est petite par rapport à R .

Montrer que B peut être mis sous la forme

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} (1 + \epsilon),$$

en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au second.

Un élément $I dl$ de courant (fig. 20), situé à la distance $MP = d$ du point M , produit en ce point l'induction magnétique dB perpendiculaire au plan du circuit :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \alpha}{d^2}.$$

Choisissons l'angle θ comme variable; nous avons

$$dl = R d\theta, \quad d^2 = x^2 + R^2 - 2xR \cos \theta, \\ R = x \cos \theta + dx \sin \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{R - x \cos \theta}{d}.$$

Par suite,

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R(R - x \cos \theta)}{(x^2 + R^2 - 2xR \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta \\ = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 - \frac{x}{R} \cos \theta\right) \left(1 - \frac{2x}{R} \cos \theta + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}} d\theta.$$

$\frac{x}{R}$ étant petit par rapport à l'unité, nous

avons, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au second,

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left(1 - \frac{x}{R} \cos \theta\right) \left(1 + \frac{3x}{R} \cos \theta - \frac{3x^2}{2R^2} + \frac{15x^2}{2R^2} \cos^2 \theta\right) d\theta, \\ dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left(1 + \frac{2x}{R} \cos \theta - \frac{3x^2}{2R^2} + \frac{9x^2}{2R^2} \cos^2 \theta\right) d\theta.$$

Nous avons, θ variant de zéro à 2π ,

$$B = \int dB;$$

par suite, en remarquant que

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \theta) d\theta = \pi, \\ B = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 + \frac{3x^2}{4R^2}\right) = B_0 \left(1 + \frac{3x^2}{4R^2}\right).$$

Pour $x = 0$ nous retrouvons l'expression de l'induction au centre.

Exercice 4. — Même question que pour l'exercice 3, le point M étant à une distance x de O très grande par rapport à R .

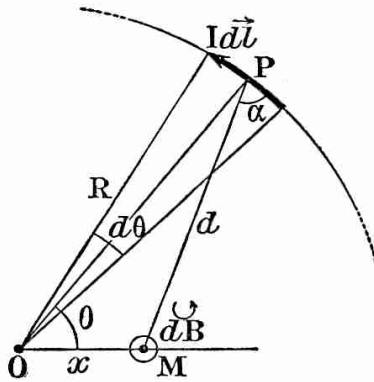


FIG. 20.

En utilisant les développements limités comme pour l'exercice précédent on trouve pour partie principale de B

$$B = \frac{\mu_0 I}{4} \frac{R^2}{x^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}}{x^3},$$

en posant, S étant la surface du circuit,

$$\mathcal{M} = \pi R^2 I = SI.$$

Cette expression présente une analogie formelle avec celle,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3},$$

qui donne le champ électrique en un point éloigné du plan de symétrie d'un dipôle électrique de moment électrique p .

Exercice 5. — Bobines de Helmholtz. On considère deux bobines plates identiques coaxiales parcourues dans le même sens par le même courant I , leur rayon moyen est R et leur distance est $2d$.

Calculer l'induction magnétique B en un point de l'axe situé à la distance x du milieu des deux bobines. Construire la courbe représentant les variations de B avec x pour $d = \frac{1}{2} R$. En déduire qualitativement les déformations de la courbe $B = f(x)$ lorsque d varie.

Les inductions B_1 et B_2 produites au point M par les deux bobines C_1 et C_2

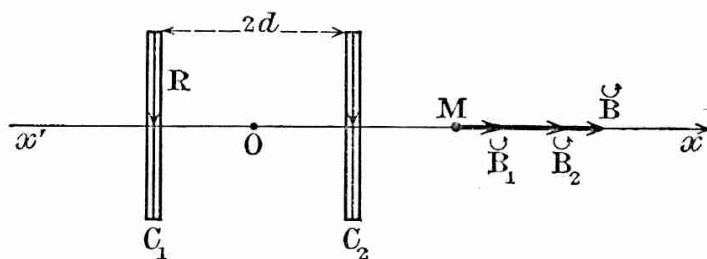


FIG. 21.

(fig. 21) ont le même sens (celui de $x'Ox$ sur la figure); par suite, B_0 étant l'induction créée par chacune des bobines en son centre,

$$B = B_1 + B_2 = B_0 R^3 \left\{ [(d-x)^2 + R^2]^{-\frac{3}{2}} + [(d+x)^2 + R^2]^{-\frac{3}{2}} \right\}.$$

Posons

$$b = \frac{B}{B_0}, \quad b_1 = \frac{B_1}{B_0}, \quad b_2 = \frac{B_2}{B_0}, \quad \frac{d}{R} = \delta, \quad \frac{x}{R} = u,$$

ce qui revient à prendre B_0 comme unité d'induction magnétique et R comme unité de longueur; il vient

$$b = b_1 + b_2 = [1 + (\delta - u)^2]^{-\frac{3}{2}} + [1 + (\delta + u)^2]^{-\frac{3}{2}}.$$

La courbe b est obtenue en additionnant les ordonnées des courbes b_1 et b_2 ; ces courbes composantes sont identiques, symétriques par rapport à Ob et distantes de 2δ (en coordonnées réduites).

Étudions tout d'abord le cas particulier $2\delta = 1$ (donc $2d = R$), pour lequel

$$b = [1 + (0,5 - u)^2]^{-\frac{3}{2}} + [1 + (0,5 + u)^2]^{-\frac{3}{2}}.$$

D'après ce que nous avons vu (3-3,4°) le point d'intersection ($u = 0$) des courbes composantes est un point d'inflexion pour ces deux courbes, les pentes des tangentes inflexionnelles étant égales et de signes contraires. Les dérivées première et seconde de b par rapport à u sont toutes deux nulles en ce point où la courbe (fig. 22 b) présente un méplat; l'induction est donc sensiblement uniforme dans une grande partie de l'espace qui sépare les deux bobines.

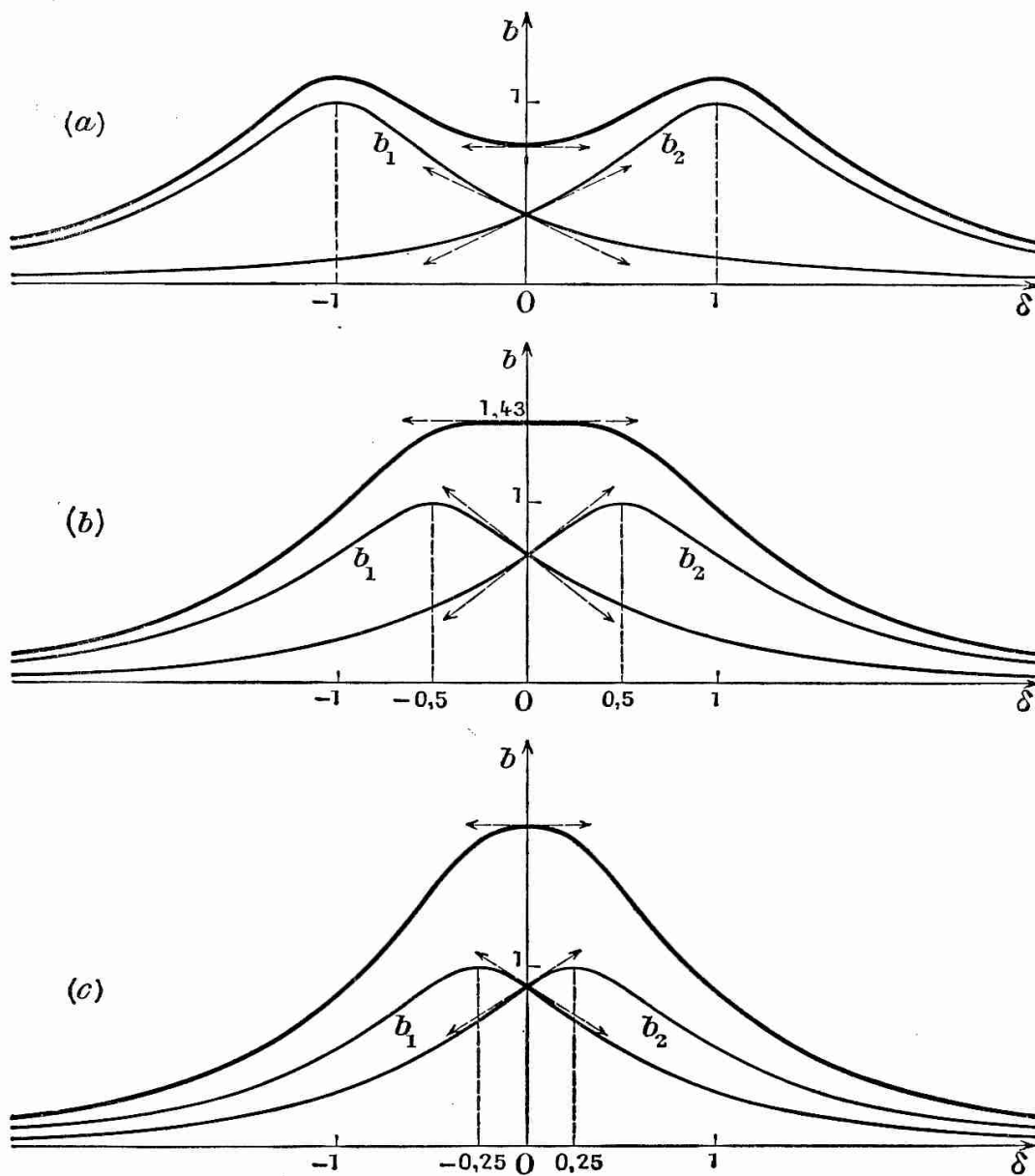


FIG. 22.

Pour étudier les déformations de $b = f(u)$ lorsque 2δ varie de l'infini (bobines très éloignées) à zéro (bobines confondues) en passant par la valeur 1 (cas particulier étudié), il suffit de rapprocher les courbes composantes b_1 et b_2 symétriques par rapport à Ob :

Pour $2\delta > 1$ (fig. 22 a), b passe par deux maximums symétriques par rapport à Ob , elle présente un minimum pour $u = 0$.

Pour $2\delta = 1$ (fig. 22 c), la courbe b ne présente plus qu'un maximum pour $u = 0$.

Pour $\delta = 0$, les deux bobines étant confondues, la courbe est celle que fournit une bobine unique comprenant $2N$ spires.

Exercice 6. — Un fil conducteur, parcouru par un courant I , a la forme d'un carré de côté a . Calculer l'induction magnétique, au point M d'abscisse $OM = x$ sur la normale au plan du carré en son centre O . Quelle forme prend-elle lorsque x devient très grand par rapport à a ?

Il est facile de voir (fig. 23) que, par raison de symétrie, l'induction B au point M est dirigée suivant l'axe Ox et que son module est égal à 4 fois la

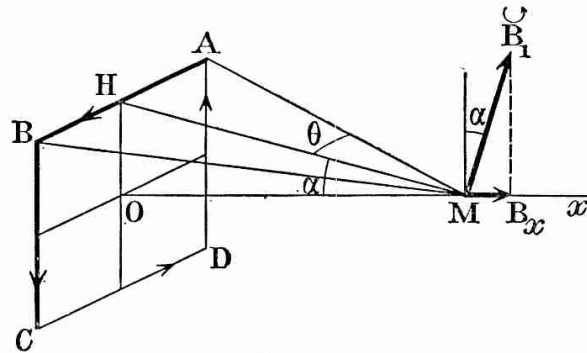


FIG. 23.

projection B_x sur Ox de l'induction B_1 créée par un côté du carré. Par suite

$$B = 4B_x = 4B_1 \sin \alpha = 4B_1 \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4x^2}};$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2 \sin \theta}{MH} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4x^2} \sqrt{2a^2 + 4x^2}};$$

d'où

$$B = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{4a^2}{(a^2 + 4x^2) \sqrt{2a^2 + 4x^2}}.$$

A une grande distance, a est négligeable par rapport à x et l'on a

$$B \simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a^2}{x^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M}}{x^3},$$

en posant $\mathcal{M} = Ia^2 = SI$. Le circuit se comporte comme une boucle.

Exercice 7. — On considère dans un plan deux circuits semi-circulaires C_1 et C_2 , de même rayon R et de même centre O , parcourus en sens inverse par des courants de même intensité I . Déterminer le vecteur induction magnétique B qu'ils produisent en un point P de leur axe commun $x'Ox$; étudier ses variations en fonction de $OP = x$ (il est commode pour cela d'utiliser la variable sans dimension $u = \frac{x}{R}$).

Considérons (fig. 24) en M_1 et M_2 deux éléments de courant de longueur

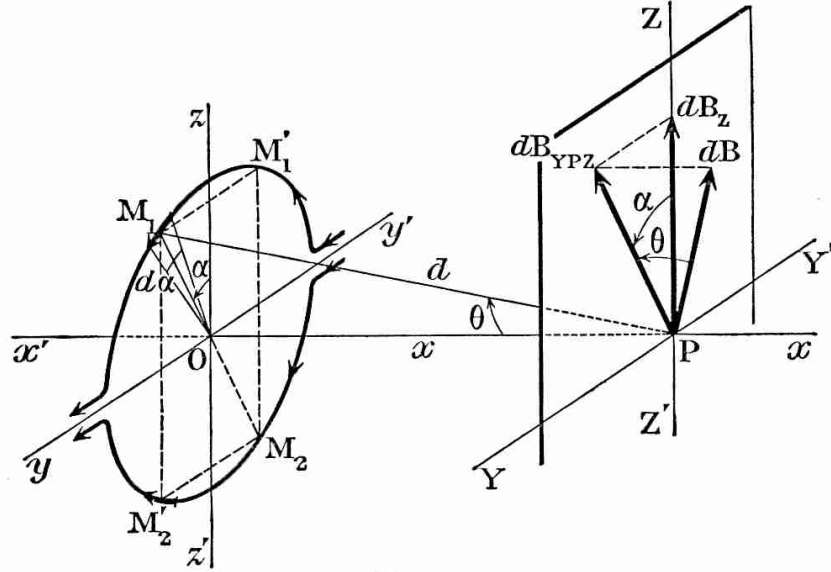


FIG. 24.

$dl = R d\alpha$; ils produisent au point P ($M_1P = M_2P = d$) des inductions élémentaires de même module dB , indépendant de α ,

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi d^2} dl = \frac{\mu_0 R I}{4\pi d^2} d\alpha.$$

Les deux vecteurs dB sont dans le plan axial qui contient M_1OM_2 ; ils sont, compte tenu du sens des courants, symétriques par rapport au plan de front YPZ et font l'angle θ constant avec ce plan. Il en résulte que leurs projections sur l'axe $x'Px$ sont opposées et que la composante B_x du vecteur B suivant cet axe est nulle : ce vecteur B est donc dans le plan YPZ . La projection sur ce plan de la résultante des vecteurs dB a pour module

$$2 dB_{YPZ} = 2 dB \cos \theta = \frac{\mu_0 IR \cos \theta}{2\pi d^2} d\alpha;$$

le vecteur $2 dB_{YPZ}$ fait l'angle α avec PZ et son module est indépendant de α .

Considérons maintenant en M'_1, M'_2 le couple d'éléments de courant symétrique du premier par rapport à $z'Oz$; ils produisent en P des inductions dont la résultante projetée sur le plan YPZ est symétrique de $2 dB_{YPZ}$ par rapport à l'axe PZ . Par suite l'induction B est dirigée suivant cet axe et la résultante $4 dB_z$ des inductions produites par les deux couples d'éléments considérés est

$$4 dB_z = 4 dB_{YPZ} \cos \alpha = \frac{\mu_0 IR \cos \theta}{\pi d^2} \cos \alpha d\alpha.$$

B s'obtient en faisant la somme des vecteurs $4 dB_z$, α variant de zéro à $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 IR \cos \theta}{\pi d^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 IR \cos \theta}{\pi d^2} = \frac{\mu_0 I}{\pi R} \sin^2 \theta \cos \theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi R} \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) = \frac{\mu_0 IR}{\pi} x(x^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{\mu_0 I}{\pi R} \frac{x}{R} \left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Quant à son sens, il se déduit facilement de celui des courants : PZ sur la figure.

Pour étudier les variations de B posons

$$\frac{x}{R} = \cotg \theta = u; \quad B' = \frac{\mu_0 I}{\pi R}; \quad y = \frac{B}{B'};$$

il vient

$$y = u(1 + u^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

y , et par suite B , s'annulent pour $u = \infty$ ($x = \infty$) et $u = 0$ ($x = 0$); ce dernier résultat se comprend puisqu'en O toutes les inductions élémentaires, dirigées suivant l'axe, sont deux à deux opposées (pour des éléments diamétralement opposés).

La courbe $y = f(u)$ étant symétrique par rapport au point O (fig. 25), il

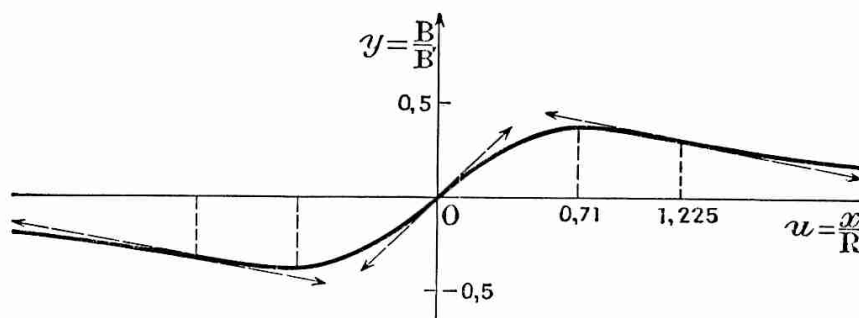


FIG. 25.

nous suffit donc d'étudier la branche $u > 0$ ($B > 0$); l'induction B est dirigée vers le haut dans le plan axial vertical alors qu'elle est dirigée vers le bas ($B < 0$) pour $u < 0$. Nous avons

$$\frac{dy}{du} = (1 + u^2)^{-\frac{5}{2}} (1 - 2u^2); \quad \frac{d^2y}{du^2} = 3u(1 + u^2)^{-\frac{7}{2}} (2u^2 - 3).$$

$\frac{dy}{du}$ s'annule pour $u = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,71$, pour lequel y est maximal;

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{9} = 0,385.$$

$\frac{d^2y}{du^2}$ s'annule pour $u = 0$, dans ce cas la tangente d'inflexion a pour pente 1, et pour $u = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,225$, $y = \frac{8\sqrt{15}}{100} = 0,31$, point d'inflexion pour lequel

la pente d'inflexion est $-0,32 \sqrt{\frac{2}{5}} = -0,20$.

3-4. Champ magnétique d'un solénoïde.

La définition d'un solénoïde ayant été donnée (1-1, 2°), nous désignons par R son rayon, l sa longueur, N le nombre total de spires (en tenant éventuellement compte de plusieurs couches); $n = \frac{N}{l}$ est le nombre de spires par unité de longueur (par mètre). Pratiquement une bobine formée d'un fil conducteur enroulé suivant une hélice de petit pas est un solénoïde; le fil doit être isolé si les spires sont jointives.

1° Configuration générale du champ.

Le phénomène étant évidemment de révolution autour de l'axe, il suffit de former le spectre magnétique dans un plan passant par l'axe du solénoïde (fig. 26); un léger écartement entre les spires permet à la limaille de fer de tomber sur le carton à l'intérieur du circuit.

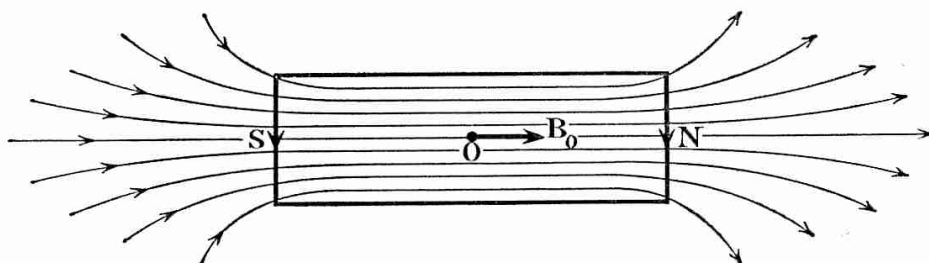


FIG. 26.

On constate que l'axe est une ligne d'induction qui est l'axe de symétrie des autres lignes. L'application de la règle du tire-bouchon donne leur sens.

A l'extérieur les lignes d'induction sortent de la face nord pour s'épanouir et rentrer par la face sud en se resserrant, elles ont la même allure que celles d'un barreau aimanté cylindrique (9-4, 2°).

A l'intérieur, suffisamment loin des extrémités de la bobine, les lignes d'induction sont sensiblement parallèles à l'axe : *le champ est uniforme*.

2° Induction en un point de l'axe.

Toutes les spires produisent des inductions de même direction et de même sens, ceux de l'axe magnétique $x'Ox$ (fig. 27), le sens étant donné

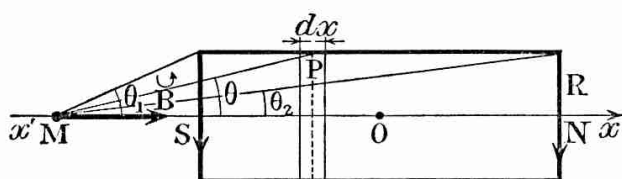


FIG. 27.

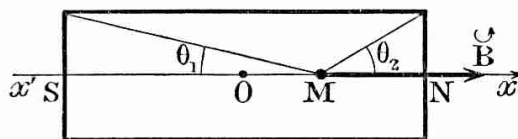


FIG. 28.

par la règle du tire-bouchon; l'induction $\vec{B}$ au point M a donc Mx pour support.

Prenons le point M pour origine des abscisses comptées positivement dans le sens de l'induction. Considérons une tranche de solénoïde, d'épaisseur dx , d'abscisse x , dont le rayon R est vu de M sous l'angle $\theta = (\vec{Mx}, \vec{MP})$ pouvant être compris entre 0 et π suivant la position de

M; constituant une bobine plate de $n dx$ spires, elle crée en M(3-3, 3°) l'induction

$$dB = \frac{\mu_0 n I}{2R} \sin^3 \theta dx;$$

comme

$$x = \frac{R}{\tan \theta}, \quad \text{et} \quad dx = -R \frac{d\theta}{\sin^2 \theta},$$

nous avons

$$dB = -\frac{I}{2} \mu_0 n I \sin \theta d\theta = \frac{I}{2} \mu_0 n I d(\cos \theta).$$

Par suite, en appelant θ_1 et θ_2 les angles de Ox avec les droites MS et MN allant de M aux spires terminales (faces sud et nord) :

$$B = \frac{I}{2} \mu_0 n I (\cos \theta_2 - \cos \theta_1).$$

Si M est à l'extérieur du solénoïde, les angles θ_1 et θ_2 sont tous deux aigus (M à gauche de S) ou tous deux obtus (M à droite de N), les cosinus ont le même signe que le module de B et

$$B = \frac{I}{2} \mu_0 n I |\cos \theta_2 - \cos \theta_1|.$$

Si M est à l'intérieur (fig. 28), un des angles est aigu, l'autre est obtus; les cosinus sont de signes contraires et l'on a

$$B = \frac{I}{2} \mu_0 n I (|\cos \theta_2| + |\cos \theta_1|).$$

Les formules précédentes donnent B en teslas, avec $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, n étant le nombre de spires par mètre et I l'intensité exprimée en ampères.

Remarques.

a) L'induction élémentaire dB produite par la bobine plate d'épaisseur dx , qui constitue en quelque sorte un élément de solénoïde, a une signification physique puisqu'elle est créée par un circuit qui peut être conçu isolément. D'ailleurs le solénoïde est bien la juxtaposition de circuits complets.

b) L'expression de l'angle solide d'un cône de révolution étant

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta),$$

l'angle solide sous lequel est vue la surface latérale de l'élément de cylindre de longueur dx (fig. 29) est

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Par suite nous avons en valeur absolue

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} nI d\Omega,$$

et pour le solénoïde :

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} nI\Omega,$$

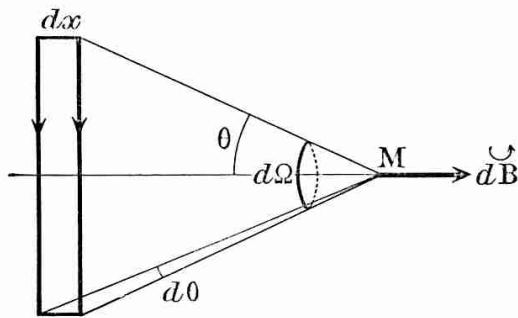


FIG. 29.

Ω étant l'angle solide sous lequel la surface du solénoïde est vue du point M.

3° Cas particuliers.

a) Dans le cas d'un solénoïde dont la longueur est très grande par rapport au rayon, on a, de part et d'autre du centre O et suffisamment loin des bouts, $\theta_1 = \theta_2 \simeq 0$, et

$$B = \mu_0 nI.$$

On démontre que cette expression reste valable en dehors de l'axe :

L'induction à l'intérieur et loin des extrémités d'un solénoïde très long est uniforme.

Par exemple, pour $n = 2\,000\text{ m}^{-1}$ et $I = 10\text{ A}$:

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-4} = 0,0127\text{ tesla}.$$

b) Au centre d'un solénoïde $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, par suite

$$B_0 = \mu_0 nI \cos \theta.$$

c) Au centre d'une face terminale on a par exemple $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ et

$$B = \frac{I}{2} \mu_0 nI \cos \theta_1;$$

si le solénoïde est long ($\theta_1 \simeq 0$),

$$B \simeq \frac{I}{2} \mu_0 nI.$$

Exercices.

Exercice 8. — Un ruban métallique de largeur $2b$ est enroulé sous la forme d'un cylindre de rayon a (fig. 30). Les deux génératrices très voisines, extrémités du conducteur ainsi constitué, sont mises en relation avec un générateur de façon que le cylindre soit parcouru par un courant d'intensité totale I perpendiculaire aux génératrices, intensité qui est uniformément répartie le long d'une génératrice.

Déterminer l'induction magnétique créée par ce courant au centre O du cylindre;

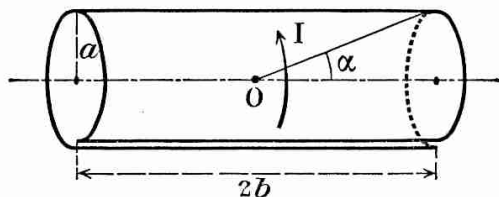


FIG. 30.

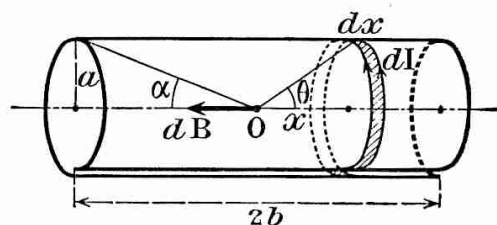


FIG. 31.

quelle est sa valeur limite lorsque, l'intensité $\frac{I}{2b}$ rapportée à l'unité de longueur de génératrice restant constante, la longueur du cylindre tend vers l'infini?

Considérons le courant circulaire qui passe dans une bande de largeur dx (fig. 31) dont le plan est situé à la distance x de O et dont le rayon est vu de ce point sous l'angle θ . Il produit au point O une induction magnétique dB dirigée suivant l'axe du cylindre; son intensité est

$$dI = \frac{I}{2b} dx;$$

par suite

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2a} \sin^3 \theta = \frac{\mu_0}{4ab} I \sin^3 \theta dx.$$

Or nous avons

$$x = \frac{a}{\tan \theta}; \quad dx = -\frac{a d\theta}{\sin^2 \theta};$$

par suite

$$dB = -\frac{\mu_0 I}{4b} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4b} d(\cos \theta);$$

et, α étant l'angle sous lequel le rayon a des faces terminales est vu du point O ,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4b} \int_{-\alpha}^{+\alpha} d(\cos \theta) = \frac{\mu_0 I}{2b} \cos \alpha = \mu_0 i \cos \alpha,$$

en posant $i = \frac{I}{2b}$.

Lorsque b tend vers l'infini, B tend vers $\mu_0 i$.

Exercice 9. — 1° Calculer l'induction magnétique B au centre O d'une bobine cylindrique portant n couches par centimètre d'épaisseur, chaque couche comprenant n spires par centimètre de longueur. Les rayons des spires terminales sont vus sous les angles θ_1 et θ_2 ; $2l$ est la longueur de la bobine (fig. 32).

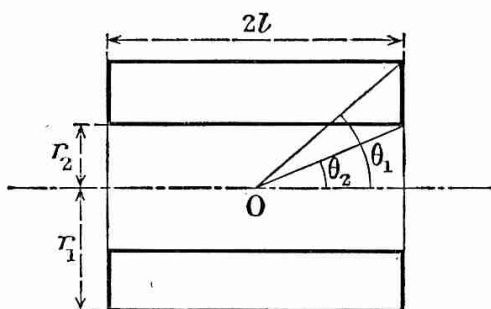


FIG. 32.

Application : Calculer B en fonction de n et de i lorsque $2l = 5$ cm. On donne le rayon des spires extérieures $r_1 = 0,8$ cm, celui des spires intérieures $r_2 = 0,4$ cm.

Quelle erreur relative commet-on dans le calcul de B , en supposant que toutes les spires situées dans un même plan normal à

l'axe se comportent comme si elles avaient pour rayon le rayon moyen $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$? Dans la suite on prendra la valeur ainsi calculée.

2° Les dimensions $2l$, r_1 et r_2 qui définissent le volume de l'enroulement sont imposées; ce sont celles de l'application numérique; le nombre total de spires N et par conséquent la résistance R de la bobine dépendent de la section du fil utilisé. Le cuivre ne remplit que les deux tiers du volume de l'enroulement, le reste étant occupé par l'isolant.

Donner la relation entre l'induction au centre, la résistance R , la résistivité ρ du cuivre et l'intensité i du courant.

Application : $\rho = 1,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$.

1° Nous utilisons le système S.I. rationalisé sauf pour le nombre de spires par unité de longueur, n spires par centimètre, le nombre de spires par mètre étant $n' = 100 n$.

Considérons la bobine de longueur $2l$, de rayon r vu du point O sous l'angle θ , d'épaisseur dr , comportant par suite $n' dr = 100 n dr$ couches et $n'^2 dr = 10^4 n^2 dr$ spires par mètre.

L'induction au centre O de cette bobine est

$$dB = \mu_0 n'^2 i \cos \theta dr = 10^4 \mu_0 n^2 i \cos \theta dr.$$

Nous avons

$$r = l \tan \theta; \quad dr = \frac{l d\theta}{\cos^2 \theta};$$

par suite, en posant $A = 10^4 \mu_0 l n^2 i$,

$$dB = 10^4 \mu_0 l n^2 i \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = A \frac{d\theta}{\cos \theta}.$$

L'induction au centre de la bobine étudiée est

$$B = A \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\cos \theta}.$$

Nous avons, en posant $u = \sin \theta$,

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{\cos \theta} &= \frac{\cos \theta d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du; \\ \int \frac{d\theta}{\cos \theta} &= \frac{1}{2} \operatorname{Log}_e \frac{1+u}{1-u} = \frac{1}{2} \operatorname{Log}_e \frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta}; \end{aligned}$$

par suite

$$B = \frac{A}{2} \operatorname{Log}_e \frac{(1 + \sin \theta_1)(1 - \sin \theta_2)}{(1 - \sin \theta_1)(1 + \sin \theta_2)} = \frac{A}{2} \operatorname{Log}_e \frac{(1 + \sin \theta_1)^2 (1 - \sin \theta_2)^2}{\cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2};$$

$$B = A \operatorname{Log}_e \frac{(1 + \sin \theta_1)(1 - \sin \theta_2)}{\cos \theta_1 \cos \theta_2}.$$

D'où, en remplaçant sinus et cosinus en fonction de r_1 , r_2 et l et en posant

$$\varepsilon_1 = \frac{r_1}{l} \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \frac{r_2}{l} :$$

$$(1) \quad B = A \operatorname{Log}_e \frac{1}{l^2} (\sqrt{r_1^2 + l^2} + r_1) (\sqrt{r_2^2 + l^2} - r_2)$$

$$= A \operatorname{Log}_e (\sqrt{1 + \varepsilon_1^2} + \varepsilon_1) (\sqrt{1 + \varepsilon_2^2} - \varepsilon_2).$$

L'application numérique donne

$$A = 10^4 \mu_0 l n^2 i = 4\pi \cdot 10^4 \cdot 10^{-7} \times 2,5 \cdot 10^{-2} n^2 i = 3,142 \cdot 10^{-4} n^2 i;$$

$$B = 2,303 A \log_{10} (\sqrt{1 + \varepsilon_1^2} + \varepsilon_1) (\sqrt{1 + \varepsilon_2^2} - \varepsilon_2) = 0,155 \, 46 A$$

$$= 0,155 \, 46 \times 3,142 \cdot 10^{-4} n^2 i = 4,885 \cdot 10^{-5} n^2 i.$$

Supposons maintenant que toutes les spires aient pour rayon moyen $r = \frac{1}{2} (r_1 + r_2)$, rayon vu de O sous l'angle θ ; la bobine comporte $100 n(r_1 - r_2)$ couches, donc $10^4 n^2 (r_1 - r_2)$ spires par mètre; l'induction au centre est donnée par

$$(2) \quad B' = 10^4 \mu_0 n^2 i (r_1 - r_2) \cos \theta = 2A \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + 4l^2}}.$$

L'application numérique donne

$$B' = 0,155 \, 58 A = 4,888 \cdot 10^{-5} n^2 i.$$

L'erreur relative commise en prenant B' au lieu de B est

$$\frac{B' - B}{B} = \frac{4,888 - 4,885}{4,9} \simeq 6 \cdot 10^{-4};$$

elle est donc inférieure au millième.

Nous pourrions montrer, en effectuant un calcul approché à l'aide de la formule (1), que celle-ci permet de retrouver la formule (2) et même la formule plus grossièrement approchée

$$B \simeq A \frac{r_1 - r_2}{l} = 5,0 \times 10^{-5} n^2 i,$$

à 2 % près.

Pour la suite nous utiliserons la valeur approchée à $3 \cdot 10^{-3}$ près

$$B = 4,9 \cdot 10^{-5} n^2 i.$$

2° Le nombre de spires par couche est $100 n \times 2l = 5n$, le nombre de couches est $100 n(r_1 - r_2) = 0,4 n$; le nombre total de spires est donc $N = 2n^2$. La longueur totale du fil est

$$(1) \quad L = \pi(r_1 + r_2)N = 24\pi \cdot 10^{-3} n^2.$$

Le volume total de l'enroulement (y compris l'isolant) est

$$v = \pi(r_1^2 - r_2^2) \times 2l = 24\pi \cdot 10^{-7} \text{ m}^3;$$

celui du cuivre est, s étant la section du fil,

$$v' = \frac{2}{3} v = 16\pi \cdot 10^{-7} = Ls = 24\pi \cdot 10^{-3} n^2 s,$$

d'où nous tirons

$$\frac{1}{s} = \frac{3}{2} \cdot 10^4 n^2,$$

et par suite, en tenant compte de (1),

$$\frac{L}{s} = 360 \pi n^4.$$

D'où l'expression de R en fonction de ρ et de n :

$$R = \rho \frac{L}{s} = 360 \pi \rho n^4,$$

et par suite

$$n^2 = \frac{1}{6\sqrt{10\pi}} \sqrt{\frac{R}{\rho}};$$

d'où l'induction au centre :

$$B = 4,9 \cdot 10^{-5} n^2 i = \frac{4,9 \cdot 10^{-5}}{6\sqrt{10\pi}} i \sqrt{\frac{R}{\rho}} = 1,46 \cdot 10^{-4} i \sqrt{\frac{R}{\rho}},$$

et, pour $\rho = 1,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$,

$$B = \frac{1,46}{\sqrt{1,8}} i \sqrt{R} = 1,15 \sqrt{R} i^2.$$

Nous voyons que B est proportionnel à la racine carrée de la puissance dépensée par effet Joule dans l'enroulement, autrement dit cette puissance Ri^2 est proportionnelle à B^2 .

CHAPITRE IV

POTENTIEL-VECTEUR $\vec{A}$ DU VECTEUR INDUCTION $\vec{B}$. CONSERVATION DU FLUX D'INDUCTION

4-1. Rotationnel $\vec{B}$ et potentiel-vecteur $\vec{A}$.

Considérons un champ de vecteurs quelconque $\vec{A}$, de composantes cartésiennes A_x, A_y, A_z ; on peut lui faire correspondre un champ de vecteurs $\vec{B}$, de composantes cartésiennes B_x, B_y, B_z , appelé *rotationnel de $\vec{A}$* , ce que l'on écrit

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A},$$

dont les trois composantes cartésiennes ont pour expression

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_x = \text{rot}_x A = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ B_y = \text{rot}_y A = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ B_z = \text{rot}_z A = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{array} \right.$$

Le vecteur $\vec{A}$ est le potentiel-vecteur de $\vec{B}$.

Les relations de définition précédentes sont relatives à un trièdre de référence $Oxyz$ direct; si l'on passait au trièdre de référence inverse il faudrait changer les signes des seconds membres pour conserver le sens de $\vec{B}$. *Les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ont donc des symétries différentes.* Si, comme nous

l'avons supposé, $\vec{A}$ est polaire, $\vec{B}$ est nécessairement axial, et inversement.

Étant donné un champ de vecteurs $\vec{B}$ quelconque, il n'est en général pas possible de trouver un champ de vecteurs $\vec{A}$ défini par les équations aux dérivées partielles (1) tel que $\vec{B}$ soit le rotationnel de $\vec{A}$. Lorsque cela est possible, on dit que le vecteur $\vec{B}$ dérive d'un potentiel-vecteur $\vec{A}$. On a alors

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} \equiv 0.}$$

Il suffit, pour le démontrer, d'associer les équations (1) à la relation de définition de la divergence (grandeur scalaire) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \equiv 0. \end{aligned}$$

La divergence d'un vecteur $\vec{B}$ qui dérive d'un potentiel-vecteur $\vec{A}$ est nulle en tout point.

4-2. Rappel de la condition de conservation du flux d'induction.

Le théorème d'Ostrogradsky, traduit par la formule

$$\Phi = \iint_{\Sigma} d\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{B} \cdot dv,$$

permet de remplacer l'intégrale de surface donnant le flux d'un vecteur champ (qui peut être de nature polaire ou axiale) sortant d'une surface fermée Σ par une intégrale de volume étendue au volume V limité par cette surface.

Ce théorème permet d'établir que *la condition nécessaire et suffisante pour que le flux du vecteur $\vec{B}$ soit conservatif est que la divergence de ce vecteur soit nulle en tout point du champ.*

Or nous avons vu que, si le vecteur $\vec{B}$ dérive d'un potentiel-vecteur, sa divergence est nulle; par suite :

Le flux d'un vecteur qui dérive d'un potentiel-vecteur est conservatif.

4-3. Le vecteur induction dérive d'un potentiel-vecteur.

Considérons au point M (fig. 33) de coordonnées x, y, z , un élément

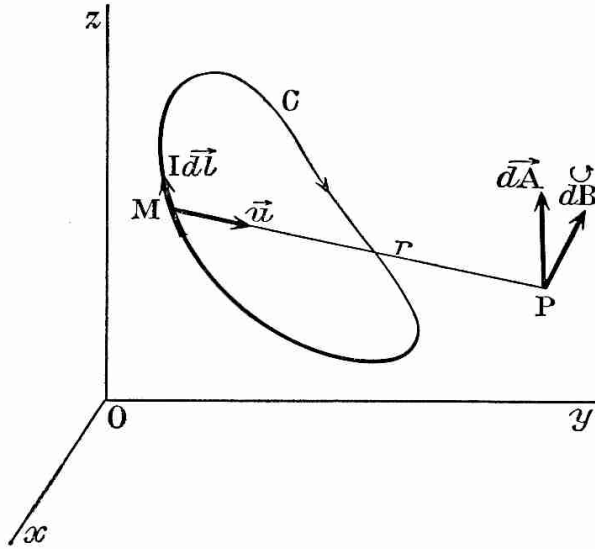


FIG. 33.

de courant $I \vec{dl}$ d'un circuit linéaire C dans le vide, élément dont les composantes suivant les axes du trièdre de référence $Oxyz$ sont

$$I dl_x, I dl_y \text{ et } I dl_z.$$

Soit P un point défini par $MP = r$ et par les cosinus directeurs α, β, γ du vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par MP, on a

$$\alpha = \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \gamma = \frac{\partial r}{\partial z}.$$

L'induction élémentaire produite par l'élément de cou-

rant au point P est donnée par la formule de Biot et Savart :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \vec{dl} \wedge \vec{u}.$$

Cette relation, projetée sur l'axe Ox , donne

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} (\gamma dl_y - \beta dl_z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dl_y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{dl_z}{r} \right) \right],$$

d'où les expressions des composantes de $\vec{dB}$,

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{dl_z}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dl_y}{r} \right) \right] \equiv \frac{\partial}{\partial y} (dA_z) - \frac{\partial}{\partial z} (dA_y),$$

$$dB_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dl_x}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dl_z}{r} \right) \right] \equiv \frac{\partial}{\partial z} (dA_x) - \frac{\partial}{\partial x} (dA_z),$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dl_y}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{dl_x}{r} \right) \right] \equiv \frac{\partial}{\partial x} (dA_y) - \frac{\partial}{\partial y} (dA_x).$$

Ces résultats expriment la relation

$$\vec{dB} = \text{rot } \vec{dA};$$

le vecteur $\vec{dA}$, dont les composantes sont

$$dA_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl_x}{r}, \quad dA_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl_y}{r}, \quad dA_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl_z}{r},$$

est donc défini par

$$\vec{dA} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl}}{r}.$$

$\vec{dB}$ dérive donc du potentiel-vecteur $\vec{dA}$, vecteur parallèle à l'élément de courant $I \vec{dl}$.

L'induction

$$\vec{B} = \int_C \vec{dB} = \int_C \text{rot } \vec{dA},$$

somme géométrique des rotationnels de $\vec{dA}$, est le rotationnel du vecteur

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{\vec{dl}}{r}.$$

Finalement nous avons

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A};$$

le vecteur induction magnétique dérive du potentiel-vecteur $\vec{A}$.

Remarquons que dA est inversement proportionnel à r de même que le potentiel électrique d'une charge électrique ponctuelle, mais *il s'agit, dans le cas de l'induction magnétique, d'un vecteur* (d'où l'expression potentiel-vecteur) alors que le potentiel électrique est un scalaire.

4-4. Unité S.I. de flux d'induction : le weber (Wb).

Rappelons la définition du flux d'un vecteur dans le cas de l'induction magnétique. Ayant fait choix d'une normale positive à l'élément de surface dS de façon à pouvoir représenter cette surface élémentaire par le vecteur $\vec{dS}$, le flux d'induction à travers dS est défini par la relation

$$d\Phi = \vec{B} \cdot \vec{dS} = B dS \cos \theta.$$

L'unité S.I. de flux d'induction s'appelle le weber (symbole Wb) :

Le weber est le flux d'induction qui traverse une surface plane de 1 m^2 disposée normalement à une induction uniforme de 1 tesla.

Le maxwell est un sous-multiple du weber :

$$1 \text{ maxwell} = 1 \text{ gauss.cm}^2 = 10^{-4} \cdot 10^{-4} \text{ T.m}^2 = 10^{-8} \text{ Wb}.$$

Nous verrons plus tard, dans l'étude des phénomènes d'induction électromagnétique (13-2), que le weber peut être rattaché au volt, de sorte que le tesla peut être lui-même être rattaché au weber; cela nous explique que l'on exprime souvent un flux d'induction en webers par mètre carré (Wb.m^{-2}).

4-5. Conservation du flux d'induction magnétique. Relation de milieu.

Le fait que le vecteur induction dérive d'un potentiel-vecteur entraîne que **le flux d'induction magnétique est conservatif**. Ce fait extrêmement important peut être démontré directement à partir de la loi de Biot et Savart en établissant, sans passer comme nous l'avons fait, par l'intermédiaire du potentiel-vecteur, que **la divergence de l'induction est nulle en tout point**.

La relation

$$\text{div } \vec{B} = 0 \text{ en tout point}$$

est une **relation locale de milieu** en ce sens qu'elle exprime une propriété du vide; elle reste valable dans tous les milieux, même pour des courants variables, en tous les points de l'espace en présence de courants et d'aimants. *Elle est donc absolument générale et elle ne fait pas intervenir explicitement le flux d'induction magnétique.* Nous devons la considérer comme **une relation fondamentale de l'électromagnétisme**.

Il est cependant intéressant d'exprimer la conservation du flux de $\vec{B}$ sous les formes suivantes (fig. 34).

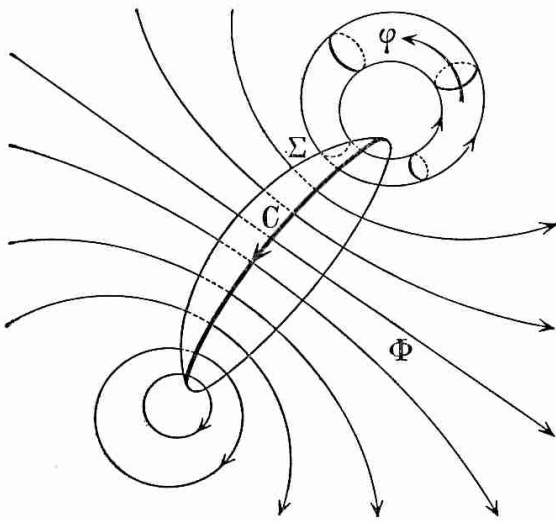


FIG. 34.

a) *Le flux d'induction magnétique sortant d'une surface fermée traversée ou non par des courants dans le vide (et même pénétrant dans un milieu quelconque) est nul.*

b) *Considérons un tube d'induction du champ produit par un circuit linéaire : il constitue un anneau enlaçant le circuit, anneau dans lequel le flux d'induction à travers une section quelconque est constant.*

c) *On peut également considérer le tube d'induction global qui s'appuie sur le contour C du circuit. Nous verrons qu'une ligne*

d'induction enlace forcément le circuit; ce tube global contient donc toutes

les lignes d'induction, qui traversent une surface quelconque Σ limitée par le contour C .

Choisissons sur une telle surface Σ une normale positive liée au sens du courant par la convention du trièdre direct (règle du tire-bouchon); les lignes d'induction traversant alors Σ dans le même sens que les normales positives à Σ et *le flux global Φ à travers C ou flux propre du circuit est positif* avec cette convention. Comme, d'autre part, l'induction B est proportionnelle à I en tout point, il en résulte que :

Le flux d'induction propre d'un circuit est positif et proportionnel à l'intensité du courant.

CHAPITRE V

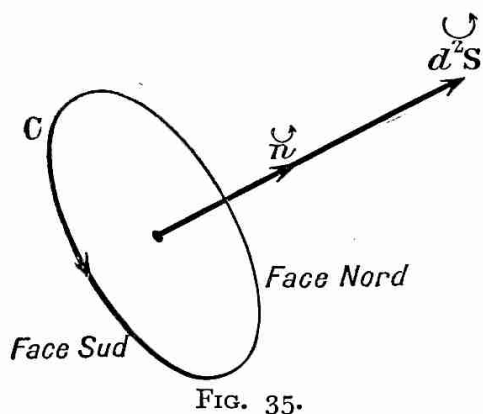
CIRCULATION DU VECTEUR INDUCTION. THÉORÈME D'AMPÈRE

5-1. Lemme préliminaire. Gradient d'angle solide.

1° Représentation vectorielle d'un élément de surface.

a) Nous avons déjà été conduits à représenter un élément de surface par un vecteur, vecteur qui était polaire parce qu'aucun sens particulier n'était prédéterminé sur le contour de l'élément.

Considérons maintenant un élément de surface d'aire d^2S , sur le contour C duquel un sens de parcours est déterminé (fig. 35), le sens d'un courant linéaire par exemple. *Par convention* nous appelons normale positive la demi-normale qui se déduit du sens sur C par la convention de rotation du trièdre direct (règle du tire-bouchon). Cette normale positive traverse l'élément de sa face négative (ou face sud) vers sa face positive (ou face nord).



Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire d'aire sur la normale positive; nous représentons l'élément de surface par le vecteur

$$\vec{d^2S} = \vec{n} d^2S.$$

D'après ce qui précède $\vec{n}$ et $\vec{d^2S}$ sont des *vecteurs axiaux*.

b) Supposons maintenant (fig. 36) que d^2S soit un parallélogramme élémentaire défini par les vecteurs $\vec{dl}$ et $\vec{ds}$ et choisissons pour sens de parcours sur le contour de d^2S le sens de $\vec{dl}$.

L'élément de surface est défini par le produit vectoriel

$$\vec{d^2S} = \vec{n} d^2S = \vec{dl} \wedge \vec{ds},$$

de module $d^2S = dl ds \sin \theta$, le trièdre $(\vec{dl}, \vec{ds}, \vec{n})$ étant direct.

2° Angle solide élémentaire sous lequel l'élément de surface est vu d'un point M.

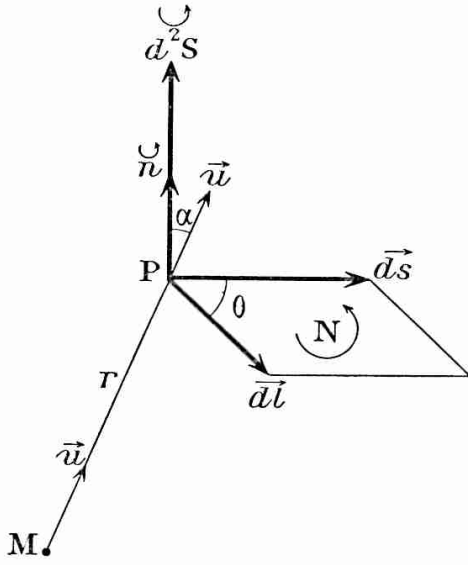


FIG. 36.

Posons $MP = r$ et soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire sur MP ; nous avons

$$\vec{MP} = r\vec{u}.$$

L'angle solide $d^2\Omega$ sous lequel d^2S est vu de M est défini par le produit scalaire (α étant l'angle des vecteurs unitaires $\vec{n}$ et $\vec{u}$)

$$d^2\Omega = \frac{d^2S \cos \alpha}{r^2} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{d^2S}}{r^2} = \vec{u} \cdot \vec{n} \frac{d^2S}{r^2},$$

et, dans le cas où d^2S est le parallélogramme élémentaire défini précédemment, par le produit mixte

$$d^2\Omega = \frac{\vec{u}(\vec{dl} \wedge \vec{ds})}{r^2} = \frac{1}{r^2} (\vec{u} \cdot \vec{dl} \cdot \vec{ds}).$$

$d^2\Omega$ est positif si l'angle α est aigu, autrement dit si l'on voit de M la face sud de l'élément de surface; il est négatif si α est obtus, et c'est alors la face nord de d^2S qui est vue de M.

3° Gradient d'angle solide.

Considérons le contour fermé C sur lequel un sens de parcours nous est donné. Supposons que C soit vu du point M sous la forme d'une seule boucle; nous dirons qu'il paraît simple à l'observateur placé en M. Il en est ainsi lorsque les normales positives le long de C font toutes des angles aigus avec les rayons vecteurs $\vec{MP}$ qui vont de M aux différents points de C : l'observateur placé en M voit alors la face sud de C et

l'angle solide Ω est positif; il en est de même lorsque tous les angles sont obtus : l'observateur voit alors la face nord de C et l'angle solide Ω est négatif.

A un déplacement élémentaire $\vec{ds} = \overrightarrow{MM'}$ du point M correspond une variation $d\Omega$ de Ω ; nous avons, d'après la définition du gradient,

$$d\Omega = \overrightarrow{\text{grad}} \Omega \cdot \vec{ds}.$$

Nous nous proposons de déterminer $d\Omega$ et par suite le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} \Omega$ (vecteur axial puisque son sens résulte d'une convention de rotation pour définir le signe de Ω).

Il revient au même pour le calcul de $d\Omega$ de laisser le point M fixe (fig. 37) et de donner à C la translation $\vec{ds}' = -\vec{ds}$; dans sa nouvelle position C_1 le contour est vu sous l'angle Ω_1 tel que

$$d\Omega = \Omega_1 - \Omega.$$

La surface-canal élémentaire balayée par C dans son déplacement $\vec{ds}'$ est vue de M sous l'angle solide $d\Omega'$ et l'on a, dans le cas de la figure,

$$\Omega = \Omega_1 + d\Omega',$$

et par suite

$$d\Omega = -d\Omega',$$

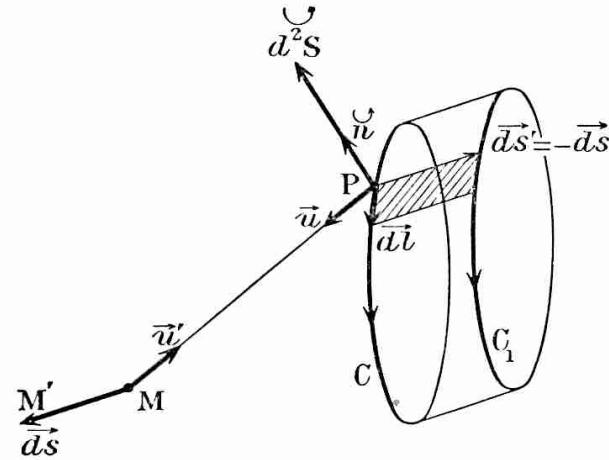


FIG. 37.

ce résultat restant valable dans l'autre cas où la face nord de C serait vue de M.

Il nous suffit donc de calculer $d\Omega'$. Or $d\Omega'$ est la somme des angles solides tels que $d^2\Omega'$ sous lequel est vue de M la surface d^2S balayée par un élément $\vec{dl}$ du contour C. Nous avons, $\vec{u}'$ étant le vecteur unitaire sur MP dans le sens $\overrightarrow{MP}$,

$$d^2\Omega' = \frac{\vec{u}' \cdot d^2\vec{S}}{r^2} = \frac{\vec{u}' \cdot (\vec{dl} \wedge \vec{ds}')}{r^2} = \frac{(\vec{u}' \cdot \vec{dl} \cdot \vec{ds}')}{r^2}.$$

Faisons intervenir le vecteur unitaire $\vec{u} = -\vec{u}'$ de P vers M et posons $\overrightarrow{PM} = \vec{r} = r\vec{u}$; nous avons, en remplaçant $\vec{ds}'$ par $-\vec{ds}$, $\vec{u}'$ par $\vec{u}$ et en utilisant les propriétés du produit mixte,

$$d^2\Omega' = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{dl} \cdot \vec{ds})}{r^2} = \frac{\vec{ds}(\vec{u} \wedge \vec{dl})}{r^2} = -\frac{\vec{ds}(\vec{dl} \wedge \vec{u})}{r^2},$$

et par suite

$$d\Omega = -d\Omega' = \vec{ds} \int_G \frac{\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2} = \vec{ds} \overrightarrow{\text{grad}} \Omega,$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \Omega = \int_G \frac{dl \wedge \vec{u}}{r^2} = \int_G \frac{\vec{dl} \wedge \vec{r}}{r^3}.$$

La figure 38 rappelle la signification des notations employées dans la formule précédente. L'expression du vecteur gradient de Ω étant ainsi connue, on a, d'après la définition d'un gradient et quel que soit $\vec{ds}$,

$$d\Omega = \overrightarrow{\text{grad}} \Omega \cdot \vec{ds}.$$

$d\Omega$ est la circulation élémentaire du vecteur gradient de Ω .

Lorsque le contour C vu de M n'apparaît pas simple mais comme

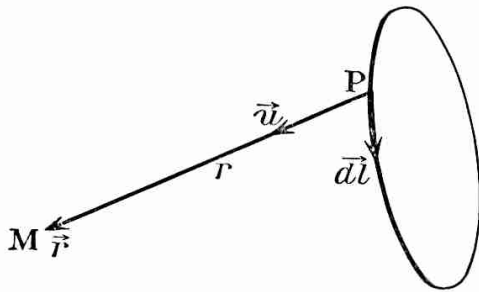


FIG. 38.

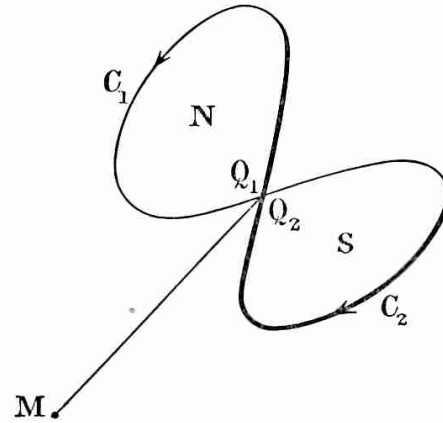


FIG. 39.

formé de deux boucles C_1 et C_2 (fig. 39), l'observateur voit la face nord de l'une (C_1) et la face sud de l'autre (C_2). L'angle Ω est alors la somme algébrique de deux angles solides Ω_1 et Ω_2 de signes contraires; ils ont en commun le rayon visuel MQ_1Q_2 s'appuyant sur le contour en deux points Q_1, Q_2 qui paraissent confondus pour l'observateur placé en M .

5-2. Circulation élémentaire du vecteur induction magnétique.

Le circuit C (fig. 40) parcouru par le courant I crée au point M l'induction $\vec{B}$. Pour un déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'} = \vec{ds}$, la circulation élémentaire $d\mathcal{C}$ du vecteur $\vec{B}$ est

$$d\mathcal{C} = \vec{B} \cdot \vec{ds} = \vec{ds} \int_G d\vec{B}.$$

D'après la formule de Biot et Savart et l'expression précédemment établie du gradient de Ω , nous avons

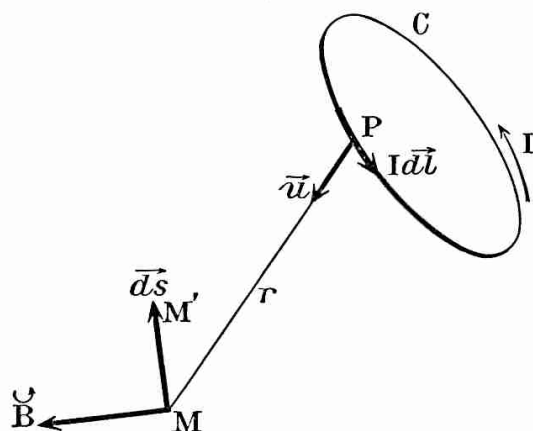


FIG. 40.

$$\begin{aligned} d\mathcal{C} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \vec{ds} \int_C \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{ds} \cdot \text{grad } d\Omega = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega. \end{aligned}$$

L'expression

$$d\mathcal{C} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\Omega$$

montre que :

La circulation élémentaire du vecteur induction magnétique est une différentielle totale.

5-3. Le théorème d'Ampère pour des courants linéaires dans le vide.

1° Surface frontière d'un circuit. Parcours fermés enlaçant un circuit.

Pour faciliter les raisonnements et en vue de préciser ce que nous avons appelé faces nord et sud d'un circuit C , nous allons définir la *surface frontière* de ce circuit, supposé gauche pour plus de généralité.

Considérons (fig. 41) deux points M et M' d'où l'on voit, sans ambiguïté possible, respectivement les faces sud ($\Omega > 0$ en M) et nord ($\Omega < 0$ en M') de C . Nous pouvons concevoir deux groupes de trajets conduisant de M à M' :

a) *Les trajets extérieurs au circuit*, tels que MEM' , pour lesquels Ω varie d'une façon continue de Ω à Ω' en s'annulant pour changer de signe au point E (où la valeur nulle résulte en général d'une somme algébrique). La variation d'angle solide de M en M' est

$$\Delta\Omega_E = \Omega' - \Omega.$$

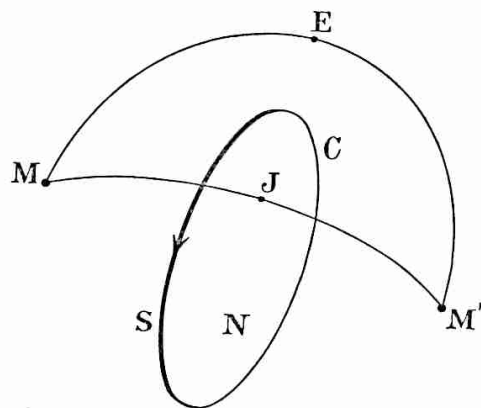


FIG. 41.

b) *Les trajets intérieurs au circuit*, tels que MJM' , pour lesquels l'angle solide varie de Ω à $+2\pi$ stéradians de M en J (variation $2\pi - \Omega$), point

où il passe d'une façon discontinue de $+2\pi$ à -2π pour ensuite croître en valeur algébrique (décroître en valeur absolue) de -2π à Ω' le long de JM' (variation $\Omega' + 2\pi$). La variation totale de Ω en M' est donc

$$\Delta\Omega_J = 2\pi - \Omega + \Omega' + 2\pi = \Omega' - \Omega + 4\pi.$$

Pour les trajets inverses $M'EM$ et $M'JM$ les variations seraient changées de signe.

Nous appelons *surface extérieure frontière* Σ_E le lieu des points E et *surface intérieure frontière* Σ_J ou plus simplement **surface du circuit**, le lieu des points J. L'ensemble des deux surfaces est la *surface frontière* Σ du circuit.

Σ sépare l'espace en deux régions, celle des points M d'où l'on voit la face sud du circuit ($\Omega > 0$), celles des points M' d'où l'on voit la face nord du circuit ($\Omega' < 0$).

Σ_E , illimitée vers l'extérieur, est donc le lieu des points E tels que $\Omega = 0$. Dans sa traversée, Ω ne subit pas de discontinuité, il change seulement de signe.

Par contre, dans la traversée de la surface du circuit Σ_J , Ω subit la discontinuité $\pm 4\pi$ suivant le sens du parcours :

La surface du circuit peut être considérée comme une surface double, formée des deux faces confondues, face sud ($\Omega = +2\pi$) et face nord ($\Omega = -2\pi$).

Envisageons maintenant les parcours fermés passant par M; nous pouvons également les classer en deux catégories (fig. 42) :

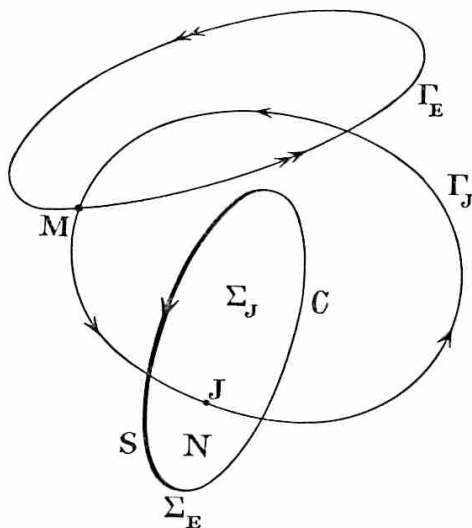


FIG. 42.

a) *Les trajets qui enlacent le circuit;* ce sont ceux, tels que Γ_J , qui traversent la surface intérieure du circuit.

Pour le sens de circulation de la figure (sens SN) l'angle varie de Ω à $+2\pi$ de M en J (variation $2\pi - \Omega$), puis de -2π à Ω de J en M (variation $\Omega + 2\pi$). La variation totale est donc

$$\Delta\Omega = 2\pi - \Omega + \Omega + 2\pi = +4\pi.$$

Elle serait égale à -4π pour le sens inverse de circulation (sens NS).

b) *Les trajets qui n'enlacent pas le circuit ou trajets fermés extérieurs au circuit;*

ce sont ceux, tels que Γ_E , qui ne traversent pas la surface du circuit (ils peuvent, comme sur la figure, traverser Σ_E). Pour ces courbes fermées on a

$$\Delta\Omega = 0.$$

D'une façon générale $\Delta\Omega = \pm 4p\pi$ pour un parcours fermé qui enlace p fois le circuit *parcouru dans le même sens*.

2° Théorème d'Ampère.

Le théorème d'Ampère est relatif à la circulation du vecteur induction magnétique. D'après l'expression de sa circulation élémentaire nous avons :

a) Pour un trajet fermé Γ_E n'enlaçant pas le circuit,

$$\mathcal{C} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma_E} d\Omega = 0.$$

b) Pour un trajet fermé enlaçant une fois le circuit,

$$\mathcal{C} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma_J} d\Omega = \pm \mu_0 I,$$

le signe $+$ correspondant à la traversée de la surface du circuit dans le sens sud-nord, le signe $-$ au sens inverse.

Le signe de $\mathcal{C}$ dépend donc des sens respectifs du courant et du parcours, le signe $+$ correspondant à la convention de rotation adoptée. Il est commode de *considérer I comme une grandeur algébrique, positive si les deux sens sont conformes à la convention de rotation, négative dans le cas contraire*. On a alors dans tous les cas :

$$\mathcal{C} = \mu_0 I.$$

Ce résultat constitue le **théorème d'Ampère**:

La circulation du vecteur induction magnétique le long d'un parcours fermé qui enlace une fois le circuit linéaire qui le crée dans le vide est égale à $\mu_0 I$.

Le théorème d'Ampère peut être généralisé :

a) Si le trajet fermé enlace k fois le circuit *dans le même sens*, on a

$$\mathcal{C} = k\mu_0 I.$$

b) Supposons que B soit créé par plusieurs circuits linéaires $C_1, C_2, \dots$, parcourus par les courants constants $I_1, I_2, \dots$, nous avons

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots; \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \dots,$$

et par suite

$$\mathcal{C} = \mu_0(I_1 + I_2 + \dots) = \mu_0 \Sigma I,$$

$I_1, I_2, \dots$ étant des valeurs algébriques. Bien entendu, si le trajet enlace plusieurs fois l'un des circuits, il faut en tenir compte comme nous venons de le voir.

5-4. Conséquences et applications du théorème d'Ampère.

1° Lignes d'induction dans le vide.

Considérons le circuit C dans le vide. Nous nous proposons de suivre une ligne d'induction Γ dans son sens positif, celui du vecteur $\vec{B}$, à partir d'un point M que nous supposons par exemple placé devant la face sud de C (fig. 43). Le vecteur $\vec{B}$ ayant la direction et le sens du déplacement élémentaire ds , nous avons constamment $d\mathcal{C} > 0$ et par suite $d\Omega > 0$.

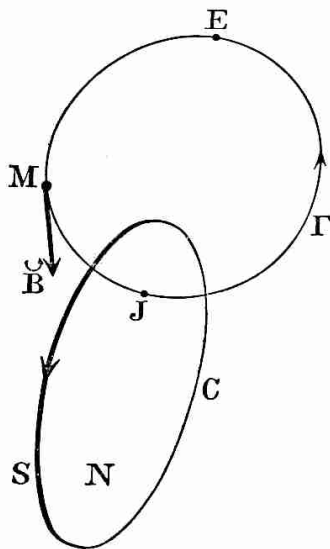


FIG. 43.

Ω positif croissant, le point mobile ne peut que se diriger vers le circuit et atteindre un point J sur sa surface où Ω subit la discontinuité de $+2\pi$ à -2π (pour laquelle $d\mathcal{C} = 0$ puisque le déplacement correspondant est nul). Dès lors Ω , négatif, décroît en valeur absolue, le point atteint forcément la surface extérieure frontière en E où Ω change de signe en s'annulant. Ω , redevenu positif et toujours croissant, ne peut que finalement reprendre la valeur Ω correspondant au point de départ; en effet, s'il reprenait cette valeur initiale en un point différent de M, le trajet ne serait pas fermé pour une circulation de $\vec{B}$ égale à $\mu_0 I$, et le théorème d'Ampère serait en défaut. Par suite :

Toutes les lignes d'induction sont des lignes fermées qui enlacent le circuit.

2° Induction produite par un conducteur cylindrique rectiligne indéfini.

Par raison de symétrie les lignes d'induction sont des cercles dont l'axe est celui du conducteur; appliquons le théorème d'Ampère pour déterminer le module de $\vec{B}$ (fig. 44).

a) En un point M à l'extérieur du conducteur.

Posons $OM = a$, nous avons

$$\mathcal{C}_{\Gamma_M} = 2\pi a B_M = \mu_0 I,$$

d'où

$$B_M = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}.$$

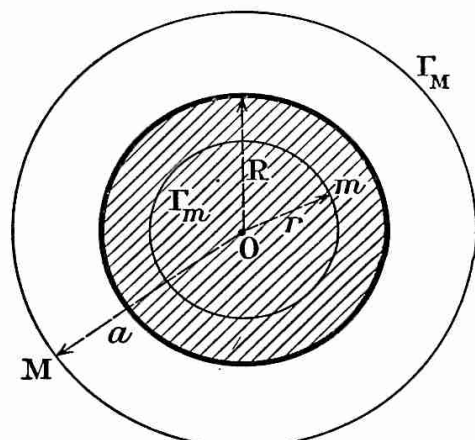


FIG. 44.

Nous retrouvons bien la formule (2-4) pour un conducteur linéaire indéfini.

b) En un point m à l'intérieur du conducteur.

Le milieu conducteur étant supposé non magnétique, le théorème d'Ampère est encore applicable.

Posons $Om = r$ et supposons que l'intensité I soit régulièrement répartie dans la section avec la densité de courant constante (R rayon du conducteur) :

$$i = \frac{I}{\pi R^2}.$$

L'intensité enlacée par le cercle de rayon r est

$$I' = \pi r^2 i = \frac{r^2}{R^2} I;$$

par suite

$$\mathcal{C}_{\Gamma_m} = 2\pi r B_m = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I,$$

d'où

$$B_m = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{r}{R} \right)^2 = B_R \frac{r}{R}.$$

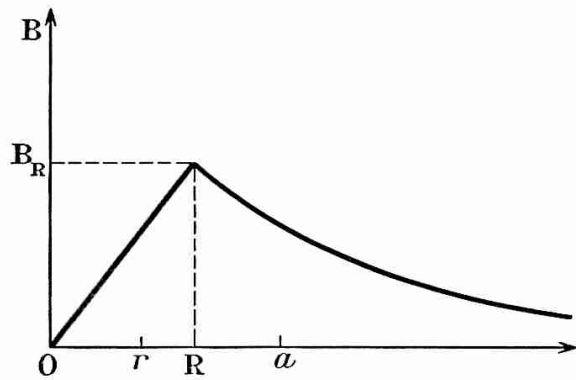


FIG. 45.

Quand a décroît de l'infini à R , B_m croît de zéro à B_R ; à l'intérieur du conducteur, r décroissant de R à zéro, B_m décroît linéairement de B_R à zéro. La figure 45 représente les variations de B .

3° Solénoïde infiniment allongé (fig. 46).

Il ne peut y avoir de lignes d'induction à l'extérieur du solénoïde puisque celles-ci doivent enlancer toutes les spires; l'induction est donc nulle en tout point extérieur. A l'intérieur, les lignes d'induction ne peuvent qu'être parallèles à l'axe puisque les spires sont extrêmement serrées. Pour le trajet rectangulaire MNPQ, seule la circulation de $\vec{B}$ le long de $MN = l$ n'est pas nulle; ce trajet enlaçant nl spires, nous avons

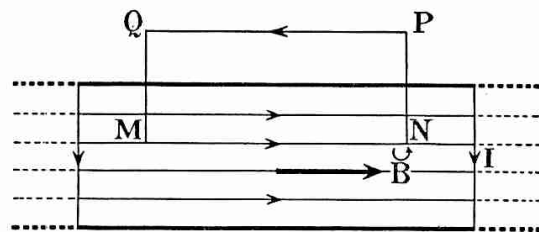


FIG. 46.

$$Bl = \mu_0 nlI, \quad \text{d'où} \quad B = \mu_0 nI.$$

4° Induction d'une bobine torique (fig. 47).

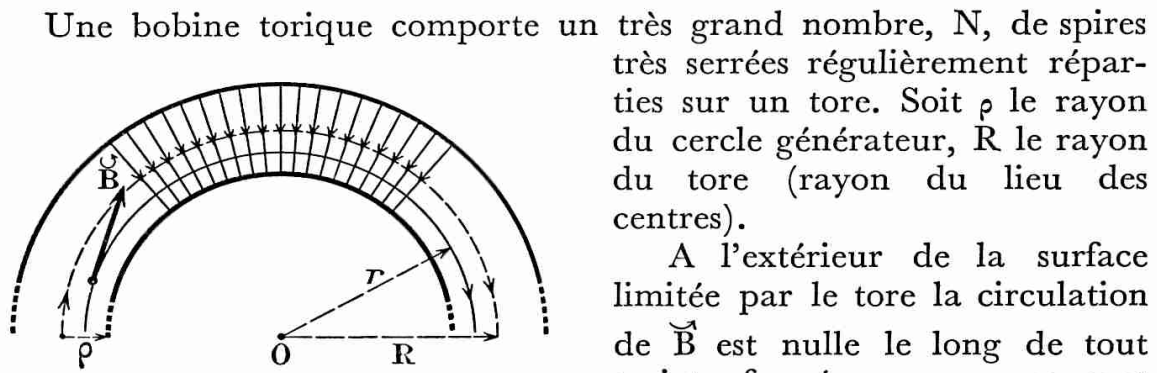


FIG. 47.

Une bobine torique comporte un très grand nombre, N , de spires très serrées régulièrement réparties sur un tore. Soit ρ le rayon du cercle générateur, R le rayon du tore (rayon du lieu des centres).

A l'extérieur de la surface limitée par le tore la circulation de $\vec{B}$ est nulle le long de tout trajet fermé, aucun courant n'étant enlacé :

L'induction magnétique est nulle dans tout l'espace extérieur à la bobine.

Les lignes d'induction à l'intérieur sont des cercles coaxiaux et nous avons pour un cercle de rayon r

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B = \mu_0 N I,$$

d'où

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}.$$

Le module de B n'est pas constant; cependant, si R devient très grand par rapport à ρ , r varie peu autour de la valeur moyenne R et,

$$n = \frac{N}{2\pi R}$$

étant le nombre de spires par unité de longueur du cercle de rayon R , l'induction a un module sensiblement constant

$$B = \mu_0 n I.$$

Nous retrouvons l'expression de B dans un solénoïde très long; d'ailleurs la bobine torique tend vers un solénoïde infiniment allongé lorsqu'on fait tendre R vers l'infini.

CHAPITRE VI

POTENTIEL SCALAIRE DU VECTEUR INDUCTION

6-1. Potentiel d'induction magnétique dans un domaine vide qui n'est sillonné par aucun courant.

Les considérations qui nous ont conduits au théorème d'Ampère vont nous montrer que le vecteur induction magnétique dérive d'un potentiel scalaire que nous appelons *le potentiel d'induction magnétique*.

Pour un déplacement élémentaire nous avons

$$d\mathcal{C} = \vec{B} \cdot \vec{ds} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \, d\Omega = \frac{\mu_0}{4\pi} I \, \overrightarrow{\text{grad}} \, \Omega \cdot \vec{ds},$$

et par suite

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \, \overrightarrow{\text{grad}} \, \Omega.$$

$d\mathcal{C}$ est une différentielle totale. Pour un trajet A_1A_2 ne traversant pas la surface frontière intérieure Σ_j du circuit, la circulation du vecteur $\vec{B}$,

$$\mathcal{C} = \frac{\mu_0}{4\pi} I (\Omega_2 - \Omega_1),$$

ne dépend que des extrémités du parcours, donc des coordonnées des points A_1 et A_2 . Il en découle que :

La circulation du vecteur induction magnétique le long d'un trajet fermé qui n'enlace pas de courant est nulle.

Il en résulte que dans tout l'espace non sillonné par des courants dans le vide le vecteur induction magnétique dérive d'un potentiel scalaire $\mathcal{V}$, défini par

$$d\mathcal{V} = - d\mathcal{C} = - \frac{\mu_0}{4\pi} I \, d\Omega,$$

potentiel défini à une constante arbitraire près. Cette constante peut être choisie de façon que $\mathcal{V}$ soit nul à l'infini où $\Omega = 0$, ce qui conduit à l'expression

$$\mathcal{V} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I\Omega.$$

Remarquons dès maintenant que cette convention entraîne $\mathcal{V} = 0$ en tous les points de la surface frontière extérieure Σ_e du circuit.

Nous avons par suite la relation vectorielle qui traduit la définition du potentiel d'induction magnétique :

$$\boxed{\vec{B} = -\vec{\text{grad}} \mathcal{V},}$$

relation dont la projection sur trois axes de coordonnées rectangulaires $Oxyz$ donne

$$B_x = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \quad B_y = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \quad B_z = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}.$$

Ainsi, par définition même de la fonction potentiel :

La circulation du vecteur induction magnétique le long d'un trajet qui ne traverse pas la surface du circuit est mesurée par la diminution du potentiel d'induction magnétique entre les extrémités du parcours,

$$C = -(\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1) = \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2;$$

elle est indépendante du chemin suivi.

6-2. Potentiel discontinu et potentiel multiforme.

Dans le paragraphe précédent nous avons considéré la surface Σ_r du circuit comme interdite. Cherchons ce qui se passe à sa traversée si nous conservons la définition du potentiel d'induction.

Alors que la surface frontière extérieure s'étendant depuis le contour du circuit jusqu'à l'infini ne présente aucune particularité, la surface du circuit est une surface équipotentielle double :

$$\mathcal{V}_s = \frac{I}{2} \mu_0 I \text{ (face sud)} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_n = -\frac{I}{2} \mu_0 I \text{ (face nord)};$$

cette surface Σ_r est une surface de discontinuité pour $\mathcal{V}$ qui varie de $\pm \mu_0 I$ dans sa traversée selon qu'on l'aborde par la face nord ou par la face sud. L'égalité $\vec{B} = -\vec{\text{grad}} \mathcal{V}$ n'est donc pas applicable aux points de Σ_r où cependant le vecteur induction est bien déterminé et ne subit aucune discontinuité.

Nous sommes ainsi conduits à modifier les définitions des fonctions Ω et $\mathcal{V}$, *uniformes mais discontinues*, de façon à en faire des fonctions *continues mais multiformes*. Il n'y a pas d'autre possibilité.

De même qu'un angle α a de multiples déterminations $\alpha \pm 2k\pi$, un angle solide peut être considéré comme déterminé à 4π stéradians près :

$$\Omega = \Omega_0 \pm 4p\pi,$$

p étant un nombre entier, Ω_0 étant la *détermination principale*, comprise entre 0 et 4π , de l'angle solide.

Si (fig. 48 a), avec l'ancienne convention, Ω , compris entre -2π et $+2\pi$, varie d'une façon discontinue à la traversée de la surface Σ_j ,

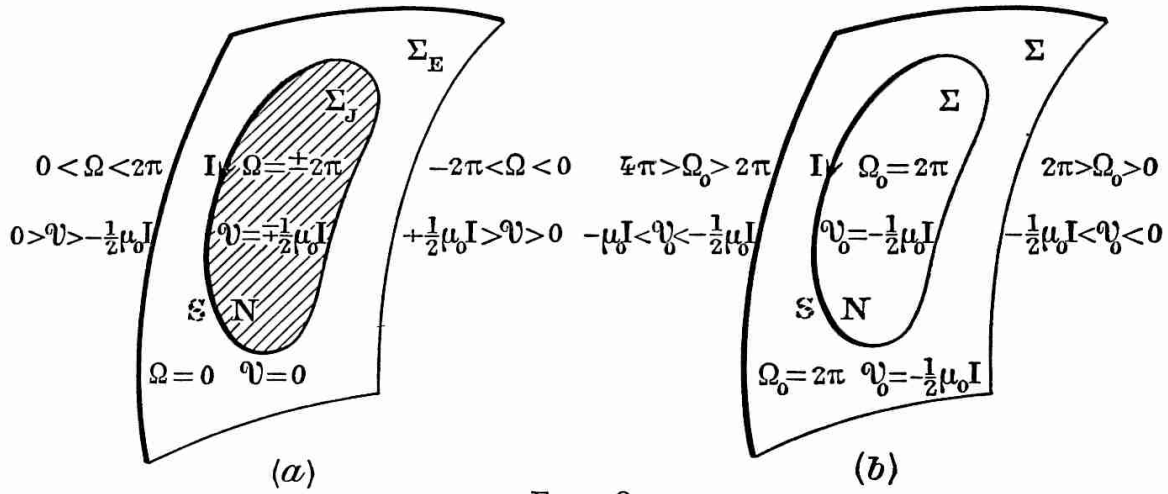


FIG. 48.

du circuit, dans la nouvelle conception (fig. 48 b), sa détermination principale sera par exemple comprise entre 0 et 2π pour les points d'où l'on voit la face nord, entre 2π et 4π pour ceux d'où l'on voit la face sud, et Ω_0 passe par la valeur 2π d'une façon continue à la traversée de Σ_j .

La nouvelle fonction Ω est continue et multiforme, et il en est de même de la nouvelle fonction potentiel d'induction magnétique

$$\mathcal{V} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I (\Omega_0 \pm 4p\pi) = \mathcal{V}_0 \pm p\mu_0 I,$$

dont la détermination principale $\mathcal{V}_0$ varie d'une façon continue de zéro (pour les points à l'infini d'où l'on voit la face nord) à $-\mu_0 I$ (pour les points à l'infini d'où l'on voit la face sud) en passant par la valeur $-\frac{1}{2}\mu_0 I$ à la traversée de la surface frontière Σ aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur du contour C du circuit.

Cette surface Σ est maintenant une surface équipotentielle (multiforme) dans toute son étendue; on a en tous ses points

$$\Omega = 2\pi(1 \pm 2p), \quad \mathcal{V} = -\mu_0 I \left(\frac{1}{2} \pm p \right).$$

6-3. Potentiel d'induction magnétique et configuration du champ magnétique.

Le long d'un trajet fermé qui enlace le circuit et qui traverse la surface Σ_j de la face sud vers la face nord, Ω et $\mathcal{V}$ varient d'une façon continue; la diminution du potentiel, égale à $\mu_0 I$, mesure la circulation du vecteur induction magnétique: c'est le théorème d'Ampère. Le parcours en sens inverse correspond à l'augmentation $\mu_0 I$ du potentiel.

Ces résultats restent évidemment valables lorsque la trajectoire empruntée est une ligne d'induction, et l'on a alors constamment

$$d\mathcal{V} = -d\mathcal{C} = -B ds.$$

Les surfaces équipotentielles $\mathcal{V}_0 = \text{Cte}$ (confondues avec les surfaces $\Omega_0 = \text{Cte}$) sont bien définies par les déterminations principales $\mathcal{V}_0$, les lignes d'induction en sont les *trajectoires orthogonales*. Le parcours élémentaire ds est normal aux surfaces $\mathcal{V}_0$ et $\mathcal{V}_0 + d\mathcal{V}_0$ infiniment voisines. Les surfaces équipotentielles, de même que les lignes d'induction, se resserrent dans les régions où le champ est intense.

Puisque toutes les lignes de champ passent à l'intérieur du contour C le champ est le plus intense sur la surface Σ_j , autrement dit *le module de l'induction passe par un maximum le long d'une ligne d'induction au point où celle-ci traverse cette surface*. C'est d'ailleurs sur Σ_j que Ω_0 (et $\mathcal{V}_0$) varie le plus rapidement en passant par la valeur 2π . On montrerait que *le module B de l'induction passe par un minimum à la traversée de la surface frontière extérieure Σ_E* .

Si l'on joint aux résultats précédents le fait qu'au voisinage immédiat du circuit les lignes d'induction sont sensiblement des cercles axés sur le contour, on voit qu'il est possible, au moins dans les cas simples, de prévoir la configuration d'ensemble du champ magnétique d'un circuit linéaire.

6-4. Généralisation de la notion de potentiel d'induction magnétique. Les difficultés.

L'impossibilité de définir une fonction potentiel d'induction magnétique qui soit à la fois, comme le potentiel électrique, continue et uniforme, résulte des faits physiques qui déterminent la structure du champ

magnétique, le fait essentiel étant la forme des lignes d'induction, courbes fermées qui enlacent le circuit.

La multiformité des fonctions Ω et $\mathcal{V}$ ne crée toutefois aucune difficulté dans l'application des formules vectorielles qui lient l'induction à ces grandeurs et ceci parce que ces formules comportent une dérivation qui fait disparaître les termes qui contiennent p ; aussi pourrons-nous opérer avec les déterminations principales et utiliser les expressions

$$(1) \quad \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \overrightarrow{\text{grad}} \Omega_0 = - \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{V}_0.}$$

Lorsqu'on a dans le vide plusieurs circuits linéaires (intensités $I_1, I_2, \dots$) la somme vectorielle des inductions produites $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots$ conduit à une somme de potentiels multiformes $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots$

Dans l'expression de $\mathcal{V}$ interviennent donc des termes $p_1 \mu_0 I_1, p_2 \mu_0 I_2, \dots$, ce qui augmente le nombre de déterminations (plusieurs infinités au lieu d'une) du potentiel. Cependant, et c'est là l'essentiel, l'application de la formule (1) reste possible; il suffit de déterminer séparément les inductions partielles pour en faire la somme géométrique.

Les difficultés deviennent plus sérieuses lorsque les courants sont distribués dans un volume conducteur (courants non linéaires), et la notion de potentiel perd alors toute signification puisqu'on peut attribuer au potentiel en un point une valeur quelconque par un choix convenable du trajet de circulation fermé dans sa partie qui traverse la masse conductrice. On ne voit alors pas ce que signifient les expressions : contour du circuit et angle solide sous lequel le circuit est vu d'un point.

Par contre le théorème d'Ampère conserve sa valeur dans le cas de circuits non linéaires si l'on envisage des courbes de circulation Γ fermées, soit entièrement dans le vide, soit entièrement dans la matière conductrice supposée non magnétique. Dans le premier cas la circulation du vecteur induction est mesurée par le produit par μ_0 de toutes les intensités enlacées par Γ , dans le second par le produit par μ_0 du flux du vecteur densité de courant $\vec{j}$ à travers une surface S s'appuyant sur le contour Γ :

$$\mathcal{C} = \int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int \int_S \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

L'application du théorème de Stokes

$$\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int \int_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

conduit à l'équation de Maxwell-Ampère

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

valable dans un milieu non magnétique.

Des difficultés nouvelles surgissent lorsque la matière aimantée participe à la création d'un champ magnétique : le vecteur induction, toujours bien défini, ne dérive plus d'un potentiel. L'intervention du vecteur excitation magnétique $\vec{H}$, qui permet de sauvegarder le théorème d'Ampère dans le cas général, résout ces difficultés car ce vecteur dérive d'un potentiel V , le potentiel d'excitation magnétique (Seconde partie).

Tant que nous n'envisageons que des courants dans le vide, donc en l'absence d'aimants, la relation de proportionnalité $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ entraîne que les deux vecteurs dérivent de potentiels multiformes proportionnels.

6-5. Application du potentiel au calcul de l'induction. Les méthodes de calcul de B .

Les expressions (1) du paragraphe précédent sont utilisables au calcul de B ; notons d'ailleurs qu'à ce point de vue l'intervention de la fonction potentiel n'est pas nécessaire (la fonction Ω_0 suffit). Bornons-nous au calcul de B en un point M de l'axe d'un courant circulaire (rayon R).

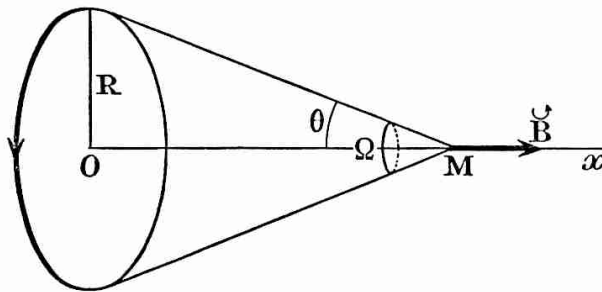


FIG. 49.

Orientons l'axe Ox (fig. 49) suivant la normale positive au plan du courant et supposons M placé devant la face nord, $OM = x$ et l'angle θ compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$. Le vecteur $\vec{B}$

ayant Ox pour support, son module n'est fonction que de

la grandeur, x ou θ , que nous choisissons comme variable; nous pouvons donc remplacer les δ par des d . Nous avons

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= -2\pi(1 - \cos \theta), & \frac{d\Omega_0}{d\theta} &= -2\pi \sin \theta, \\ x &= \frac{R}{\tan \theta}, & \frac{d\theta}{dx} &= -\frac{\sin^2 \theta}{R}, & \mathcal{V}_0 &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega_0, \end{aligned}$$

par suite

$$B = -\frac{d\mathcal{V}_0}{dx} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\Omega_0}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta = \frac{I}{2} \mu_0 I R^2 (x^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

En résumé, nous disposons de trois méthodes pour le calcul de l'induction magnétique :

1° *Application directe de la formule de Biot et Savart.*

2° *Application du théorème d'Ampère.* Cette méthode, dont l'emploi est très limité, nécessite la connaissance de la forme des lignes d'induction, elle n'est facile que lorsque celles-ci sont des cercles.

3° La méthode que nous venons d'appliquer, qui utilise le fait que $\vec{B}$ est un vecteur gradient.

De toutes façons, sauf dans des cas particuliers (les plus importants d'ailleurs), le calcul d'une induction est difficile et souvent même impossible quelle que soit la méthode que l'on cherche à utiliser.

Signalons, bien que nous n'ayons pas eu à le faire, que l'emploi du potentiel-vecteur est également possible, surtout dans les cas difficiles. Enfin l'étude du champ magnétique produit par un ampérien va nous fournir une nouvelle méthode dont la portée est très générale.

6-6. Champ magnétique d'un ampérien.

Considérons un ampérien, circuit linéaire plan C parcouru par le courant d'intensité constante I, dont les dimensions sont infiniment petites par rapport aux distances $OM = r$ des points où nous nous proposons de déterminer l'induction magnétique $d\vec{B}$.

Soit $\theta = (\vec{u}, \vec{n})$ l'angle des vecteurs unitaires sur $\overline{OM}$ et sur la normale positive à la boucle (fig. 50). Le potentiel d'induction magnétique au point M est

$$d\mathcal{V} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega,$$

$d\Omega$ étant l'angle solide sous lequel le circuit est vu du point M.

La surface dS de l'ampérien étant infiniment petite, nous n'avons pas à nous préoccuper des difficultés soulevées par sa traversée, aussi comptons-nous $d\Omega$ positivement lorsque M est du côté de la face sud ($d\Omega$ est négatif sur la figure). Nous avons dans ces conditions

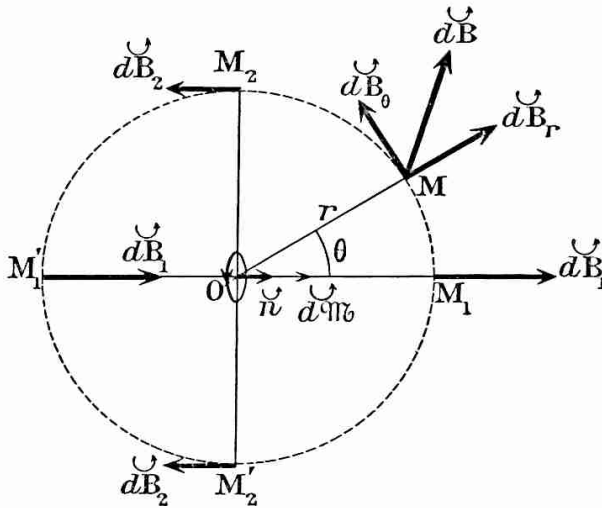


FIG. 50.

$$I d\Omega = -\frac{I dS \cos \theta}{r^2} = -\frac{I d\vec{S} \cdot \vec{u}}{r^2},$$

et par suite, le vecteur axial $d\vec{\mathcal{M}} = I d\vec{S}$ étant le vecteur moment magnétique de l'ampérien,

$$d\mathcal{V} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right).$$

L'induction magnétique dérive donc d'un potentiel en $\frac{I}{r^2}$ et elle est définie par

$$\vec{dB} = - \vec{\text{grad}} d\mathcal{V}$$

au point M.

Les surfaces équipotentielles étant de révolution autour de l'axe magnétique de l'ampérien, le vecteur $\vec{dB}$ est situé dans le plan méridien qui contient le point M. Par suite, en coordonnées polaires, ses composantes radiale et tangentielle sont données par

$$dB_r = - \frac{\partial}{\partial r} (d\mathcal{V}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 d\mathcal{A} \cos \theta}{r^3},$$

$$dB_\theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (d\mathcal{V}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathcal{A} \sin \theta}{r^3}.$$

Le module de l'induction magnétique,

$$dB = \sqrt{dB_r^2 + dB_\theta^2},$$

varie donc comme $\frac{I}{r^3}$.

Deux ensembles de positions de M, appelées *positions de Gauss*, sont particulièrement intéressantes :

a) *Première position de Gauss.*

M est sur l'axe magnétique ($\theta = 0$ ou $\theta = \pi$). dB est dirigé suivant l'axe magnétique et son module est

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 d\mathcal{A}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I dS}{r^3}.$$

b) *Deuxième position de Gauss.*

M est dans le plan de la boucle ($\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$). dB est parallèle à l'axe magnétique mais de sens opposé, et son module est

$$dB_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathcal{A}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dS}{r^3}.$$

A la même distance r on a

$$dB_1 = 2 dB_2.$$

Nous avons déjà souligné l'analogie formelle entre le champ magnétique d'un ampérien et le champ électrique d'un dipôle (1-7); il s'agit toutefois de phénomènes de symétries différentes, le vecteur champ électrique étant un vecteur polaire alors que l'induction magnétique est un vecteur axial.

CHAPITRE VII

LOI DE LAPLACE. FORCES APPLIQUÉES A UN CIRCUIT DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE

7-1. Loi de Laplace.

La dichotomie de la formule fondamentale d'Ampère nous a fourni deux formules, la formule de Biot et Savart utilisée à la détermination de l'induction magnétique et celle de Laplace,

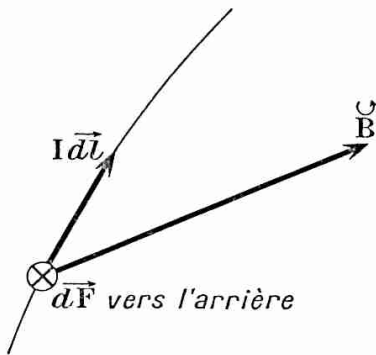


FIG. 51.

$$\vec{dF} = I \vec{dl} \wedge \vec{B},$$

qui définit la force élémentaire (fig. 51) appliquée à un élément de courant dans un champ magnétique créé par des courants (ou par des aimants).

Cette formule est traduite par **la loi de Laplace**:

Un élément de courant $I \vec{dl}$ placé dans une induction magnétique $\vec{B}$ est soumis à une force $\vec{dF}$

a) dont le support est perpendiculaire au plan défini par $\vec{B}$ et par l'élément,

b) dont le sens résulte de la convention de rotation, le trièdre $(I \vec{dl}, \vec{B}, \vec{dF})$ étant direct,

c) dont le module est

$$dF = BI \, dl \sin \alpha,$$

α étant l'angle des vecteurs $\vec{B}$ et $I \vec{dl}$.

Le choix de l'ampère, quatrième unité fondamentale du système S.I., étant fait, une définition de l'unité d'induction magnétique, *le tesla* (T), en résulte et la force est calculée en newtons si I est exprimée en ampères, dl en mètres et B en teslas.

7-2. Remarques sur la loi de Laplace.

Alors que la formule d'Ampère définit une force fictive (rappelons que les forces qui s'exercent *entre deux éléments de courant* n'obéissent pas au principe de l'égalité de l'action et de la réaction), la force dF , dont la loi de Laplace donne l'expression, est une force réelle, celle qu'exerce *l'ensemble d'un autre circuit* qui crée l'induction B au point où l'élément de circuit soumis à dF est placé.

Nous supposons maintenant que le champ d'induction agissant est connu en tous points; nous savons en particulier que l'on peut disposer d'une induction magnétique uniforme dans une région plus ou moins étendue (induction à l'intérieur d'un solénoïde, induction terrestre). Un circuit C placé dans un champ magnétique est soumis à un torseur du type le plus général constitué par l'ensemble des forces de Laplace, ce torseur n'étant équivalent à une force unique ou à un couple que dans des cas particuliers.

Nous serons conduits à envisager le système partiel des forces électromagnétiques appliquées à une partie seulement du circuit; ce système partiel, tout comme dF , a une signification physique réelle. Dans les cas particuliers importants où il est équivalent soit à une force unique, soit à un couple, nous pourrons, la fraction de circuit étant supposée mobile, équilibrer la force ou le couple par une action mécanique convenable (poids dans le premier cas, couple de torsion dans le second). Nous voyons donc la possibilité d'effectuer des mesures.

Indiquons *les cas particuliers importants* suivants :

a) La force dF est nulle si l'élément de courant a le même support que l'induction ($\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$).

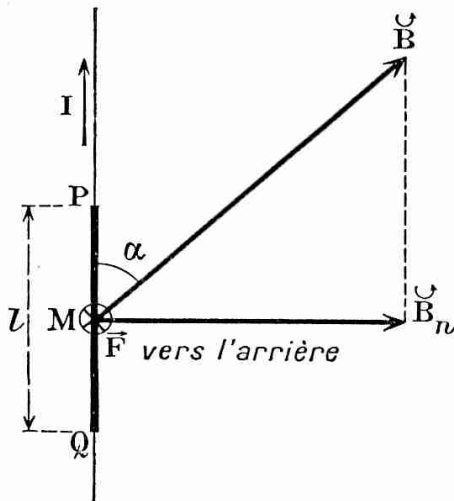


FIG. 52.

b) Le module de la force est $dF = BI \, dl$ lorsque l'induction est normale à l'élément de courant ($\alpha = \frac{\pi}{2}$).

c) Si, en tous les points d'un conducteur rectiligne PQ de longueur l faisant partie d'un circuit, l'induction garde même direction, même sens et même module, les forces appliquées au conducteur équivalent à une force unique de module

$$F = BI l \sin \alpha = B_n I l$$

appliquée au milieu M du conducteur (fig. 52). Si de plus B est normal à l , on a $F = BI l$. Ces résultats très simples sont à retenir.

7-3. Étude expérimentale.

1° Dispositif du conducteur-pendule (fig. 53).

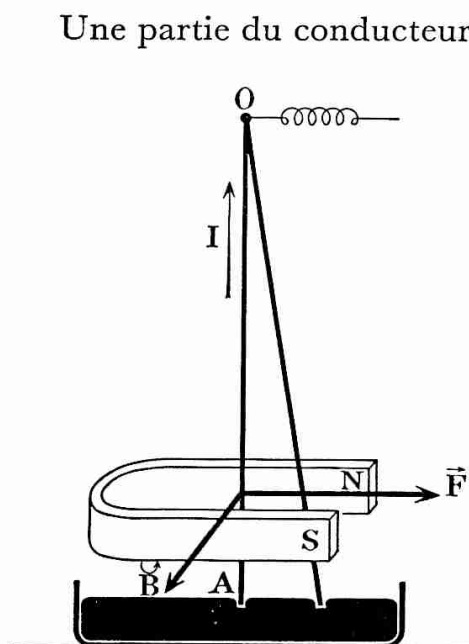


FIG. 53.

Une partie du conducteur OA mobile autour de O est dans l'entrefer d'un aimant en U où l'induction est sensiblement uniforme, horizontale, donc normale au conducteur. On lance un courant dans le fil, celui-ci, dans le cas de figure, dévie vers la droite sous l'action de la force F qui forme avec B et le conducteur un trièdre trirectangle. L'application de la règle de l'observateur d'Ampère (celui-ci, debout, regarde vers l'avant du plan de figure) montre que le trièdre $(\overrightarrow{AO}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct. Le sens du déplacement, donc celui de F , est modifié si l'on change le sens du courant ou si l'on retourne l'aimant de façon à intervertir les pôles.

2° Dispositif des rails conducteurs (fig. 54).

Deux conducteurs fixes PQ et P'Q', parallèles, sont dans un plan

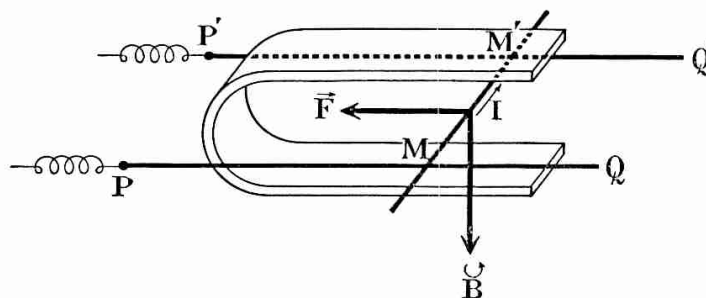


FIG. 54.

horizontal. Un pont conducteur MM' est normal à ces deux rails. Un aimant en U crée une induction magnétique verticale. Lorsqu'on lance le courant dans $PMM'P'$, le pont se déplace en restant perpendiculaire aux rails. La force électromagnétique F est donc parallèle aux rails. On effectue les mêmes vérifications que dans l'expérience précédente [le trièdre $(\overrightarrow{MM'}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct].

3° La roue de Barlow (fig. 55).

Le plan d'un disque de cuivre mobile autour de son axe horizontal est normal aux lignes d'induction dans l'entrefer d'un aimant en U.

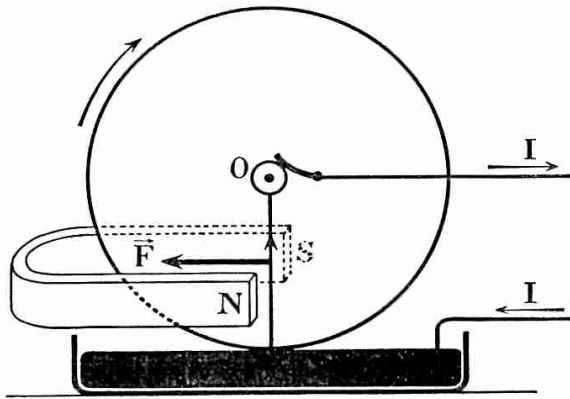


FIG. 55.

Le courant arrive au bord inférieur en contact avec du mercure et sort par l'axe. Le disque tourne sous l'action de la force électromagnétique F dans le sens qui correspond bien à l'application de la règle de l'observateur d'Ampère. Cette expérience montre que *les forces électromagnétiques sont appliquées à la matière des conducteurs*; nous interpréterons ce fait plus tard (20-1).

La roue de Barlow constitue un moteur. Le calcul grossier de la puissance que nous allons effectuer a pour but d'en donner un ordre de grandeur :

La force $F = BIR$ est appliquée au milieu du rayon supposé tout entier soumis à l'action de $\vec{B}$, son moment par rapport à l'axe de rotation est

$$\Gamma = \frac{I}{2} FR = \frac{I}{2} IBR^2;$$

si N est le nombre de tours par seconde de la roue, la puissance du moteur est

$$P = 2\pi N\Gamma = \pi R^2 NBI.$$

Pour $N = 2 \text{ tr.s}^{-1}$; $I = 5 \text{ A}$; $R = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$; $B = 0,1 \text{ T}$, on a $P \simeq 8 \text{ mW}$. Cette puissance, infime, est transformée en chaleur par les frottements mécaniques; le couple moteur est très faible.

7-4. La balance électromagnétique de Cotton (fig. 56).

La balance de Cotton permet des mesures relativement précises, non pas en vue de vérifier la loi de Laplace, mais pour la détermination d'inductions magnétiques. Une mesure revient à équilibrer à l'aide d'un poids la force électromagnétique appliquée à un conducteur rectiligne MM' .

Un bras de fléau d'une balance est remplacé par un circuit plan

rigide NMM'N' dont MN et M'N' sont deux arcs de cercles dont le centre O est sur l'arête du couteau central; MM'O, N'O et NO sont des rayons. Les fils d'arrivée et de départ du courant sont très souples.

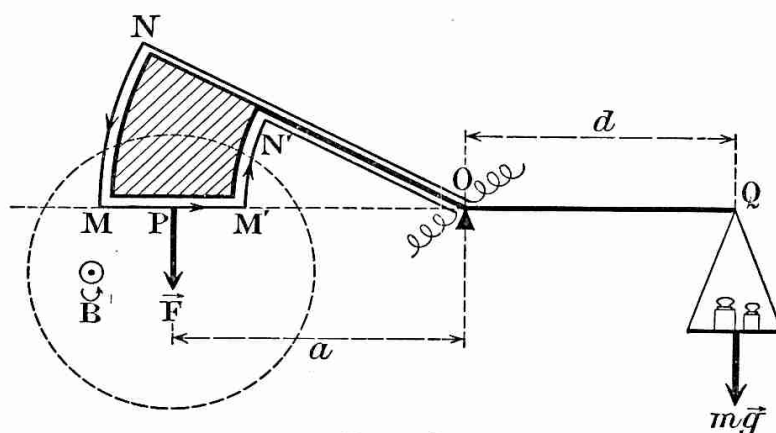


FIG. 56.

La balance est en équilibre, MM' étant horizontal; on dispose MM' normalement à une induction magnétique constante sur toute sa longueur et dans son voisinage alors que la région de N et N' est en dehors du champ. On lance un courant d'intensité I connue, courant dont le sens est choisi de façon que la force électromagnétique F appliquée à MM' soit dirigée vers le bas. Les forces appliquées aux parties des arcs MN et M'N' sont situées dans le plan passant par O, leurs moments par rapport à l'axe sont donc nuls et par suite elles n'interviennent pas dans l'équilibre.

On rétablit l'équilibre en plaçant une masse m dans le plateau de la balance. F est appliquée au milieu P de $MM' = l$, elle est verticale et son module est BIl . Posons $OP = a$, $OQ = d$. La condition d'équilibre s'écrit

$$BIla = mgd.$$

Supposons $a = d$; $l = 0,02$ m; $g = 9,8$ m.s⁻²; $I = 10$ A; $B = 0,1$ T; on calcule $m \simeq 0,002$ kg = 2 g.

La balance de Cotton permet des mesures d'inductions intenses avec une précision relative qui atteint difficilement le millième; la principale cause d'incertitude réside dans la détermination des grandeurs géométriques de l'appareil.

7-5. Circuit dans une induction uniforme. Couples magnétiques.

La détermination du système des forces électromagnétiques appliquées à un circuit ou à une partie de circuit à l'aide de la loi de Laplace n'est facile ou même n'est possible que si la forme géométrique du circuit

complet ou partiel et la répartition spatiale de l'induction sont simples. Nous avons déjà rencontré deux cas (2-5 et 7-5) où *le torseur des forces est réduit à une force unique*; le plus important est celui d'un *conducteur rectiligne dans une induction uniforme*.

Nous allons maintenant envisager le cas d'un circuit complet; donnons-en déjà le résultat très important :

Le système des forces électromagnétiques appliquées à un circuit quelconque placé dans un champ magnétique uniforme se réduit à un couple.

Nous allons établir ce résultat dans un cas particulier avant de le faire dans le cas général.

1° Courant rectangulaire (fig. 57).

Deux côtés opposés du rectangle sont soumis à un couple puisque, dans le champ uniforme, ils ne se distinguent que par le sens du courant I . Le circuit est donc soumis à deux couples qui équivalent à un couple unique.

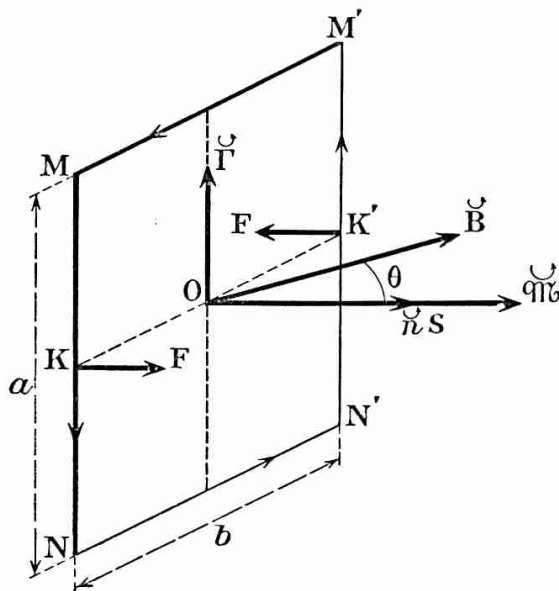


FIG. 57.

Plaçons-nous dans le cas particulier où la direction de plan normale aux côtés verticaux $MN = M'N' = a$ contient le vecteur induction $\vec{B}$. Posons $MM' = NN' = b$ et $\theta = (\vec{n}, \vec{B})$, $\vec{n}$ étant le vecteur unitaire sur la normale positive au plan du circuit.

a) La loi de Laplace montre que les forces appliquées aux côtés MM' et NN' sont opposées

(de module commun $BIb |\sin \theta|$ et répulsives dans le cas de la figure); elles équivalent donc à zéro.

b) Les forces appliquées à MN et $M'N'$, aux points K et K' , de module commun $F = BIa$ (B étant normal à MN et $M'N'$), forment un couple dont le moment a pour module

$$\Gamma = Fb |\sin \theta| = BIab |\sin \theta|.$$

Le vecteur moment de ce couple, $S = ab$ étant l'aire du rectangle et $\vec{S} = \vec{n}S$ le vecteur surface, a pour expression

$$(1) \quad \vec{\Gamma} = I\vec{S} \wedge \vec{B} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B},$$

le vecteur axial

$$\vec{\mathcal{M}} = I \vec{S} = \vec{n} IS,$$

de module IS (exprimé en $A.m^2$), étant *le vecteur moment magnétique du circuit*.

Sous l'action du couple le circuit tend à se disposer de façon que $\vec{n}$ devienne colinéaire de $\vec{B}$.

Le couple est nul si $\theta = 0$, c'est-à-dire si $\vec{B}$ traverse normalement le circuit de sa face sud vers sa face nord; le circuit est alors en équilibre s'il n'est pas soumis à d'autres forces et l'on montre facilement que cet équilibre est stable.

Le couple est également nul si $\theta = \pi$ ($\vec{B}$ traverse le circuit de sa face nord vers sa face sud); le circuit est en équilibre mais l'équilibre est instable.

Enfin, le couple est maximal, de module

$$\mathcal{M}B = ISB,$$

lorsque $\vec{B}$ est dans le plan du circuit ($\theta = \frac{\pi}{2}$).

Nous aurions obtenu en définitive le même résultat, exprimé par la relation vectorielle (1) dans le cas général où l'induction uniforme a une direction quelconque par rapport au rectangle; la démonstration est un peu plus compliquée parce que l'on est amené à réduire deux couples à un couple unique.

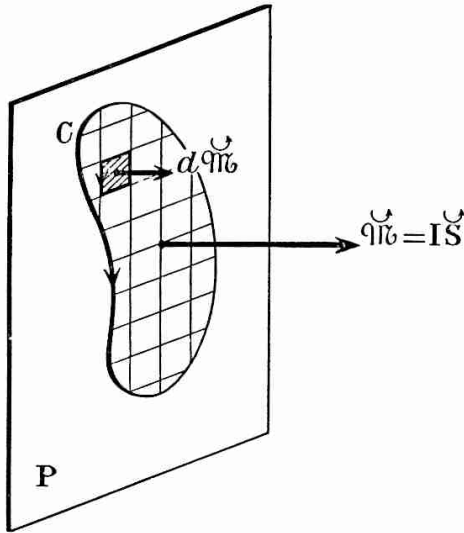


FIG. 58.

2° Circuit plan.

Considérons un circuit plan quelconque C (fig. 58). A l'aide d'un quadrillage orthogonal décomposons la surface S en rectangles de dimensions infiniment petites et remplaçons le circuit C par le tapis d'ampériens rectangulaires parcourus par des courants de même intensité égale à I et dont le sens est

tel que leurs normales positives soient celles que l'on déduit du sens du courant dans le circuit C .

Chaque ampérien est soumis à un couple de moment

$$d\vec{\Gamma} = I d\vec{S} \wedge \vec{B} = d\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}.$$

Tous les vecteurs élémentaires $d\vec{\Gamma}$ ont la même direction et le même

sens. Par suite, les vecteurs moments s'additionnent vectoriellement et l'induction $\vec{B}$ étant uniforme par hypothèse, la nappe de courant et le circuit C, équivalents, sont soumis à un torseur de forces réduit à un couple de moment

$$\vec{\Gamma} = \int_s d\vec{\Gamma} = \int_s I \vec{dS} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \int_s I \vec{dS} = -\vec{B} \wedge \int_s d\vec{\mathcal{M}}.$$

Or tous les vecteurs $d\vec{\mathcal{M}}$ ont même direction et même sens, ils admettent donc une résultante

$$\vec{\mathcal{M}} = \int_s d\vec{\mathcal{M}} = \int_s I \vec{dS} = I\vec{S},$$

dirigée suivant la normale positive, de module IS , et dont le point d'application est le barycentre de S . Les vecteurs $\vec{S}$ et $\vec{\mathcal{M}}$ sont donc parfaitement définis : le premier est le vecteur surface du circuit, le second est le vecteur moment magnétique du circuit.

L'axe $\vec{\Gamma}$ du couple magnétique est défini par la relation

$$\vec{\Gamma} = I\vec{S} \wedge \vec{B} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}.$$

Montrons que nous aurions obtenu le même résultat en quadrillant une surface quelconque Σ , convenablement orientée, s'appuyant sur le contour C (fig. 59). Soit $d\Sigma$ un ampérien sur Σ ; il est soumis au couple d'axe

$$d\vec{\Gamma} = I d\vec{\Sigma} \wedge \vec{B},$$

et le couple agissant sur la nappe a pour axe

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= -\vec{B} \wedge I \int_{\Sigma} d\Sigma \\ &\equiv -\vec{B} \wedge I \int_s \vec{dS}. \end{aligned}$$

Pour établir l'identité précédente il nous suffit de démontrer que

$$\int_{\Sigma} d\vec{\Sigma} = \int_s \vec{dS} = \vec{S}.$$

En effet, projetons les vecteurs $d\vec{\Sigma}$ sur deux plans rectangulaires :

Le premier, Π , est normal au plan de C. La somme des projections est nulle parce qu'un cylindre élémentaire projette deux « éléments

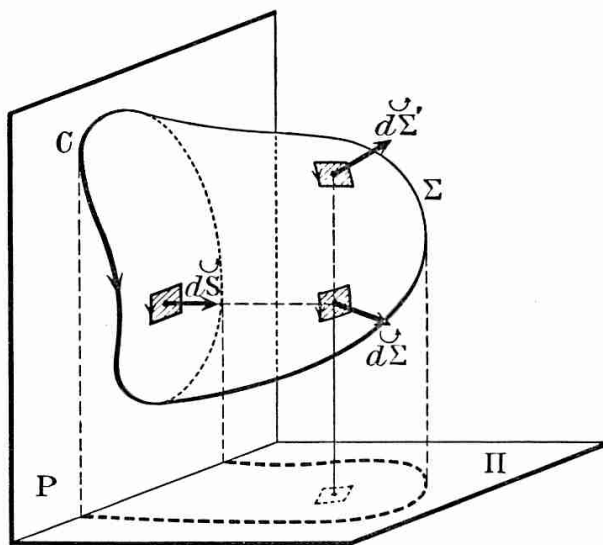


FIG. 59.

correspondants » $d\Sigma$ et $d\Sigma'$, suivant deux aires égales mais orientées en sens inverses.

Le second est le plan P du circuit. La projection de $d\Sigma$ est $d\vec{S}$ et la somme des projections est bien représentée par le vecteur $\vec{S}$. Si, ce qui n'est pas le cas de la figure, une partie de la projection de Σ débordait le contour C, la somme de ces projections extérieures serait nulle pour la raison précédemment donnée.

En résumé :

Toutes les surfaces Σ s'appuyant sur le contour C sont représentées par le même vecteur glissant $\vec{S}$.

3° Cas général. Le circuit C est gauche.

Comme précédemment quadrillons une surface maintenant quelconque S, s'appuyant sur C, en ampériens de moments magnétiques

$$d\vec{\mathfrak{M}} = I d\vec{S}.$$

Chacun d'eux étant soumis à un couple, le tapis d'ampériens, et par suite C, sont soumis à un couple d'axe

$$\vec{\Gamma} = \vec{B} \wedge I \int_S dS.$$

Ce couple est indépendant du choix de S, l'intégrale de la relation précédente est donc un vecteur $\vec{S}$ et l'on a

$$\boxed{\vec{\Gamma} = I \vec{S} \wedge \vec{B} = \vec{\mathfrak{M}} \wedge \vec{B},}$$

$\vec{\mathfrak{M}}$ étant **le vecteur moment magnétique du circuit.**

Pour déterminer $\vec{S}$, et par suite $\vec{\mathfrak{M}}$, remarquons que la projection de S sur un plan est limitée par la projection du contour C sur ce plan (les projections qui débordent se compensent parce que formées de projections de deux nappes orientées en sens contraires). Il en découle que dans un système de coordonnées rectangulaires $Oxyz$, les composantes $\vec{S}_x$, $\vec{S}_y$ et $\vec{S}_z$ du vecteur $\vec{S}$ sont les vecteurs représentatifs des surfaces définies par les projections C_x , C_y , C_z de C (fig. 60). On a donc

$$\begin{aligned} \vec{\mathfrak{M}} &= I \vec{S} = I(\vec{S}_x + \vec{S}_y + \vec{S}_z), \\ \vec{\Gamma} &= I(\vec{S}_x + \vec{S}_y + \vec{S}_z) \wedge (\vec{B}_x + \vec{B}_y + \vec{B}_z). \end{aligned}$$

Cette dernière relation définit le vecteur $\vec{\Gamma}$ (vecteur libre puisque moment d'un couple) par ses composantes

$$\Gamma_x = I(S_y B_z - S_z B_y),$$

$$\Gamma_y = I(S_z B_x - S_x B_z),$$

$$\Gamma_z = I(S_x B_y - S_y B_x),$$

valeurs algébriques qui résultent de la convention de rotation, le trièdre de référence étant direct.

L'essentiel à retenir de ce calcul est que :

A un contour gauche C sur lequel est fixé un sens de parcours (celui du courant) on peut toujours faire correspondre un vecteur surface $\vec{S}$ et par suite, dans le cas d'un circuit, un vecteur moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ qui détermine, par la

relation essentielle $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$, le moment du couple exercé par une induction uniforme.

Bien entendu, si l'induction n'est pas uniforme et si le circuit est quelconque, le système des forces électromagnétiques est un torseur quelconque défini par sa résultante générale et par son moment résultant par rapport à un point.

Exercice.

Exercice 10. — Montrer par application de la loi de Laplace qu'un circuit circulaire de rayon R placé dans une induction magnétique uniforme B est soumis à un couple dont on calculera le moment.

Les notations employées sont celles de la figure 61 a, en particulier l'orientation de $\vec{B}$ par rapport au plan xOy du circuit est définie par l'angle $\theta = (\vec{B}_n, \vec{B})$. Le plan $B_n Oy$, normal au plan xOy , contient le vecteur $\vec{B}$.

$\vec{B}$ étant décomposé en ses composantes B_n et B_y suivant l'axe du circuit et suivant Oy , cherchons leurs actions sur deux éléments de circuit $I dl = IR d\alpha$ symétriques par rapport à O.

Les forces qui résultent de B_n sont opposées, leur support commun, dans le plan xOy , passant par O. Le système des forces qui résultent de B_n est donc équivalent à zéro.

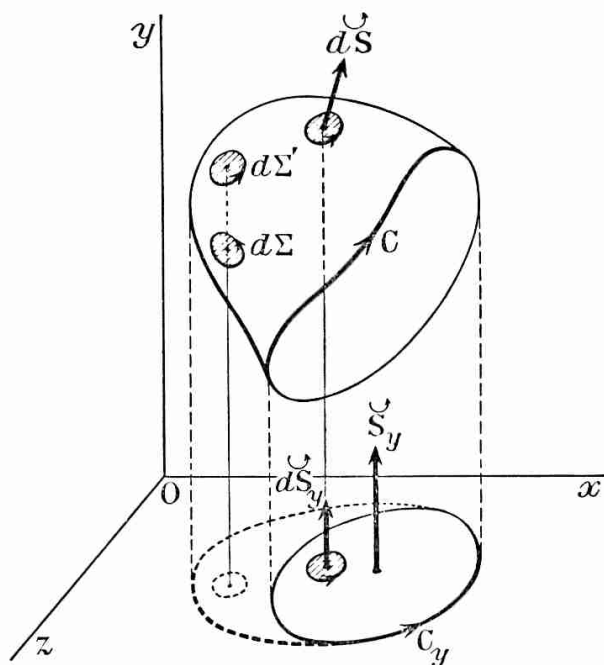


FIG. 60.

Il suffit donc de nous préoccuper des actions de B_y (fig. 61 b). Les forces qu'elles exercent sur les deux éléments forment un couple de forces perpendiculaires au plan du circuit, ayant pour module commun

$$df = B_y I dl \sin \alpha = BRI \sin \theta \sin \alpha d\alpha.$$

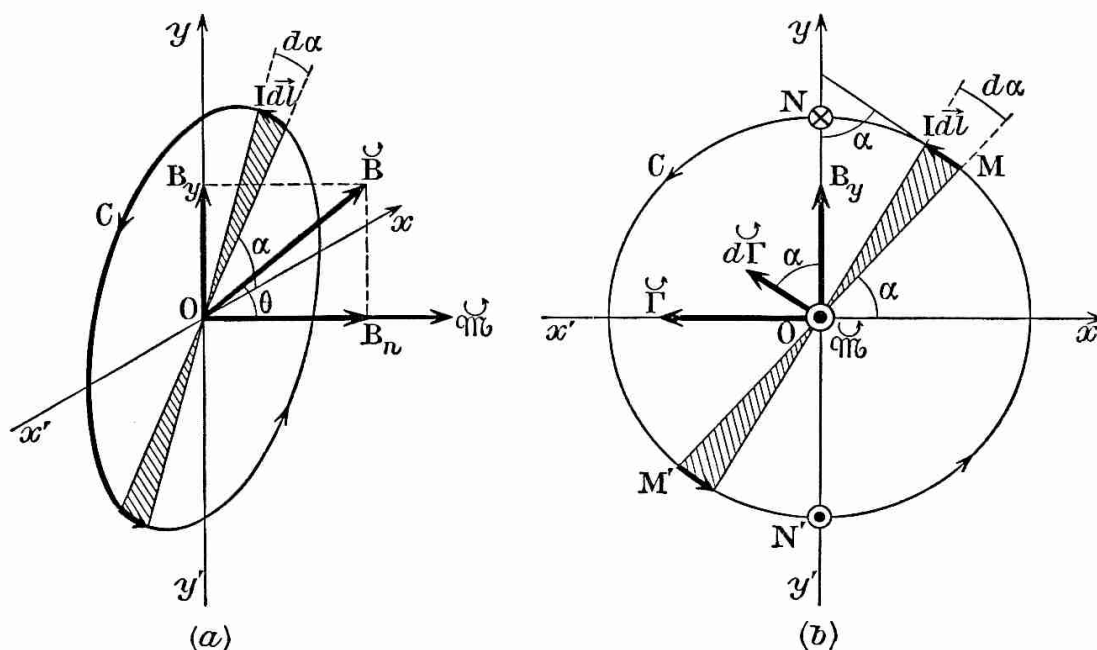


FIG. 61.

Le module du moment de ce couple élémentaire est

$$d\Gamma = 2fR = 2BR^2I \sin \theta \sin \alpha d\alpha;$$

le support de $d\Gamma$ est, dans le plan $x'Oy$, perpendiculaire à MM' et fait l'angle α avec $y'Oy$. Lorsqu'on fait varier α de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ de façon à épuiser tous les éléments du circuit on voit, par raison de symétrie par rapport à $x'Ox$, que la résultante Γ des vecteurs $d\Gamma$ est dirigée suivant cet axe. Pour l'obtenir il suffit donc de faire la somme de ses composantes

$$d\Gamma_x = d\Gamma \sin \alpha,$$

par suite

$$\Gamma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\Gamma_x = BR^2I \sin \theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 \alpha d\alpha = BR^2I \sin \theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\alpha) d\alpha;$$

d'où

$$\Gamma = \pi BR^2I \sin \theta = BSI \sin \theta.$$

Le vecteur $\vec{\Gamma}$ est donc défini, en posant $\vec{\mathcal{M}} = \vec{SI}$, par

$$\vec{\Gamma} = \vec{IS} \wedge \vec{B} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}.$$

Ce couple résultant, dont les forces F sont appliquées en N et N' , tend à faire tourner le circuit autour de $x'Ox$ de façon que B_y et θ soient nuls, autrement dit de façon que B soit normal au plan P pour qu'il le traverse dans le sens de la normale positive ($\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{B}$ colinéaires).

7-6. Solénoïde dans une induction uniforme.

D'après le résultat général établi précédemment, *une bobine plate* (de contour circulaire ou non) de N spires de surface S , placée dans une induction uniforme, est soumise à un couple de moment (fig. 62)

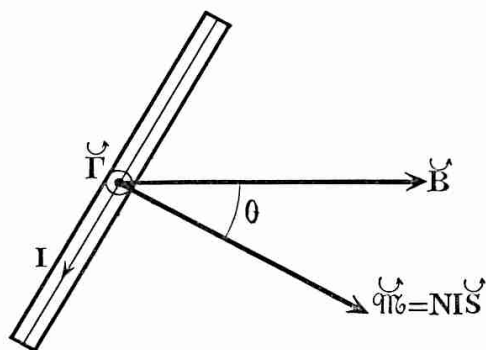


FIG. 62.

$$\vec{\Gamma} = N I \vec{S} \wedge \vec{B} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}.$$

Considérons maintenant (fig. 63) un solénoïde comportant N spires de surface S . Le sens de son axe magnétique est lié au sens du courant I par la convention de rotation habituelle, il va de la face sud vers la face nord de la bobine. Son orientation est définie par l'angle θ .

Chaque spire est soumise à un couple de vecteur moment (axe du couple)

$$\vec{g} = I \vec{S} \wedge \vec{B} = \vec{m} \wedge \vec{B}.$$

Les couples agissant sur les différentes spires ont tous leurs axes

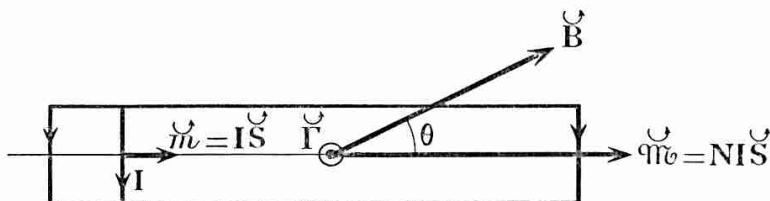


FIG. 63.

parallèles et de même sens (perpendiculaires au plan de $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{B}$, le trièdre $\vec{\mathcal{M}}, \vec{B}, \vec{g}$ étant direct), le solénoïde est donc soumis à un couple résultant d'axe

$$\vec{\Gamma} = N \vec{g} = N \vec{m} \wedge \vec{B} = N I \vec{S} \wedge \vec{B} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B},$$

de module

$$\Gamma = N S I B \sin \theta = \mathcal{M} B \sin \theta,$$

le vecteur $\vec{\mathcal{M}}$ étant *le vecteur moment magnétique du solénoïde*, porté par l'axe magnétique et de module $\mathcal{M} = N S I$.

Le résultat obtenu est le même que dans le cas d'une bobine plate.

Si les liaisons mécaniques permettent une rotation sans liaison autour d'un axe Δ perpendiculaire en O au plan de $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{B}$ (Δ et Γ ont le même support), le solénoïde tend à s'orienter vers la position d'équilibre stable pour laquelle $\theta = 0$, les vecteurs $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{B}$ étant colinéaires.

Soit J le moment d'inertie de la bobine par rapport à l'axe Δ ; si nous écartons le solénoïde d'un petit angle θ_0 à partir de la position d'équilibre stable pour l'abandonner sans vitesse initiale, il se met à osciller. En l'absence de frottement et *l'intensité I du courant étant supposée maintenue constante*, l'application du principe fondamental de la dynamique donne l'équation différentielle du mouvement :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mathcal{M}B \sin \theta \simeq -\mathcal{M}B\theta,$$

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \mathcal{M}B\theta = 0.$$

Le mouvement est sinusoïdal, de période,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}B}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{NSBI}}.$$

La mesure de T et de J fournit donc une relation entre $\mathcal{M} = NSI$ et B , donc entre I et B (N et S étant connus).

Exercices.

Exercice II. — 1° Un solénoïde (ou bobine longue) de 0,80 m de long contient 2 000 spires. Calculer l'induction B au centre pour un courant de 1 ampère. On le supposera d'abord très long, puis on tiendra compte de l'influence des bouts, sachant que le cône déterminé par le centre et les faces terminales a des génératrices qui font avec l'axe un angle de 0,1 radian.

Pour les questions suivantes on le supposera très long.

2° Une petite bobine plate est suspendue au centre du solénoïde par un fil de torsion vertical et son axe coïncide avec l'axe du solénoïde quand la torsion est nulle; sa surface est $S = 5 \text{ cm}^2$, elle comporte $N = 100$ spires. La constante de torsion du fil est $C = 2 \cdot 10^{-4} \text{ S.I.}$

En l'absence de courant cette bobine peut osciller avec une période $T = 1$ seconde. Calculer les périodes T_1 et T_2 des petites oscillations quand le même courant $i = 1 \text{ A}$ passe dans les bobines dans le même sens (T_1) ou en sens contraire (T_2).

3° On augmente le courant i qui passe dans les deux bobines. L'une des périodes peut devenir infinie. Calculer la valeur de i correspondante. Montrer que la sensibilité $\frac{dT}{di}$ peut être rendue très grande quand on opère près de cette valeur.

4° Montrer que, lorsque le courant tourne en sens inverse dans les bobines, la position de départ est stable si i est inférieur à la valeur trouvée au paragraphe précédent, et instable dans le cas contraire. Montrer qu'il y a alors une autre position d'équilibre et calculer i quand cette position correspond à une rotation de 90° .

1° n étant le nombre de spires par mètre, l'induction B au centre du solénoïde supposé très long est

$$B = \mu_0 ni = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{2000}{0,8} = 3,142 \cdot 10^{-3} = 3,142 \text{ milliteslas.}$$

Si l'on tient compte de l'influence des bouts, nous avons, comme $\beta = 0,1 \text{ rd}$,

$$B = \mu_0 ni \cos \beta \simeq \mu_0 ni \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) = \mu_0 ni \left(1 - \frac{1}{200}\right) = 3,127 \text{ milliteslas.}$$

La valeur $B = 3,14 \cdot 10^{-3}$ tesla, que nous retenons pour la suite, est donc déterminée avec une précision relative de $5 \cdot 10^{-3}$, cela nous fixe la précision avec laquelle nous devons effectuer les calculs.

2° J étant le moment d'inertie de la petite bobine par rapport à son axe de rotation, la période de ses oscillations (pas nécessairement petites), en l'absence de courant, est celle d'un pendule de torsion :

$$(1) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}.$$

Lorsque les deux bobines sont parcourues par des courants i de même sens, la position d'équilibre, caractérisée par $\theta = 0$, est stable tant au point de vue mécanique qu'électromagnétique; écartée d'un angle θ , cette bobine est soumise à deux couples de rappel de moments $-C\theta$ et

$$-NSBi \sin \theta = -\mu_0 n NS i^2 \sin \theta,$$

peu différent de $-NSBi\theta$ pour les petites elongations.

L'équation du mouvement,

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -(C + NSBi)\theta,$$

est celle d'oscillations de période

$$(2) \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C + NSBi}}.$$

Lorsque les courants dans les deux bobines sont de sens inverse et que la condition $C > NSBi$ est satisfaite, le couple résultant auquel est soumis la bobine plate est encore un couple de rappel dont le moment est $-(C - NSBi)\theta$; l'équation du mouvement est

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + (C - NSBi)\theta = 0.$$

Il est oscillatoire et la période des petites oscillations est

$$(3) \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C - NSBi}}.$$

Des relations (1), (2), (3) nous tirons

$$T_1 = T \sqrt{\frac{C}{C + NSBi}} = T \left(1 + \frac{NSBi}{C}\right)^{-\frac{1}{2}} = (1,7855)^{-\frac{1}{2}} = 0,748 \text{ s};$$

$$T_2 = T \sqrt{\frac{C}{C - NSBi}} = T \left(1 - \frac{NSBi}{C}\right)^{-\frac{1}{2}} = (0,2145)^{-\frac{1}{2}} = 2,16 \text{ s}.$$

3° La période des oscillations ne peut devenir infinie que lorsque les courants i_M dans les deux bobines sont de sens contraires, et cela se produit lorsque

$$C = NSBi_M = \mu_0 n NS i_M^2,$$

pour

$$i_M = \sqrt{\frac{C}{\mu_0 n NS}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1,13 \text{ A}.$$

Pour i voisin de i_M et inférieur à i_M la période T_2 , très grande, est donnée par

$$T_2 = T \left(1 - \frac{i^2}{i_M^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

La sensibilité correspondante,

$$\frac{dT_2}{di} = \frac{Ti}{i_M} \left(1 - \frac{i^2}{i_M^2}\right)^{-\frac{3}{2}},$$

est elle-même très grande, elle tend aussi vers l'infini quand i tend vers i_M par valeurs inférieures.

4° Les courants circulant en sens inverse dans les deux bobines, la petite bobine, dans une position définie par l'angle θ , est soumise à un couple résultant de moment

$$\Gamma = -C\theta + \mu_0 n N S i^2 \sin \theta = -\mu_0 n N S (i_M^2 \theta - i^2 \sin \theta),$$

ou, en posant $u = i_M^2 \theta$ et $v = i^2 \sin \theta$,

$$\Gamma = -\mu_0 n N S (u - v).$$

Les positions d'équilibre sont définies par $\Gamma = 0$ et par suite par $u = v$. La position $\theta = 0$ est toujours une position d'équilibre quel que soit i . Pour étudier sa stabilité, calculons la dérivée :

$$\frac{d\Gamma}{d\theta} = -\mu_0 n N S \left(\frac{du}{d\theta} - \frac{dv}{d\theta} \right) = -\mu_0 n N S (i_M^2 - i^2 \cos \theta),$$

qui prend la valeur

$$\left(\frac{d\Gamma}{d\theta} \right)_0 = -\mu_0 n N S (i_M^2 - i^2)$$

pour $\theta = 0$.

L'équilibre est stable si $d\Gamma$ et $d\theta$ sont de signes contraires, autrement dit si la dérivée précédente est négative, ce qui n'a lieu que si $i < i_M$.

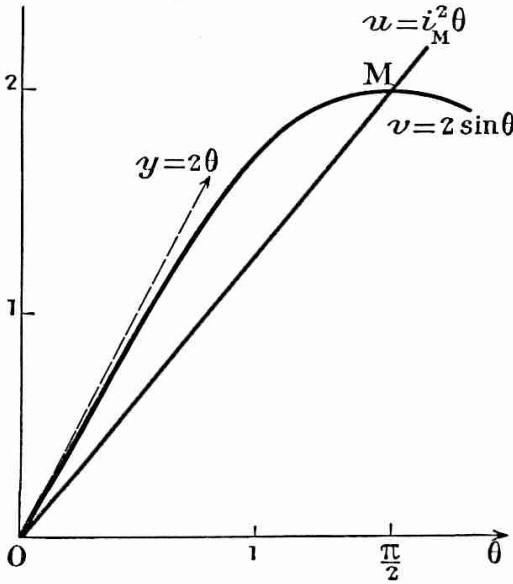


FIG. 64.

Voyons s'il peut exister une seconde position d'équilibre. Pour cela nous construisons la droite $u = i_M^2 \theta$, dont le coefficient angulaire est $i_M^2 = \frac{4}{\pi} = 1,27$, et la courbe

$v = i^2 \sin \theta$, dont la pente à l'origine est i^2 . Tant que $i < i_M$ les deux courbes n'ont qu'un seul point de rencontre, le point O, correspondant à la position d'équilibre stable $\theta = 0$. Lorsque i devient supérieur à i_M cette position d'équilibre est instable, mais la pente de la courbe v à l'origine étant supérieure à celle de la droite u (fig. 64), il existe un second point de rencontre M défini par $i_M^2 \theta = i^2 \sin \theta$.

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $i^2 = 2A$,

$$i = 1,414 A.$$

Cette position d'équilibre est bien stable; en effet, nous avons

$$i^2 = i_M^2 \frac{\theta}{\sin \theta},$$

$$\frac{d\Gamma}{d\theta} = -\mu_0 n N S (i_M^2 - i^2 \cos \theta) = -\mu_0 n N S i_M^2 \left(1 - \frac{\theta}{\tan \theta}\right) < 0.$$

Exercice 12. — Un équipage mobile est constitué par l'ensemble de deux bobines plates rectangulaires B_1 et B_2 identiques, invariablement liées entre elles. Les plans des spires des deux bobines sont perpendiculaires (fig. 65). L'ensemble est mobile

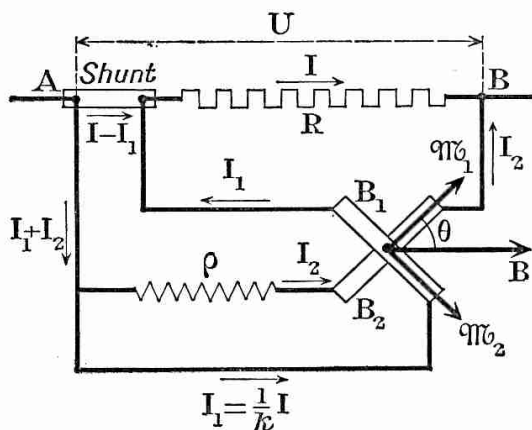


FIG. 65.

autour d'un axe vertical qui coïncide avec la médiane commune des deux bobines. L'équipage est placé dans une induction magnétique uniforme horizontale d'intensité $B = 200$ gauss.

1° a) On lance un courant continu d'intensité I_1 dans la bobine B_1 . Montrer que l'équipage prend une position d'équilibre stable, alors qu'il était astatique en l'absence de tout courant. Préciser cette position d'équilibre que l'on repère soigneusement.

b) Le courant constant I_1 subsistant dans B_1 , on lance dans la bobine B_2 un courant constant d'intensité I_2 . L'équipage mobile tourne d'un angle θ que l'on mesure.

Déduire de la valeur de θ le rapport $x = \frac{I_2}{I_1}$ et montrer que l'appareil peut servir à mesurer le rapport des intensités de deux courants constants.

Étudier la sensibilité de cet appareil pour la mesure de x .

Application numérique : $\theta = 30^\circ$. Calculer x .

c) Quelle est la plus petite variation de x que l'on peut déceler pour cette valeur de θ , sachant que la plus petite rotation de l'équipage que l'on peut déceler est $20'$?

2° La bobine B_1 est parcourue par un courant dont l'intensité est une fraction connue $\frac{1}{k}$ du courant I qui parcourt une résistance R .

La bobine B_2 est montée en série avec une résistance ρ , grande devant R , et cet ensemble est monté en parallèle entre les extrémités A et B de la résistance R et du shunt.

a) Trouver la position d'équilibre de l'équipage mobile et calculer l'angle θ dont il a tourné à partir de la position qu'il occupe lorsque seule la bobine B_1 est parcourue par un courant.

b) Montrer que la mesure de θ permet le calcul de R .

Application numérique : $\theta = 60^\circ$, $k = 10$, $\rho = 9\,990$ ohms. Les résistances des bobines, égales, valent 10 ohms. Calculer la résistance du shunt de la bobine B_1 et la valeur de R .

c) Étudier la sensibilité de l'appareil monté en ohmmètre. Montrer qu'elle décroît à mesure que θ augmente.

On mesure θ à $20'$ près; quelle est la limite supérieure de l'incertitude qui en résulte sur la valeur de R , dans le cas où $\theta = 60^\circ$?

d) Soit U la différence de potentiel aux bornes de l'ensemble formé par le shunt de la bobine B_1 et la résistance R à mesurer, différence de potentiel qui est créée par un générateur approprié. Quelle est l'influence de la valeur de U sur la déviation de l'appareil ?

1° a) La position d'équilibre, correspondant à $I_1 \neq 0$, $I_2 = 0$, sert d'origine de la rotation θ de l'équipage mobile; elle est telle que le vecteur induction magnétique $\vec{B}$ et le vecteur moment magnétique $\vec{M}_1$ de la bobine B_1 sont colinéaires.

b) La nouvelle position d'équilibre (I_1 et I_2 non nuls) est telle que le vecteur $\vec{B}$ et le vecteur $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$, résultante des moments magnétiques des deux bobines, sont colinéaires. Les deux bobines étant identiques, on a

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{M_2}{M_1} = \frac{I_2}{I_1} = x.$$

La sensibilité de l'appareil pour la mesure de x est

$$\sigma = \frac{d\theta}{dx} = \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{1}{1 + x^2};$$

elle décroît de 1 à zéro lorsque x croît de zéro à l'infini.

Pour $\theta = 30^\circ$: $x = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577$; $\sigma = 0,75$ rd.

c) Pour $\theta = 30^\circ$ et $d\theta = 20' = \frac{\pi}{540}$ rd :

$$dx = \frac{4}{3} d\theta = 7,75 \cdot 10^{-3}.$$

2° Soit s la résistance du shunt et r celle de chacune des bobines.

a) Nous avons représenté sur la figure de l'énoncé les intensités qui résultent de l'application de la première loi de Kirchhoff.

L'application de la deuxième loi de Kirchhoff à la maille AB_1A donne

$$(1) \quad (I - I_1)s - rI_1 = 0,$$

d'où

$$s = \frac{rI_1}{I - I_1} = \frac{r}{k - 1};$$

à la maille ABB_2A ,

$$(I - I_1)s + RI - (r + \rho)I_2 = 0,$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (1),

$$(2) \quad \operatorname{tg} \theta = x = \frac{I_2}{I_1} = \frac{kR + r}{\rho + r}.$$

b) De la relation précédente découle

$$R = \frac{1}{k} [(r + \rho) \operatorname{tg} \theta - r].$$

L'application numérique donne ($\operatorname{tg} \theta = \sqrt{3}$)

$$s = 1,11 \, \Omega \quad \text{et} \quad R = 1,730 \, \Omega.$$

c) Nous avons d'après la relation (2), par différentiation,

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{k}{\rho + r} dR;$$

d'où

$$\sigma = \frac{d\theta}{dR} = \frac{k}{\rho + r} \cos^2 \theta = 10^{-3} \cos^2 \theta \, \text{rd} \cdot \Omega^{-1};$$

la sensibilité σ décroît à mesure que θ croît.

Pour $\theta = 60^\circ$, $d\theta = 20' = \frac{\pi}{540} \text{rd}$,

$$dR = 10^3 \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = 23 \, \Omega.$$

d) Nous avons

$$U = (\rho + r)I_2 = I_1(kR + r);$$

l'expression

$$\text{tg } \theta = \frac{I_2}{I_1} = \frac{kR + r}{\rho + r}$$

montre que θ ne dépend pas de U . Dans la pratique le générateur est une magnéto que l'on actionne à l'aide d'une manivelle; la graduation est en ohms et l'indication est indépendante de la vitesse de rotation de la magnéto.

CHAPITRE VIII

TRAVAIL DES FORCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES. LOI DE MAXWELL. INDUCTANCE PROPRE D'UN CIRCUIT

8-1. Travail élémentaire de la force électromagnétique appliquée à un élément de circuit.

Considérons un élément de courant $I \vec{dl}$ d'un circuit C placé dans un champ magnétique représenté au point O (fig. 66) par le vecteur $\vec{B}$. Cet élément est soumis à la force électromagnétique

$$\vec{dF} = I \vec{dl} \wedge \vec{B}.$$

Supposons qu'il subisse la translation définie par le vecteur $\vec{ds}$; le travail de la force $\vec{dF}$ au cours de ce déplacement est

$$d^2W = \vec{dF} \cdot \vec{ds} = (I \vec{dl} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{ds} = (I \vec{dl} \cdot \vec{B} \cdot \vec{ds}).$$

Ce travail d^2W est donc mesuré par un produit vectoriel mixte, scalaire qui demeure inchangé par

permutation circulaire des vecteurs, par suite

$$d^2W = I(\vec{B} \cdot \vec{ds} \cdot \vec{dl}) = I\vec{B} \cdot (\vec{ds} \wedge \vec{dl}) = I\vec{B} \cdot d^2\vec{S},$$

le vecteur surface

$$d^2\vec{S} = \vec{n} d^2S = \vec{ds} \wedge \vec{dl},$$

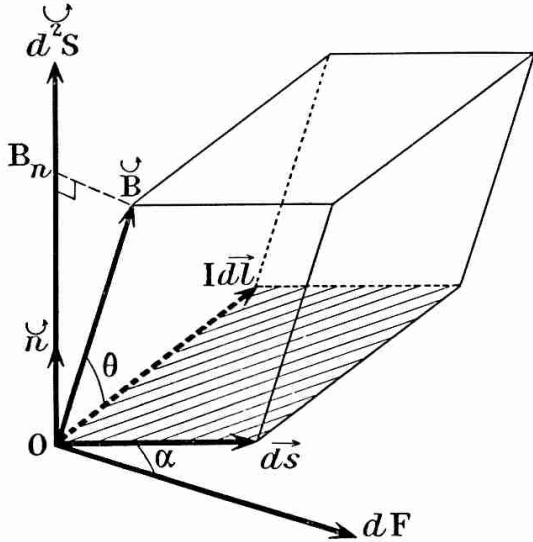


FIG. 66.

ayant pour module l'aire du parallélogramme défini par $\vec{ds}$ et $\vec{dl}$, et pour sens, sur la normale au plan de ce parallélogramme, celui pour lequel le trièdre $(\vec{ds}, \vec{dl}, d^2\vec{S})$ est direct.

Nous avons donc les trois expressions

$$d^2W = \vec{dF} \cdot \vec{ds} = I \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = (I \vec{dl} \cdot \vec{B} \cdot \vec{ds})$$

du travail élémentaire de la force électromagnétique dF :

a) le produit scalaire $\vec{dF} \cdot \vec{ds} = dF ds \cos \alpha$, qui résulte de la définition du travail,

b) le produit mixte $(I \vec{dl} \cdot \vec{B} \cdot \vec{ds})$, qui mesure le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs, est positif si le trièdre $(I \vec{dl}, \vec{B}, \vec{ds})$ est direct, négatif s'il est inverse,

c) le produit scalaire $I \vec{B} \cdot d^2\vec{S}$.

Si α est aigu (travail positif) le produit mixte est positif et l'angle $(\vec{B}, d^2\vec{S})$ est aigu, autrement dit, le sens de la composante B_n de $\vec{B}$ suivant la normale au plan des vecteurs $I \vec{dl}$ et $\vec{ds}$ est celui de la normale positive. Dans le cas inverse, α obtus, le travail est négatif et l'angle $(\vec{B}, d^2\vec{S})$ est obtus, autrement dit B_n est en sens inverse de $d^2\vec{S}$.

Le scalaire

$$\vec{B} \cdot d^2\vec{S} = B_n d^2S,$$

représente en grandeur et en signe le flux d'induction magnétique $d^2\varphi$ à travers la surface d^2S balayée par l'élément de courant au cours de son déplacement, par suite

$$d^2W = I \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = I d^2\varphi.$$

Nous appelons *flux coupé* ce flux $d^2\varphi$ et nous précisons de nouveau que son signe résulte de l'orientation de la normale positive à la surface balayée qui est telle que le trièdre $(I \vec{dl}, \vec{B}, \vec{ds})$ soit direct.

Remarquons que l'induction $\vec{B}$ comprend nécessairement l'induction propre B_c créée par le circuit C (à l'exception de l'élément considéré); elle est la résultante

$$\vec{B} = \vec{B}_c + \vec{B}_e$$

de cette induction propre et d'une induction extérieure ou appliquée $\vec{B}_e$ (qui peut être nulle). Nous reviendrons sur cette remarque. N'oublions pas enfin que *l'intensité I est supposée maintenue constante au cours du déplacement.*

8-2. Étude d'un cas particulier (fig. 67).

Les résultats précédents correspondent à une opération réalisable puisqu'il est possible de rendre mobile une petite portion de circuit et que la force électromagnétique est bien une force réelle. Pour nous

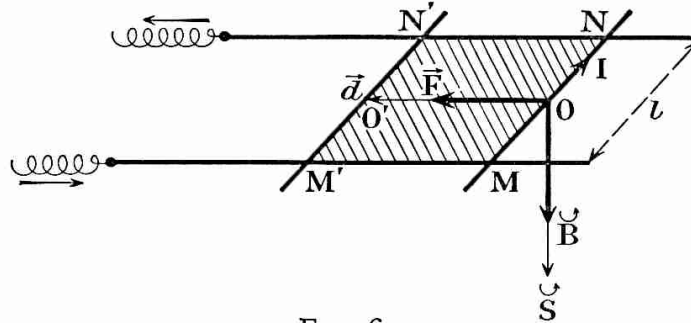


FIG. 67.

préparer au cas général d'un déplacement d'une partie finie de circuit ou d'un circuit complet, nous allons étudier un cas très particulier qui correspond à une expérience déjà décrite (7-3, 2^o) utilisant le dispositif des rails conducteurs.

Nous supposons que l'induction uniforme extérieure B est suffisamment intense pour que l'induction propre du circuit puisse être considérée comme négligeable. Posons $MN = l$ et soit $MM' = OO' = d$ le déplacement supposé, sur la figure, de même sens que la force F . Cette force électromagnétique F , appliquée au milieu O de MN , est perpendiculaire à MN et son sens est donné par la règle de l'observateur d'Ampère, le trièdre $(\vec{I}, \vec{B}, \vec{F})$ étant direct.

Le travail de la force F pour le déplacement d (positif dans le cas de la figure) est

$$W = Fd = IBld = IBS = I\varphi,$$

le flux coupé $\varphi = BS$ étant positif, l'induction B ayant le sens de la normale positive à l'aire balayée.

Si d était en sens inverse de F , le travail W et le flux coupé φ seraient négatifs; le trièdre $(\vec{I}, \vec{B}, \vec{d})$ étant inverse, l'induction $\vec{B}$ serait dirigée en sens inverse de la normale positive à la surface balayée.

Remarquons que dans le premier cas ($W > 0$) le déplacement du pont conducteur à vitesse constante (accélération nulle) suppose l'intervention d'un opérateur (faisant partie du milieu extérieur au système) qui, exerçant la force $-\vec{F}$, recueille du travail (l'expérience peut servir à soulever un poids). Nous pouvons dire dans ce cas, le travail de la force $-\vec{F}$ étant négatif et égal à $-W$, que le milieu extérieur fournit le travail $-W = W'$ au système constitué par le circuit.

Par contre, dans le cas inverse ($W < 0$ et $W' = -W > 0$), l'opérateur fournit un travail positif au système.

8-3. Premier énoncé de la loi de Maxwell.

Dans l'exemple précédemment étudié (8-2) le circuit était déformé au cours de l'opération décrite et nous avons été conduits à supposer négligeable l'induction propre du circuit. Examinons le cas d'un circuit rigide que l'on déplace dans une induction magnétique extérieure B . Indépendamment des actions extérieures, un élément $d\vec{l}$ du circuit est soumis à une force $d\vec{F}_i$ de la part du reste du circuit sur lequel il exerce lui-même la force opposée $-d\vec{F}_i$ en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, applicable ici puisqu'il s'agit de forces réelles et non pas des forces fictives qui s'exercent entre deux éléments de circuit.

Le circuit étant supposé indéformable, *l'ensemble des forces $d\vec{F}$ forme un torseur de forces intérieures nul*; nous n'avons donc pas à en tenir compte puisque le travail de ces forces est constamment nul.

Par suite l'induction magnétique que nous allons faire intervenir est une induction extérieure; nous la supposons invariable (mais non nécessairement uniforme) de même que l'intensité I .

Le circuit rigide C (fig. 68) est amené de la position initiale C_1 à la position finale C_2 ; au cours de ce déplacement il balaie la surface-canal S . Le déplacement est décomposable en une infinité de translations infiniment petites telles que CC' ,

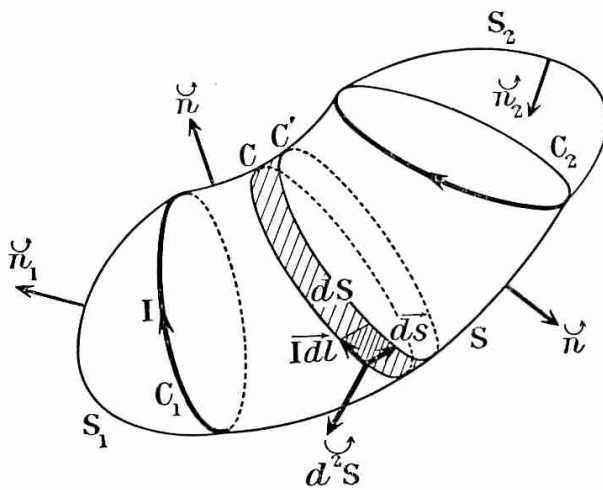


FIG. 68.

définie par ds .

Le travail de la force $d^2\vec{F}$ appliquée à l'élément $I d\vec{l}$ au cours de cette translation élémentaire est

$$d^2W = I d^2\varphi,$$

celui des forces appliquées à l'ensemble du circuit est

$$dW = \int_C d^2W = I \int d^2\varphi = I d\varphi,$$

$d\varphi$ étant le flux coupé, c'est-à-dire le flux à travers la surface-canal élémentaire

$$dS = \int d^2S.$$

Par suite, pour le déplacement global, ce travail est

$$W = \int dW = I \int d\varphi = I\varphi,$$

φ étant le *flux coupé global*, c'est-à-dire le flux à travers la surface-canal S . Son signe résulte du sens de la normale positive à cette surface qui, par raison de continuité, est dirigée soit vers l'extérieur du canal (c'est le cas de la figure), soit vers l'intérieur. Le trièdre $(\vec{ds}, \vec{dl}, \vec{d^2S})$ devant être direct, ce sens peut être obtenu en un point quelconque de la surface S :

Le déplacement est dirigé vers la gauche de l'observateur d'Ampère traversé des pieds vers la tête par le courant et regardant dans la direction de la normale positive à la surface balayée.

On pourrait croire *a priori* que la valeur du flux coupé dépend des positions intermédiaires prises par C entre les positions initiale et finale. Nous allons voir qu'il n'en est rien.

Le résultat précédemment établi se traduit par **le premier énoncé de la loi de Maxwell** :

Le travail des forces électromagnétiques appliquées à un circuit linéaire rigide, parcouru par un courant maintenu constant et se déplaçant dans un champ magnétique invariable est mesuré par le produit de l'intensité du courant par le flux d'induction magnétique coupé par le circuit au cours de son déplacement.

8-4. Deuxième énoncé de la loi de Maxwell.

Reprenons la figure 68 et considérons deux surfaces S_1 et S_2 s'appuyant sur les contours C_1 et C_2 de façon à constituer une surface fermée Σ avec la surface-canal S .

Les flux d'induction Φ_1 et Φ_2 à travers C_1 et C_2 sur lesquels un sens, celui du courant I , est fixé, sont ceux qui traversent S_1 et S_2 dont les normales positives $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont liées au sens du courant par la convention de rotation. Une de ces normales est donc dirigée vers l'extérieur de Σ_1 ($\vec{n}_1$ sur la figure), l'autre vers l'intérieur.

Exprimons la *conservation du flux d'induction à travers la surface fermée* Σ ; il faut pour cela faire choix d'une normale positive. Choisissons celle, $\vec{n}$, dirigée vers l'extérieur de Σ qui définit le signe du flux coupé φ . Comme $\vec{n}_2$ a le sens inverse de $\vec{n}$, nous devons écrire $-\Phi_2$ pour exprimer

que le flux sortant de Σ est nul :

$$\Phi_1 - \Phi_2 + \varphi = 0,$$

d'où

$$(1) \quad \varphi = \Phi_2 - \Phi_1.$$

Remarquons que si nous inversons le sens du courant nous changeons le sens de toutes les normales positives, le résultat est donc bien général.

Ce résultat est déjà intéressant, il exprime que :

Le flux d'induction coupé par un circuit rigide dans le déplacement est égal à la variation du flux d'induction à travers le circuit; comme cette variation, il ne dépend que des positions initiale et finale du circuit.

Il entraîne le deuxième énoncé de la loi de Maxwell:

Le travail des forces électromagnétiques agissant sur un circuit linéaire rigide parcouru par un courant maintenu constant et se déplaçant dans un champ magnétique invariable ne dépend que des positions extrêmes du circuit; il est mesuré par le produit de l'intensité du courant par la variation du flux d'induction magnétique extérieure à travers le circuit:

$$W = I\varphi = I(\Phi_2 - \Phi_1).$$

8-5. Expression analytique de la loi de Maxwell. Calcul des forces et des couples électromagnétiques.

Considérons une position déterminée C d'un circuit rigide dans un champ magnétique, ce circuit est soumis à un torseur de forces électromagnétiques que nous allons déterminer dans un repère $Oxyz$.

1° Résultante générale.

Faisons subir au circuit une petite translation $\vec{dx}$ suivant la direction de l'axe orienté $x'Ox$; le travail des forces électromagnétiques est

$$dW = X dx = I d\Phi_x,$$

X étant la composante suivant $x'Ox$ de la résultante générale des forces et $d\Phi_x$ la variation du flux d'induction qui résulte de cette translation. Si x est l'une des variables indépendantes qui définissent la position du circuit, les autres variables sont restées constantes au cours du déplacement et le rapport $\frac{d\Phi_x}{dx}$ est la dérivée partielle de la fonction Φ par rapport à x .

Par suite, les composantes cartésiennnes de la résultante générale $\vec{R}$ sont

$$(I) \quad \boxed{X = I \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Y = I \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad Z = I \frac{\partial \Phi}{\partial z},}$$

d'où

$$\boxed{\vec{R} = I \overrightarrow{\text{grad}} \Phi.}$$

2° Moment résultant par rapport au point O.

De même, si le circuit subit une rotation $d\alpha$ autour de l'axe $x'Ox$, le travail des forces électromagnétiques est

$$dW = \Gamma_x d\alpha = I d\Phi_\alpha.$$

Par suite, les composantes cartésiennes du moment résultant $\vec{\Gamma}$ par rapport à l'origine O (ce sont aussi les moments résultants des forces électromagnétiques par rapport aux axes) sont

$$(II) \quad \boxed{\Gamma_x = I \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}, \quad \Gamma_y = I \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \quad \Gamma_z = I \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}.}$$

Les relations (I) et (II) définissent complètement le torseur des forces électromagnétiques appliquées au circuit.

La fonction $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ est en somme une fonction potentiel puisque, dans un déplacement de C, sa variation ne dépend que des positions extrêmes du circuit parce que le flux d'induction est conservatif.

En l'absence de liaisons et d'autres forces les conditions d'équilibre du circuit s'expriment en égalant à zéro les composantes de $\vec{R}$ et de $\vec{\Gamma}$.

8-6. Cas particulier important : l'induction est uniforme.

Dans une translation de direction quelconque d'un circuit rigide dans un champ magnétique uniforme, la variation du flux d'induction et le travail des forces électromagnétiques sont nuls; il en découle que la composante de la résultante générale suivant une direction quelconque est également nulle; par suite :

La résultante générale du torseur des forces électromagnétiques appliquées à un circuit rigide dans un champ magnétique uniforme est nulle; le torseur est équivalent à un couple.

Déterminons ce couple par son vecteur moment $\vec{\Gamma}$ (fig. 69). Nous avons vu (7-5, 2°) qu'il est toujours possible de définir le vecteur surface

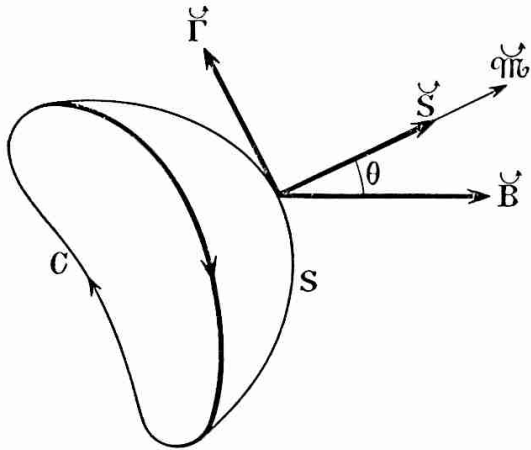


FIG. 69.

S associé à un circuit C, la surface S s'appuyant sur C pouvant être quelconque.

La surface S choisie pour calculer le flux d'induction Φ peut aussi être quelconque puisque *le flux d'induction est conservatif*. Nous avons donc, en tenant compte de l'uniformité de l'induction,

$$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \int_s d\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{S}.$$

Le vecteur

$$\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}$$

associé au circuit est *le vecteur moment magnétique du circuit*. Nous avons, W étant homogène à un travail,

$$W = I\Phi = \vec{B} \cdot I\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{\mathcal{M}} = B\mathcal{M} \cos \theta,$$

avec $\theta = (\vec{B}, \vec{S})$.

Le système des forces étant équivalent à un couple, son axe $\vec{\Gamma}$ peut être déterminé à l'aide d'une rotation $d\theta$ autour d'un axe quelconque. Prenons pour celui-ci la normale au plan des vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{S}$; le vecteur $\vec{\Gamma}$ est alors porté par cette normale.

Le travail du couple pour la rotation $d\theta$ est dans ces conditions

$$dW = I d\Phi = -B\mathcal{M} \sin \theta d\theta = \Gamma d\theta,$$

d'où

$$\Gamma = -B\mathcal{M} \sin \theta.$$

Le signe moins exprime que le couple tend à amener le vecteur $\vec{S}$ sur le vecteur $\vec{B}$ et par suite que le sens de $\vec{\Gamma}$ est tel que le trièdre $(\vec{S}, \vec{B}, \vec{\Gamma})$ soit direct.

Nous voyons, compte tenu de l'expression du module de Γ , que **le vecteur moment du couple est défini par la relation vectorielle**

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = I\vec{S} \wedge \vec{B}.}$$

Nous retrouvons **la formule très importante** établie précédemment (7-5) à partir de la loi de Laplace; elle fait intervenir **le vecteur essentiel**

$I\vec{S}$, **moment magnétique d'un circuit linéaire rigide**, produit du scalaire positif intensité de courant I par le vecteur surface associé au circuit, ce vecteur ne dépendant que des paramètres géométriques qui définissent le circuit, à ceci près que **son sens est lié à celui du courant par la convention de rotation du trièdre direct**.

L'expression du module du moment magnétique est particulièrement simple dans le cas d'un circuit plan ou d'une bobine plate pour laquelle

$$\mathcal{M} = NSI,$$

expression également applicable à un solénoïde (7-6).

8-7. Règle du flux maximal.

Supposons qu'un circuit rigide C ne soit soumis qu'aux forces électromagnétiques qui résultent d'une induction magnétique extérieure et, éventuellement, à des liaisons qui limitent ses déplacements, il est par exemple assujéti à tourner sans glissement autour d'un axe fixe.

Il n'est pas en équilibre dans une position quelconque, il va se déplacer sous l'action des forces électromagnétiques dont le travail ne peut qu'être positif. D'après la loi de Maxwell, le flux d'induction à travers le circuit ne peut qu'augmenter, une position d'équilibre stable correspondant obligatoirement à un maximum du flux compatible avec les liaisons.

Ce résultat se traduit par la **règle du flux maximal**:

Un circuit rigide est en équilibre stable dans un champ magnétique invariable si, compte tenu des liaisons qui lui sont imposées, le flux d'induction magnétique qui le traverse est maximal.

Considérons, par exemple une spire plane C de surface S parcourue par le courant constant I , mobile autour d'un de ses diamètres que nous supposons, pour simplifier, perpendiculaire aux lignes d'induction d'un champ uniforme B . La seule position d'équilibre stable est celle pour laquelle le plan du circuit est normal à B qui le traverse de sa face sud vers sa face nord. Les vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}$ sont alors colinéaires et le flux d'induction à travers C , égal à BS , est maximal. Écarté de cette position le circuit oscille; nous avons déjà étudié ces oscillations dans le cas d'un solénoïde (7-6).

Si nous retournons la spire face pour face, la nouvelle position est bien une position d'équilibre puisque le couple agissant est nul, mais l'équilibre, pour lequel Φ est minimal et égal à $-BS$, est instable parce

qu'un faible déplacement angulaire fait naître un couple qui l'écarte encore plus de la position initiale. Le fait est général :

Compte tenu des liaisons, les positions de flux d'induction minimal sont des positions d'équilibre instable.

Supposons que, par suite des liaisons, la position du circuit ne dépende que d'un seul paramètre x , correspondant à une translation, ou α , correspondant à une rotation, la ou les positions d'équilibre correspondent à $\frac{d\Phi}{dx} = 0$ ou à $\frac{d\Phi}{d\alpha} = 0$; il reste à étudier la stabilité des équilibres ainsi déterminés.

D'une façon générale un circuit rigide C, une spire par exemple, placé dans un champ magnétique d'un autre circuit C', fixe celui-ci, s'oriente de façon à se disposer le plus possible normalement aux lignes d'induction et se déplace vers les régions où le champ est intense, c'est-à-dire vers le circuit C'. Compte tenu des liaisons imposées à C celui-ci tend à occuper une position pour laquelle les surfaces des deux circuits C et C' sont les plus voisines possible, leurs normales positives ayant le même sens; elles pourront même être confondues si les deux circuits sont plans.

De nombreuses expériences illustrent la règle du flux maximal tout en mettant en évidence les répulsions entre faces de même nom et les attractions entre faces de noms contraires. Par exemple deux bobines plates mobiles (fig. 70) viennent s'appliquer l'une contre l'autre, leurs

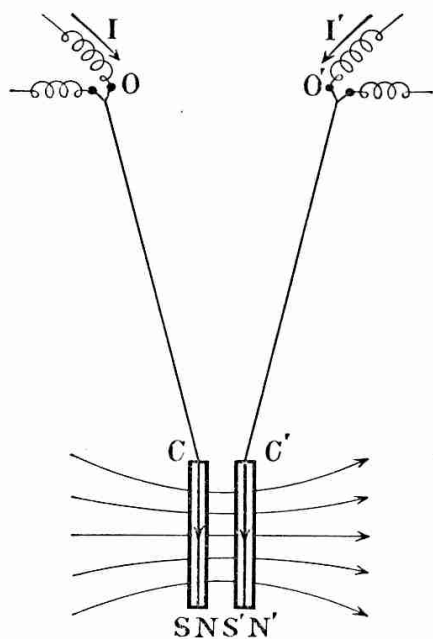


FIG. 70.

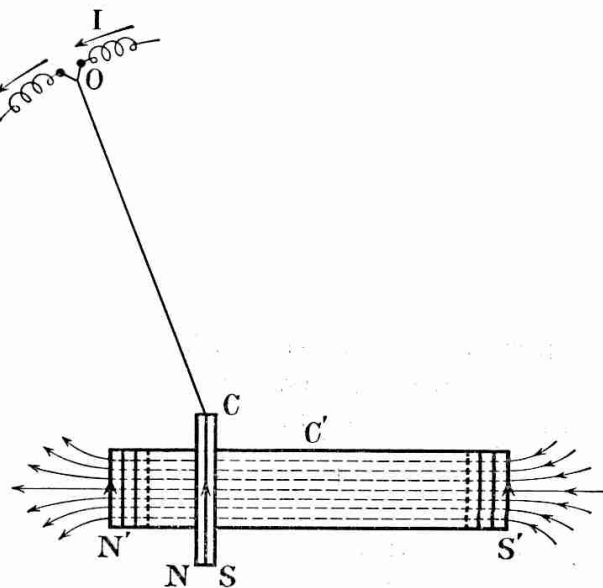


FIG. 71.

faces de même nom se confondant. Une bobine plate s'embroche dans un solénoïde (fig. 71) de façon à être traversée, de sa face sud vers

sa face nord, par l'ensemble du faisceau des lignes d'induction du solénoïde.

Ce que nous avons dit pour le circuit C mobile mis en présence d'un circuit fixe C' reste valable si nous inversons leurs rôles, C devenant fixe et C' mobile, ou même encore lorsque les deux circuits sont mobiles. Leurs positions d'équilibre correspondent au flux maximal dans l'un et l'autre circuit, compte tenu des liaisons auxquelles ils sont soumis. En l'absence d'autres forces les torseurs des forces électromagnétiques et des forces de liaison agissant sur les circuits sont équivalents à zéro.

8-8. Circuit linéaire déformable. Inductance propre d'un circuit.

Nous avons vu (8-3) que si le circuit est déformable il faut tenir compte non seulement du champ magnétique extérieur mais aussi de son champ propre. Le flux balayé au cours d'une déformation est la somme de deux termes se rapportant l'un au flux appliqué, l'autre au flux propre. Le problème est compliqué en général. Il devient beaucoup plus facile en l'absence de champ extérieur.

Plaçons-nous dans ce cas. Nous avons déjà vu (4-5) que *le flux d'induction propre Φ est toujours positif et proportionnel à l'intensité du courant*, donc de la forme

$$\Phi = LI.$$

L est **l'inductance propre du circuit** (Chap. XIII), **grandeur toujours positive**; nous verrons qu'elle ne dépend que de la forme et des dimensions du circuit linéaire considéré et de la nature du milieu dans lequel celui-ci est placé (intervention de μ_0 pour le vide).

Dans le système S.I. elle s'exprime en **webers par ampère** ($\text{Wb} \cdot \text{A}^{-1}$) ou **henrys** (H) :

Un circuit linéaire dont l'inductance propre est 1 henry est traversé par un flux d'induction propre de 1 weber lorsqu'il est parcouru par un courant constant de 1 ampère.

L'inductance propre (nous dirons plus simplement inductance) d'un circuit rigide dans le vide est bien déterminée; elle est par contre variable dans le cas d'un circuit souple. En l'absence de toute action extérieure, le travail des forces électromagnétiques ne peut être que positif au cours d'une déformation, de même que le flux coupé. Par suite, l'inductance propre du circuit ne peut qu'augmenter; ainsi :

Un circuit linéaire seul dans le vide est soumis à des forces électromagnétiques qui tendent à le déformer de façon que son inductance soit maximale.

Une ligne d'induction traversant la surface du circuit suivant la normale positive, il en découle que Φ et L acquièrent leurs valeurs maximales lorsque la surface du circuit est elle-même maximale; par suite, si le circuit est parfaitement souple et non soumis à des liaisons, il prend la forme d'un courant circulaire.

Nous venons de définir la grandeur inductance propre L d'un circuit linéaire *indépendamment de tout phénomène d'induction magnétique* (Chap. XIII). D'après cette définition elle se détermine en calculant le flux d'induction propre Φ à travers le circuit. Ce calcul résulte de la connaissance du champ magnétique.

Indiquons, pour donner une idée de l'importance du potentiel-vecteur de l'induction dont nous avons fait peu d'usage, que l'application du **théorème de Stokes-Ampère** :

La circulation d'un vecteur le long d'une courbe fermée C est égale au flux de son rotationnel à travers une surface quelconque S limitée par C ,

permet le calcul de Φ et par suite de L par l'intermédiaire de ce potentiel-vecteur. Nous avons en effet

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A},$$

$$\Phi = LI = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{l}.$$

L'inductance propre d'un circuit étant connue, les formules générales (I) et (II) du paragraphe 8-5 déterminent le torseur des forces électromagnétiques (forces intérieures) qui agit sur un circuit *parcouru par un courant d'intensité constante* seul dans le vide. Nous avons

$$X = I \frac{\partial L}{\partial x}, \quad Y = I \frac{\partial L}{\partial y}, \quad Z = I \frac{\partial L}{\partial z},$$

$$\Gamma_x = I \frac{\partial L}{\partial \alpha}, \quad \Gamma_y = I \frac{\partial L}{\partial \beta}, \quad \Gamma_z = I \frac{\partial L}{\partial \gamma}.$$

En attendant l'étude des phénomènes d'induction électromagnétique où l'inductance propre joue un rôle essentiel, nous donnons déjà sous forme d'exercice un exemple de calcul de L dans un cas simple.

Exercice.

Exercice 13. — On considère une spire circulaire de rayon a , située dans le vide et parcourue par un courant I . Calculer son inductance propre L en admettant que l'induction qu'elle produit en tout point de son plan et intérieur à la spire est uniforme et a même intensité qu'au centre.

Même question pour une bobine plate comprenant N spires identiques à la précédente.

Application : $a = 10 \text{ cm}$, $N = 100$, $I = 1 \text{ A}$.

L'induction au centre de la spire est

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a}.$$

Dans l'hypothèse de l'énoncé le flux d'induction propre à travers la spire est

$$\Phi = \pi a^2 B = \frac{I}{2} \mu_0 \pi a I = 2\pi^2 \cdot 10^{-7} a I = 1,97 \cdot 10^{-8} \text{ weber};$$

par suite son inductance propre est

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{I}{2} \mu_0 \pi a = 1,97 \cdot 10^{-8} \text{ henry} \simeq 2 \cdot 10^{-8} \text{ H},$$

et, dans le cas d'une bobine plate,

$$L' = NL = 2 \cdot 10^{-6} \text{ henry}.$$

CHAPITRE IX

LES AIMANTS PERMANENTS DANS LE VIDE. MESURES MAGNÉTIQUES

I. — LES ACTIONS EXERCÉES ET SUBIES PAR LES AIMANTS PERMANENTS

9-1. Aimantation temporaire et aimantation permanente.

L'expérience montre qu'une aiguille de fer doux disposée parallèlement aux lignes d'induction d'un champ magnétique uniforme acquiert les propriétés d'un aimant dont l'axe magnétique a la direction et le

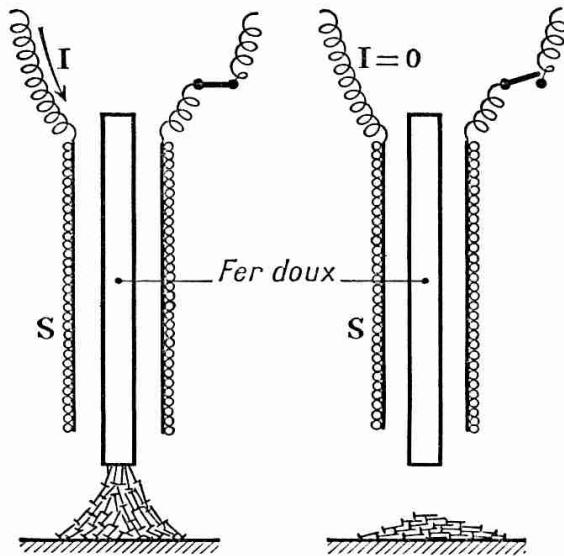


FIG. 72.

sens de l'« induction magnétisante » : son aimantation est dite aimantation induite. Cette aimantation du fer doux explique qu'il soit possible d'obtenir des spectres magnétiques à l'aide de la limaille de fer (1-3). Toutefois l'aiguille cesse d'être un aimant dès qu'elle est soustraite à l'action de l'induction magnétisante, par exemple lorsqu'on supprime le courant dans le solénoïde S qui le crée (fig. 72) : son aimantation est temporaire.

Par contre, une aiguille d'acier trempé, soumise au même traitement, reste aimantée dans les mêmes conditions, elle conserve une aimantation rémanente et constitue

un aimant permanent. Placée seule dans le vide, elle crée un champ magnétique que l'on peut matérialiser par un spectre magnétique; dans le champ magnétique d'un courant ou d'un autre aimant, elle est soumise à des forces, par exemple elle s'oriente dans le champ magnétique terrestre.

D'une façon plus générale, un aimant permanent produit dans le vide un champ magnétique qui reste invariable dans le temps, et cette propriété subsiste lorsque l'aimant est soumis, puis soustrait à un champ magnétique extérieur. On dit aussi que *son aimantation est rigide*. Nous allons caractériser un aimant par le vecteur moment magnétique qui lui est lié; nous pouvons donner la définition suivante :

Un aimant permanent est un aimant dont le vecteur moment magnétique est invariable dans le temps.

Pratiquement, un aimant n'est permanent que si les actions magnétiques qu'on lui fait subir ne sont pas trop intenses; c'est ce que nous supposerons dans ce chapitre et dans le suivant.

9-2. Aimants et courants. Conception ampérienne des aimants.

Si l'on fait abstraction de leur cause, rien ne distingue le champ magnétique d'un aimant de celui d'un courant. Tous deux sont caractérisés en un point par un vecteur axial, le vecteur induction magnétique $\vec{B}$. Par exemple, les spectres magnétiques d'un aimant droit et d'un solénoïde présentent une grande similitude de structure d'ensemble (fig. 75), avec cependant la différence essentielle qu'il n'est évidemment pas possible de réaliser le spectre à l'intérieur de l'aimant.

Les analogies ne sont pas moins évidentes au point de vue des actions subies. Dans un champ magnétique uniforme, un aimant, comme un courant, est soumis à un couple; dans les deux cas il est possible de définir et de déterminer un vecteur axial, le vecteur moment magnétique $\vec{M}$, représentatif des deux objets pour le calcul des actions subies.

L'objet élémentaire de l'étude des actions entre courants est une boucle ampérienne ou un ampérien; il n'est évidemment pas possible de le réduire à un objet plus simple puisque un circuit électrique forme un tout insécable. Par contre, on peut tenter de réduire l'aimant élémentaire, que nous avons appelé magnétomètre (1-1), à deux objets plus simples, un demi-aimant doté d'un pôle nord, un second demi-aimant doté d'un pôle sud.

L'expérience de l'aimant brisé montre que cela est impossible. Si l'on

brise une aiguille aimantée SN (fig. 73), les deux tronçons sont encore des aimants S_1N_1 et S_2N_2 , et ceux-ci donnent de

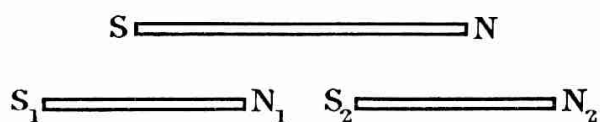


FIG. 73.

nouveaux aimants par fragmentation. Les pôles intermédiaires disparaissent et l'aimant primitif est reconstitué

si l'on juxtapose les morceaux en les disposant dans l'ordre où ils ont été obtenus :

Il est donc impossible d'isoler des pôles magnétiques.

Si, par souci de généralisation, nous voulons élaborer une doctrine qui régit aussi bien les actions entre courants, entre aimants, qu'entre courants et aimants, nous disposons de deux possibilités : prendre pour objet élémentaire unique soit l'aimant élémentaire, soit l'ampérien. La première conduit à considérer un aimant comme formé d'un très grand nombre de petits aimants orientés dans son volume et un circuit linéaire comme équivalent à une répartition d'aimants élémentaires orientés normalement à sa surface. La seconde remplace un circuit linéaire par une nappe d'ampériens (1-9) et un aimant par une répartition volumique d'ampériens.

Les deux conceptions ne sont toutefois pas très différentes puisque l'objet élémentaire est défini de toute façon par le vecteur axial $d\vec{M}$. Elles sont toutes deux « ampériennes » en ce sens qu'elles ne nécessitent ni l'une ni l'autre l'introduction de masses magnétiques (nord et sud), introduction qui correspondrait à une conception « coulombienne » que nous rejetons parce qu'elle est en contradiction avec la nature des phénomènes comme le montre l'expérience de l'aimant brisé.

Nous retiendrons la deuxième possibilité comme « plus ampérienne » pour les raisons suivantes :

Il est possible, grâce à l'artifice de la formule d'Ampère (2-1), d'étudier les actions exercées et subies par un circuit linéaire sans avoir à considérer celui-ci comme une nappe d'ampériens. L'étude des actions entre courants étant faite, il est logique de mettre à profit les résultats obtenus pour baser celle des actions entre aimants et entre courants et aimants sur l'hypothèse ampérienne :

Un aimant est formé d'une répartition volumique ordonnée d'ampériens dans le vide à l'intérieur de sa surface limitative.

Indépendamment de sa commodité, un autre argument joue en faveur du plan suivi. Si assimiler un circuit linéaire à un aimant est très artificiel, par contre, on peut se demander ce que donnerait l'expérience de l'aimant brisé poursuivie jusqu'à l'échelle atomique. Il ne

semble pas possible de répondre d'une façon certaine à cette question dans l'état actuel de nos connaissances; il est toutefois plausible d'admettre que l'objet ultime est *un courant particulière* résultant du mouvement d'un électron sur son orbite.

Cette hypothèse n'est d'ailleurs pas strictement nécessaire, les dimensions d'un aimant élémentaire et celles de l'ampérien pouvant être infiniment petites à l'échelle macroscopique tout en restant très grandes à l'échelle atomique. Par suite *l'hypothèse d'équivalence ampérienne*, basée sur les résultats de l'expérience, n'est pas nécessairement une tentative d'explication des phénomènes à l'échelle atomique, nous la considérons comme *une hypothèse commode de travail*.

9-3. Caractères du champ magnétique d'un aimant dans le vide.

L'ampérien équivalent à un aimant élémentaire est en fait *une boucle de courant fictif* qui, au contraire d'un courant réel, se maintient sans consommation d'énergie. L'aimantation étant rigide, nous pouvons supposer que tous les ampériens sont identiques, parcourus par le même courant fictif I_a .

Dans la conception ampérienne le milieu aimanté est remplacé par le vide dans lequel sont distribués les ampériens. Si leur distribution est absolument quelconque, le milieu n'est pas aimanté par suite de la compensation des moments magnétiques élémentaires; si le milieu est aimanté, la distribution est ordonnée.

Si nous nous limitons au cas le plus simple, celui des aimants droits ou barreaux aimantés, il est possible de définir et de mesurer le vecteur

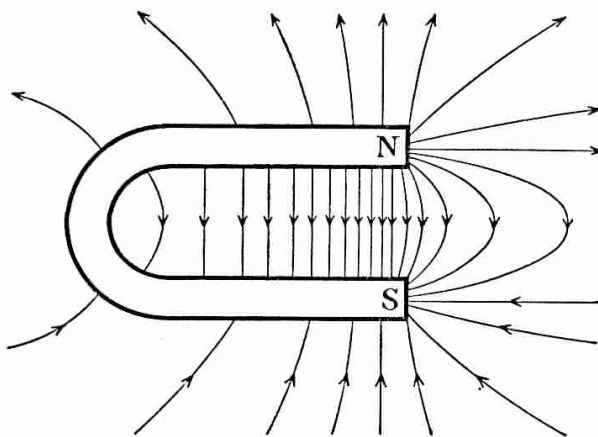


FIG. 74.

moment magnétique $\mathfrak{M}$ de l'aimant, résultante des moments magnétiques des ampériens qui le constituent. Indiquons toutefois, parce que nous aurons à l'utiliser, qu'un aimant en U présente la propriété de créer un champ magnétique à peu près uniforme dans son entrefer, ainsi que le révèle son spectre magnétique (fig. 74).

Dans ce chapitre nous ne nous préoccupons du milieu aimanté que pour imaginer,

dans le seul cas des aimants droits, une répartition convenable d'ampériens

qui conduise à des résultats conformes à l'expérience par application des lois de l'électromagnétisme. De cette restriction découlent **les propriétés essentielles du champ magnétique des aimants dans le vide :**

a) Le flux d'induction magnétique est conservatif.

N'ayant pas défini le vecteur induction en un point du milieu aimanté, la relation locale

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

doit être restreinte aux points situés dans le vide en dehors des aimants.

b) La circulation du vecteur induction magnétique le long d'un parcours fermé entièrement dans le vide est nul.

Cette propriété est une conséquence du théorème d'Ampère puisque le trajet considéré n'enlace aucun courant, réel ou fictif.

c) Le vecteur induction magnétique dans le vide dérive d'un potentiel scalaire continu et uniforme.

Cette propriété découle de la précédente. Le potentiel scalaire en un point est la somme algébrique des potentiels produits par les ampériens qui constituent l'aimant; il est uniforme (à détermination unique) puisque nous nous interdisons de considérer des parcours pénétrant dans l'aimant (enlaçant des ampériens).

9-4. Champ magnétique des aimants. Action d'un champ magnétique uniforme sur un aimant droit.

1° Champ magnétique d'un ampérien.

$d\vec{M}$ étant le moment magnétique d'un ampérien, nous avons établi (6-6) l'expression

$$dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{M} \cdot \vec{u}}{r^2}$$

du potentiel scalaire dont dérive le vecteur induction magnétique

$$d\vec{B} = - \text{grad } dV.$$

Ces expressions déterminent $d\vec{B}$, par exemple par ses composantes radiale et tangentielle en coordonnées polaires; elles sont valables

pour une aiguille aimantée en des points dont la distance est très grande par rapport à la longueur de l'aiguille.

2° Aimant solénoïdal.

Nous allons maintenant envisager le cas important d'un aimant ayant la forme d'un barreau cylindrique de section circulaire S et de longueur l . Nous supposons qu'il est parfaitement homogène et que son aimantation permanente résulte de l'action d'un champ magnétique uniforme qui s'est exercée parallèlement à son axe.

Dans ces conditions nous pouvons faire les hypothèses suivantes :

Les propriétés magnétiques de l'aimant sont de révolution autour de son axe et les ampériens qui le constituent, uniformément répartis dans le volume du barreau, sont dans des plans normaux à l'axe.

Considérons (fig. 75) une tranche (disque circulaire) d'épaisseur dx

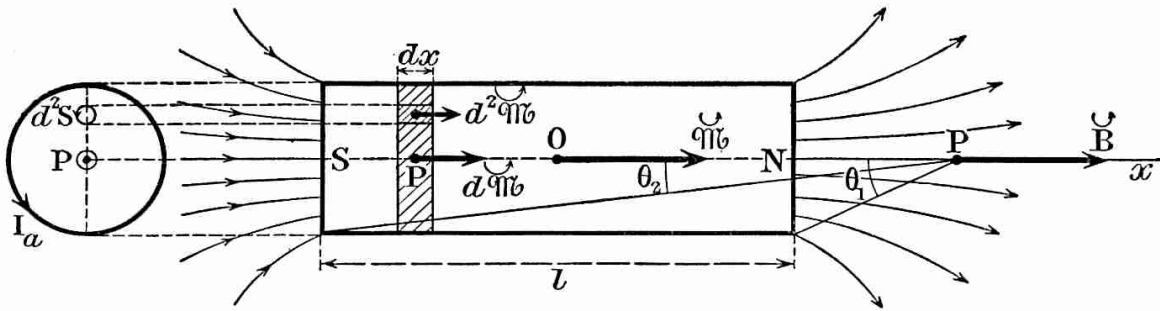


FIG. 75.

et de volume $dv = S dx$. Elle comprend un ensemble de solénoïdes ampériens de longueur dx , de surface d^2S et de volume

$$d^2v = dx d^2S;$$

leur moment magnétique, parallèle à l'axe, est

$$d^2\mathcal{M} = nI_a dx d^2\hat{S},$$

n étant le nombre d'ampériens par unité de longueur.

Le moment magnétique de cet ensemble,

$$d\mathcal{M} = nI_a dx \iint_S d^2\hat{S} = n dx I_a S,$$

est le même que celui d'un courant I_a circulant dans $n dx$ spires sur le contour moyen de la tranche.

Le barreau équivaut donc, pour les points extérieurs, à un solénoïde formé de courants circulaires régulièrement répartis (n spires

par unité de longueur et $N = nl$ spires en tout) sur le cylindre de longueur l et parcourus par le courant I_a ; son moment magnétique est

$$\mathfrak{M} = nI_a l \vec{S} = NI_a \vec{S}.$$

Comme l'induction magnétique se calcule à partir des ampériens (par application de la loi de Biot et Savart), le champ magnétique de l'aimant est, en un point extérieur, celui du solénoïde équivalent. D'où le nom d'*aimant solénoïdal* donné à un tel aimant.

En un point M de l'axe extérieur à l'aimant le vecteur induction est dirigé suivant cet axe (on pouvait s'y attendre par raison de symétrie) et son module a pour expression, $V = Sl$ étant le volume de l'aimant solénoïdal,

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I_a |\cos \theta_2 - \cos \theta_1| = \mu_0 \frac{\mathfrak{M}}{V} |\cos \theta_2 - \cos \theta_1|.$$

3° Aimants droits réels.

En fait, au voisinage des extrémités, les ampériens sont inclinés par rapport aux plans normaux à l'axe, c'est ce que traduit l'épanouissement des lignes d'induction au départ des plages polaires. Le moment magnétique de l'aimant est cependant bien défini par la somme des moments magnétiques des ampériens:

$$\mathfrak{M} = \iiint_v d^2 \mathfrak{M},$$

ce résultat restant valable quelle que soit la forme de la section droite de l'aimant.

Quant à l'induction produite en un point par un aimant droit, on peut utiliser les expressions valables pour un ampérien lorsque le point est éloigné, sinon il faut employer des formules plus rigoureuses.

4° Aimant droit dans une induction uniforme.

Chaque ampérien est soumis à un couple de moment

$$I_a d^2 \vec{S} \wedge \vec{B} = d^2 \mathfrak{M} \wedge \vec{B};$$

l'aimant est soumis au couple

$$\vec{\Gamma} = \iiint_v d^2 \mathfrak{M} \wedge \vec{B} = \mathfrak{M} \wedge \vec{B}.$$

Cette relation montre que le vecteur $\mathfrak{M}$ est bien défini, expérimentalement en quelque sorte, par le moment du couple, même si l'aimant n'est pas solénoïdal.

9-5. Actions entre aimants, entre aimants et courants.

Un aimant droit se comportant comme une bobine parcourue par un courant, aussi bien pour les actions exercées que pour les actions subies, il est possible de prévoir, au moins qualitativement, les actions qui s'exercent entre aimants et entre aimants et courants. Les faces polaires de l'aimant jouent en quelque sorte un rôle semblable à celui des faces terminales d'un solénoïde :

Placé dans le champ magnétique d'un autre aimant ou d'un courant, un aimant est soumis à un torseur de forces magnétiques qui tend à l'orienter et à le déplacer de façon que ses plages soient traversées par le flux d'induction maximal.

Bien entendu des liaisons éventuelles peuvent limiter les déplacements de l'aimant. Ainsi s'expliquent les règles bien connues d'attraction entre faces de noms contraires et de répulsion entre faces de même nom, le mot face étant aussi bien valable pour un aimant que pour un courant; elles se vérifient par des expériences très simples à réaliser.

II. — CHAMP MAGNÉTIQUE TERRESTRE. MESURES MAGNÉTIQUES

9-6. Généralités.

Nous appelons ici mesures magnétiques les mesures d'induction magnétique B et de moment magnétique $\mathcal{M}$ d'aimants. Elles ne font qu'utiliser les expressions de l'induction produite par un aimant droit et du moment du couple qu'il subit lorsqu'on le place dans un champ magnétique.

Les mesures magnétiques essentielles sont celles du produit $\mathcal{M}B$ par une méthode dynamique et du rapport $\frac{\mathcal{M}}{B}$ par une méthode statique; cette dernière utilise un appareil très simple, *le magnétomètre*. Les méthodes se prêtent à des mesures absolues comme à des mesures relatives.

Une difficulté résulte de l'impossibilité de soustraire les aimants à l'action du champ magnétique terrestre.

9-7. Champ magnétique terrestre (fig. 76).

L'induction magnétique terrestre est définie en chaque point par

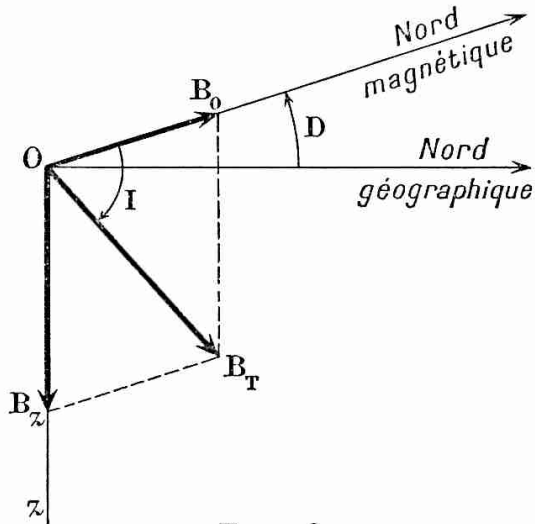


FIG. 76.

le vecteur $\vec{B}_T$. Le plan vertical qui contient ce vecteur est le *plan méridien magnétique* au point O considéré, plan également défini par la verticale Oz et la composante horizontale B_0 de B_T .

Le plan méridien géographique étant le plan qui contient le point O et la ligne des pôles, la *déclinaison* D est l'angle des deux plans méridiens. Elle est *orientale* ou *occidentale* suivant que le méridien magnétique est à l'est ou à l'ouest du méridien géographique.

L'*inclinaison* I est l'angle que fait le vecteur B_T avec le plan horizontal,

elle est considérée comme positive quand B_T est au-dessous du plan horizontal.

Déclinaison et inclinaison déterminent la direction de B_T . On ne mesure pas en général B_T mais sa projection horizontale B_0 ; on a évidemment

$$B_0 = B_T \cos I.$$

Nous allons nous borner à donner quelques indications sur la détermination de la déclinaison qui fixe la direction de la composante B_0 ; elle utilise une *boussole de déclinaison*. Cet appareil est constitué par une aiguille aimantée SN (fig. 77 a) mobile autour d'un axe vertical dans le plan d'un cercle gradué C. L'axe de l'aiguille dans sa position d'équilibre définit en principe la direction de B_0 par rapport au méridien géographique $N_g S_g$ que l'on détermine par des observations astronomiques à l'aide d'un théodolite associé à la boussole.

On évite les erreurs systématiques en effectuant deux corrections :

a) Correction de centrage.

L'erreur de centrage résulte de ce que l'axe de rotation ne coïncide pas en général avec l'axe du cercle gradué. On l'élimine en visant, à l'aide d'un microscope, les deux extrémités N et S. On prend pour D la demi-somme des arcs NN_g et SS_g . Cette correction est d'ailleurs faite chaque fois qu'on utilise un cercle gradué.

b) *Correction de non-coïncidence des axes.*

Quelles que soient les précautions prises dans la fabrication de l'aiguille aimantée, son axe magnétique ne coïncide pas rigoureusement avec son axe géométrique. Pour éliminer l'erreur qui en résulterait

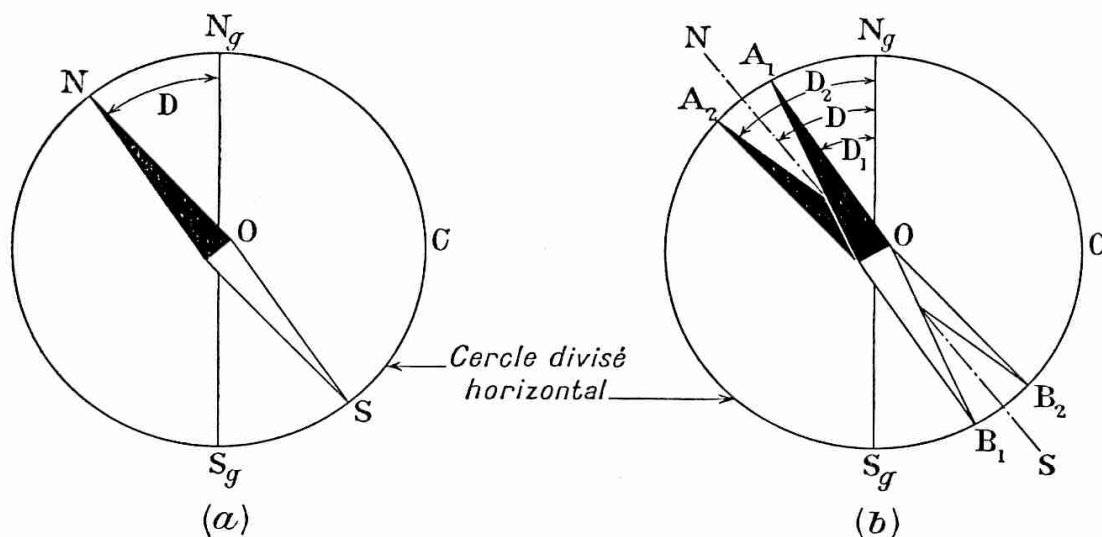


FIG. 77.

on effectue une première mesure D_1 , puis une seconde D_2 après avoir retourné l'aiguille face pour face. L'axe géométrique prend une position A_2B_2 symétrique de A_1B_1 par rapport à SN , direction de l'axe magnétique qui reste fixe (fig. 77 b). On a

$$D = \frac{1}{2} (D_1 + D_2).$$

La précision peut atteindre $\frac{1}{10}$ de minute.

Les boussoles marines ou compas servent à déterminer la direction du nord géographique, connaissant la déclinaison. On compense l'induction magnétique produite par les masses de fer du navire, en disposant convenablement des aimants dans le voisinage de la boussole (compensation des compas).

L'étude complète du champ magnétique terrestre est très complexe du fait que le vecteur $\vec{B}_T$ varie en direction, sens et grandeur, non seulement dans l'espace mais aussi dans le temps.

On trouve dans l'annuaire du Bureau des Longitudes des cartes représentant les variations de la déclinaison et de l'inclinaison. En France la déclinaison est occidentale et sa valeur était de $6^\circ 30'$ en 1959 à Paris, l'inclinaison y était de 64° . Au pôle magnétique nord l'inclinaison est de $+90^\circ$, au pôle magnétique sud elle est de -90° : la boussole ne s'oriente plus aux pôles.

Les éléments magnétiques terrestres varient avec le temps, ils subissent

des variations périodiques, séculaires et diurnes et même des variations accidentelles, dues à des orages magnétiques, phénomènes qui semblent liés à l'apparition de taches solaires.

La composante horizontale B_0 se détermine par les méthodes que nous allons étudier mais aussi par des méthodes utilisant les phénomènes d'induction. Donnons, pour fixer un ordre de grandeur, la valeur approchée de B_0 à Paris :

$$B_0 \simeq 2 \cdot 10^{-5} \text{ tesla} = 0,2 \text{ gauss.}$$

9-8. Magnétomètre. Mesures relatives d'inductions.

Nous venons de voir que la boussole de déclinaison est utilisée à la détermination de la direction de la composante horizontale B_0 de l'induction terrestre; d'une façon plus générale un magnétomètre permet de mesurer l'angle que font entre elles les composantes horizontales d'inductions magnétiques dont l'une peut être B_0 .

Description.

Un très petit aimant cylindrique sn (fig. 78), dont la longueur est

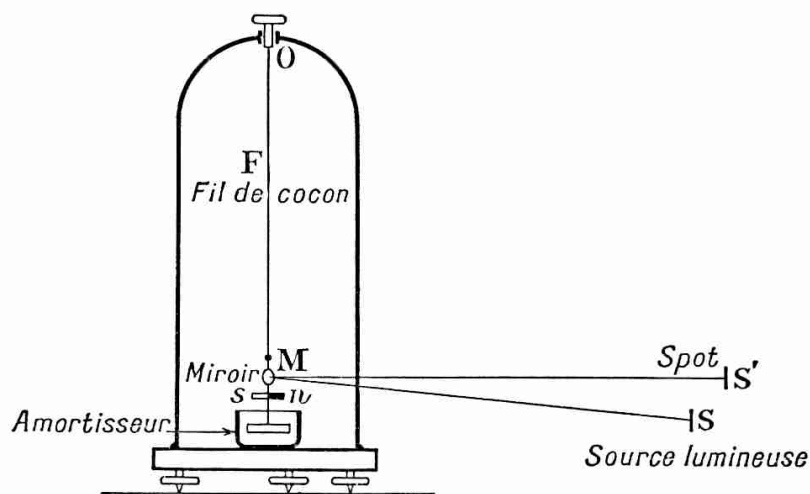


FIG. 78.

de l'ordre du centimètre, est suspendu par un fil sans torsion (fil de cocon) F de façon que son axe magnétique Ab s'oriente suivant la composante horizontale de l'induction résultante au point où elle est placée, induction que l'on peut admettre comme uniforme dans le petit espace où elle se déplace.

Un petit miroir concave m , éclairé par une source lumineuse S et solidaire de l'aimant, permet de déterminer les rotations α de l'équipage mobile ainsi constitué, par la mesure des déplacements du spot sur une échelle placée à une distance égale au rayon du miroir. L'appareil comporte un amortisseur, qui peut être tout simplement un léger carton sur lequel est fixé l'aimant; les mesures sont ainsi rendues plus rapides par suppression des oscillations. L'appareil est dans une cage fermée qui le protège contre les courants d'air. Le dispositif ne comporte aucune pièce contenant du fer.

Mesure.

Soumis à la seule induction terrestre, l'aimant s'oriente suivant B_0 ; l'action d'une induction horizontale B perpendiculaire à B_0 (fig. 79) le fait tourner de l'angle α tel que

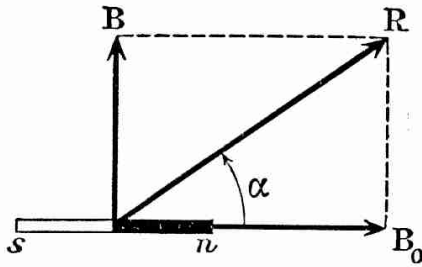


FIG. 79.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B}{B_0}.$$

Si l'on fait agir B' , toujours perpendiculaire à B_0 , la rotation est α' telle que

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{B'}{B_0};$$

par suite

$$\frac{B'}{B} = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Le magnétomètre permet donc d'effectuer des mesures relatives d'inductions magnétiques.

9-9. Méthode statique. Mesure de $\frac{\mathcal{M}}{B}$.

Un magnétomètre étant soumis à la seule action de la composante horizontale B_0 de l'induction magnétique terrestre (position de zéro), on fait agir sur lui, normalement à B_0 , l'induction B_1 ou B_2 produite par un aimant droit de moment magnétique $\mathcal{M}$; B_1 et B_2 sont les inductions dans les positions de Gauss de l'aimant placé à une distance r , grande par rapport à ses dimensions et, *a fortiori*, grande par rapport à la longueur de l'aiguille du magnétomètre.

Pour l'une et l'autre de ces positions, la mesure de la rotation, α_1 ou α_2 , conduit à l'expression du rapport $\frac{\mathcal{M}}{B_0}$.

1° Première position de Gauss.

L'aiguille du magnétomètre étant en O_1 (fig. 80) orientée suivant B_0 , l'aimant SN de longueur l est disposé en O ($O_1O = r$) de façon que son axe magnétique soit normal à B_0 . O_1 est alors dans la première position de Gauss de l'aimant qui y produit l'induction

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M}}{r^3}.$$

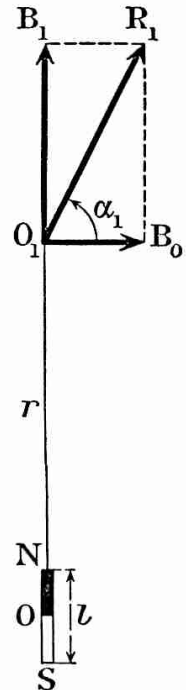


FIG. 80.

On mesure la rotation α_1 de l'aiguille du magnétomètre à partir

de sa première position; on a

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B_1}{B_0} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathcal{M}}{B_0} \frac{1}{r^3},$$

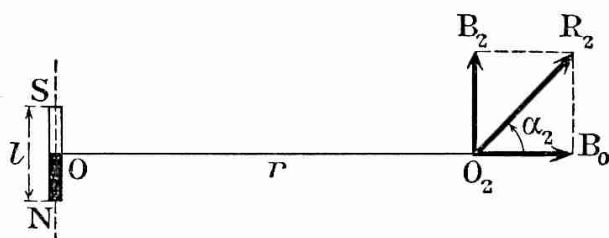
d'où

(1)

$$\frac{\mathcal{M}}{B_0} = \frac{2\pi}{\mu_0} r^3 \operatorname{tg} \alpha_1.$$

2° Deuxième position de Gauss.

L'aimant SN est maintenant disposé en O (fig. 81) de façon à produire en O_2 l'induction B_2 . L'aiguille du magnétomètre tourne de l'angle α_2 tel que



$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{B_2}{B_0}.$$

Nous avons

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}}{r^3},$$

FIG. 81.

et par suite

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}}{B_0} \frac{1}{r^3},$$

d'où

(2)

$$\frac{\mathcal{M}}{B_0} = \frac{4\pi}{\mu_0} r^3 \operatorname{tg} \alpha_2.$$

9-10. Applications de la méthode statique.

1° Mesures relatives de moments magnétiques.

Raisonnons pour la première position de Gauss et utilisons la formule (1) du paragraphe précédent, des expériences plus précises nécessitant la détermination de termes correctifs. Faisons agir successivement sur le magnétomètre deux aimants droits de moments magnétiques $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ à la même distance r et mesurons les rotations correspondantes α_1 et α_2 de l'aiguille aimantée; on a

$$\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2}.$$

On obtiendrait la même relation pour la deuxième position de Gauss en utilisant la formule approchée (2).

2° Vérification de $\frac{B_1}{B_2} \simeq 2$.

Les relations obtenues précédemment peuvent s'écrire, en posant $A = \frac{\mathcal{M}}{B_0}$,

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 2 \frac{A}{r^3}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{A}{r^3}.$$

Gauss a vérifié, avec une précision de l'ordre du millièrne, en utilisant des distances r atteignant 4 mètres, que pour les deux positions de Gauss on avait, pour la même valeur de r ,

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} \simeq 2.$$

3° Mesures absolues.

L'emploi du magnétomètre permet donc d'effectuer des mesures relatives d'inductions et de moments magnétiques. Nous verrons bientôt que les déterminations du rapport $\frac{\mathcal{M}}{B_0}$ par la méthode statique, et du produit $\mathcal{M}B_0$ par la méthode dynamique, conduisent à des mesures absolues de moments magnétiques et d'inductions magnétiques.

9-11. Méthode dynamique ou méthode des oscillations. Mesure de $\mathcal{M}B$.

1° Oscillations d'un aimant dans une induction magnétique.

Considérons un aimant horizontal de moment magnétique $\mathcal{M}$, mobile autour d'un axe vertical dans une induction magnétique uniforme dont la composante horizontale est B ; dans sa position d'équilibre les vecteurs $\mathcal{M}$ et B sont colinéaires.

L'aimant, écarté de sa position d'équilibre d'un angle θ , est soumis à un couple de rappel de moment — $\mathcal{M}B \sin \theta$.

L'application du principe fondamental de la dynamique donne, J étant le moment d'inertie de l'aimant par rapport à l'axe de rotation,

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = - \mathcal{M}B \sin \theta.$$

Cette équation est celle d'un mouvement oscillatoire. Dans le cas où l'élongation angulaire est petite, elle devient

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \mathcal{M}B\theta = 0,$$

de la forme générale

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0.$$

Son intégrale est, avec un choix convenable de l'origine des temps,

$$\theta = \theta_0 \cos \omega t = \theta_0 \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

θ_0 étant l'élongation maximale.

Les petites oscillations sont donc sinusoïdales et leur période,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}B}},$$

est inversement proportionnelle à la racine carrée du produit $\mathcal{M}B$.

2° Mesures relatives d'inductions magnétiques.

Faisons osciller successivement l'aimant dans deux inductions magnétiques B et B' et mesurons les périodes T et T' des petites oscillations; nous avons

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}B}}, \quad T' = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}B'}},$$

d'où

$$\frac{B'}{B} = \frac{T^2}{T'^2}.$$

Cette méthode permet donc d'effectuer des mesures relatives d'inductions magnétiques par des mesures de périodes; son application présente cependant une difficulté due à l'existence inévitable de l'induction terrestre, aussi est-on conduit à opérer de la façon suivante :

Pour comparer l'induction B à la composante horizontale de l'induction terrestre B_0 au point où l'on opère, on mesure les périodes T_1 et T_2 de l'aimant oscillant sous l'action de B parallèle à B_0 , dans le même sens, donc soumis à $B_1 = B + B_0$, puis de sens contraire, donc soumis à $B_2 = B - B_0$ (en supposant $B > B_0$); on a

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{B - B_0}{B + B_0},$$

d'où

$$\frac{T_1^2}{B - B_0} = \frac{T_2^2}{B + B_0} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2B} = \frac{T_2^2 - T_1^2}{2B_0},$$

par suite

$$\frac{B}{B_0} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{T_2^2 - T_1^2}.$$

On peut de la même façon déterminer $\frac{B'}{B_0}$ et par suite $\frac{B'}{B}$.

La même méthode est applicable à la détermination du rapport $\frac{B_0'}{B_0}$ des composantes horizontales de l'induction terrestre en deux points; il suffit de mesurer T_0 et T_0' d'oscillation d'un aimant en ces deux points. On a

$$\frac{B_0'}{B_0} = \frac{T_0^2}{T_0'^2}.$$

3° Mesures relatives de moments magnétiques.

Pour comparer les moments magnétiques $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ de deux aimants on mesure leurs périodes d'oscillation T et T' au même point; on a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}B_0}}, \quad T' = 2\pi \sqrt{\frac{J'}{\mathcal{M}'B_0}},$$

d'où

$$\frac{\mathcal{M}'}{\mathcal{M}} = \frac{J'}{J} \frac{T^2}{T'^2}.$$

Les moments d'inertie J et J' se calculent d'après les dimensions des aimants, on peut également les déterminer expérimentalement comme nous le verrons plus loin.

4° Mesure de $\mathcal{M}B_0$.

T étant la période d'oscillation d'un aimant sous l'action de B_0 , on a

$$(1) \quad T^2 = 4\pi^2 \frac{J}{\mathcal{M}B_0}.$$

La valeur calculée de J est peu précise, on l'élimine en fixant aux extrémités deux petits cylindres en cuivre (non magnétique) et on mesure la période T' du système ainsi alourdi. j étant le moment d'inertie des cylindres par rapport à l'axe de rotation, on a

$$(2) \quad T'^2 = 4\pi^2 \frac{J + j}{\mathcal{M}B_0}.$$

d'où, en retranchant (1) de (2) membre à membre,

$$T'^2 - T^2 = \frac{4\pi^2 j}{\mathcal{M}B_0},$$

et

$$\mathcal{M}B_0 = \frac{4\pi^2 j}{T'^2 - T^2}.$$

j peut être déterminé avec précision, on a, en vertu du théorème d'Huygens et en négligeant le terme correspondant aux moments d'inertie des cylindres par rapport à leurs propres axes,

$$j = 2 m d^2,$$

où m est la masse d'un cylindre et d la distance de son axe à l'axe de rotation.

9-12. Mesures magnétiques absolues.

1° Mesure d'une induction magnétique.

Étant donné un aimant de moment magnétique $\mathcal{M}$ dans l'induction terrestre de composante horizontale B_0 , la méthode statique permet de mesurer $A = \frac{\mathcal{M}}{B_0}$, la méthode dynamique, $C = \mathcal{M}B_0$; on en déduit

$$B_0 = \sqrt{\frac{C}{A}}.$$

Ces mesures sont effectuées en fonction des seules unités mécaniques, la nature magnétique des phénomènes n'intervenant que par μ_0 dont la valeur est rigoureuse; il s'agit donc bien de mesures absolues. La précision peut atteindre 10^{-4} .

La valeur de B_0 étant ainsi bien connue, la méthode précédente est applicable à une induction quelconque B que l'on superpose à B_0 dans un sens ou dans l'autre; on détermine ainsi $B + B_0$ ou $B - B_0$.

2° Mesure d'un moment magnétique.

Des mesures de A et de C se déduit le moment magnétique de l'aimant utilisé :

$$\mathcal{M} = \sqrt{AC};$$

il s'agit là aussi d'une mesure absolue.

Exercices.

Exercice 14. — Deux aimants droits A_1 et A_2 de même longueur, de moments magnétiques $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ ($\mathcal{M}_1 > \mathcal{M}_2$) sont associés parallèlement de façon que les pôles de

même nom soient du même côté. L'ensemble, horizontal, est suspendu à un fil sans torsion; placé dans une induction magnétique uniforme horizontale B , le système, écarté de sa position d'équilibre, oscille et la durée des petites oscillations est $T_1 = 1$ s.

On retourne l'aimant A_2 bout pour bout : la durée des petites oscillations devient $T_2 = 2$ s.

On croise enfin les deux aimants à angle droit. Quelle est la position d'équilibre du système, quelle est la nouvelle période, T_3 , des petites oscillations?

Soit J_1 et J_2 les moments d'inertie des deux aimants par rapport à l'axe d'oscillation; dans les trois cas le moment d'inertie du système est $J = J_1 + J_2$.

Dans le premier cas :

$$(1) \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)B}},$$

dans le second :

$$(2) \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{(\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2)B}}.$$

Dans le troisième cas $\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}}_1 + \vec{\mathcal{M}}_2$ est le moment magnétique du système, sa position d'équilibre est définie, par rapport à celle du premier cas, par l'angle θ tel que

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\mathcal{M}_2}{\mathcal{M}_1},$$

et la période des oscillations est

$$(3) \quad T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}B}},$$

avec

$$\mathcal{M} = \sqrt{\mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2}.$$

Les relations (1) et (2) s'écrivent

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 &= 4\pi^2 \frac{J}{B} \frac{1}{T_1^2} = \frac{J'}{T_1^2}, \\ \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2 &= 4\pi^2 \frac{J}{B} \frac{1}{T_2^2} = \frac{J'}{T_2^2}, \end{aligned}$$

en posant $J' = 4\pi^2 \frac{J}{B}$.

Additionnons ces deux dernières relations après les avoir élevées au carré; il vient

$$2(\mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2) = J'^2 \left(\frac{1}{T_1^4} + \frac{1}{T_2^4} \right) = J'^2 \frac{T_1^4 + T_2^4}{T_1^4 T_2^4},$$

par suite

$$\begin{aligned} T_3^4 &= \frac{J'^2}{\mathcal{M}^2} = \frac{2T_1^4 T_2^4}{T_1^4 + T_2^4}, \\ T_3 &= T_1 T_2 \left(\frac{2}{T_1^4 + T_2^4} \right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{5}{4}} \cdot 17^{-\frac{1}{4}}, \\ \log_{10} T_3 &= \frac{1}{4} (5 \log_{10} 2 + \operatorname{colog}_{10} 17), \\ T_3 &= 1,17 \text{ s.} \end{aligned}$$

Exercice 15. — Un puissant aimant droit A est fixé sur une règle graduée. La direction de cette règle et celle des pôles de l'aimant sont horizontales et dans le plan du méridien magnétique.

1° Une petite boussole B , dont l'aiguille est horizontale, peut être déplacée le long de la règle graduée, et l'on constate que son aiguille se retourne lorsqu'elle passe

à $r = 60$ cm du milieu de l'aimant A, la distance r pouvant être considérée comme très grande par rapport à la longueur de l'aimant A.

On demande quel est le moment magnétique $\mathcal{M}$ de cet aimant, sachant que la composante horizontale B_0 de l'induction terrestre, mesurée à 2% près, vaut $2 \cdot 10^{-5}$ tesla.

2° On fait tourner la règle graduée d'un petit angle autour de la verticale passant par le centre de la boussole B, de façon que le déplacement d du centre de l'aimant A, que l'on mesure à 1 mm près, soit de 5 cm. Quelle est alors la direction de l'aiguille de la boussole B ?

Si l'on fait osciller cette aiguille autour de sa position d'équilibre, quelle sera la période des oscillations, sachant qu'en l'absence de l'aimant A la période des oscillations dans l'induction terrestre serait de 1 seconde ?

3° On replace ensuite la règle graduée et l'aimant A dans leur position primitive et l'on retire la boussole B pour lui substituer un pendule constitué par un aimant C identique à A, dont la ligne des pôles est verticale dans la position d'équilibre.

On fait osciller ce pendule autour d'un axe perpendiculaire au plan du méridien magnétique, la période des oscillations est $T = 12$ s. Cette période devient $T_0 = 10$ s lorsqu'on désaimante l'aimant C.

On sait en outre que l'inclinaison de l'induction magnétique terrestre est $i = 60$ degrés.

Déduire de là quelle serait la période T' des oscillations si l'on aimantait de nouveau C exactement de la même manière, mais en sens inverse, et quel est le moment d'inertie J du pendule C par rapport à son axe d'oscillation. Déterminer enfin quelle serait, après cette nouvelle aimantation, la position d'équilibre que prendrait le pendule C si l'on supprimait l'aimant A.

1° La distance r étant très grande par rapport à la longueur de l'aimant A, l'induction que celui-ci produit à cette distance sur l'axe est

$$B \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M}}{r^3}.$$

Au point où l'aiguille de la boussole se retourne, $\vec{B}$ et $\vec{B}_0$ sont égaux et opposés; on a donc $B = B_0$ et par suite

$$\mathcal{M} = \frac{4\pi}{\mu_0} \frac{B_0 r^3}{2},$$

avec $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$; $B_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ tesla; $r = 0,6$ m; $r^3 = 0,216$ m³; d'où

$$\mathcal{M} = 21,6 \text{ A.m}^2.$$

2° (fig. 82) L'induction B fait avec le méridien magnétique OM l'angle

$$\alpha \simeq \frac{d}{r} = \frac{1}{12} \text{ rd.}$$

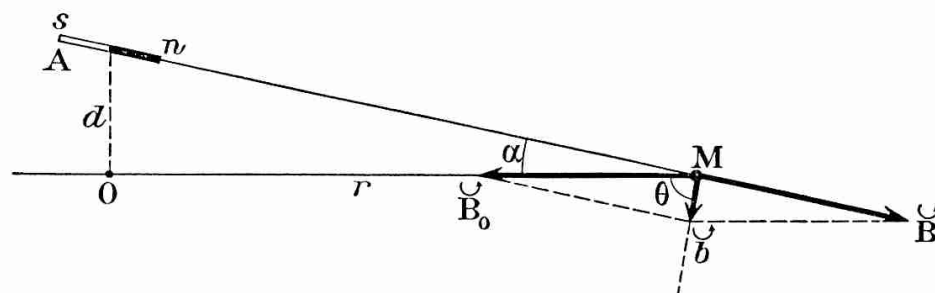


FIG. 82.

L'angle θ dont a tourné l'aiguille de la boussole est

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = 1,49 \text{ rd} = 85^\circ 20'.$$

L'induction b résultant de l'induction terrestre B_0 et de l'induction B produite par l'aimant est

$$b = B_0 \alpha = \frac{B_0}{12},$$

avec une incertitude très inférieure à celle, $2 \cdot 10^{-2}$, sur d .

On en déduit la période demandée :

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 3,46 \text{ s.}$$

3° On peut évidemment faire pour l'aimant C les mêmes approximations que pour A, c'est-à-dire le supposer infiniment court, ou, ce qui revient au même, supposer que l'induction est uniforme dans tout l'espace où il oscille.

L'induction est alors réduite à la composante

$$Z = B_0 \operatorname{tg} i = 3,46 \cdot 10^{-5} \text{ tesla.}$$

Dans la position d'équilibre, l'aimant C (fig. 83 a) et le centre de gravité G ont la disposition de la figure et pour un écart angulaire θ (fig. 83 b) le couple subi par le système est, Mg étant le poids de l'aimant,

$$- (Mga - MZ) \sin \theta.$$

On a, pour les périodes des petites oscillations,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mga - MZ}};$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mga}};$$

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mga + MZ}};$$

par suite

$$\frac{1}{T^2} + \frac{1}{T'^2} = \frac{2}{T_0^2};$$

$$\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2} = \frac{MZ}{4\pi^2 J},$$

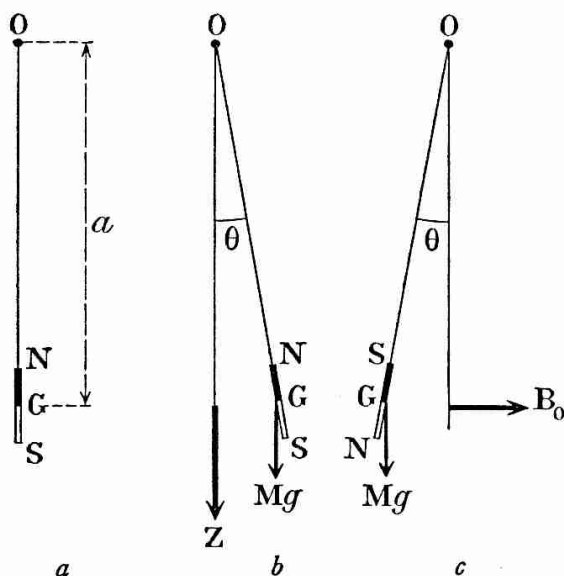


FIG. 83.

d'où

$$T' = 8,75 \text{ s}; \quad J = 6,22 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2.$$

Si l'induction de l'aimant A est supprimée, il faut ajouter au couple $-(Mga + \mathcal{M}Z \sin \theta)$, le couple $\mathcal{M}B_0 \cos \theta$ dû à la composante horizontale B_0 .

On en déduit que le pendule est dévié vers le nord (fig. 83 c) de l'angle θ défini par la relation

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\mathcal{M}B_0}{Mga + \mathcal{M}Z},$$

d'où

$$\theta = 7^\circ 42'.$$

Exercice 16. — Un petit aimant droit, portant un miroir plan perpendiculaire à l'axe magnétique de l'aimant, est suspendu à un fil de quartz. Le moment magnétique $\mathcal{M}$ de l'aimant est horizontal. L'autre extrémité du fil de quartz est fixée sur un bâti mobile autour d'un axe vertical. Un cercle divisé muni d'un vernier permet de mesurer les rotations du bâti. On vise le miroir à l'aide d'un dispositif (lentille autocollimatrice) solidaire du bâti qui indique l'instant où l'axe de ce dispositif est perpendiculaire au plan du miroir.

1° On règle l'appareil de telle sorte que la torsion du fil de quartz soit nulle et que l'axe du dispositif de visée soit perpendiculaire au plan du miroir lorsque l'axe de l'aimant coïncide avec le méridien magnétique. Partant de la position précédente, on tourne le bâti d'un tour complet dans le sens direct. On crée ainsi un couple de torsion qui fait tourner l'aimant (on suppose que dans cette rotation l'aimant ne tourne que d'un angle inférieur à $\frac{\pi}{2}$). On continue à tourner le bâti jusqu'à ce que l'axe du dispositif de visée soit de nouveau perpendiculaire au miroir, ce qui a lieu après une rotation totale du bâti égale à $2\pi + \varphi$. Soit B la composante horizontale de l'induction terrestre et C la constante de torsion du fil de quartz. Écrire la relation qui lie $\mathcal{M}$, C , B et φ .

Montrer que si B devient très petit, la mesure n'est plus possible. Quelle est la plus petite valeur de B mesurable avec cet appareil?

2° On suppose que le réglage initial n'a pas été effectué exactement : l'axe du dispositif de visée étant perpendiculaire au miroir, l'aimant fait un petit angle α avec le méridien magnétique et le fil de quartz est tordu d'un angle résiduel β .

Écrire la relation qui lie $\mathcal{M}$, B , α et β . On tourne le bâti d'un angle $2\pi + \varphi_1$ dans le sens direct, puis d'un angle $-(2\pi + \varphi_2)$ dans le sens rétrograde de façon à placer chaque fois l'axe du dispositif de visée perpendiculairement au plan du miroir. Établir les relations qui lient $\mathcal{M}$, B , C , α et β respectivement à φ_1 et φ_2 .

3° On pose

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2);$$

écrire la relation donnant B en fonction de $\mathcal{M}$, C , φ , α et ε .

Calculer α en fonction de φ et de ε .

Le réglage initial étant supposé défectueux, calculer en fonction de α et de φ l'erreur relative que l'on commet en calculant B à l'aide de la formule trouvée au 1°, où φ est la moyenne $\frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)$ des deux mesures faites au 2°. Discuter.

1° Le dispositif de visée tournant avec le bâti, la torsion du fil est égale à 2π , l'axe magnétique de l'aimant fait l'angle φ avec la composante horizontale de l'induction magnétique terrestre. La condition d'équilibre s'exprime par

$$(1) \quad \mathcal{M}B \sin \varphi - 2\pi C = 0.$$

La mesure n'est possible que si $\sin \varphi < 1$, c'est-à-dire si

$$B > B_m = \frac{2\pi C}{\mathcal{M}}.$$

2° La condition d'équilibre correspondant à la position initiale est

$$(2) \quad \mathcal{M}B \sin \alpha - C\beta = 0.$$

Pour la première mesure (rotation du bâti dans le sens direct) l'aimant fait l'angle $\varphi_1 + \alpha$ avec le méridien magnétique et la torsion du fil est $2\pi + \beta$.

La condition d'équilibre est dans ce cas

$$(3) \quad \mathcal{M}B \sin(\varphi_1 + \alpha) - C(2\pi + \beta) = 0.$$

Pour la seconde mesure (rotation du bâti dans le sens rétrograde) l'aimant fait l'angle $-(\varphi_2 - \alpha)$ avec le méridien magnétique et la torsion du fil est $-(2\pi - \beta)$. La condition d'équilibre est alors

$$(4) \quad \mathcal{M}B \sin(\varphi_2 - \alpha) - C(2\pi - \beta) = 0.$$

3° Additionnons les relations (3) et (4) membre à membre; on a

$$\mathcal{M}B[\sin(\varphi_1 + \alpha) + \sin(\varphi_2 - \alpha)] - 4\pi C = 0,$$

d'où

$$(5) \quad \mathcal{M}B \sin \varphi \cos(\varepsilon + \alpha) = 2\pi C.$$

Lorsque α tend vers zéro, β tend aussi vers zéro, φ_1 et φ_2 tendent vers φ et ε tend vers zéro; par suite $\cos(\varepsilon + \alpha) \simeq 1 - \varepsilon\alpha$ et (5) s'écrit

$$(6) \quad \mathcal{M}B(1 - \varepsilon\alpha) \sin \varphi = 2\pi C.$$

Compte tenu de la relation (2), les relations (3) et (4) donnent par soustraction membre à membre

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_1 + \alpha) - \sin(\varphi_2 - \alpha) &= 2 \sin \alpha, \\ \sin(\alpha + \varepsilon) \cos \varphi &= \sin \alpha, \\ (\alpha + \varepsilon) \cos \varphi &\simeq \alpha, \end{aligned}$$

d'où

$$\alpha = \varepsilon \frac{\cos \varphi}{1 - \cos \varphi}.$$

La relation (6) donne

$$B = \frac{2\pi C}{\mathcal{M} \sin \varphi} \frac{1}{1 - \varepsilon\alpha} \simeq B'(1 + \varepsilon\alpha),$$

B' étant la valeur calculée à partir de (1).

L'erreur relative commise en prenant B' au lieu de B est

$$\frac{B - B'}{B'} = \varepsilon\alpha = \alpha^2 \frac{\cos \varphi}{1 - \cos \varphi};$$

elle dépend de φ , donc de l'ordre de grandeur de B . Si B , supérieur à B_m pour être mesurable, en est cependant voisin, φ est voisin de $\frac{\pi}{2}$ et $\cos \varphi$ est petit;

l'erreur relative commise est petite par rapport à α^2 , il n'est alors pas nécessaire que le réglage initial soit très précis. Par contre, lorsque B devient grand par rapport à B_m , φ devient petit et $1 - \cos \varphi$ également; le facteur de α^2 devient de plus en plus grand, pour que l'erreur relative soit tolérable il faut que le réglage initial soit très précis.

Par exemple, pour une valeur de B telle que $\cos \varphi = \frac{1}{2}$ et pour $\alpha = 30' \simeq 9 \cdot 10^{-2}$ rd,

$$\frac{B - B'}{B'} = 8 \cdot 10^{-5}.$$

SECONDE PARTIE (*)

LES MILIEUX AIMANTÉS

- Chap. X. — Les vecteurs aimantation $\vec{J}$ et excitation magnétique $\vec{H}$.
Relation fondamentale des milieux magnétiques.
- Chap. XI. — Aimantation induite.

(*) Programme de Mathématiques Spéciales B.

DÉVORÉ-ANNEQUIN. — *Électricité II*.

CHAPITRE X

LES VECTEURS AIMANTATION ET EXCITATION MAGNÉTIQUE. RELATION FONDAMENTALE DES MILIEUX MAGNÉTIQUES

10-1. Vecteur aimantation en un point d'un milieu aimanté.

Considérons, autour d'un point P pris à l'intérieur d'un aimant permanent, un volume dv très petit à l'échelle macroscopique, volume qui constitue une très petite particule aimantée de moment magnétique $d\mathcal{M}$.

Par définition, le vecteur

$$\vec{J} = \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dv}$$

est **le vecteur aimantation au point P**.

dv est infiniment petit à l'échelle macroscopique mais il est cependant très grand par rapport aux volumes d'encombrement des atomes ou des molécules. On exprime ce fait en disant que *l'aimantation est une grandeur macroscopique ou nivelée*.

Comme le vecteur moment magnétique, *le vecteur aimantation est un vecteur axial*. Son module J est *l'intensité d'aimantation* ou plus simplement *l'aimantation au point P*.

Les dimensions d'un moment magnétique étant

$$[\mathcal{M}] = IS = IL^2,$$

celles de l'aimantation sont

$$[J] = IL^{-1}.$$

Dans le système S.I. l'aimantation s'exprime en ampères par mètre ($A \cdot m^{-1}$).

Comme l'aimantation est supposée rigide, le vecteur $\vec{J}$ n'est pas modifié par des actions magnétiques extérieures ou intérieures à l'aimant. L'état d'aimantation est donc déterminé par la connaissance du vecteur aimantation en chaque point. Le moment magnétique $\vec{M}$ de l'aimant est la somme vectorielle des vecteurs $d\vec{M}$, somme étendue au volume V de l'aimant :

$$\vec{M} = \iiint_V \vec{J} dv.$$

Nous pouvons considérer des lignes et des tubes d'aimantation dans le milieu magnétique.

10-2. Conception ampérienne d'un milieu aimanté.

Considérons (fig. 84) un point P dans un milieu aimanté, point où passe une ligne d'aimantation qui est l'axe d'un tube élémentaire d'aimantation dont les dimensions de la section d^2S sont infiniment petites par rapport à sa longueur dl , elle-même infiniment petite du premier ordre. Le volume de ce tube est

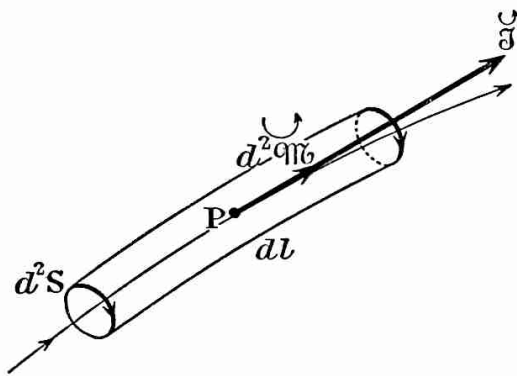


FIG. 84.

$$d^2v = dl d^2S$$

et son moment magnétique

$$d^2\vec{M} = \vec{J} d^2v = \vec{J} dl d^2S.$$

Nous supposons qu'au voisinage du point P les ampériens forment un long solénoïde de longueur dl comportant ndl spires; le moment magnétique de ce solénoïde est celui du volume d^2v , par suite son module est

$$d^2M = nI_a dl d^2S = nI_a d^2v.$$

Le vecteur $d^2\vec{M}$, tangent à la ligne d'aimantation, a la direction et le sens de $\vec{J}$, et l'on a donc

$$\vec{J} = \frac{d^2\vec{M}}{d^2v} = nI_a \vec{u},$$

$\vec{u}$ étant le vecteur unitaire sur la ligne d'aimantation. D'où, en module,

$$J = nI_a.$$

Or

$$\vec{B}_1 = \mu_0 n I_a \vec{u} = \mu_0 \vec{J}$$

est l'induction produite au point P par le solénoïde ampérien local que nous venons de définir. Nous avons donc

$$\vec{J} = \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} = n I_a \vec{u},$$

relation qui montre que :

Le vecteur aimantation est le quotient par μ_0 de l'induction magnétique $\vec{B}_1$ produite par le seul solénoïde ampérien local.

Nous sommes ainsi conduits à considérer que dans un milieu aimanté les ampériens sont répartis en longs solénoïdes dont les axes sont les lignes d'aimantation. La variation du module de $\vec{J}$ se traduit, le long d'une telle ligne, par un tassement plus ou moins grand des ampériens, ceux-ci étant d'autant plus serrés que l'aimantation est plus intense (J est proportionnel au nombre n d'ampériens par unité de longueur).

10-3. Induction magnétique à l'intérieur d'un milieu aimanté. Conservation du flux d'induction magnétique.

Les ampériens étant dans le vide, nous pouvons leur appliquer les lois de l'électromagnétisme du vide et en particulier la loi de Biot et Savart pour le calcul de l'induction magnétique en un point.

En un point extérieur à l'aimant, la définition de $\vec{B}$, qui résulte de la loi de Biot et Savart, peut être étayée par une expérience réalisable en plaçant au point d'essai un corps d'épreuve, par exemple un magnétomètre. Cette opération devient purement fictive à l'intérieur de l'aimant. Nous n'en continuerons pas moins à considérer que :

L'induction magnétique en un point P dans le milieu aimanté est, comme en un point extérieur, la résultante des inductions élémentaires produites par un ensemble d'ampériens dans le vide.

Or une conséquence essentielle de la loi de Biot et Savart est que le vecteur induction dérive d'un potentiel-vecteur et que le flux d'induction

magnétique est conservatif; cette conservation subsiste en présence de matière aimantée, ensemble d'ampériens dans le vide, comme en présence de courants réels dans le vide. Par suite :

Dans tous les cas, le flux d'induction magnétique à travers une surface fermée quelconque est nul ; en un point quelconque dans un milieu aimanté aussi bien que dans le vide, la divergence de l'induction magnétique est nulle,

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

10-4. Excitation magnétique $\vec{H}$. Relation fondamentale du magnétisme.

En présence d'un aimant, la circulation de l'induction le long d'une courbe fermée Γ entièrement dans le vide est nulle puisque Γ n'enlace aucun courant.

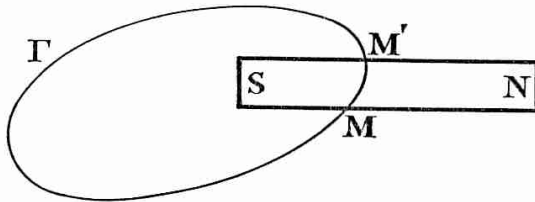


FIG. 85.

Supposons maintenant (fig. 85) que Γ coupe la matière aimantée le long du trajet partiel MM' . D'après le théorème d'Ampère la circulation de $\vec{B}$ est égale au

produit par μ_0 de la somme des intensités des ampériens enlacés. Cette somme dépend donc du parcours dans la matière aimantée, par suite :

La circulation du vecteur induction magnétique n'est pas conservative le long d'un parcours qui pénètre dans un milieu aimanté.

Nous allons montrer que le vecteur induction magnétique $\vec{B}$ est la somme de deux vecteurs dont l'un a une circulation conservative. Dans ce but, séparons les ampériens du milieu en deux groupes relatifs à un point P du milieu aimanté. *Le premier groupe, le groupe local, comprend les ampériens du solénoïde ampérien local, le second est formé de tous les autres ampériens; nous l'appelons le groupe extérieur à P.*

Nous avons vu que le groupe local produit l'induction

$$B_1 = \mu_0 \mathcal{J}.$$

Soit B_e l'induction produite par le groupe extérieur à P et posons

$$\vec{B}_e = \mu_0 \vec{H},$$

de façon que $\vec{H}$ ait les mêmes dimensions que $\vec{J}$; nous avons

$$(1) \quad \boxed{\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J})}.$$

Par définition, $\vec{H}$ est le **vecteur excitation magnétique au point P**.

Comme l'aimantation, H s'exprime en ampères par mètre ($A.m^{-1}$). Convenons d'appeler *excitation* une grandeur dont les dimensions sont celles d'une induction divisée par μ_0 , autrement dit d'une intensité électrique divisée par une longueur, un vecteur excitation étant un vecteur axial au même titre que $\vec{B}$. Nous voyons que l'aimantation $\vec{J}$ peut être considérée comme l'excitation locale due aux ampériens du solénoïde ampérien local, alors que l'excitation magnétique $\vec{H}$ est produite par les ampériens extérieurs à P.

La relation fondamentale (1) exprime que l'induction au point P est le produit par μ_0 de la somme vectorielle de deux excitation, l'excitation magnétique $\vec{H}$ et l'excitation locale représentée par le vecteur aimantation $\vec{J}$.

Cette relation et la définition de l'excitation magnétique $\vec{H}$ restent valables lorsque le point B est à l'extérieur de l'aimant : on a alors $\vec{J} = 0$ et $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$.

10-5. Conservation de la circulation du vecteur excitation magnétique.

Reprenons le calcul de la circulation du vecteur induction le long d'une courbe fermée Γ . Si celle-ci est entièrement dans le vide, c'est-à-dire extérieure à l'aimant, la circulation de $\vec{B}$, égale à celle de $\mu_0\vec{H}$, est nulle.

Supposons que Γ traverse l'aimant le long du parcours partiel MM' et considérons un déplacement élémentaire $\vec{PP'} = \vec{ds}$ dans la matière aimantée, la circulation élémentaire de $\vec{B}$ est

$$d\mathcal{C} = \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0\vec{H} \cdot \vec{ds} + \mu_0\vec{J} \cdot \vec{ds}.$$

Or le terme $\mu_0\vec{H}$ est l'induction produite en P par l'ensemble des ampériens non compris ceux qui limitent le volume $d^2v = d^2S \cdot dl$, autrement dit, ce terme correspond à l'induction produite par l'aimant au point P placé dans un volume d^2v extérieur à la matière aimantée. Par suite le premier terme de $d\mathcal{C}$ correspond à un parcours élémentaire $\vec{ds}$ n'enlaçant pas d'ampériens.

L'intégrale

$$\mu_0 \int_{MM'} \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

est donc relative à un parcours MM' dans le vide; par suite la circulation du vecteur $\vec{H}$ relative au parcours fermé Γ , n'enlaçant pas d'ampériens, est nulle :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Quant à la circulation du vecteur $\mu_0 \vec{J}$,

$$\oint_{\Gamma} \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_{MM'} \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_{MM'} \mu_0 n I_a \vec{u} \cdot d\vec{s},$$

non seulement elle n'est pas nulle mais elle dépend du trajet suivi dans la matière aimantée entre les points M et M' . Ainsi :

La circulation du vecteur $\mu_0 \vec{J}$, et par suite celle de l'induction, ne sont pas conservatives, alors que la circulation du vecteur excitation magnétique est conservative.

Le vecteur excitation magnétique ainsi défini par la relation vectorielle

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$$

dérive donc d'un potentiel scalaire à détermination unique; il est la différence géométrique de deux vecteurs qui, ni l'un ni l'autre, ne dérivent d'un potentiel.

10-6. Le théorème d'Ampère en général. Équation de Maxwell-Ampère.

Nous avons jusqu'ici supposé que nous ne disposions que d'un aimant dans le vide. Considérons maintenant d'une façon plus générale un système formé d'aimants et de circuits linéaires parcourus par des courants (réels) d'intensités $I_1, I_2, \dots$, en présence dans le vide.

En dehors de la matière aimantée le vecteur $\vec{H}$ est égal au vecteur $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$, par suite la circulation de $\vec{H}$, comme celle de $\vec{B}$, est bien définie; elle est égale à ΣI correspondant aux courants enlacés. Le théorème d'Ampère n'est plus applicable au vecteur induction lorsque le parcours fermé Γ traverse de la matière aimantée puisqu'il devrait tenir compte des ampériens enlacés. Par contre, la circulation du vecteur excitation magnétique $\vec{H}$ correspondant à un trajet en dehors des ampériens,

le théorème d'Ampère lui est applicable en tenant compte des seuls courants réels.

Ainsi, le théorème d'Ampère n'est pas valable en général pour le vecteur induction, il est par contre tout à fait général pour le vecteur excitation :

La circulation du vecteur excitation magnétique le long d'un trajet fermé quelconque est égale à la somme algébrique des courants enlacés par ce trajet,

$$\oint_r \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Sigma I.$$

Cette relation conduit à l'équation de Maxwell-Ampère (6-4)

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j},$$

relation locale valable aussi bien dans les milieux magnétiques que dans le vide.

Remarquons que dans la relation fondamentale du magnétisme (10-4), le terme $\mu_0 \vec{H}$ est la somme géométrique de l'induction $\vec{B}_E$ produite par les ampériens extérieurs au point P et de toutes les inductions provenant de l'existence dans le système de courants réels et d'autres aimants. Il en résulte qu'en un point pris à l'intérieur d'un aimant, l'excitation magnétique est la résultante de l'excitation magnétique produite par l'aimant considéré et du quotient par μ_0 de l'induction magnétique produite par les courants et les autres aimants (pour lesquels le point P est un point extérieur).

10-7. Non-conservation du flux d'excitation magnétique.

Le flux d'induction magnétique est toujours conservatif, celui de l'aimantation ne l'est évidemment pas en général. Si l'on considère une surface fermée Σ coupant la matière aimantée (fig. 86), le flux de $\vec{J}$ n'est pas nul, et par suite, en vertu de la relation fondamentale du magnétisme :

Le flux du vecteur excitation magnétique n'est pas conservatif.

En résumé, dans le cas le plus général :

Le flux du vecteur induction magnétique est conservatif mais sa circulation ne l'est pas (le vecteur $\vec{B}$ ne dérive pas d'un potentiel).

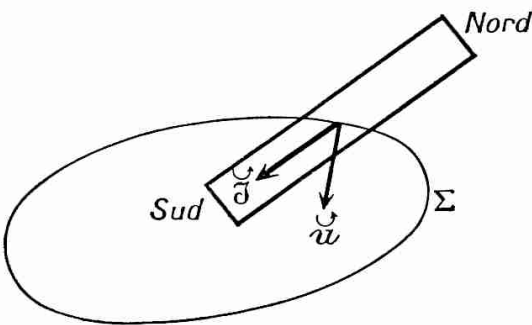


FIG. 86.

Le flux du vecteur excitation magnétique n'est pas conservatif mais sa circulation est conservative (le vecteur $\vec{H}$ dérive d'un potentiel).

Dans le cas particulier où le système envisagé ne comporte que des courants linéaires dans le vide (ou l'absence d'aimants) on a en tout point de l'espace

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H};$$

les flux et les circulations des deux vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ sont conservatifs.

10-8. Aimantation uniforme. Aimant solénoïdal.

L'aimantation d'un domaine aimanté est uniforme si le vecteur aimantation $\vec{J}$ est le même en tous les points; les lignes d'aimantation sont alors des droites parallèles.

Il est facile de se rendre compte que l'aimantation d'un aimant solénoïdal est uniforme; son module est (9-4, 2°)

$$J = \frac{d^2 \mathcal{M}}{d^2 v} = \frac{d \mathcal{M}}{dv} = \frac{\mathcal{M}}{V}.$$

Placé dans un champ magnétique uniforme un aimant solénoïdal est soumis à un couple d'axe

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = V \vec{J} \wedge \vec{B}.$$

θ_1 et θ_2 pouvant être aigus ou obtus, le module de l'induction en un point P de l'axe extérieur ou intérieur à l'aimant a pour expression algébrique (fig. 87)

$$B = \frac{I}{2} \mu_0 n I (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) = \frac{I}{2} \frac{\mathcal{M}}{V} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1),$$

$$B = \frac{I}{2} \mu_0 I (\cos \theta_2 - \cos \theta_1).$$

L'induction ne subit pas de discontinuité dans la traversée d'une face terminale de l'aimant.

Déterminons maintenant l'excitation magnétique en un point de l'axe; en un point extérieur à l'aimant

$$(1) \quad H_E = \frac{B}{\mu_0} = \frac{I}{2} J (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) > 0,$$

en un point intérieur,

$$(2) \quad H_I = \frac{B}{\mu_0} - J = -J \left[1 - \frac{I}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \right] < 0.$$

Les expressions (1) et (2) appellent les remarques suivantes :

1° *L'excitation magnétique varie d'une façon discontinue à la traversée des faces de l'aimant.*

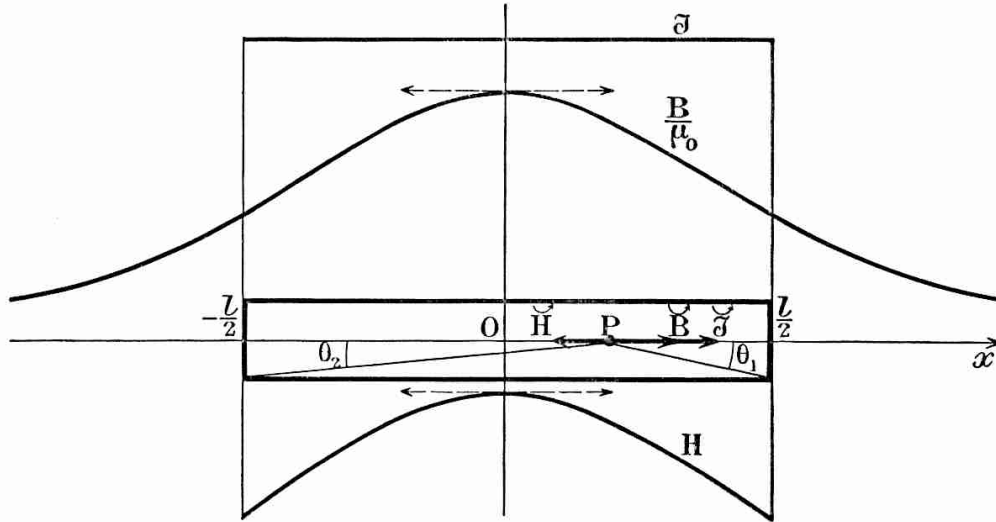


FIG. 87.

A travers la face sud ($\theta_1 = \frac{\pi}{2}$), du vide vers l'aimant, H passe de

$$H_E = \frac{I}{2} J \cos \theta' > 0 \quad \text{à} \quad H_I = -J \left(1 - \frac{I}{2} \cos \theta' \right) < 0,$$

la discontinuité est $-J$.

A travers la face nord, de l'aimant vers le vide, H passe de

$$H_I = -J \left[1 - \frac{I}{2} |\cos \theta'| \right] < 0 \quad \text{à} \quad H_E = \frac{I}{2} J |\cos \theta'|,$$

la discontinuité est $+J$. La somme des deux discontinuités est nulle.

Remarquons qu'en un point de la région centrale d'un aimant solénoïdal très long on a

$$B = \mu_0 J \quad \text{et par suite} \quad H = 0.$$

2° A l'extérieur de l'aimant ($J = 0$), H est proportionnel à B , on a $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. Par contre, à l'intérieur ($J = \text{Cte} \neq 0$), H_I est négatif; il est donc dirigé en sens inverse de B et de J , on dit que *l'excitation est démagnétisante* :

A l'intérieur d'un aimant solénoïdal dans le vide (en l'absence de courants réels) l'excitation magnétique est démagnétisante, autrement dit dirigée en sens inverse de l'aimantation.

Les courbes de la figure 87 représentent les variations de $\mathcal{J}$, de $\frac{B}{\mu_0}$ et de H le long de l'axe.

Remarquons que, B passant par un maximum au centre de l'aimant, la valeur absolue de H passe par un minimum en ce point (ce minimum est nul dans le cas d'un aimant très long), elle est maximale aux extrémités de l'aimant. A l'extérieur de l'aimant, où la considération de l'excitation magnétique ne présente plus d'intérêt, H varie comme $\frac{B}{\mu_0}$ puisqu'elle lui est égale.

3° Le long du trajet fermé allant de $x = -\infty$ à $x = +\infty$, la circulation de H est égale à celle de $\frac{B}{\mu_0}$, soit $\mathcal{J}l$, diminuée de la circulation de $\mathcal{J}$ le long de l'aimant, soit $\mathcal{J}l$ également; la circulation H le long de l'axe est nulle.

Si enfin nous considérons deux surfaces infiniment voisines de part et d'autre d'une face terminale, la continuité de B entraîne la conservation du flux d'induction alors que la discontinuité de H entraîne la non-conservation du flux d'excitation magnétique.

En résumé nous avons retrouvé dans le cas idéal d'un aimant solénoïdal les résultats essentiels relatifs, dans le cas général, aux propriétés des vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{H}$.

10-9. Aimant torique sans et avec entrefer.

1° Aimant torique sans entrefer.

Considérons un aimant ayant la forme d'un tore (fig. 88). Nous supposons que le rayon ρ du cercle générateur est petit par rapport au rayon R du cercle lieu des centres, de sorte que l'on peut admettre que le vecteur aimantation, normal à une section S en tout point, a un module $\mathcal{J}$ constant. Par un procédé semblable à celui que nous avons employé dans le cas d'un aimant solénoïdal (9-4, 2°) on établit que l'ensemble des ampériens équivaut ici à une bobine torique dans le vide, comportant

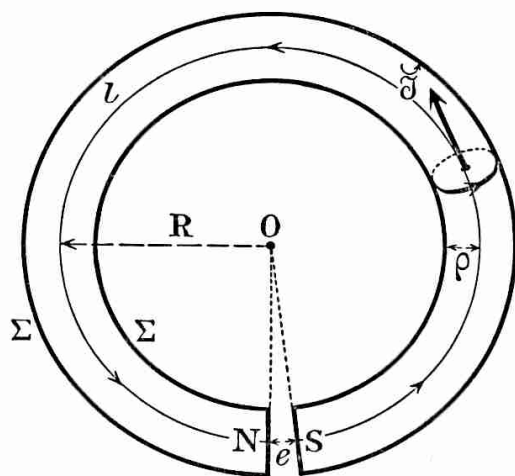


FIG. 88.

$$N = 2\pi Rn = nl$$

spires régulièrement réparties (n spires par unité de longueur) et parcourue par le courant fictif I_a .

L'induction en tout point extérieur à l'aimant est nulle; il n'est pas possible de réaliser un spectre magnétique : *le tore est un aimant sans pôles*. A l'intérieur, les lignes d'aimantation et les lignes d'induction sont des cercles qui ont pour axe commun l'axe de révolution du tore; celui-ci constitue un tube d'induction à l'intérieur duquel toutes les lignes d'induction sont canalisées.

Dans les conditions que nous avons précisées (ρ petit par rapport à R), le module de $\vec{B}$ peut être considéré comme constant, égal à sa valeur en un point du cercle moyen de longueur l de la bobine torique équivalente :

$$B = \mu_0 n I_a = \mu_0 \frac{N}{l} I_a,$$

valeur que nous obtenons aussi bien par application du théorème d'Ampère au vecteur $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$ en tenant compte des courants fictifs enlacés :

$$\frac{B}{\mu_0} l = NI.$$

La circulation du vecteur excitation magnétique $\vec{H}$ le long du même parcours fermé de longueur l est nulle en l'absence de courants réels enlacés (rappelons que l'application du théorème d'Ampère à $\vec{H}$ ne fait pas intervenir les ampériens enlacés). Par suite $\vec{H}$ est nul en tout point et l'on a

$$B = \mu_0 (H + \mathcal{J}) = \mu_0 \mathcal{J} = \mu_0 n I_a.$$

Nous avons donc

$$\mathcal{J} = n I_a \quad \text{et} \quad B = \mu_0 \mathcal{J},$$

de même que dans la région centrale d'un aimant solénoïdal très long où $H = 0$.

Quant au flux d'induction, sa valeur, constante dans toutes les sections, est

$$\Phi = BS = \mu_0 \mathcal{J} S.$$

2° Aimant torique avec entrefer.

Pratiquons un étroit entrefer dans l'aimant, et pour cela enlevons une tranche de matière de section S et d'épaisseur e . Cette opération revient à supprimer tous les ampériens de cette tranche, autrement dit encore, à retrancher

$$N' = \frac{e}{l} N$$

spires de la bobine torique équivalente. Supposons que l'épaisseur de la coupure, tout en étant finie, soit suffisamment réduite (e petit par

rapport à l et N' petit par rapport à N) pour que les positions des ampères restants, et par suite l'aimantation $\mathfrak{J}$, demeurent inchangées.

Nous obtenons ainsi un aimant possédant deux plages polaires nord et sud (fig. 88) entre lesquelles il est possible de mesurer l'induction et de réaliser un spectre magnétique. Dans les conditions restrictives que nous avons précisées, les lignes d'induction conservent leur forme primitive; elles restent canalisées, même dans l'entrefer, à l'intérieur de la surface Σ limitative du tore, l'induction restant nulle à l'extérieur de Σ . On exprime ce fait en disant qu'il n'y a pas de *fuites magnétiques* hors de Σ .

Le module de l'induction garde à l'intérieur de Σ une valeur constante B' légèrement inférieure à B :

$$B' = \left(1 - \frac{N'}{N}\right) B = \left(1 - \frac{e}{l}\right) B = \left(1 - \frac{e}{l}\right) \mu_0 \mathfrak{J};$$

le flux d'induction à travers une section devient

$$\Phi' = \left(1 - \frac{e}{l}\right) \Phi.$$

Quant à l'*excitation magnétique*, qui était nulle en l'absence d'entrefer elle est devenue :

a) Dans l'entrefer, donc dans le vide,

$$H_E = \frac{B'}{\mu_0} = \left(1 - \frac{e}{l}\right) \frac{B}{\mu_0} = \left(1 - \frac{e}{l}\right) \mathfrak{J},$$

où son sens est celui de B' (et de $\mathfrak{J}$).

b) Dans l'aimant,

$$H_r = \frac{B'}{\mu_0} - \mathfrak{J} = \left(1 - \frac{e}{l}\right) \frac{B}{\mu_0} - \mathfrak{J} = -\frac{e}{l} \mathfrak{J}.$$

L'excitation est démagnétisante, son module étant d'autant plus petit que l'entrefer est plus étroit.

Les résultats précédents ne sont que grossièrement approchés lorsque l'entrefer est large, ils deviennent même faux lorsqu'il devient très large comme dans le cas d'un demi-tore ou d'un aimant en U. L'excitation magnétique, dirigée en sens inverse de l'aimantation à l'intérieur de l'aimant, donc démagnétisante, devient alors très importante.

CHAPITRE XI

AIMANTATION INDUITE

11-1. Classification des substances au point de vue magnétique. Définitions.

Nous avons jusqu'ici supposé l'aimantation acquise et rigide; en fait, le nombre de substances susceptibles d'être aimantées d'une façon permanente est très restreint. Tous les corps placés dans une induction magnétique produite par des courants ou par des aimants permanents s'aimantent; le fait est absolument général : c'est le phénomène de *l'aimantation induite*. Le plus souvent l'aimantation s'annule avec la cause qui l'a produite.

Au point de vue magnétique les corps peuvent être classés en deux catégories :

1° Au premier groupe appartiennent la plupart des substances qui se comportent sensiblement comme des **milieux magnétiques parfaits**.

Si l'on place une telle substance, supposée homogène, dans le vide où préexiste une excitation magnétique $\vec{H}$, par exemple à l'intérieur d'un long solénoïde où $H = nI$, elle s'aimante, et *le vecteur aimantation a le même support que le vecteur excitation magnétique et son module est proportionnel à l'aimantation*.

Cette propriété de définition se traduit par la relation

$$\vec{J} = \chi \vec{H},$$

dans laquelle la grandeur χ est *la susceptibilité magnétique* de la substance. Constante pour un milieu magnétique parfait déterminé, la susceptibilité magnétique est une grandeur non dimensionnée (on dit aussi une constante vraie) puisque l'aimantation et l'excitation magnétique sont des grandeurs de mêmes dimensions.

On est conduit à distinguer **les corps diamagnétiques**, dont la susceptibilité magnétique est négative, $\vec{J}$ et $\vec{H}$ ayant des sens inverses, et

les corps paramagnétiques, pour lesquels elle est positive, $\vec{J}$ et $\vec{H}$ ayant le même sens. Dans les deux cas χ est très faible, autrement dit *ces substances ne s'aimantent que très faiblement*. La propriété magnétique de ces milieux étant très peu marquée, elle n'intervient pratiquement pas dans la technique; par contre, elle présente *un intérêt théorique extrêmement important*.

Les vecteurs $\vec{J}$, $\vec{H}$ et $\vec{B}$, obéissant à l'équation fondamentale

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{H}),$$

sont colinéaires.

La susceptibilité magnétique étant toujours très petite, $\vec{J}$ est négligeable par rapport à $\vec{H}$ en première approximation, de sorte que la relation approchée

$$\vec{B} \simeq \mu_0 \vec{H}$$

est la même que dans le vide.

La relation fondamentale dans sa forme rigoureuse peut encore s'écrire

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} = \mu_0\mu\vec{H}.$$

Par définition la grandeur sans dimension $\mu = 1 + \chi$ est la *perméabilité magnétique relative du milieu*; comme χ , elle est constante pour un milieu magnétique parfait déterminé. Remarquons que sa valeur est peu différente de l'unité, inférieure à 1 pour les substances diamagnétiques ($\chi < 0$), supérieure à 1 pour les substances paramagnétiques ($\chi > 0$).

2° Le second groupe comporte un nombre relativement restreint de substances comprenant le fer; c'est celui des **corps ferromagnétiques**. Le premier caractère le plus saillant des corps ferromagnétiques est leur propriété magnétique très accusée, le second est que leur aimantation n'est plus liée fonctionnellement à l'excitation et à l'induction, mais dépend des traitements magnétiques antérieurs subis par l'échantillon considéré; autrement dit, si l'on peut encore parler de susceptibilité et de perméabilité relative, ces grandeurs ne sont plus des constantes caractéristiques d'une substance : *les corps ferromagnétiques ne constituent pas des milieux magnétiques parfaits*.

11-2. Remarques au sujet de la rationalisation.

Nous avons constamment utilisé le système S.I. rationalisé; les considérations suivantes ont pour but de mettre en évidence les avantages de la rationalisation.

La non-rationalisation se traduirait par le remplacement de $\frac{\mu_0}{4\pi}$ par μ'_0 dans toutes nos formules, dans le système S.I.

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = \mu'_0 = 10^{-7}.$$

Il est facile de voir, en se reportant à la formule d'Ampère et aux formules de Biot et Savart et de Laplace, que les unités d'intensité électrique, d'induction magnétique, de moment magnétique, ..., ne sont pas affectées par la rationalisation.

L'unité d'intensité d'aimantation reste la même puisqu'elle exprime un moment magnétique par unité de volume. *C'est en fait la définition de l'excitation magnétique H qui justifie la rationalisation.*

En effet, si nous utilisons la loi de Biot et Savart non rationalisée

$$\oint d\mathbf{B} = \mu'_0 \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2},$$

l'induction dans un solénoïde très allongé a pour expression

$$B = 4\pi\mu'_0 nI,$$

et l'excitation magnétique,

$$H' = 4\pi nI = 4\pi H.$$

Alors que la rationalisation permet une définition très simple de l'unité d'excitation magnétique, qui est la même que l'unité d'aimantation, à savoir l'ampère par mètre, la non-rationalisation conduit à définir une unité différente d'excitation, faisant intervenir le facteur $\frac{1}{4\pi}$:

Dans le système S.I. non-rationalisé l'unité d'excitation vaut $\frac{1}{4\pi}$ ampère par mètre au lieu d'un ampère par mètre dans le système S.I. rationalisé.

La non-rationalisation présente donc le très grave inconvénient d'utiliser deux unités différentes pour deux grandeurs de même affinité, l'intensité d'aimantation et l'excitation magnétique. Si nous représentons par des lettres primées les grandeurs affectées par la rationalisation nous avons

$$B = \mu'_0 (H' + 4\pi J) = \frac{\mu_0}{4\pi} (H' + 4\pi J).$$

Par suite, si nous conservons la définition de la susceptibilité

$$\chi' = \frac{J}{H'} = \frac{J}{4\pi H} = \frac{\chi}{4\pi},$$

nous avons

$$\chi = 4\pi\chi';$$

la susceptibilité a donc des valeurs différentes, elle est affectée par la rationalisation. Par contre, comme

$$\begin{aligned} B &= \mu'_0(H' + 4\pi J) = \mu_0(H + J) \\ &= \mu'_0 H'(1 + 4\pi\chi') = \mu_0 H(1 + \chi), \end{aligned}$$

et

$$\mu'_0 H' = \mu_0 H,$$

il vient

$$\mu = 1 + \chi = 1 + 4\pi\chi' = \mu'.$$

Par suite :

La perméabilité magnétique relative a la même valeur dans tous les systèmes d'unités, rationalisés ou non-rationalisés.

I. — DIAMAGNÉTISME ET PARAMAGNÉTISME

11-3. Corps diamagnétiques.

Rappelons les caractères essentiels du diamagnétisme :

Un corps diamagnétique placé dans une excitation magnétique s'aimante très faiblement en sens inverse de l'excitation, sa susceptibilité est donc négative; l'intensité d'aimantation est proportionnelle à l'excitation.

La plupart des substances sont diamagnétiques : les métalloïdes sauf l'oxygène, certains métaux comme le cuivre, le plomb, l'argent, l'or, la grande majorité des sels métalliques et des composés organiques. Leur susceptibilité (comme dans le cas des corps paramagnétiques) se détermine par des mesures de forces agissant sur un volume de substance placé dans une excitation très intense non uniforme. Variable dans de larges limites suivant les corps, elle est de l'ordre de 10^{-5} ; donnons-en quelques valeurs (dans un système non-rationalisé il faudrait les diviser par 4π) :

Bismuth : — $1,5 \cdot 10^{-4}$	Carbone (graphite) et cuivre : — 10^{-5}
Eau : — $8,6 \cdot 10^{-6}$	Alcool : — $7,5 \cdot 10^{-6}$
Azote : — $6 \cdot 10^{-9}$	

On est conduit à définir la susceptibilité massique par la relation

$$\chi_m = \frac{\chi}{\rho},$$

dans laquelle ρ est la masse volumique. L'expérience conduit au résultat suivant :

La susceptibilité massique de presque tous les corps diamagnétiques est indépendante de la température et de l'état physique.

11-4. Corps paramagnétiques.

Rappelons les caractères essentiels du paramagnétisme :

Un corps paramagnétique placé dans une excitation magnétique s'aimante très faiblement dans le sens de l'excitation, sa susceptibilité est donc positive ; l'intensité d'aimantation est proportionnelle à l'excitation.

Le nombre de corps paramagnétiques est assez restreint; l'oxygène, certains métaux, comme l'aluminium et le platine, sont paramagnétiques. Leur susceptibilité, toujours petite, varie beaucoup suivant les substances; donnons-en quelques valeurs à 18 °C :

Aluminium : $2 \cdot 10^{-5}$, Chlorure ferrique : $3 \cdot 10^{-3}$,
Oxygène : $2 \cdot 10^{-6}$.

La susceptibilité massique des corps paramagnétiques augmente quand la température s'abaisse; elle obéit en première approximation à la loi de Curie :

$$\chi_m T = \text{Cte},$$

où T est la température absolue; la constante est la constante de Curie.

La loi de Weiss-Curie

$$\chi_m (T - \Theta) = \text{Cte},$$

où Θ est une température absolue appelée *point de Curie*, est plus précise.

11-5. Théorie sommaire du diamagnétisme et du paramagnétisme.

L'emploi des ampériens courants fictifs à l'échelle macroscopique, a constitué jusqu'ici une méthode de travail pour l'étude du magnétisme. Pour interpréter les phénomènes d'aimantation on peut aller plus loin en considérant les ampériens comme des courants intra-atomiques ou courants particuliers. Nous admettons que tout se passe

comme si les électrons périphériques de l'atome étaient en rotation continue autour du noyau, ce mouvement équivalant à un courant circulaire en sens inverse.

Considérons tout d'abord le cas du diamagnétisme, qui est le cas normal. Supposons que toutes les orbites électroniques soient dans des plans parallèles. Un électron constituant un ampérien est soumis à une force centripète $f = m\omega^2 R$; statistiquement, la moitié des électrons tournent dans un sens, l'autre moitié dans le sens inverse, de sorte que le moment magnétique de l'ensemble des atomes est nul à l'échelle macroscopique : le milieu n'est pas aimanté.

Créons une induction B normale aux orbites; de ce fait un électron est soumis à une force radiale φ qui se retranche ou s'ajoute à f suivant le sens de la rotation; autrement dit les électrons sont retardés ou accélérés par la présence de B . On démontre que le rayon R de l'orbite n'est pas modifié. Des deux catégories d'électrons, les uns tournent plus lentement, ceux pour lesquels

$$f - \varphi = m\omega'^2 R,$$

les autres plus rapidement ($\omega'' > \omega'$), ceux pour lesquels

$$f + \varphi = m\omega''^2 R.$$

Aux premiers correspondent une intensité d'ampérien et un moment magnétique plus grands, aux seconds une intensité et un moment magnétique plus petits. On démontre que le moment magnétique $dM = \int dv$ n'est plus nul, autrement dit que le milieu est aimanté, et que l'*aimantation, dirigée en sens inverse de B , est proportionnelle à B .*

Les phénomènes ne sont toutefois pas aussi simples puisque, par suite du désordre moléculaire, il y aurait lieu de tenir compte des orientations des orbites; les résultats que nous venons d'exprimer demeurent cependant corrects. Le mécanisme du phénomène est donc intérieur à l'atome, aussi *le diamagnétisme n'est pas influencé par l'agitation thermique: il ne dépend pas de la température.*

Nous venons de voir que le diamagnétisme correspond à une compensation entre les moments magnétiques des orbites et que par suite le phénomène résulte uniquement d'une variation de vitesse des électrons sur leur orbite. *Pour expliquer le paramagnétisme, il faut admettre que chaque atome ou molécule possède un moment magnétique permanent* qui peut être dû au mouvement orbital des électrons ou à leur rotation sur eux-mêmes (moment de spin).

En l'absence d'induction, le moment magnétique moyen (et par suite l'aimantation) est nul en raison du désordre moléculaire; si celui-ci n'intervenait pas, une induction B orienterait tous les moments individuels parallèlement à B et dans le sens de B . Malgré cette gêne l'action de l'induction se traduit par l'apparition d'un moment magnétique moyen dans le sens de B ; la substance est aimantée dans ce sens, c'est le

paramagnétisme, qui correspond à un état statistiquement stationnaire. L'intensité d'aimantation est d'autant plus grande que l'induction magnétique agissante est elle-même plus intense, le diamagnétisme se trouvant complètement masqué. L'agitation thermique contrarie l'orientation des moments, de sorte qu'une élévation de température, en augmentant cette gêne, diminue l'aimantation.

L'étude expérimentale du paramagnétisme permet la mesure des moments magnétiques permanents et contribue à nous renseigner dans le domaine de la physique atomique.

II. — FERROMAGNÉTISME

11-6. Généralités.

Les substances ferromagnétiques sont caractérisées par les valeurs très élevées que peut prendre leur aimantation mais aussi par le fait que les vecteurs $\vec{H}$, $\vec{J}$ et $\vec{B}$ ne sont plus liés par une relation et encore bien moins par une relation de proportionnalité entre $\vec{J}$ et $\vec{H}$ comme pour les corps dia et paramagnétiques. Les phénomènes d'aimantation induite persistent plus ou moins après la suppression de l'excitation magnétique et *le comportement de la substance dépend non seulement des conditions actuelles dans lesquelles elle est placée, mais aussi de tous les traitements antérieurs qu'elle a subis*. On conçoit que l'étude du ferromagnétisme soit très compliquée; elle présente cependant un très grand intérêt pratique par ses importantes applications.

Sont ferromagnétiques un nombre restreint d'éléments parmi lesquels les trois métaux dits ferromagnétiques : *le fer, le nickel et le cobalt*, la plupart de leurs alliages et certains de leurs composés comme la magnétite Fe_3O_4 (l'ancienne pierre d'aimant).

11-7. Aimantation d'un barreau cylindrique. Excitation démagnétisante.

Considérons un barreau cylindrique non aimanté (longueur l , section $S = \pi R^2$) placé dans le vide. Soumettons-le brusquement à l'action d'une induction magnétique uniforme $B_0 = \mu_0 H_0$ parallèle à sa longueur, en lançant par exemple un courant dans un solénoïde très allongé au centre duquel le barreau convenablement orienté est placé.

Dans le cas des substances ferromagnétiques, comme dans celui des substances paramagnétiques, le barreau s'aimante, l'aimantation ayant

le même sens que B_0 . On peut admettre en première approximation, si R est assez petit par rapport à l , que l'aimant obtenu est solénoïdal; par suite les vecteurs $\vec{B}$, $\vec{H}$ et $\vec{J}$ sont colinéaires et liés par la relation fondamentale

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}).$$

L'excitation $\vec{H}$ est la somme de l'excitation $\vec{H}_0$ et de l'excitation démagnétisante (10-8)

$$\mathfrak{D} = -J \left[1 - \frac{1}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \right].$$

Dans le cas des substances paramagnétiques (il en serait de même pour les substances diamagnétiques en inversant le sens de J) J et $\mathfrak{D}$ sont très faibles, de sorte que l'excitation magnétique à l'intérieur du barreau est peu différente de H_0 .

Il en va autrement pour les substances ferromagnétiques, on a alors

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{H}_0 + \mathfrak{D}, \\ \vec{B} &= \mu_0(\vec{H}_0 + \mathfrak{D} + \vec{J}) = \vec{B}_0 + \mu_0(\mathfrak{D} + \vec{J}). \end{aligned}$$

L'excitation $\mathfrak{D}$, dirigée en sens inverse de J (et de H_0) est donc l'excitation démagnétisante; elle est très petite, sauf au voisinage immédiat des plages polaires, lorsque R est très petit par rapport à l (aiguille); elle est égale à $-J$ dans un disque très aplati (l petit par rapport à R).

Plaçons-nous dans le cas du barreau très allongé. Nous avons alors sensiblement

$$(1) \quad \vec{B} = \mu_0(\vec{H}_0 + \vec{J}) = \mu_0(1 + \chi)\vec{H}_0 = \mu_0\mu\vec{H}_0 = \mu\vec{B}_0,$$

comme pour une substance paramagnétique, avec les différences essentielles suivantes :

1° La susceptibilité χ et la perméabilité magnétique μ peuvent avoir des valeurs élevées (100 et même 1 000 par exemple).

2° Ces grandeurs dépendent non seulement de l'excitation H_0 mais aussi des traitements magnétiques subis par l'échantillon depuis l'état initial de non-aimantation.

De ce fait les définitions de χ et de μ ont, pour les substances ferromagnétiques, une signification bien différente de celle qui correspond aux corps dia et paramagnétiques.

Remarquons que, d'après les relations (1), nous avons

$$\vec{J} = \chi\vec{H}_0 = (\mu - 1)\vec{H}_0,$$

mais il faudrait bien se garder d'en conclure que l'intensité d'aimantation est proportionnelle à l'excitation H_0 .

11-8. Principe d'une étude expérimentale du ferromagnétisme.

Imaginons que nous ayons mis l'échantillon de substance ferromagnétique sous forme d'un barreau cylindrique très allongé et que, l'ayant coupé en son milieu (fig. 89), nous écartions les deux moitiés de façon à laisser entre elles un entrefer très



FIG. 89.

étroit. Dans la coupure, normale aux lignes d'induction, l'excitation démagnétisante est négligeable et les formules (1) du paragraphe précédent sont applicables. Si $H_0 = nI$ est l'excitation produite par un solénoïde très long entourant l'échantillon, nous avons, aussi bien dans l'entrefer que dans la substance au voisinage de la coupure, les relations

$$\mathfrak{J} = \frac{B}{\mu_0} - H_0; \quad \mu = 1 + \chi = \frac{B}{\mu_0 H_0} = \frac{B}{\mu_0 nI}.$$

L'étude de l'aimantation par mesure de $\mathfrak{J}$ et de μ peut donc se faire en mesurant l'induction B dans l'entrefer. On utilise pour cela *la balance de Cotton* (7-4) ou bien on déduit B de la mesure du flux d'induction qu'elle crée dans une bobine plate disposée dans la coupure normalement aux lignes d'induction (12-8).

On imagine aussi bien que l'échantillon soit mis sous la forme d'un tore (10-9) dont le rayon ρ du cercle générateur soit petit par rapport au rayon R du cercle lieu des centres; un courant I peut être lancé dans un fil enroulé régulièrement autour du tore. L'excitation $H_0 = nI$ (n étant le nombre de spires par unité de longueur) est alors sensiblement uniforme dans une section, l'excitation démagnétisante étant nulle dans ce cas puisque l'aimant n'a pas de pôles. On fait subir à I (et par suite à H_0) de brusques variations et l'on mesure chaque fois la variation du flux d'induction à travers des spires entourant le tore, cette mesure s'effectuant à l'aide d'un galvanomètre balistique ou d'un fluxmètre.

On peut également pratiquer un entrefer très étroit où l'on mesure B comme dans le cas du barreau cylindrique allongé; l'excitation démagnétisante n'est pas alors rigoureusement nulle mais peut être considérée comme négligeable.

En résumé, *l'étude expérimentale du ferromagnétisme utilise des conditions telles que l'excitation démagnétisante soit négligeable ou nulle*, et comporte essentiellement la mesure de l'induction magnétique B qui résulte d'une excitation magnétique $H_0 = nI$.

11-9. Caractéristiques de première aimantation.

L'aimantation d'une substance ferromagnétique dépendant de ses états antérieurs, nous allons tout d'abord étudier des échantillons initialement non aimantés ou désaimantés. Le fer, par exemple, perd ses propriétés magnétiques lorsqu'il est porté à une température supérieure à 775 °C; on le constate en chauffant un clou au rouge dans un bec Bunsen : il cesse d'être attiré par un aimant pour l'être de nouveau par refroidissement. Un barreau de fer ayant subi ce traitement est vierge de toute aimantation. D'une façon générale, les substances ferromagnétiques (Fe, Co, Ni) cessent de l'être pour devenir paramagnétiques au-dessus d'une certaine température appelée *point de Curie* (1 040 °K pour le fer, 1 380 °K pour le cobalt et 630 °K pour le nickel).

Opérant sur des échantillons qui ont été portés au-dessus de cette température, nous étudions les variations de leur aimantation en faisant croître progressivement à partir de zéro le courant I envoyé dans la bobine magnétisante par une des méthodes dont nous avons donné le principe. L'intensité d'aimantation, la perméabilité μ et la susceptibilités χ se déterminent à partir de $H_0 = nI$ et de la mesure du paragraphe précédent.

Il n'existe aucune fonction analytique $I = f(H_0)$ résultant de considérations théoriques, aussi traduit-on les résultats de l'expérience par

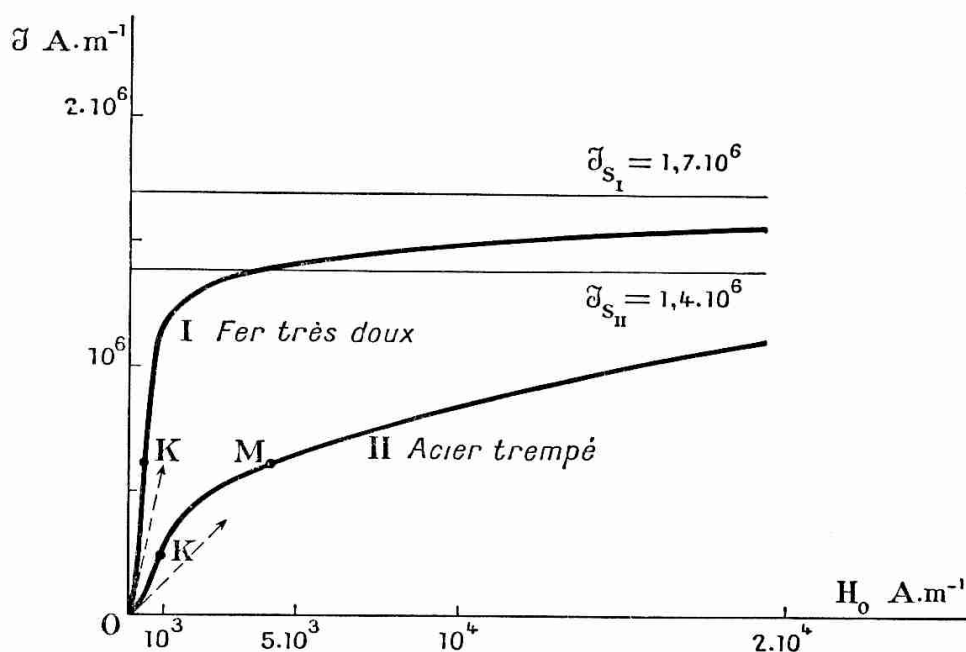


FIG. 90.

une courbe appelée *caractéristique de première aimantation*. La courbe I de la figure 90 est relative à du fer très pur (fer extra-doux), la

courbe II à un certain acier trempé. Leur allure générale est la même.

Pour les faibles excitations leur forme est parabolique avec une pente initiale non nulle, puis la pente croît très vite pour les excitations moyennes; au delà du point d'inflexion K elle diminue pour tendre vers zéro. Pour les excitations très grandes l'intensité d'aimantation tend asymptotiquement vers une valeur limite : on dit que la substance parvient à la saturation et la valeur limite $\mathfrak{J}_s$ est l'*intensité d'aimantation de saturation*. Ses valeurs, exprimées en ampères par mètre, sont pour les trois métaux ferromagnétiques :

Fer : $1,7 \cdot 10^6$; nickel : 480; cobalt : $1\,410$.

Elle est plus faible pour un acier trempé (par exemple $1,4 \cdot 10^6$ A.m⁻¹) que pour un fer très doux, pour lequel elle est particulièrement élevée. Remarquons que l'expérience donne B en fonction de H_0 et que l'on en déduit $\mathfrak{J}$; toutefois la connaissance de la courbe d'aimantation permet ultérieurement de reconstituer les valeurs de l'induction en fonction de H_0 à l'aide de la formule

$$B = \mu_0(H_0 + \mathfrak{J}).$$

La susceptibilité

$$\chi = \mu - 1 = \frac{\mathfrak{J}}{H_0}$$

est proportionnelle au coefficient angulaire de la droite OM qui joint l'origine au point M sur la courbe $\mathfrak{J} = f(H_0)$, compte tenu des différences d'échelle des abscisses et des ordonnées. Sa valeur χ_i et par suite aussi la perméabilité μ_i initiales (pour $H_0 = 0$) ne sont pas nulles : par exemple $\chi_i = 320$ pour le fer extra-doux, $\chi_i = 42$ pour un certain acier trempé; on a d'ailleurs

$$\mu_i = \chi_i + 1 \simeq \chi_i.$$

Partant de μ_i (fig. 91) la perméabilité augmente rapidement pour atteindre un maximum μ_M , de l'ordre de 15 000 pour un fer très doux, puis elle décroît pour tendre vers 1 à la saturation (χ tendant vers zéro). Pour certains alliages comme le *supermalloy* (alliage de fer-nickel-molybdène), pour lequel $\mu_M = 800\,000$, la perméabilité maximale a des valeurs exceptionnellement élevées; par contre, pour les aciers ordinaires, elle est inférieure à celle du fer doux (par exemple 4 000).

La perméabilité conserve cependant une valeur considérable pour des excitations déjà élevées; pour la plupart des matériaux ferromagnétiques elle ne tombe au-dessous de 100 que pour $H_0 > 20\,000$ A.m⁻¹; il en résulte que les courbes $\mu(H_0)$ et $\chi(H_0)$ sont pratiquement confondues et ne se séparent qu'à la saturation puisque μ tend vers 1 alors que χ tend vers zéro. Il en découle également que les courbes de $\frac{B}{\mu_0}$ et de $\mathfrak{J}$ en

fonction de H_0 sont peu différentes dans les mêmes conditions. Toutefois, pour les valeurs très élevées de H_0 , $\mathfrak{J}$ demeurant pratiquement constant

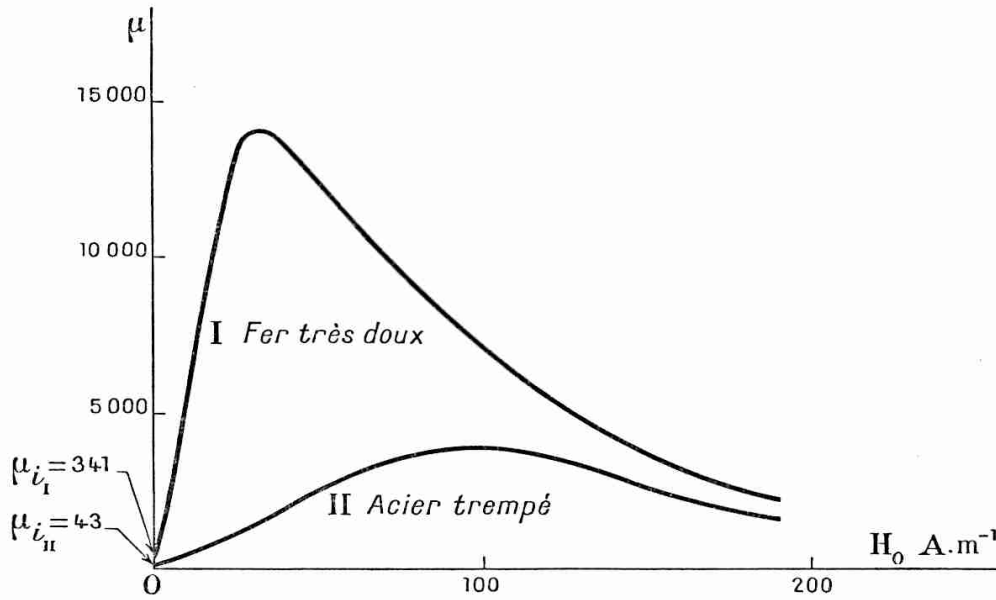


FIG. 91.

et égal à $\mathfrak{J}_s$, B est peu différent de $\mu_0 H_0$, de sorte que la substance ferromagnétique se comporte alors comme le vide.

11-10. Hystérésis. Cycle d'hystérésis. Énergie d'aimantation.

Un échantillon de substance ferromagnétique ayant subi un traitement de première aimantation,

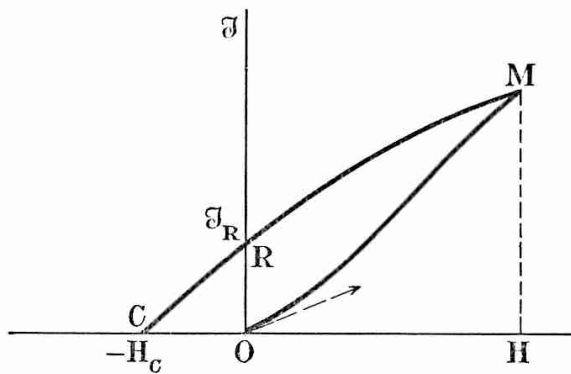


FIG. 92.

le point figuratif de la courbe $\mathfrak{J} = f(H_0)$ a décrit l'arc OM (fig. 92), le point M correspondant à l'excitation H et à l'aimantation $\mathfrak{J}$. Si l'on fait décroître progressivement l'excitation magnétisante à partir de H on observe que l'aimantation diminue en conservant une intensité supérieure à celle qu'elle avait pour les valeurs croissantes de H,

autrement dit l'arc de courbe correspondant est au-dessus de la courbe de première aimantation. C'est le *phénomène de l'hystérésis*.

En particulier lorsque l'excitation s'annule (point R) il reste une *aimantation rémanente* $\mathfrak{J}_R$ qu'on fait disparaître en créant une excitation négative $-H_C$ appelée *excitation coercitive* (point C).

Supposons maintenant que l'excitation varie entre deux valeurs opposées H_M et $-H_M$ (fig. 93). Après quelques variations, à l'« aller »

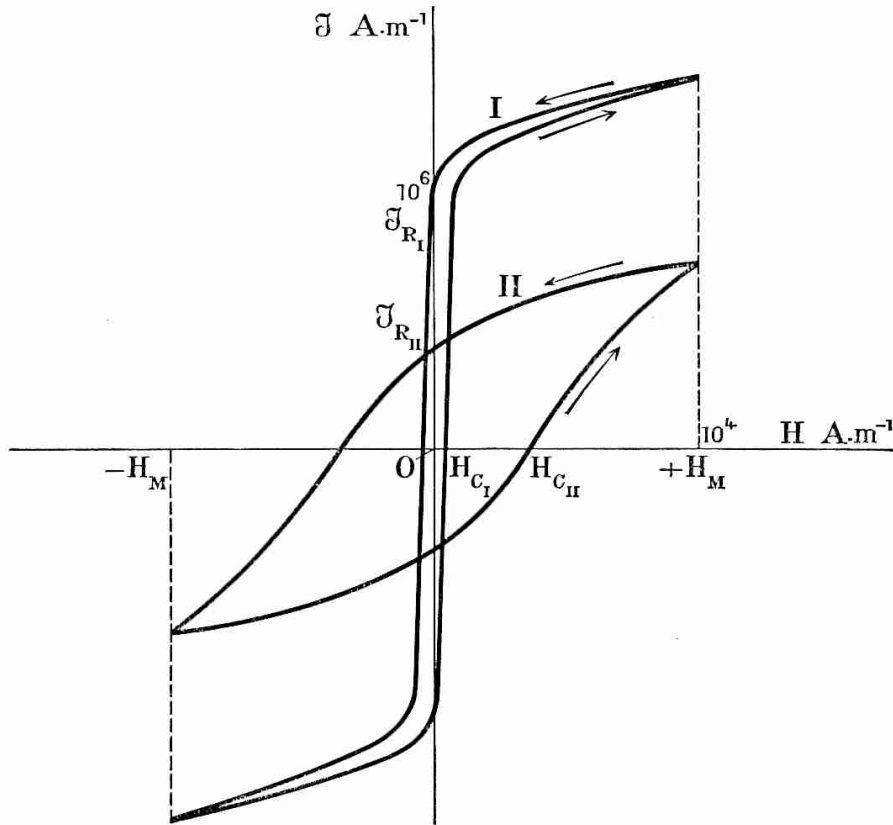


FIG. 93.

de $-H_M$ à $+H_M$, au « retour » de $+H_M$ à $-H_M$, le point figuratif du diagramme $B = f(H)$ décrit une courbe fermée appelée *cycle d'hystérésis*; cette courbe est symétrique par rapport à l'origine O des coordonnées. Les « pointes » du cycle sont légèrement différentes de celles que l'on obtiendrait pour une première aimantation; toutefois, si H_M a une valeur suffisamment grande, la valeur absolue B_m de l'aimantation correspondante approche la valeur B_s de saturation.

L'aimantation $+B_R$ ou $-B_R$ qui subsiste pour $H = 0$ est l'aimantation rémanente; l'excitation $+H_C$ ou $-H_C$, pour laquelle l'aimantation est nulle, est l'excitation coercitive.

Pour faire varier l'aimantation il faut dépenser une certaine énergie. L'excitation magnétisante variant de $+H_M$ à $-H_M$ puis de $-H_M$ à $+H_M$ par suite, par exemple, du passage d'un courant alternatif de fréquence f dans la bobine magnétisante,

$$H = H_M \cos 2\pi f t.$$

De l'énergie électrique a été dépensée, la substance étant revenue à son état initial. L'expérience montre qu'une énergie équivalente apparaît sous forme de chaleur dans le volume du matériau ferromagnétique

qui a accompli un cycle d'hystérésis. On démontre que *cette dissipation d'énergie par hystérésis est proportionnelle au volume du corps et à l'aire du cycle d'hystérésis.*

11-11. Matériaux ferromagnétiques. Alliages magnétiques.

Le ferromagnétisme joue un rôle important dans l'électrotechnique, aussi s'est-on préoccupé de rechercher des matériaux dotés de propriétés magnétiques répondant à des buts déterminés; la plupart d'entre eux sont des alliages constitués par des métaux ferromagnétiques (Fe, Ni, Co), et plus particulièrement du fer, associés à des métaux (Al, Co, Cu) ou métalloïdes (Si) non ferromagnétiques. Les traitements thermiques (trempe et recuit) qui influent à la fois sur l'état physique et sur l'état chimique de ces alliages qui peuvent être qualifiés d'*aciers spéciaux*, la présence de traces d'impuretés, peuvent modifier beaucoup leur comportement magnétique.

Nous savons qu'on ne peut pas parler de perméabilité d'un matériau ferromagnétique puisque cette grandeur est sous la dépendance de nombreux facteurs; cependant, le facteur le plus important étant l'excitation, des ordres de grandeur dans des conditions d'emploi déterminées sont souvent suffisants. Le cycle d'hystérésis correspondant à une valeur maximale convenable H_m de l'excitation fournit des renseignements plus complets; son tracé fixe les valeurs de l'aimantation rémanente et de l'excitation coercitive, l'aire du cycle permet une évaluation des pertes d'énergie par hystérésis.

1° Matériaux de grande perméabilité.

Dans certains appareils, et en particulier dans les électro-aimants, on recherche des valeurs élevées de $\mathcal{J}$ et de B pour des excitations plus ou moins élevées. On a intérêt à utiliser le matériau au voisinage du maximum μ_m de la perméabilité; pour de plus grandes valeurs de l'excitation, le gain sur $\mathcal{J}$ et sur B devient de plus en plus faible.

A ce point de vue le fer très pur (fer électrolytique, fer Armco) convient bien puisqu'il permet d'atteindre $\mu_m = 20\,000$ pour une excitation de l'ordre de $30\text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$, mais ce matériau est coûteux. L'adjonction de silicium au fer très doux donne des produits de haute perméabilité (μ de l'ordre de plusieurs dizaines de milliers).

On recherche également des alliages dotés d'une très grande perméabilité pour les très faibles excitations; un alliage de fer à 78,5% de nickel, le *permalloy*, permet d'atteindre $\mu \simeq 100\,000$ pour une excitation de l'ordre de quelques ampères par mètre. L'adjonction d'un peu de molybdène (*supermalloy*) donne des résultats encore plus remar-

quables. Ajoutons qu'avec ces alliages la saturation est atteinte pour de faibles excitations.

Il est intéressant de concrétiser la notion de perméabilité en faisant intervenir les lignes et le flux d'induction. Considérons un espace où l'on a créé une induction uniforme $B_0 = \mu_0 H_0$; les lignes d'induction y sont parallèles. Introduisons un barreau cylindrique très allongé de façon que son axe soit parallèle à B_0 : on a alors sensiblement en un point du milieu ferromagnétique (11-1)

$$\vec{B} = \mu \vec{B}_0 = \mu \mu_0 \vec{H}_0.$$

L'induction extérieure à l'aimant ainsi constitué est elle-même modifiée (fig. 94), les lignes d'induction, demeurées parallèles loin du barreau où B_0 n'a pas été perturbé, s'infléchissent au voisinage des faces terminales. Le fer doux, substance ferromagnétique de grande perméabilité, canalise et concentre les lignes d'induction; il se comporte comme s'il était beaucoup plus perméable que

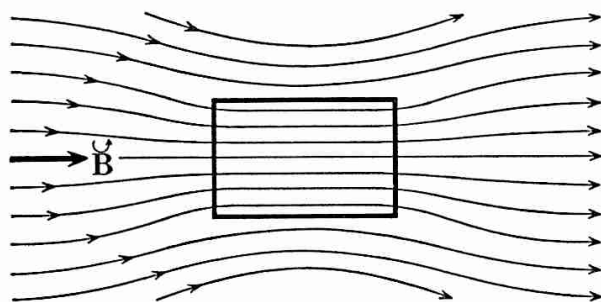


FIG. 94.

le vide au flux d'induction, d'où le nom de perméabilité donné à la grandeur μ . Le phénomène serait beaucoup moins marqué avec un corps paramagnétique; dans une substance diamagnétique par contre, les lignes d'induction seraient moins nombreuses que dans le vide. Le phénomène est général et peut être d'ailleurs concrétisé par un spectre magnétique :

Un corps ferromagnétique rassemble et concentre les lignes d'induction d'autant plus que sa perméabilité est plus grande.

Si le corps a une forme quelconque il n'est plus possible de calculer B mais le phénomène subsiste qualitativement. On peut remplacer le barreau par un corps creux, un cylindre creux par exemple (fig. 95) dont l'axe est perpendiculaire à B_0 ; les lignes d'induction passent alors dans son épaisseur, il n'y en a pratiquement plus à l'intérieur où l'induction est devenue nulle. Le corps ferromagnétique protège donc la région intérieure des actions magnétiques extérieures : il constitue un écran

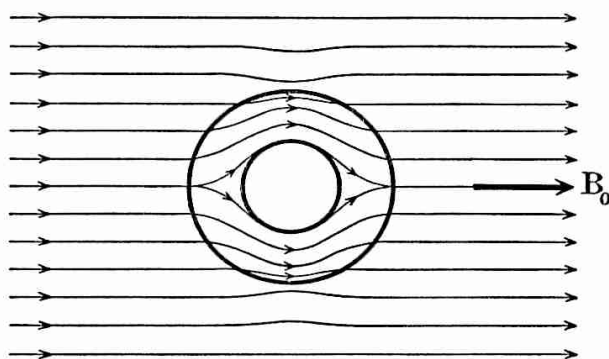


FIG. 95.

magnétique. La protection est d'autant plus efficace que la perméabilité est plus grande; par exemple un appareil enfermé dans une cage de permalloy est parfaitement soustrait à l'action de l'induction terrestre ou de toute autre induction faible, mais il subit par contre l'influence d'inductions intenses pour lesquelles, la saturation de l'alliage étant atteinte, la perméabilité devient voisine de 1.

2° Matériaux à faibles pertes par hystérésis.

Les machines à courant alternatif (alternateurs, moteurs et transformateurs) de même que les machines à courant continu comme les dynamos, comportent un circuit magnétique dont le matériau ferromagnétique décrit des cycles d'hystérésis. De ce fait, de l'énergie est dissipée sous forme de chaleur; pour réduire ces pertes au maximum il faut que le matériau ait un cycle d'hystérésis de faible surface: le fer doux satisfait bien à cette condition.

Nous verrons plus loin (Partie III) que la substance magnétique est parcourue par des courants induits appelés courants de Foucault, auxquels correspond une perte d'énergie sous forme de chaleur par effet Joule. Pour réduire cette deuxième « perte dans le fer » il faut un matériau de faible conductivité; l'addition de quelques pour cent de silicium au fer industriel satisfait à cette deuxième condition tout en ayant un cycle très « fuselé », de sorte que ce matériau est utilisé dans les machines modernes pour diminuer les deux types de « pertes dans le fer ».

3° Matériaux pour aimants permanents.

Considérons un barreau ferromagnétique allongé entouré d'une bobine magnétisante. Supposons qu'il subisse la première aimantation; nous faisons croître le courant d'excitation de zéro à I de façon que l'excitation extérieure ait la valeur $H_0 = nI$. L'excitation en un point est

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{\mathcal{D}},$$

du fait de l'excitation démagnétisante $\vec{\mathcal{D}}$ (11-7) créée par les plages polaires. $\vec{\mathcal{D}}$ est en sens inverse de $\vec{J}$ et de $\vec{H}_0$, de sorte que l'on a entre les modules la relation

$$H = H_0 - \mathcal{D}.$$

Le module $\mathcal{D}$ de l'excitation démagnétisante, variable le long du barreau, est minimal au centre, maximal aux extrémités.

Diminuons le courant d'excitation à partir de I ; le point figuratif

de l'état magnétique en un point dans le diagramme $\mathfrak{J} = f(H)$ qui était en M après aimantation (fig. 96) atteint le point R pour lequel $H = 0$ avant que le courant d'excitation soit nul, pour une excitation extérieure H'_0 telle que

$$H = 0 = H'_0 - \mathfrak{D}.$$

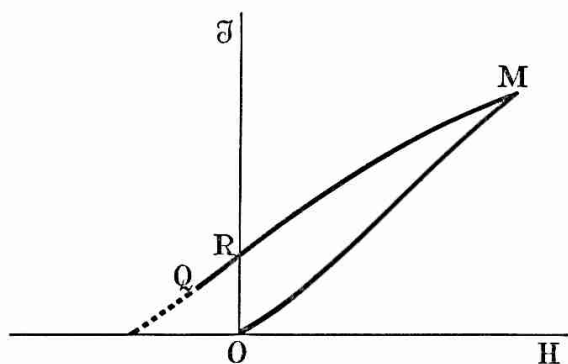


FIG. 96.

Lorsque le courant s'annule le barreau se trouve dans une excitation négative, l'excitation démagnétisante, et le point figuratif du diagramme Q corres-

pond à l'aimantation rémanente pratique.

Si l'excitation coercitive de la substance est faible et si le barreau est court, l'excitation démagnétisante est suffisante en tous les points pour que la désaimantation se produise dès que le courant d'excitation s'annule. Par contre, pour un long barreau de la même substance, $\mathfrak{D}$ est faible sauf au voisinage des extrémités où la désaimantation va se produire, mais elle gagnera de proche en proche tout l'aimant; en effet, un aimant dont les extrémités sont désaimantées équivaut à un aimant plus court.

En résumé, un barreau d'une substance de faible excitation coercitive se désaimante même s'il est très long; c'est le cas du fer doux.

Les considérations précédentes nous fixent les conditions d'obtention et de conservation d'aimants permanents:

a) *Choix du matériau.* Un matériau ferromagnétique pour aimants permanents doit présenter une excitation coercitive élevée; cette condition est nécessaire; comme d'autre part on a souvent besoin d'une aimantation intense (aimants de galvanomètres, de boussoles,...), il faut de plus que l'aimantation rémanente pratique soit assez forte. Ces deux conditions entraînent que l'aire du cycle d'hystérésis doit être grande (cycle enflé).

Le fer très doux, comme le montre la figure 93, présente bien une aimantation rémanente élevée ($\mathfrak{J}_R = 1,2 \cdot 10^6 \text{ A.m}^{-1}$ après saturation) mais son excitation coercitive est très faible ($H_C = 100 \text{ A.m}^{-1}$ après saturation), il ne convient donc pas à la fabrication d'aimants permanents. Par contre un certain acier trempé pour lequel $\mathfrak{J}_R = 0,7 \cdot 10^6 \text{ A.m}^{-1}$ et $H_C = 4\,000 \text{ A.m}^{-1}$ est un matériau convenable pour aimants à bon marché. Certains aciers contenant de l'aluminium, du nickel et du cobalt (alnico) ont des propriétés magnétiques qui permettent de fabriquer de courtes aiguilles fortement aimantées d'une façon très stable; par exemple un *alnico*, tout en possédant une aimantation rémanente très suffisante, $\mathfrak{J}_R = 10^6 \text{ A.m}^{-1}$, a une excitation coercitive s'élevant à $50\,000 \text{ A.m}^{-1}$.

b) *Conservation des aimants.*

La stabilité d'un aimant est conditionnée par son excitation coercitive; cependant, même lorsque celle-ci est élevée, la désaimantation se produit lente-

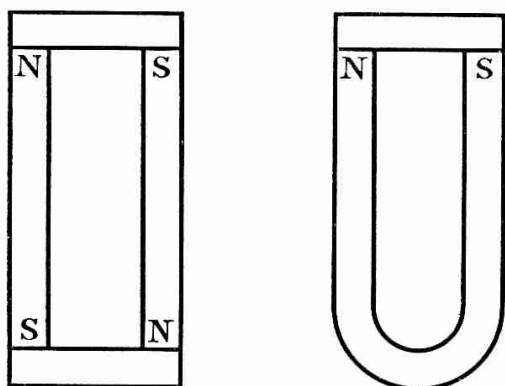


FIG. 97.

ment sous l'action de l'excitation démagnétisante. Or celle-ci serait nulle si l'aimant n'avait pas de pôles (aimant torique), aussi pour conserver les aimants convient-il de fermer leur circuit magnétique à l'aide de pièces de fer doux. A cet effet les aimants droits sont associés tête-bêche par paire avec deux armatures, une seule armature suffit pour un aimant en U (fig. 97). L'excitation démagnétisante se trouve fortement réduite par l'appar-

ition sur les pièces de fer doux de pôles de noms contraires de ceux des aimants. On conçoit que le procédé ne puisse être appliqué pour des aiguilles constamment en service et que pour elles, des matériaux de très grande excitation coercitive soient nécessaires.

11-12. Circuits magnétiques (fig. 98).

Un circuit magnétique est formé d'un corps magnétique qui le plus souvent est un matériau de grande perméabilité comme le fer doux; il constitue un circuit plus ou moins fermé, le cas idéal étant celui d'un tore interrompu par un entrefer très étroit. Sur la partie ferromagnétique du circuit, appelée noyau ou carcasse, est enroulée une bobine (ou plusieurs bobines); nous nous plaçons dans le cas simple de N spires parcourues dans le même sens par un courant d'intensité I .

L'entrefer, d'épaisseur e , est dans l'air, assimilable au vide au point de vue magnétique; comme il est supposé très étroit par rapport à la longueur moyenne l du circuit magnétique ($l \simeq l - e$), nous pouvons admettre que les lignes d'induction sont canalisées aussi bien dans le corps ferromagnétique que dans le vide (on dit qu'il n'y a pas de fuites magnétiques), autrement dit que le flux d'induction Φ a une valeur constante à travers les sections du circuit.

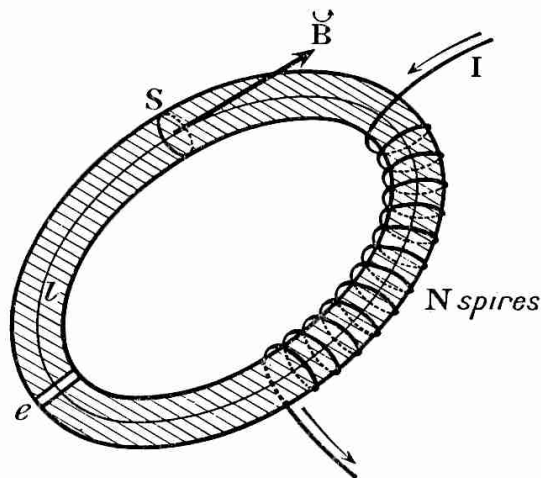


FIG. 98.

Les vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ en un point sont liés par la relation

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H},$$

μ étant égal à 1 dans l'entrefer. Supposons pour simplifier que les dimensions transversales soient petites par rapport à la longueur moyenne l du circuit magnétique: on peut dans ces conditions admettre que B est uniforme dans une section S .

Appliquons le théorème d'Ampère au vecteur excitation magnétique puisque le parcours fermé de longueur l n'est pas entièrement dans le vide; nous avons

$$\oint H \cdot dl = NI,$$

et comme

$$B = \mu \mu_0 H = \frac{\Phi}{S},$$

$$\frac{\Phi}{\mu_0} \oint \frac{dl}{\mu S} = NI,$$

d'où

(1)

$$\Phi = \frac{NI}{\oint \frac{dl}{\mu_0 \mu S}}.$$

$\mathcal{F} = NI$ s'appelle *la force magnétomotrice*; elle s'exprime en ampères-tours et caractérise le circuit électrique; quant à la grandeur

$$\mathcal{R} = \oint \frac{dl}{\mu_0 \mu S},$$

caractéristique du circuit magnétique, elle est sa *réluctance*. Par suite de ces définitions la relation (1) s'écrit

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}}.$$

Celle-ci rappelle l'expression de la loi de Pouillet, $\mathcal{F}$ jouant le rôle de la force électromotrice E , Φ celui d'une intensité électrique; quant à la réluctance $\mathcal{R}$, prenant la place d'une résistance électrique R , son expression est semblable à celle de

$$R = \oint \frac{dl}{\gamma S},$$

$\mu_0 \mu$ remplaçant la conductivité γ . Bien entendu l'analogie est purement formelle, les grandeurs en jeu étant complètement différentes.

Pour un circuit homogène ($\mu = \text{Cte}$) et de section constante S , nous avons dans le corps ferromagnétique

$$H = \frac{\Phi}{\mu_0 \mu S},$$

dans le vide

$$H = \frac{\Phi}{\mu_0 S},$$

par suite

$$\oint H \cdot dl = \frac{\Phi}{\mu_0} \left(\int_0^l \frac{dl}{\mu S} + \int_0^e \frac{dl}{S} \right) = \Phi \left(\frac{l}{\mu_0 \mu S} + \frac{e}{\mu_0 S} \right) = NI;$$

d'où

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu_0 \mu S} + \frac{e}{\mu_0 S}.$$

μ étant grand par rapport à l'unité, la réluctance d'un entrefer même étroit peut être prépondérante par rapport à celle de la partie ferromagnétique du circuit; par exemple, pour $\mu = 2\,000$, la réluctance d'un entrefer de 1 mm est égale à celle de 2 mètres de fer.

La perméabilité relative μ n'est d'ailleurs pas une grandeur bien définie puisqu'elle dépend non seulement de l'induction B , et par suite du nombre d'ampères-tours magnétisants, mais aussi des phénomènes d'hystérésis. Cependant, dans le cas du fer doux et des alliages de grande perméabilité, l'aire du cycle d'hystérésis est suffisamment réduite pour qu'on puisse en confondre les deux branches. Dans ces conditions on prend généralement comme donnée l'induction B que l'on désire obtenir dans l'entrefer, on en déduit la valeur de μ , celle de $\mathcal{R}$ et par suite le nombre d'ampères-tours NI nécessaire pour obtenir B .

Ajoutons que l'on sait calculer la réluctance de circuits magnétiques, au moins en première approximation, et que, dans le cas d'entrefers plus ou moins larges, des formules empiriques tiennent compte des fuites magnétiques.

TROISIÈME PARTIE

PHÉNOMÈNES
D'INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE
ET D'AUTO-INDUCTION

Chap. XII. — Phénomènes d'induction magnétique.

Chap. XIII. — Auto-induction. Inductance mutuelle. Régimes variables.

CHAPITRE XII

PHÉNOMÈNES D'INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

12-1. Expériences. Lois qualitatives.

Des expériences nombreuses et variées mettent en évidence la production de courants induits dans un circuit; nous allons en décrire quelques-unes en vue de vérifier les lois qualitatives fondamentales suivantes:

Loi générale.

Un circuit fermé conducteur est parcouru par un courant, appelé courant induit, chaque fois que le flux d'induction magnétique qui le traverse subit une variation.

Loi de Lenz.

Le sens du courant induit est celui pour lequel le flux d'induction qu'il crée dans le circuit s'oppose à la variation de flux qui lui a donné naissance.

Nous appellerons *induit* le circuit dans lequel le courant induit prend naissance par variation du flux inducteur et *inducteur* le système, aimant ou courant, producteur de ce flux. Nous intercalons un galvanomètre dans le circuit de l'induit.

1° Variation du flux inducteur par déplacement relatif par rapport à l'induit.

L'induit est constitué par une bobine reliée à un galvanomètre (fig. 99), le pôle nord d'un aimant droit (inducteur) est placé devant

la face F de la bobine. On introduit l'aimant dans l'induit, on constate que le sens du courant induit est celui pour lequel F est une face nord. Le flux

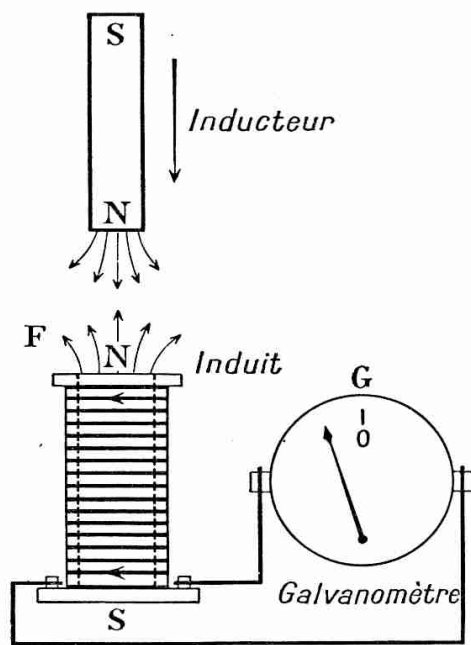


FIG. 99.

reçu par l'induit a augmenté au cours de l'opération, le flux créé par le courant a le signe contraire du flux inducteur de façon à contrarier son accroissement.

Entre le pôle nord et la face nord s'exercent des forces répulsives; l'opérateur a fourni un travail positif et l'énergie correspondante se retrouve sous forme de chaleur par effet Joule dans l'induit. Nous voyons donc que *la loi de Lenz est une simple conséquence du principe de la conservation de l'énergie.*

Si nous recommençons l'expérience en donnant à l'aimant un déplacement plus rapide, on constate que l'intensité du courant est plus grande mais le courant induit passe pendant un temps plus court, celui que dure le déplacement.

Le sens du courant induit est inversé si l'on sort le pôle nord de la bobine: la face F devient une face sud; par suite le flux créé par le courant induit a le signe du flux inducteur et tend à contrarier la diminution de celui-ci, de sorte que l'opérateur doit encore fournir un travail positif puisque entre face et pôle de noms contraires s'exercent des forces attractives. Enfin, si nous retournons l'aimant, l'approche de son pôle sud fait naître un courant induit dont le sens est tel que F soit une face sud; son éloignement inverse le sens du courant, F devenant une face nord.

Les phénomènes que nous venons de décrire ne sont pas modifiés si, l'aimant restant fixe, on déplace la bobine par rapport à lui. *Seul compte donc le déplacement relatif de l'un par rapport à l'autre.*

Dans les expériences précédentes *l'aimant inducteur peut être remplacé par une bobine parcourue par un courant I.* Le rapprochement relatif d'une face nord (ou sud) entraîne la naissance d'un courant induit dont le sens est tel que la face correspondante de l'induit soit une face nord (ou sud), donc une face de même nom. Autrement dit, pour un rapprochement relatif, les courants inducteur et induit ont le même sens, pour un éloignement relatif, ils ont des sens contraires; par suite, dans le premier cas les forces exercées entre les faces en regard sont répulsives, et elles sont attractives dans le second. Nous pouvons donc ici donner l'expression particulière suivante à **la loi de Lenz** :

Les forces électromagnétiques qui s'exercent entre l'inducteur (aimant ou courant) et l'induit s'opposent au déplacement relatif de l'un par rapport à l'autre.

Nous pourrions multiplier la forme des expériences vérifiant la conclusion précédente. Si nous reprenons l'expérience des rails conducteurs (7-3, 2°) en remplaçant le générateur par un galvanomètre et si un opérateur exerce une force F pour déplacer le pont conducteur, on vérifie que le sens du courant induit est toujours celui pour lequel la force électromagnétique donnée par la loi de Laplace a le sens contraire du déplacement, donc le sens contraire de F . Le travail de la force exercée par l'opérateur (force motrice) est donc positif, celui de la force électromagnétique qui résulte du courant induit, négatif.

2° Variation du flux inducteur non liée à un déplacement.

Le circuit induit comporte une bobine B reliée à un galvanomètre G (fig. 100); l'inducteur est une seconde bobine B' logée à l'intérieur de la

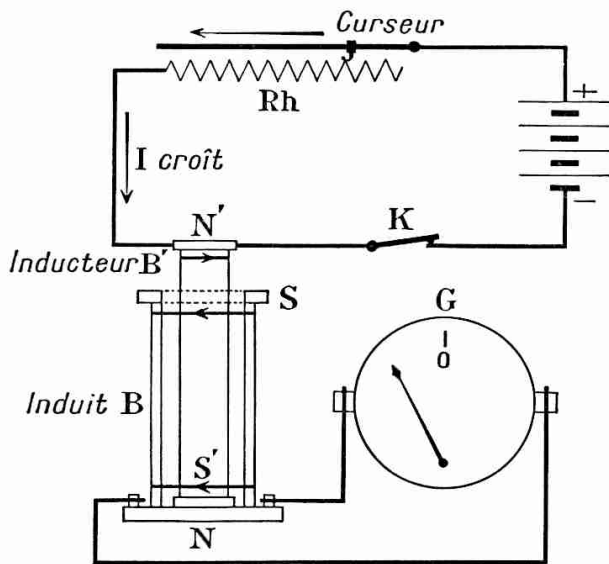


FIG. 100.

première et faisant partie d'un circuit inducteur comprenant un générateur, un rhéostat Rh et un interrupteur K .

Les deux bobines étant immobiles l'une par rapport à l'autre, nous faisons passer un courant d'intensité I dans B' , dans un sens ou dans l'autre (en intervertissant les connexions aux pôles du générateur). En agissant sur le rhéostat nous avons la possibilité de faire varier I et, grâce à l'interrupteur, de lancer le courant I ou de le supprimer.

Supposons, pour fixer les idées, que les connexions soient telles que la face intérieure de B' soit une face nord. Fermons l'interrupteur K : le galvanomètre accuse un courant induit dont le sens est tel que la face inférieure de B soit une face sud; le flux dû au courant induit a donc le signe contraire de celui du flux inducteur, il tend ainsi à contrarier l'accroissement de celui-ci.

Nous obtenons un résultat semblable par croissance de I en agissant sur le rhéostat. Par contre, si nous ouvrons l'interrupteur, l'intensité variant de I à zéro, ou si nous agissons sur le rhéostat de façon que I diminue, le courant induit a un sens tel que son flux a le signe du flux inducteur; il tend donc à s'opposer à la décroissance de celui-ci.

En résumé :

Le sens du courant induit est tel, conformément à la loi de Lenz, qu'il produit un flux de même signe que le flux inducteur si celui-ci décroît (courants inducteur et induit ont le même sens), et un flux de signe contraire du flux inducteur si celui-ci croît (courants inducteur et induit ont des sens contraires).

Au point de vue énergétique, l'énergie du courant induit qui apparaît sous forme de chaleur par effet Joule dans les expériences que nous venons de décrire est fournie par le générateur du circuit inducteur, alors qu'elle était fournie par un opérateur lorsque la naissance du courant était liée à un déplacement.

3° Courant induit par variation de la perméabilité à l'intérieur de la bobine inductrice.

Reprenons le dispositif précédemment utilisé, la bobine inductrice B' étant logée à l'intérieur de la bobine induite B . Introduisons un noyau de fer doux dans B' parcourue par un courant constant de façon à augmenter le flux d'induction Φ , on constate le passage d'un courant induit dont le sens est celui qui correspond à un accroissement du courant inducteur. La déviation du galvanomètre est d'ailleurs beaucoup plus grande que dans les expériences précédentes, cela est dû à la grande perméabilité du fer doux qui provoque un très fort accroissement du flux d'induction (11-11, 1°). Inversement, si l'on retire le noyau de fer doux, le courant induit a le même sens qu'à la rupture du courant inducteur.

Ces dernières expériences montrent nettement que :

Le flux dont la variation produit le courant induit est celui du vecteur induction magnétique,

et non pas celui du vecteur excitation magnétique. On pouvait le prévoir puisque le flux de l'excitation magnétique, non conservatif, dépend de la surface limitée au circuit qui sert à son calcul tandis que le flux d'induction, conservatif, en est indépendant.

12-2. Force électromotrice d'induction. Formule fondamentale.

Considérons (fig. 101) un circuit linéaire conducteur C dans une induction magnétique B , et une surface S limitée par C . Le flux d'induction étant conservatif, sa valeur Φ est indépendante du choix de S .

Distinguons les faces de S pour que Φ soit positif; cela revient à choisir une normale positive et un sens de circulation sur C liés par la convention de rotation. Nous avons

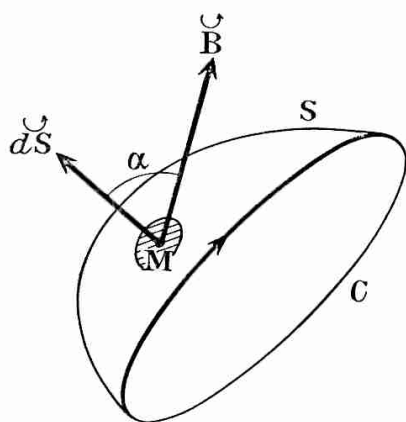


FIG. 101.

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S B dS \cos \alpha.$$

Un courant induit naît dans le circuit lorsqu'on fait varier Φ d'une façon quelconque :

a) *Par déplacement du circuit* (rotation ou translation), supposé indéformable, dans l'induction B supposée fixe.

b) *Par déformation du circuit* (nous reviendrons plus loin sur cette possibilité).

c) *Par variation de l'induction magnétique B* , le circuit étant fixe et rigide. Ce résultat est obtenu par déplacement de l'inducteur (aimant ou courant) ou par variation de l'intensité du courant dans un circuit inducteur fixe.

d) *Par modification de la nature du milieu*, donc de sa perméabilité.

Le fait qu'à l'instant t le courant induit a une intensité i suppose l'existence à cet instant d'une force électromotrice e que nous appelons *force électromotrice d'induction*. Les expériences décrites précédemment montrent que l'intensité i , et par suite la force électromotrice e , sont d'autant plus grandes que la variation du flux inducteur, $d\Phi$ pendant le temps dt , est plus rapide, autrement dit que le module de $\frac{d\Phi}{dt}$ est plus grand.

Nous établirons (12-4) que si le circuit induit se déplace dans un champ magnétique invariable, la force électromotrice e est donnée en module par

$$|e| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|.$$

L'expérience montre, avec les restrictions du paragraphe suivant (12-3), que cette expression est toujours valable, quelle que soit la façon dont on réalise la variation du flux inducteur. Elle résulte en définitive de l'égalité $|ei dt| = |i d\Phi|$ de l'énergie électrique et de l'énergie fournie par le milieu extérieur.

Cherchons à rendre compte de la loi de Lenz de façon à obtenir la relation entre les valeurs algébriques :

a) *Si le flux inducteur croît*, $\frac{d\Phi}{dt} > 0$, le courant induit a le sens pour

lequel le flux induit a le signe contraire du flux inducteur : i et e sont négatifs.

b) Si le flux inducteur décroît, $\frac{d\Phi}{dt} < 0$, le courant induit a le sens pour lequel le flux induit a le signe du flux inducteur : i et e sont positifs.

Par suite e et $\frac{d\Phi}{dt}$ sont de signes contraires: $e = -\frac{d\Phi}{dt}$.

Si le circuit induit est ouvert, $i d\Phi$ est nul; on vérifie expérimentalement à l'aide d'un électromètre qu'il existe une différence de potentiel égale à e aux bornes du circuit, qui se comporte comme un circuit fermé de résistance infinie; la relation précédente reste valable.

En résumé, **la formule fondamentale**

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

donne la force électromotrice d'induction.

Considérons le cas très général où le circuit induit comprend des générateurs et des récepteurs. L'application de la formule fondamentale se fait alors de la façon suivante :

Nous choisissons un sens positif suivant lequel nous comptons les intensités et les forces électromotrices. Ce choix entraîne celui de la normale positive à une surface S limitée par le contour du circuit; le flux d'induction est alors compté positivement dans le sens de cette normale. Si $d\Phi$ est positif, e , négatif, est une force contre-électromotrice; c'est une force électromotrice, $e > 0$, si $d\Phi$ est négatif.

12-3. Restrictions dans l'application de la formule fondamentale.

Avant d'aborder l'étude des phénomènes d'induction nous n'avions envisagé que des courants d'intensité constante (courants continus), autrement dit des *circuits en régime permanent*. L'intervention de forces électromotrices d'induction nous amène à considérer des *courants variables*.

Nous admettons que toutes les lois des courants continus, les lois d'Ohm et de Joule, la loi de Faraday relative à l'électrolyse, la loi fondamentale d'Ampère, sont applicables aux courants variables, cela revient à supposer que l'intensité i du courant à l'instant t est la même en tous les points du circuit.

Cette hypothèse n'est en fait pas toujours valable; elle l'est dans la mesure où l'on peut négliger la capacité des conducteurs et les phénomènes de propagation de l'induction magnétique avec une vitesse finie à partir du circuit qui la produit.

De même, la résistance d'un conducteur est plus grande pour les courants rapidement variables que pour les courants continus; la densité de courant cesse d'être constante dans une section d'un conducteur, le courant passant dans une mince couche à la surface du conducteur (*effet de peau ou effet pelliculaire*). En fait les restrictions précédentes ne jouent que pour les courants de haute fréquence.

Il importe de préciser quel est le flux Φ dont la dérivée par rapport au temps fournit le module de la force électromotrice induite e . Il n'y a pas de difficulté si l'induit est en circuit ouvert, le courant induit étant nul, le flux Φ est bien celui, Φ_E , envoyé par l'induction à travers la surface de l'induit. Il n'en est plus ainsi lorsque l'induit est en circuit fermé : Φ est alors la somme algébrique,

$$\Phi = \Phi_E + \Phi_i,$$

du flux Φ_E envoyé par l'inducteur et du flux induit Φ_i ; ce dernier ayant le signe de Φ_E si Φ_E est décroissant, le signe contraire si Φ_E est croissant. Tenir compte de Φ_i revient à faire intervenir les phénomènes d'auto-induction (Chap. XIII); ceux-ci sont assez souvent négligeables, et l'on peut alors confondre Φ avec Φ_E .

Ajoutons que si l'induit comporte un générateur de courant continu, l'intensité I dans l'induit est la somme algébrique

$$I = I' + i$$

du courant induit i et de l'intensité I' qui passerait dans le circuit en l'absence de Φ_E variable. I' étant constant, il n'y a pas lieu de tenir compte, dans l'expression de Φ , du flux dû à I' puisque sa dérivée par rapport au temps est nulle.

Remarquons enfin, toujours par l'intervention des phénomènes d'auto-induction, que le courant induit ne s'annule pas à l'instant même où le flux extérieur Φ_E cesse de varier; il ne s'annulerait instantanément, donc d'une façon discontinue, que si l'inductance propre L (Chap. XIII) de l'induit était nulle; en fait celle-ci est fréquemment très faible.

12-4. Induction dans un circuit se déplaçant dans une induction magnétique invariable.

Considérons un circuit conducteur fermé de résistance R , contenant un générateur de force électromotrice constante E , placé dans une induction magnétique invariable. Il est soumis à un système de forces électromagnétiques puisqu'il est parcouru par un courant d'intensité

$$I_0 = \frac{E}{R} \text{ lorsqu'il est immobilisé.}$$

Si le flux d'induction à travers le circuit varie de Φ à $\Phi + d\Phi$ du fait d'un petit déplacement entre les instants t et $t + dt$, le travail des forces électromagnétiques est (8-4)

$$dW = I d\Phi.$$

Nous distinguons trois cas :

1° Le travail dW est positif.

C'est le cas où le déplacement s'effectue sous l'action des forces électromagnétiques : *le système est moteur*. $d\Phi$ est alors positif, le flux à travers le circuit est croissant (8-7). Par ailleurs le circuit est le siège d'une force électromotrice d'induction e .

L'expérience montre que le travail dW est emprunté au générateur; comme d'autre part l'énergie $RI^2 dt$ est fournie au milieu extérieur sous forme de chaleur par effet Joule, le principe de la conservation de l'énergie s'exprime par

$$EI dt = RI^2 dt + dW = RI^2 dt + I d\Phi,$$

par suite

$$E - \frac{d\Phi}{dt} = E + e = RI.$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} < 0$$

est une force contre-électromotrice et l'intensité I est inférieure à I_0

2° Le travail dW est négatif.

Le déplacement a lieu en sens inverse du précédent. L'opération nécessite l'intervention du milieu extérieur, qui fournit au système le travail

$$d\mathcal{C} = -dW = -I d\Phi,$$

$d\Phi$ étant négatif.

L'application du principe de la conservation de l'énergie donne

$$EI dt = RI^2 dt - d\mathcal{C} = RI^2 dt + I d\Phi.$$

Nous avons encore

$$E + e = RI,$$

avec

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Mais e , positif, est maintenant une force électromotrice qui s'ajoute à celle du générateur : **le système est générateur**. L'intensité I est supérieure à I_0 .

En résumé, dans les deux cas particuliers que nous venons d'étudier, nous retrouvons l'expression de la formule fondamentale qui donne e . Si $i = \frac{e}{R}$ est la contribution du courant induit au courant total, nous avons

$$I = I_0 + i;$$

i est négatif (en sens inverse de I_0) dans le premier cas, positif dans le second.

3° Le circuit conducteur ne comporte pas de générateur ($E = 0$).

Immobile dans l'induction magnétique, il n'est parcouru par aucun courant, n'est donc soumis à aucune force électromagnétique. Il ne se déplace donc pas spontanément et le système ne peut être moteur.

Faisons intervenir un opérateur qui déplace le circuit d'une façon quelconque puisque au départ n'existent pas de forces électromagnétiques. On peut se demander *a priori* ce qui va se passer car *il n'est pas absurde d'imaginer qu'aucun courant induit ne se produise, l'opérateur n'ayant aucun travail à fournir pour effectuer le déplacement*. Or l'expérience montre qu'il se produit un courant induit et que l'opérateur doit fournir un certain travail; le sens du courant induit est tel que les forces électromagnétiques qui en résultent sont résistantes et que, par suite, leur travail au cours du déplacement est négatif.

Considérons un circuit conducteur rigide dont nous supposons

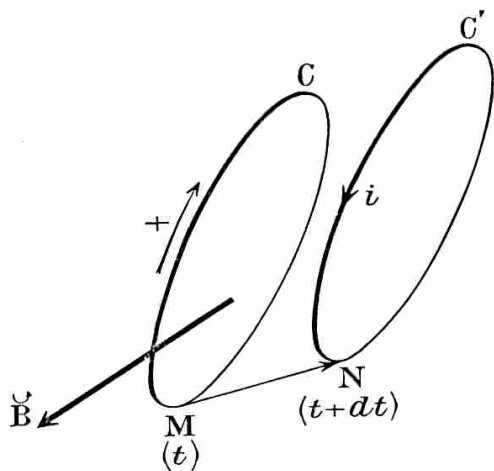


FIG. 102.

l'inductance négligeable de façon à pouvoir confondre le flux d'induction qui le traverse avec celui produit par l'induction invariable dans laquelle il est placé (12-3). Soit C et C' ses positions très voisines aux instants t et $t + dt$ (fig. 102). Choisissons pour sens positif de circulation sur le circuit le sens des pieds vers la tête de l'observateur d'Ampère, lorsque celui-ci, regardant dans la direction de l'induction, a le déplacement MN vers sa gauche :

Les forces électromagnétiques, étant résistantes, sont dirigées vers la droite de l'observateur couché dans le sens positif, le courant induit i a donc le sens négatif, de même que la force électromotrice induite e .

Le travail des forces électromagnétiques,

$$dW = i d\Phi,$$

étant négatif, $ei dt$ étant positif (puisque e et i ont le même signe), nous avons, en grandeur et en signe,

$$dW = i d\Phi = -ei dt,$$

et par suite

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

D'autre part, avec la convention de signe que nous avons faite :

$d\Phi$ représente aussi bien le flux coupé par le circuit au cours de son déplacement que la variation du flux qui le traverse.

12-5. Force électromotrice d'induction élémentaire dans un élément conducteur mobile placé dans une induction magnétique invariable.

Reprenons de nouveau l'expérience des rails conducteurs (fig. 103), le générateur étant remplacé par un galvanomètre G. Si un opérateur inter-

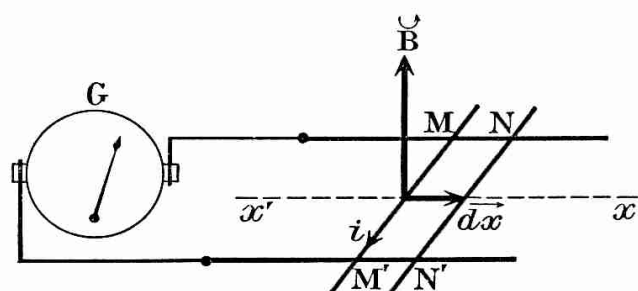


FIG. 103.

vient pour déplacer MM' de $dx = MN$, le circuit est parcouru, pendant le temps dt que dure le déplacement, par un courant induit i dû à la force électromotrice

$$e = -\frac{d\Phi}{dt},$$

$d\Phi$ étant le flux d'induction coupé pendant le temps dt . Ce flux coupé est compté positivement si le déplacement est vers la gauche de l'observateur d'Ampère couché sur MM' dans le sens positif.

Supposons que le conducteur mobile soit isolé électriquement aux points de contact M et M'; il constitue alors un condensateur. L'emploi d'un électromètre montre qu'entre M et M' apparaît une différence de potentiel égale à e : des électrons s'accumulent à l'extrémité M' alors qu'ils se raréfient en M, le condensateur est chargé.

D'une façon plus générale, considérons un conducteur MM' isolé

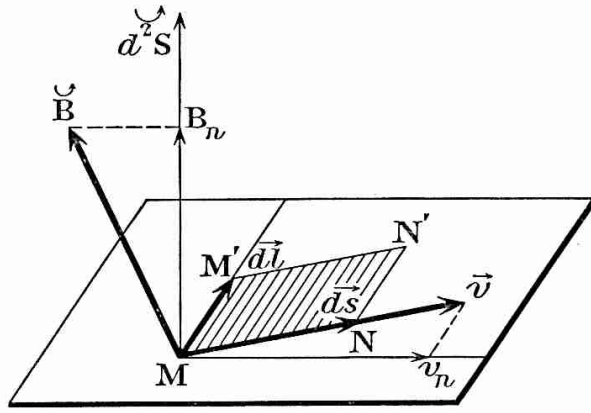


FIG. 104.

(fig. 104) de longueur dl , que l'on déplace dans une induction $\vec{B}$ avec la vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ à l'instant t .

Choisissons pour sens positif sur dl celui pour lequel l'observateur d'Ampère, regardant dans le sens de l'induction, a le déplacement $d\vec{s}$ vers sa gauche; nous avons $d\vec{l} = \overrightarrow{MM'}$ et le trièdre $(\vec{B}, d\vec{s}, d\vec{l})$ est direct. Cette convention revient

à compter positivement le flux coupé $d^2\Phi$.

Nous avons, $d^2\vec{S} = d\vec{s} \wedge d\vec{l}$ étant le vecteur représentatif de la surface balayée par l'élément $d\vec{l}$,

$$d^2\Phi = \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = \vec{B} \cdot (d\vec{s} \wedge d\vec{l}) = (\vec{B} \cdot d\vec{s} \cdot d\vec{l}).$$

L'élément $d\vec{l}$ est le siège de la force électromotrice induite

$$de = -\frac{d^2\Phi}{dt} = -\left(\vec{B} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} \cdot d\vec{l}\right),$$

d'où

(1)

$$de = (\vec{B} \cdot d\vec{l} \cdot \vec{v}).$$

v_n étant la composante de la vitesse normale à l'élément dl , et B_n la composante de l'induction normale à l'aire balayée, on a

$$de = \vec{B} \cdot (d\vec{l} \wedge \vec{v}) = -B_n v_n dl,$$

qui nous montre que :

Le module de e est égal au produit par B_n de l'aire balayée par l'élément pendant l'unité de temps.

Dans le cas particulier d'un conducteur rectiligne de longueur l normal aux lignes d'une induction uniforme B , la vitesse v étant normale à l (expérience des rails conducteurs), on a

$$e = -Blv.$$

12-6. Force électromotrice élémentaire et force électromotrice totale.

Lorsqu'un circuit fermé C se déplace dans un champ magnétique, chaque élément du circuit coupe des lignes d'induction et contribue à la création de la force électromotrice induite totale e donnée par la formule (1) du paragraphe précédent; on a

$$e = \int_C de = \int_C (\vec{B} \cdot d\vec{l} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{dt} \int_C d^2\Phi = - \frac{d\Phi}{dt},$$

$d\Phi$ étant le flux coupé par l'ensemble du circuit pendant le temps dt .

Cependant, tandis que la formule (1) donnant de s'applique toujours, la formule donnant la force électromotrice totale en fonction du flux d'induction total à travers le circuit peut se trouver en défaut.

Considérons par exemple le dispositif de la roue de Barlow (7-3, 3°) et remplaçons le générateur par un galvanomètre. Le galvanomètre dévie lorsqu'on met le disque en rotation, le sens du courant s'inversant avec le sens de la rotation. Si nous admettons en première approximation que le courant ne passe que le long du rayon OA , son sens est tel que l'application de la loi de Laplace à l'élément OA donne une force électromagnétique dirigée dans le sens inverse de la rotation (force résistante).

Les lignes de courant (que nous supposons réduites au seul rayon OA) sont fixes dans l'espace et le flux total qui traverse le circuit est invariable; cependant une force électromotrice est induite, localisée entre O et A parce que le rayon OA coupe un flux d'induction. Si R est le rayon de la roue, N le nombre de tours par seconde et B l'induction supposée uniforme, on a en module

$$d\Phi = B \times \pi R^2 N dt,$$

$d\Phi$ étant le flux coupé pendant le temps dt , et la force électromotrice du générateur ainsi constitué est

$$e = \frac{d\Phi}{dt} = \pi N R^2 B.$$

Nous pouvons également calculer e à partir de la force électromotrice élémentaire de , on a

$$\begin{aligned} de &= 2\pi N B r dr, \\ e &= 2\pi N B \int_0^R r dr = \pi N R^2 B. \end{aligned}$$

Par exemple, pour $N = 5 \text{ tr.s}^{-1}$, $R = 0,05 \text{ m}$ et $B = 0,1 \text{ T}$,

$$e = 3,14 \times 5 \times 25 \times 10^{-4} \times 0,1 \simeq 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 3,9 \text{ mV}.$$

Par contre, si nous considérons une bobine court-circuitée par un curseur (fig. 105) dans l'induction d'un aimant, il ne se produit pas de force électromotrice d'induction lorsqu'on déplace le curseur et cette opération ne nécessite aucun travail, c'est qu'aucune ligne d'induction n'est coupée bien que le flux total à travers le

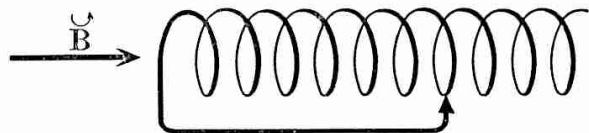


FIG. 105.

circuit varie; aucun courant induit ne parcourt le circuit. Dans la même expérience si le contact n'est pas établi entre le curseur et la bobine (le circuit est alors ouvert), aucune force électromotrice n'apparaît dans le circuit.

En résumé :

Pour qu'un phénomène d'induction électromagnétique se produise par déplacement ou par déformation d'un circuit fermé ou ouvert, il faut que celui-ci ou un conducteur qui en fait partie coupe des lignes d'induction, la force électromotrice induite a pour expression

$$e = \int_G de = \int_G (\vec{B} \cdot d\vec{l} \cdot \vec{v}).$$

Si le circuit est ouvert, l'intégrale qui figure dans cette expression est étendue au circuit entre ses bornes. Quant à la formule

$$e = - \frac{d\Phi}{dt},$$

elle reste toujours applicable à condition que $d\Phi$ représente le flux coupé pendant le temps dt .

12-7. Courants de Foucault.

Nous n'avons jusqu'ici envisagé que des conducteurs et des circuits linéaires, l'expérience montre que les phénomènes d'induction se produisent également dans des surfaces conductrices (plaques) et dans des volumes conducteurs. Les phénomènes sont cependant plus complexes parce que les courants induits, appelés *courants de Foucault*, sont constitués par des lignes de courant, leur direction n'étant pas prédéterminée comme dans le cas des circuits filiformes.

Les courants de Foucault se manifestent aussi bien dans les masses conductrices que l'on déplace dans une induction invariable que dans celles que l'on maintient fixes dans une induction variable; les lignes de courant induit et leur sens sont déterminés par la loi de Lenz. Dans

le premier cas il faut fournir du travail pour produire le déplacement, **les forces électromagnétiques qui résultent du passage du courant étant toujours des forces résistantes**, dans le second il faut dépenser de l'énergie pour faire varier l'induction et les courants induits créent un flux qui tend à s'opposer à la variation du flux inducteur. Dans tous les cas l'énergie dépensée est restituée au milieu extérieur sous forme de chaleur par effet Joule. Au point de vue énergétique les phénomènes présentent une certaine analogie avec la transformation d'énergie mécanique en chaleur par frottement dans un milieu visqueux; *dans les deux cas se manifestent des forces résistantes proportionnelles à la vitesse de déplacement.*

De nombreuses expériences permettent de montrer l'effet de freinage produit par les courants de Foucault. Bornons-nous à en décrire une qui est particulièrement démonstrative. Un disque de cuivre, mis en rotation par la chute d'un poids P (fig. 106), est disposé normalement aux lignes d'induction d'un électro-aimant qui joue

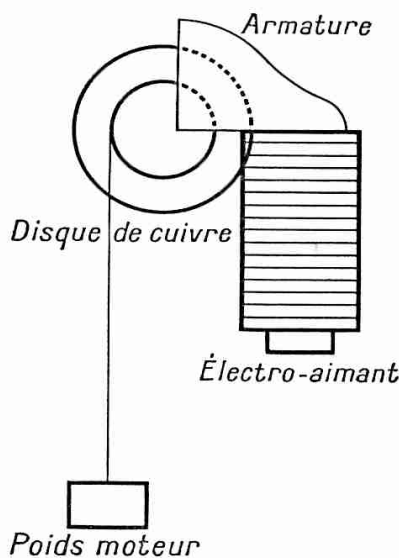


FIG. 106.

donc le rôle d'inducteur. Celui-ci n'étant pas excité, on attend que le mouvement soit suffisamment rapide pour lancer le courant dans le circuit d'excitation. La rotation du disque est alors brutalement freinée pour devenir uniforme, elle ne peut être toutefois arrêtée sinon les forces de freinage s'annuleraient en même temps que les courants de Foucault.

De même qu'un corps qui tombe dans un milieu visqueux atteint *une vitesse limite* pour laquelle la résultante des forces de viscosité est égale et opposée au poids du corps, de même la rotation du disque devient uniforme lorsque *le couple résistant exercé par les forces électromagnétiques est égal au couple*

exercé par le poids moteur. Dans les deux cas la diminution de l'énergie potentielle de pesanteur est équivalente à la chaleur dégagée soit par frottement, soit par effet Joule.

Si l'on emploie un disque divisé en secteurs par de nombreuses fentes radiales on constate que le freinage est beaucoup moins énergique et que la vitesse limite est plus grande, le phénomène étant d'autant plus marqué que le nombre de secteurs est plus grand. Ce résultat provient de la gêne apportée par les fentes au passage des courants induits.

La manifestation des *forces résistantes proportionnelles à la vitesse* est utilisée dans nombre d'instruments de mesure pour amortir les oscillations d'un équipage mobile. Par exemple les oscillations d'une aiguille aimantée s'arrêtent très vite au voisinage d'une plaque de cuivre ou d'aluminium, l'aimant provoquant dans la plaque conductrice des

courants induits qui déterminent un couple résistant de sorte que tout se passe comme si l'aiguille oscillait dans un milieu très visqueux.

Le phénomène des courants de Foucault fournit également le principe du fonctionnement de compteurs électriques et celui des fours à induction où les courants alternatifs sont induits dans la masse métallique même que l'on veut porter à une température élevée.

Par contre dans de nombreux appareils (transformateurs, alternateurs, moteurs) où un circuit magnétique se trouve placé dans une induction alternative, les courants induits qui s'y produisent dissipent de l'énergie sous forme de chaleur et par suite contribuent à diminuer le rendement. Aussi emploie-t-on des noyaux de fer formés de tôles minces isolées les unes des autres par un vernis, ces tôles étant parallèles aux lignes de l'induction variable, c'est-à-dire normales à la direction dans laquelle les courants de Foucault tendent à se produire.

12-8. Quantité d'électricité induite dans un circuit.

Considérons un circuit fermé de résistance invariable R ne contenant aucun générateur. Le flux d'induction Φ à travers le circuit variant, il s'y produit une force électromotrice qui, à l'instant t , est

$$e = - \frac{d\Phi}{dt},$$

l'intensité du courant induit est

$$i = \frac{e}{R} = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt},$$

et la quantité d'électricité transportée pendant le temps dt est

$$dq = i dt = - \frac{d\Phi}{R}.$$

La quantité d'électricité transportée par le courant induit pendant toute la durée de son passage, le flux d'induction variant de la valeur initiale Φ_0 à la valeur finale Φ_1 , est

$$q = \frac{|\Phi_0 - \Phi_1|}{R}.$$

q est donné en coulombs, Φ étant exprimé en webers et R en ohms. Par suite :

La quantité d'électricité transportée par le courant induit ne dépend que de la variation du flux d'induction (elle lui est proportionnelle) et de la résistance du circuit (elle lui est inversement proportionnelle); elle est indépendante de la durée de cette variation.

Il est important de remarquer de nouveau (12-3) que le flux d'induction Φ dont il est question est le flux total à travers le circuit, somme du flux Φ_e dû à l'induction extérieure (flux extérieur) et du flux Φ_i résultant du passage du courant induit (flux induit). Cependant, les époques initiale et finale étant celles où commence ($i_0 = 0$) et s'achève ($i_1 = 0$) le courant induit, les flux Φ_0 et Φ_1 sont les flux extérieurs initial et final. Le fait que le flux induit n'intervient pas implique que *la quantité d'électricité transportée par le courant induit est indépendante de l'inductance du circuit.*

Les conclusions précédentes sont utilisables pour *la mesure d'une induction magnétique.* On utilise pour cela un galvanomètre balistique (16-7) dont l'élongation maximale α est proportionnelle à la quantité d'électricité qui le traverse dans un temps très court :

$$q = k\alpha.$$

Soit une induction B que l'on peut supposer uniforme dans le domaine restreint où on l'étudie. On dispose d'une bobine plate comportant N spires de surface S ; ses bornes sont reliées à celles du galvanomètre balistique, constituant un circuit de résistance R . La bobine est placée normalement aux lignes d'induction de sorte qu'elle est traversée par le flux $\Phi_0 = NSB$; déplaçons-la rapidement de façon à l'amener dans une région où l'induction est nulle: on a donc $\Phi_1 = 0$ et le galvanomètre balistique donne

$$q = k\alpha = \frac{\Phi_0}{R} = \frac{NSB}{R}.$$

On en déduit B (k , R , N et S étant connus).

Si nous avons retourné la bobine face pour face, nous aurions eu

$$|\Phi_0 - \Phi_1| = 2 NSB$$

et la déviation eût été double. C'est par cette *méthode de retournement* que l'on peut mesurer les composantes horizontale et verticale de l'induction magnétique terrestre et par suite l'inclinaison.

Exercices.

Exercice 17. — Un avion se déplace horizontalement à la vitesse constante de 400 km à l'heure. Entre les extrémités de ses ailes est tendu un fil conducteur horizontal, long de 14 mètres, isolé à ses extrémités. La composante horizontale de l'induction magnétique terrestre est égale à 0,2 gauss ou $2 \cdot 10^{-5} \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-2}$. L'inclinaison est 60° . Quelle est la valeur de la différence de potentiel qui apparaît entre les extrémités du fil?

α étant l'inclinaison et B_0 la composante horizontale de l'induction magnétique terrestre, la composante verticale est

$$B = B_0 \operatorname{tg} \alpha = B_0 \sqrt{3} = 2 \times 1,732 \cdot 10^{-5} = 3,464 \cdot 10^{-5} \text{ tesla.}$$

La force électromotrice induite est

$$E = Blv = 3,464 \cdot 10^{-5} \times 14 \times \frac{4 \cdot 10^5}{3 \cdot 600} = 5,4 \cdot 10^{-2} \text{ V} = 54 \text{ mV}.$$

Exercice 18. — Dans une induction magnétique uniforme et constante, B , un cercle métallique de rayon a , d'auto-inductance négligeable, formé d'un fil de diamètre d , de résistivité ρ , est mis en mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire $\omega = 2\pi n$, autour d'un diamètre perpendiculaire à B .

1° Définir le courant induit dans le fil.

2° Déterminer l'action mécanique de B sur le circuit.

3° Calculer la quantité de chaleur dégagée par seconde et la puissance qu'il faut exercer pour maintenir le mouvement uniforme.

Application : $B = 1 \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-2}$; $a = 2 \text{ cm}$; $\rho = 1,6 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$; $n = 50 \text{ s}^{-1}$; $d = 1 \text{ mm}$.

1° L'angle θ étant l'angle que fait la normale au circuit avec B , nous avons $\theta = \omega t = 2\pi n t$. Le flux d'induction magnétique à travers le circuit, à l'instant t , S étant la surface du circuit, est

$$\Phi = BS \cos \theta = \pi a^2 B \cos \omega t;$$

la force électromotrice induite est

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega BS \sin \omega t = E_m \sin \omega t.$$

L'auto-inductance du circuit étant négligeable, l'intensité du courant induit est, R étant la résistance,

$$i = \frac{e}{R} = \frac{\omega BS}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t = I\sqrt{2} \sin \omega t.$$

Application.

$$E_m = 2\pi^2 n B i^2 = 4\pi^2 \cdot 10^{-2} = 0,395 \text{ V} \simeq 0,4 \text{ V};$$

$$R = \frac{4\rho l}{\pi d^2} = \frac{\pi^2 a^4}{d^2} = (16)^2 10^{-5} = 2,56 \cdot 10^{-3} \Omega;$$

$$I_m = \frac{E_m}{R} = 154 \text{ A}; \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \simeq 110 \text{ A}.$$

2° Le moment magnétique du circuit est $\mathcal{M} = Si = \pi a^2 i$. Le circuit est soumis au couple instantané

$$C = BSi \sin \theta = \frac{\omega B^2 S^2}{R} \sin^2 \omega t;$$

sa valeur moyenne est

$$C_m = \frac{\omega B^2 S^2}{2R} = \frac{\pi^3 n a^4}{R} = \frac{\pi^3}{320} = 0,097 \text{ J} \cdot \text{rd}^{-1}.$$

3° La puissance transformée en chaleur dans le circuit est

$$P = RI^2 = 2,56 \cdot 10^{-3} (110)^2 \simeq 31 \text{ W},$$

soit

$$Q = \frac{P}{J} = \frac{31}{4,18} \simeq 7,4 \text{ cal} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La puissance qu'il faut fournir pour maintenir le mouvement uniforme est

$$P' = \omega C_m = 2\pi n C_m = 100\pi \times 0,097 \simeq 31 \text{ W.}$$

L'égalité $P = P'$ exprime la conservation de l'énergie.

Exercice 19. — Une bobine plate circulaire est maintenue fixe dans le plan méridien magnétique (fig. 107); elle comporte N spires de rayon a ; la résistance de

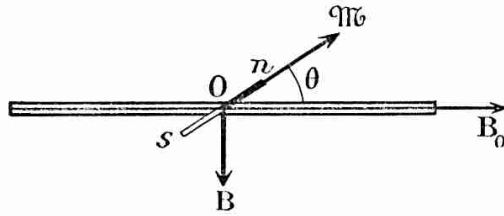


FIG. 107.

son enroulement fermé est R , son auto-inductance est négligeable. Au centre de la bobine est placée une aiguille aimantée dont la longueur est petite par rapport à a , son moment magnétique est $\mathcal{M}$; cette aiguille, horizontale, est mobile autour d'un fil de cocon vertical sans torsion, son moment d'inertie par rapport à cet axe vertical est J . On donne la composante horizontale B_0 de l'induction magnétique terrestre.

L'aiguille est écartée d'un petit angle θ_0 à partir de sa position d'équilibre et abandonnée sans vitesse initiale; on demande d'étudier son mouvement.

Dans sa position d'équilibre ($\theta = 0$), l'aiguille aimantée est dans le plan méridien magnétique. Écartée de cette position d'un petit angle θ , elle est soumise à un couple de rappel de la part de l'induction magnétique terrestre, couple dont le moment est

$$\Gamma = -\mathcal{M}B_0 \sin \theta \simeq -\mathcal{M}B_0 \theta.$$

Le mouvement de l'aiguille aimantée provoque dans la bobine la naissance d'une force électromotrice d'induction e et un courant induit $i = \frac{e}{R}$. Ce courant crée une induction magnétique B sensiblement uniforme dans la région où se déplace l'aiguille, au centre de la bobine. De ce fait l'aiguille est soumise à un couple de rappel (d'après la loi de Lenz) de moment

$$(1) \quad \Gamma' = -\mathcal{M}B \cos \theta = -\frac{\mu_0 N \mathcal{M}}{2a} i \cos \theta \simeq -\frac{\mu_0 N \mathcal{M}}{2a} i.$$

Le travail $\Gamma' d\theta$ de ce couple pour une rotation $d\theta$ pendant le temps dt est égal en valeur absolue à l'énergie électrique $ei dt$ transformée en chaleur dans la bobine par effet Joule, par suite

$$\mathcal{M}B d\theta = \frac{\mu_0 N \mathcal{M}}{2a} i d\theta = ei dt,$$

d'où

$$e = \frac{\mu_0 N \mathcal{M}}{2a} \frac{d\theta}{dt}; \quad i = \frac{e}{R} = \frac{1}{R} \frac{\mu_0 N \mathcal{M}}{2a} \frac{d\theta}{dt},$$

et, d'après (1),

$$\Gamma' = -\frac{1}{R} \left(\frac{\mu_0 N \mathcal{M}}{2a} \right)^2 \frac{d\theta}{dt} = -F d\theta,$$

en posant $F = \frac{1}{R} \left(\frac{\mu_0 N \mathcal{M}}{2a} \right)^2 > 0$.

L'application du principe fondamental de la dynamique nous donne l'équation différentielle du mouvement de l'aiguille :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + F \frac{d\theta}{dt} + \mathcal{M}B_0 \theta = 0.$$

Si le discriminant $\Delta = F^2 - 4J\mathcal{M}B_0$ est positif, le mouvement est apériodique, l'aiguille reprend sa position d'équilibre (en un temps théoriquement infini) sans osciller.

Supposons le discriminant négatif; nous avons

$$F^2 < 4J\mathcal{M}B_0,$$

et l'équation du mouvement, oscillatoire amorti, est

$$\theta = \theta_0 e^{-\lambda t} \cos \omega t,$$

avec

$$\lambda = \frac{F}{2J}; \quad \omega = \sqrt{\frac{\mathcal{M}B_0}{J} - \frac{F^2}{4J^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}.$$

ω_0 est la pulsation des oscillations non amorties, $\theta = \theta_0 \cos \omega_0 t$, qui se produiraient si la bobine était en circuit ouvert ($R = \infty$); l'aiguille serait alors soumise à la seule induction terrestre.

La période, ou plutôt la pseudo-période, des oscillations est $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Aux instants $0, \frac{T}{2}, T, \dots, k \frac{T}{2}, (k+1) \frac{T}{2}$, l'amplitude des oscillations est

$$\theta_0, \quad \theta_1 = \theta_0 e^{-\lambda \frac{T}{2}}, \quad \theta_2 = \theta_0 e^{-2\lambda \frac{T}{2}}, \dots, \quad \theta_k = \theta_0 e^{-k\lambda \frac{T}{2}}, \quad \theta_{k+1} = \theta_0 e^{-(k+1)\lambda \frac{T}{2}}.$$

Les mesures de T et de $\theta_0, \theta_1, \dots$ permettent de déterminer $\lambda = \frac{F}{2J}$; en effet nous avons

$$\frac{\theta_0}{\theta_1} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \dots = \frac{\theta_k}{\theta_{k+1}} = e^{-\lambda \frac{T}{2}}.$$

Remarquons pour terminer que la connaissance du mouvement de l'aiguille permet de calculer

$$e = \sqrt{F} \frac{d\theta}{dt} = -\omega \theta_0 \sqrt{F} \sin \omega t,$$

et par suite $i = \frac{e}{R}$.

Exercice 20. — 1° On considère un très petit aimant ns de moment magnétique $\mathcal{M}$ et l'on demande d'évaluer les composantes B_r et B_t de l'induction magnétique qu'il crée au point M de coordonnées polaires θ et r (B_r , composante dans la direction du rayon vecteur, et B_t , dans la direction normale au rayon vecteur).

2° L'axe du petit aimant étant dans le plan de figure, on considère une spire circulaire de centre M . Elle est parcourue par un courant d'intensité i dans le sens indiqué sur la figure 108. La spire peut se déplacer de façon que son plan reste normal au plan de figure et parallèle à l'axe de l'aimant, le centre M décrivant autour de O la circonférence de rayon $OM = r$.

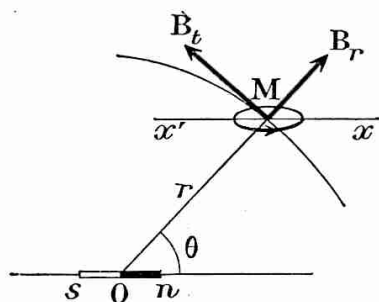


FIG. 108.

Les dimensions linéaires de la spire sont petites vis-à-vis de la distance r si bien que dans ce qui suit on peut admettre que l'induction en un point quelconque du contour de la spire est sensiblement la même qu'en son centre M .

Déterminer l'angle θ correspondant à un équilibre stable de la spire.

3° La spire étant placée dans la position ainsi déterminée on supprime le courant qui la traversait et on la retourne de 180° autour d'un axe $x'Mx$ parallèle à sn et situé dans le plan de la figure.

Exprimer la quantité d'électricité induite en fonction de $\mathcal{M}$, de r , de la résistivité ρ du métal constituant la spire et du volume v de métal. (La spire est supposée circulaire et les dimensions de sa section droite petites devant sa longueur.)

Application numérique : $\mathcal{M} = 2 \text{ A.m}^2$; $r = 20 \text{ cm}$; $\rho = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ } \Omega \cdot \text{m}$; $v = 0,64 \text{ cm}^3$.

1° Le potentiel de l'induction magnétique en un point éloigné de coordonnées polaires θ et r est

$$V = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \cos \theta}{r^3}.$$

Les composantes du vecteur magnétique suivant le rayon vecteur OM et suivant la direction normale sont

$$B_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 \mathcal{M} \cos \theta}{r^3},$$

$$B_t = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r^3}.$$

2° Les positions d'équilibre stables de la spire sont celles pour lesquelles le flux d'induction magnétique qui la traverse de sa face négative vers sa face positive est maximal. Ce flux Φ est la somme des flux produits par les deux composantes B_r et B_t ; nous avons, S étant la surface de la spire,

$$\Phi = \Phi_r + \Phi_t = S(B_r \sin \theta + B_t \cos \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathcal{M}S}{2r^3} \sin 2\theta.$$

θ étant la seule variable, le flux Φ est extrémal pour les valeurs de θ qui annulent

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathcal{M}S}{r^3} \cos 2\theta,$$

c'est-à-dire pour $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ et $\theta = \pm \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = \pm \frac{3\pi}{4}$.

Les positions $\theta = +\frac{\pi}{4}$ et $\theta = -\frac{3\pi}{4}$

pour lesquelles le point M est sur la première bissectrice (fig. 109) correspondent à $\Phi > 0$, donc maximal; ce sont des positions d'équilibre stable.

Par contre les positions $\theta = -\frac{\pi}{4}$ et $\theta = +\frac{3\pi}{4}$ pour lesquelles le point M est sur la seconde bissectrice correspondent à $\Phi < 0$, donc minimal; ce sont des positions d'équilibre instable.

3° Le flux d'induction magnétique correspondant à une position d'équilibre stable est

$$\Phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathcal{M}S}{2r^3};$$

il varie de

$$\Delta\Phi = 2\Phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathcal{M}S}{r^3}$$

lorsqu'on retourne la spire face pour face (le courant i ayant été au préalable

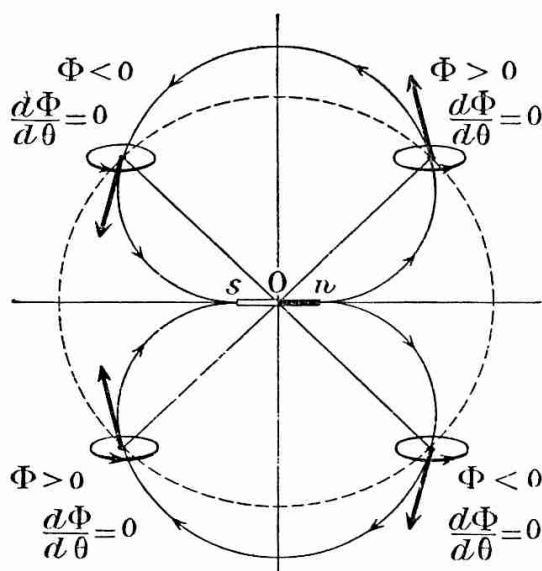


FIG. 109.

supprimé). Le courant induit par cette opération transporte une quantité d'électricité

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathcal{M}}{r^3} \frac{S}{R}.$$

Soit a le rayon de la spire, $l = 2\pi a$ sa longueur; s étant la surface de la section du fil, le volume du métal est $v = 2\pi as$. Nous avons d'autre part $S = \pi a^2$. Par suite

$$R = \rho \frac{l}{s} = \rho \frac{l^2}{v} = \rho \frac{4\pi^2 a^2}{v} = \frac{4\pi\rho S}{v},$$

$$q = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathcal{M}}{r^3} \frac{v}{4\pi\rho}.$$

Application numérique. $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$; $\mathcal{M} = 2 \text{ A.m}^2$; $r^3 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$;
 $\rho = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ } \Omega.\text{m}$; $v = 6,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$; d'où

$$q = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ C} = 0,24 \text{ mC}.$$

CHAPITRE XIII

AUTO-INDUCTION. INDUCTANCE MUTUELLE (*). RÉGIMES VARIABLES

13-1. Le phénomène d'auto-induction. Expérience.

Un courant dans un circuit crée un champ magnétique dans l'espace, les lignes d'induction traversant toutes le contour du circuit, de sa face sud vers sa face nord; celui-ci est donc traversé par un flux d'induction qui est invariable en régime permanent. D'après la définition déjà donnée (8-8) de l'inductance L d'un circuit rigide, nous avons, L étant toujours positif,

$$\Phi = LI.$$

En régime variable, l'induction et par suite son flux à travers le circuit varient et celui-ci est le siège d'une force électromotrice e , dite *force électromotrice d'auto-induction* (on dit également de self-induction).

Le phénomène d'auto-induction se manifeste lors de l'établissement et de la suppression d'un courant continu, il intervient constamment en courant alternatif où il joue un rôle essentiel. Il obéit évidemment à la loi de Lenz, de sorte que si l'intensité i croît, e est une force contre-électromotrice, si elle décroît e est une force électromotrice, par suite e a le signe contraire de $\frac{di}{dt}$.

L'auto-induction est particulièrement marquée dans les circuits comprenant une bobine ayant un grand nombre de spires sur un noyau de fer formant un circuit magnétique d'entrefer réduit; un électro-aimant en U dont on ferme le circuit magnétique avec une armature de fer doux, les inducteurs d'une dynamo, conviennent particulièrement bien à la mise en évidence de l'auto-induction.

(*) Programme de Mathématiques spéciales B.

Expérience de Faraday.

La figure 110 schématise le montage. Le circuit, rattaché aux bornes

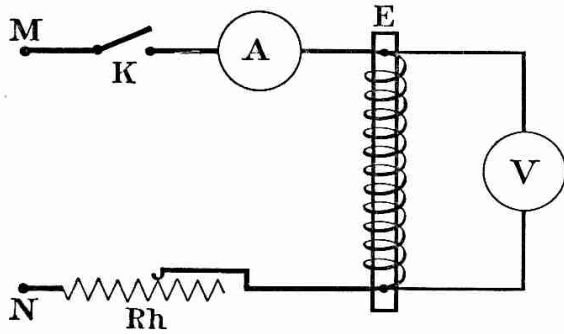


FIG. 110.

M et N du secteur continu, comprend en série un ampèremètre A, un électro-aimant E, un rhéostat Rh et un interrupteur K; un voltmètre V est en dérivation aux bornes de E.

Quand on ferme l'interrupteur, l'indication de l'ampèremètre s'élève lentement alors que le voltmètre donne la sienne immédiatement; le courant d'auto-induction, dont le sens

est inverse de celui du courant en régime permanent, retarde l'établissement de celui-ci. Lorsqu'on coupe le courant, l'ampèremètre revient au zéro alors que le voltmètre dévie en sens contraire pendant un temps très court par suite de la force électromotrice d'auto-induction dans l'électro-aimant.

Si l'on remplace le voltmètre par une lampe éclairant à peine en régime permanent (on obtient ce résultat en agissant sur le rhéostat), on constate qu'en ouvrant l'interrupteur la lampe brille d'un vif éclat avant de s'éteindre.

13-2. Formule fondamentale. Nouvelles définitions d'unités S.I.

Soit i l'intensité du courant à l'instant t ; nous avons

$$(1) \quad \Phi = Li.$$

Le circuit étant supposé rigide (L défini et constant), l'intensité i varie de di de l'instant t à l'instant $t + dt$, la force électromotrice d'auto-induction est donnée par la formule fondamentale de l'induction; d'où il résulte, d'après la formule (1),

$$(2) \quad \boxed{e = -L \frac{di}{dt}.}$$

Par suite de cette formule fondamentale :

Dans un circuit linéaire rigide parcouru par un courant variable, la force électromotrice d'auto-induction est proportionnelle à la dérivée de l'intensité par

rapport au temps; c'est une force contre-électromotrice si l'intensité du courant est croissante $\left(\frac{di}{dt} > 0\right)$; c'est une force électromotrice si elle est décroissante $\left(\frac{di}{dt} < 0\right)$.

Remarquons que e est constante si l'intensité i croît ou décroît suivant une loi linéaire (variation uniforme).

En fait, les unités S.I. de l'électromagnétisme ne sont pas définies dans l'ordre que nous avons suivi. Pour des raisons pratiques relatives aux conditions où les grandeurs électromagnétiques sont susceptibles de mesures précises, la succession des définitions des unités dérivées S.I. de l'électromagnétisme fait intervenir les phénomènes d'induction dans les relations de définition suivantes :

<i>Différence de potentiel électrique</i> U ,	$P = UI.$
<i>Inductance électrique,</i>	$ e = L \left \frac{di}{dt} \right .$
<i>Flux d'induction magnétique,</i>	$ e = \left \frac{d\Phi}{dt} \right .$
<i>Induction magnétique,</i>	$\Phi = BS.$

Nous reproduisons ci-dessous les définitions des unités correspondantes dans les termes mêmes du décret du 3 mai 1961.

L'unité de force électromotrice et de différence de potentiel est le volt :

Le volt est la différence de potentiel électrique qui existe entre deux points d'un fil conducteur parcouru par un courant constant de 1 ampère, lorsque la puissance dissipée entre ces deux points est égale à 1 watt.

L'unité d'inductance électrique est le henry :

Le henry est l'inductance d'un circuit fermé dans lequel une force électromotrice de 1 volt est produite lorsque le courant électrique qui parcourt le circuit varie uniformément à raison de 1 ampère par seconde.

Le henry est ainsi défini en tant que volt $\times$ seconde/ampère ($V.s.A^{-1}$).

L'unité de flux magnétique est le weber :

Le weber est le flux magnétique qui, traversant un circuit d'une seule spire, y produit une force électromotrice de 1 volt, si on l'amène à zéro en 1 seconde, par décroissance uniforme.

Le weber est ainsi défini en tant que volt $\times$ seconde ($V.s$).

L'unité d'induction magnétique est le tesla :

Le tesla est l'induction magnétique uniforme qui, répartie normalement sur une surface de 1 mètre carré, produit à travers cette surface un flux magnétique total de 1 weber.

Le tesla est ainsi défini en tant que weber par mètre carré ($Wb.m^{-2}$).

13-3. Calcul et mesure d'une inductance. Inductance d'une portion de circuit.

Nous avons déjà donné (8-8) des indications sur le calcul de l'inductance propre d'un circuit; il se ramène à celui du flux d'induction propre correspondant à un courant de 1 ampère.

La formule de Biot et Savart, les définitions du flux d'induction et de l'inductance propre, montrent que les dimensions d'une inductance dans le vide sont celles de μ_0 multiplié par une longueur. Le quotient $\frac{L}{\mu_0}$ homogène à une longueur traduit le fait qu'il ne dépend que de caractéristiques géométriques, forme et dimensions, du circuit; la déformation d'un circuit entraîne la variation de son inductance. Même dans les cas les plus simples comme celui d'une spire circulaire, les calculs sont compliqués et nécessitent des approximations; nous allons nous borner à celui d'une valeur approchée pour *un long solénoïde* dont nous supposons les extrémités réunies de façon à ce qu'il constitue un circuit fermé.

Nous utilisons les notations déjà employées et nous supposons qu'à l'intérieur du solénoïde l'induction est uniforme et égale à $\mu_0 ni$. Le flux total à travers les $N = nl$ spires de surface S est

$$\Phi = \mu_0 n N S i = \mu_0 \frac{N^2}{l} S i.$$

Par suite d étant le diamètre d'une spire,

$$L = \mu_0 S \frac{N^2}{l} = \mu_0 \frac{\pi d^2}{4} \frac{N^2}{l}.$$

Remarquons que, $\mathcal{L} = \pi d N$ représentant la longueur du fil conducteur qui constitue le solénoïde, la formule précédente peut encore s'écrire

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mathcal{L}^2}{l} = 10^{-7} \frac{\mathcal{L}^2}{l},$$

qui montre bien que $\frac{L}{\mu_0}$ est homogène à une longueur.

Par exemple, pour $d = 5$ cm, $N = 5\,000$, $l = 40$ cm :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2 &= \pi^2 N^2 d^2 = 9,87 \times 25 \times 10^6 \times 25 \times 10^{-4} = 625 \times 987, \\ L &= 10^{-7} \cdot \frac{625 \times 987}{0,4} = 0,15 \text{ H.} \end{aligned}$$

La formule obtenue pour un long solénoïde n'est qu'approchée puisque l'induction n'est pas rigoureusement uniforme dans une section, particulièrement aux extrémités où les lignes d'induction s'épanouissent; *l'approximation est d'autant meilleure que la bobine est plus longue.*

L'introduction d'un noyau de fer dans le solénoïde augmente fortement l'inductance propre, mais celle-ci est alors mal définie, même dans des conditions de fonctionnement bien déterminées; cela provient du fait que la perméabilité relative μ du fer dépend non seulement de l'induction dans laquelle il est placé, mais aussi des traitements magnétiques antérieurs qu'il a subis. Aussi les inductances étalons ne doivent pas comporter de noyau ferromagnétique. Les constructeurs fournissent des bobines étalonnées dont les inductances s'échelonnent de 0,01 à 10 henrys.

Le plus souvent une inductance L se détermine expérimentalement. On peut pour cela mesurer à l'aide d'un fluxmètre (16-8) la variation $\Phi = LI$ du flux propre lorsqu'on ouvre le circuit parcouru par le courant I . Toutefois la méthode la plus simple consiste à opérer en courant alternatif, L se déduit d'une mesure d'impédance $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$.

Nous n'avons jusqu'ici défini que l'inductance d'un circuit fermé complet, la définition reste cependant valable pour une portion de circuit, si l'on suppose, comme nous l'avons fait pour le solénoïde, que ses deux extrémités sont réunies ou même seulement très voisines.

Il ne faudrait cependant pas croire que les inductances, toujours positives rappelons-le, s'ajoutent purement et simplement lorsqu'elles sont en série. Considérons par exemple un circuit formé de deux bobines en série, d'inductances propres respectives L_1 et L_2 , de résistances R_1 et R_2 , les fils de connexion étant torsadés de façon que la surface du circuit soit pratiquement celle des bobines. Supposons qu'un générateur établisse une différence de potentiel variable u aux bornes de l'ensemble des deux bobines. L'application de la loi d'Ohm à l'instant t , sous la forme

$$u = (R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2) \frac{di}{dt},$$

n'est valable que si les deux bobines sont suffisamment éloignées l'une de l'autre pour qu'on puisse négliger les flux que chacune d'elles envoie dans l'autre; dans ce cas en effet le flux total à travers le circuit se réduit bien à $(L_1 + L_2)i$.

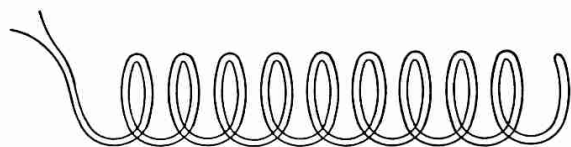


FIG. 111.

Les considérations précédentes nous montrent que l'on peut réaliser une inductance très faible en repliant un fil conducteur

isolé sur lui-même avant de l'enrouler sous forme de bobine (fig. 111); chaque spire double est alors composée de deux spires enroulées en sens inverses et la surface totale de la bobine se trouve être très réduite.

13-4. Inductance mutuelle de deux circuits linéaires rigides (*).

1° Inductance mutuelle.

Soit deux circuits linéaires rigides C_1 et C_2 en présence dans le vide et parcourus par des courants dont les intensités I_1 et I_2 sont maintenues constantes.

C_1 envoie dans C_2 le flux d'induction $\Phi_{1,2} = M_{1,2}I_1$ et C_2 envoie dans C_1 le flux d'induction $\Phi_{2,1} = M_{2,1}I_2$, les grandeurs $M_{1,2}$ et $M_{2,1}$ étant de la même nature qu'une inductance propre.

I_1 et I_2 étant maintenues constantes et C_1 étant immobilisé, transportons C_2 de sa position actuelle à l'infini; d'après la loi de Maxwell le travail des forces électromagnétiques appliquées à C_2 est

$$W_2 = -I_2\Phi_{1,2} = -I_1I_2M_{1,2}.$$

De même, reprenant les circuits dans leurs positions initiales, transportons C_1 à l'infini; le travail des forces électromagnétiques qui lui sont appliquées est

$$W_1 = -I_1\Phi_{2,1} = -I_1I_2M_{2,1}.$$

Dans les deux cas les positions relatives finales des deux circuits sont les mêmes puisqu'ils sont infiniment loin l'un de l'autre. Or, dans des positions quelconques, C_1 et C_2 sont soumis à des forces formant des torseurs opposés, en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Par suite les travaux W_1 et W_2 sont égaux, ce qui entraîne $M_{2,1} = M_{1,2} = M$.

M , homogène à une inductance propre, est *l'inductance mutuelle des deux circuits* dans les positions relatives où nous les avons considérés. $\frac{M}{\mu_0}$ est homogène à une longueur; M s'exprime en henrys dans le système S.I.

L'inductance mutuelle M de deux circuits dépend de leur forme et de leurs positions relatives. Tandis qu'une inductance propre L est toujours positive, M *peut être positive ou négative*; elle change de signe lorsqu'on inverse le sens de l'un des courants.

Considérons par exemple un long solénoïde S_1 (n spires par mètre) parcouru par I_1 et une bobine circulaire plate S_2 (N spires de surface S) parcourue par I_2 . Lorsque les deux bobines sont coaxiales, S_1 envoie dans S_2 un flux dont le module est

$$|\Phi| = \mu_0 n I_1 N S = |M| I_1.$$

(*) Ce paragraphe ne figure qu'au programme de Math. Sp. B.

$M = \mu_0 n NS$ doit être affecté du signe $+$ si les courants circulent dans le même sens, du signe $-$ s'ils circulent en sens inverses. Si les axes, orientés d'après la convention de rotation, font entre eux l'angle θ (fig. 112), on a, en grandeur et en signe,

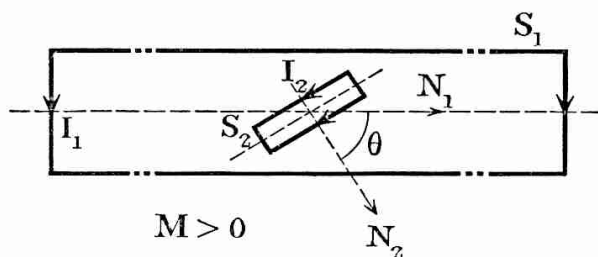


FIG. 112.

$$M = \mu_0 n NS \sin \theta.$$

Remarquons qu'il eût été impraticable de calculer M en recherchant l'expression du flux envoyé par S_2 dans S_1 .

En principe M peut être déterminé soit par $\Phi_{1,2} = MI_1$, soit par $\Phi_{2,1} = MI_2$. Un des procédés peut être beaucoup plus simple que l'autre, comme nous venons de le voir. Un exercice classique consiste à calculer M dans le cas d'un conducteur rectiligne indéfini placé dans le plan d'un circuit rectangulaire dont deux côtés lui sont parallèles; le calcul facile est alors celui du flux envoyé par le courant rectiligne à travers le courant rectangulaire.

Il est évident que si l'un ou l'autre (ou les deux) circuit comporte un noyau ferromagnétique les restrictions relatives à la définition de L sont également à faire pour M . L'introduction d'un noyau de fer à l'intérieur des deux circuits a pour effet d'accroître fortement M , en particulier M est très grand pour deux enroulements sur le même circuit magnétique.

2° Couplage par induction mutuelle.

Reprenons C_1 et C_2 dans les positions relatives pour lesquelles leur inductance mutuelle est M ; ils sont parcourus à l'instant t par les courants i_1 et i_2 . Les circuits rigides étant immobilisés, toute variation d'intensité dans l'un entraîne la naissance d'une force électromotrice d'induction dans l'autre, et l'on dit que *les circuits sont couplés par induction*.

Si i_1 varie de di_1 pendant la durée dt la force électromotrice dans le circuit C_2 (M étant constant) est

$$e_2 = - \frac{d\Phi_{1,2}}{dt} = - \frac{d(Mi_1)}{dt} = - M \frac{di_1}{dt}.$$

On a de même dans C_2

$$e_1 = - M \frac{di_2}{dt}.$$

Il est essentiel de remarquer que les flux $\Phi_{1,2}$ et $\Phi_{2,1}$ ne sont pas les flux totaux à travers C_2 et C_1 , de sorte que les forces électromotrices e_2 et e_1 ne sont pas les forces électromotrices totales produites par les

variations des intensités; il faut ajouter les forces électromotrices d'induction propres à chacune d'elles.

Les calculs d'inductances mutuelles sont difficiles en général. Leur détermination expérimentale peut se faire de la façon suivante :

C_1 est parcouru par un courant d'intensité I_1 tandis que C_2 , ne comportant pas de générateur, est fermé sur un galvanomètre balistique (ou sur un fluxmètre). Coupons brusquement le courant I_1 , au bout d'un temps très court les circuits ne sont parcourus par aucun courant; cependant, par suite de l'induction mutuelle, C_2 a été traversé par la quantité d'électricité

$$q = \frac{MI_1}{R_2},$$

R_2 étant sa résistance. La mesure de q permet celle de M .

3° Retour sur l'inductance d'une portion de circuit.

Revenons sur la question de *l'inductance propre d'une portion de circuit* formée de deux bobines en série, couplées par induction de sorte que leur inductance mutuelle M (positive ou négative) ne soit pas nulle. L_1 et L_2 étant les inductances propres des deux bobines, chacune d'elles envoyant le flux Mi dans l'autre, le flux total à travers la portion de circuit (formée par les deux bobines) est

$$\Phi = (L_1 + L_2 + 2M)i.$$

$R = R_1 + R_2$ étant sa résistance, la loi d'Ohm à l'instant t s'exprime par

$$u = Ri + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

L'inductance propre du circuit est alors

$$L = L_1 + L_2 + 2M.$$

Or, le module de Mi est inférieur à L_1i et à L_2i puisque chacune des bobines ne peut qu'au plus envoyer son flux propre dans l'autre, par suite

$$2|M| < L_1 + L_2.$$

Il en découle que L est forcément positif, pouvant être, suivant le signe de M , supérieur ou inférieur à $L_1 + L_2$.

Considérons par exemple deux spires jointives identiques en série et soit L_1 l'inductance propre de chacune d'elles. Si elles sont enroulées dans le même sens leur inductance mutuelle est $M = L_1$ et l'inductance

propre de l'ensemble est

$$L = 2L_1 + 2M = 4L_1.$$

Par contre celle-ci est nulle si les sens d'enroulement sont inverses puisque alors $M = -L_1$.

Ce que nous venons de dire reste valable si, au lieu de deux spires, nous disposons de deux bobines identiques placées l'une contre l'autre. On conçoit qu'on réalise *une inductance variable* en faisant tourner l'une des bobines autour d'un diamètre commun, son retournement face pour face fait varier L de $4L_1$ à zéro, en passant par la valeur $2L_1$ lorsque les plans des deux bobines sont rectangulaires : on a alors $M = 0$.

4° Systèmes des forces appliquées à deux circuits en présence.

Soit deux circuits linéaires indéformables C_1 et C_2 parcourus par les intensités I_1 et I_2 et soit M leur inductance mutuelle. C_1 envoie à travers C_2 le flux $\Phi_{1,2} = MI_1$.

Supposons que C_2 subisse une très petite translation dx dans la direction Ox (I_1 et I_2 étant maintenues constantes), le travail des forces électromagnétiques appliquées à C_2 est

$$dW = I_2 \frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial x} dx = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial x} dx = X dx.$$

Dans cette expression

$$X = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial x}$$

est la composante suivant Ox de la résultante des forces appliquées à C_2 .

En considérant de même une petite rotation $d\alpha$ autour de Ox nous obtenons la composante Γ_x suivant Ox du moment résultant des forces appliquées :

$$\Gamma_x = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial \alpha}.$$

Nous pouvons ainsi définir le torseur des forces appliquées par sa résultante générale (X, Y, Z) et par son moment résultant ($\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$).

Soit par exemple deux bobines longues C_1 et C_2 coaxiales. La bobine extérieure C_1 , parcourue par I_1 , comporte n_1 spires par mètre; la bobine intérieure C_2 , parcourue par I_2 qui a le même sens que I_1 , comporte n_2 spires (de surface S_2) par mètre. Une extrémité de C_2 est dans une région où l'induction produite par C_1 est $B_1 = \mu_0 n_1 I_1$, alors que l'autre extrémité est suffisamment éloignée pour que B_1 y soit nulle.

Par raison de symétrie C_2 est soumis à une force F dirigée suivant l'axe. Pour un petit déplacement dx de C_2 qui le fait pénétrer plus loin

dans $C_1(dx > 0)$, le nombre de spires placées à l'intérieur de C_1 augmente de $n_2 dx$ et le flux à travers C_2 augmente de

$$d\Phi_{1,2} = \mu_0 n_2 dx S_2 B_1 = \mu_0 n_1 n_2 S_2 I_1 dx = I_1 dM.$$

Par suite

$$\frac{dM}{dx} = \mu_0 n_1 n_2 S_2, \quad F = \mu_0 n_1 n_2 S_2 I_1 I_2.$$

La force F serait répulsive si les courants circulaient en sens inverses dans les deux bobines.

13-5. Établissement d'un régime permanent dans un circuit.

Considérons un circuit de résistance R , d'inductance L et comprenant un générateur de force électromotrice E . En régime permanent l'intensité du courant est

$$I = \frac{E}{R}.$$

Par suite du phénomène d'auto-induction l'intensité i du courant ne passe pas de zéro à I d'une façon discontinue lorsqu'on ferme le circuit à l'instant $t = 0$. Dans l'application de la loi d'Ohm à l'instant t , il faut tenir compte de la force électromotrice d'auto-induction et écrire

$$E - L \frac{di}{dt} = Ri,$$

$$I - i = \frac{L}{R} \frac{di}{dt}.$$

Le second membre de cette équation étant homogène à une intensité, la grandeur $\tau = \frac{L}{R}$ est homogène à un temps : on l'appelle **la constante de temps du circuit**; nous avons donc

$$\frac{I - i}{I} = - \frac{dt}{\tau},$$

équation dont l'intégration, compte tenu des conditions initiales ($t = 0$, $i = 0$), donne

$$\text{Log}_e \frac{I - i}{I} = - \frac{t}{\tau},$$

ou

$$i = I \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Théoriquement l'intensité n'atteint sa valeur de régime I qu'au bout d'un temps infini (fig. 113); cependant elle est en général pratiquement atteinte en un temps très court. Si nous considérons que i est égal à I s'il n'en diffère que de 10^{-4} en valeur relative, la durée t d'établissement du courant est donnée par

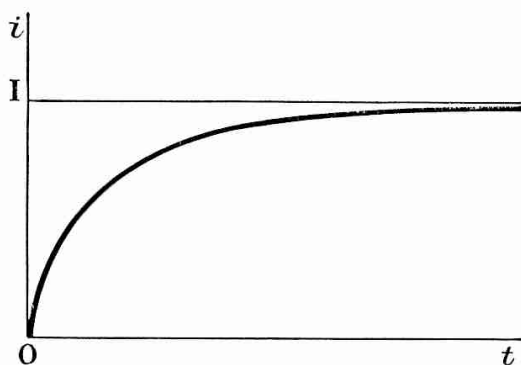


FIG. 113.

$$t = \tau \operatorname{Log}_e 10^4 = 2,3 \times 4 \tau = 9,2 \tau.$$

Pour $L = 0,1 \text{ H}$, qui est déjà une assez forte inductance, et $R = 100 \Omega$, nous avons $\tau = 10^{-3}$ et

$$t = 9,2 \cdot 10^{-3} \text{ s} \simeq 0,01 \text{ s}.$$

Ainsi, sauf pour des circuits très inductifs comportant, comme les électroaimants, des bobines avec noyau de fer, le régime permanent est pratiquement atteint en un temps inférieur à $0,01 \text{ s}$.

13-6. Rupture du courant dans un circuit inductif.

Reprenons le circuit du paragraphe précédent lorsqu'il est parcouru par le courant d'intensité $I = \frac{E}{R}$; nous pouvons supprimer celui-ci de deux façons :

1° Par ouverture de l'interrupteur K.

Supposons que cette opération puisse être effectuée de façon que les bornes de l'interrupteur soient éloignées en un temps très court. Il naît pendant ce temps une force électromotrice d'auto-induction très élevée dans le sens du courant supprimé et, l'interrupteur ouvert constituant un condensateur (de très faible capacité), celui-ci se trouve chargé pour se décharger ensuite à travers le circuit.

En fait, dès que les armatures de ce condensateur sont écartées l'une de l'autre, il se produit entre elles une étincelle, étincelle de rupture, le phénomène étant analogue à celui qui se manifeste lorsqu'on cherche à charger un condensateur sous une tension trop élevée (Électricité I, 7-12). Par suite un courant, courant de rupture, passe dans l'étincelle

en prolongeant le courant supprimé. Il n'est pas possible de soumettre le phénomène au calcul parce que la résistance du circuit, comprenant celle de l'étincelle, est variable et indéterminée.

Si la rupture d'un circuit très inductif (circuit d'un électro-aimant par exemple) était très rapide, il subsisterait une force électromotrice élevée au moment où l'étincelle cesserait, par suite d'autres étincelles pourraient se produire entre des spires du circuit et détériorer leur isolant. De toute façon l'étincelle détériore les contacts des dispositifs pour ouvrir des circuits (disjoncteurs); aussi convient-il de réduire progressivement, à l'aide d'un rhéostat, le courant dans un circuit très inductif.

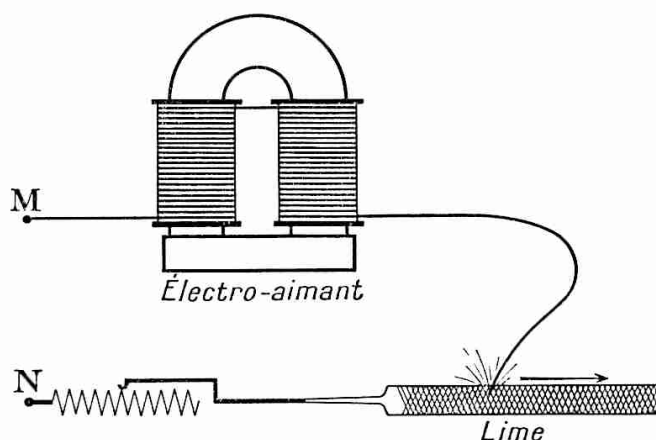


FIG. 114.

lime sur laquelle on déplace une tige métallique; on produit ainsi de brillantes étincelles de rupture correspondant aux nombreuses interruptions du courant. Les étincelles sont beaucoup plus réduites si le circuit est peu inductif.

On réduit également l'étincelle en disposant un condensateur de capacité convenable en dérivation aux bornes de l'interrupteur; l'extra-courant de rupture charge ce condensateur qui se décharge ensuite à travers le circuit.

On met en évidence le phénomène de l'étincelle de rupture en remplaçant l'interrupteur d'un circuit très inductif (fig. 114) par une

2° En court-circuitant le générateur.

L'opération s'effectue en fermant l'interrupteur K (fig. 115). Soit R la résistance du circuit fermé sans générateur ainsi constitué (on pourrait s'arranger pour qu'elle reste ce qu'elle était en remplaçant le générateur par une résistance égale à la sienne). Le problème peut être soumis au calcul.

A l'instant $t = 0$ les conditions sont $E = 0$, $i = I$; la loi d'Ohm appliquée au circuit à l'instant t donne

$$-L \frac{di}{dt} = Ri,$$

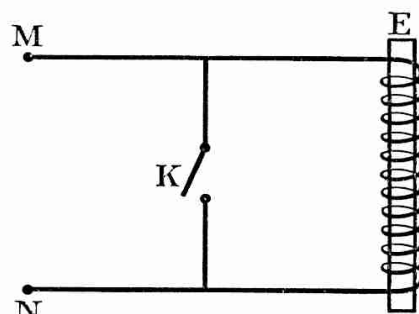


FIG. 115.

ou

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} t = -\frac{t}{\tau}, \quad \text{d'où} \quad \text{Log}_e \frac{i}{I} = -\frac{t}{\tau},$$

et finalement

$$i = I e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

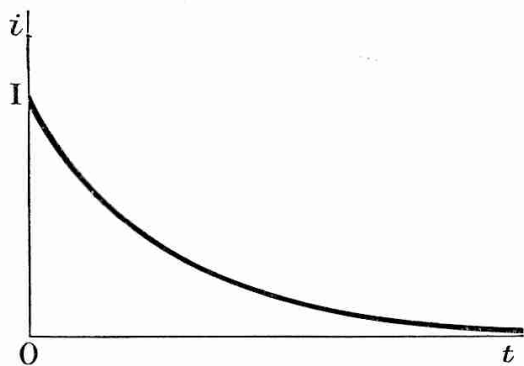


FIG. 116.

L'intensité de l'extra-courant de rupture tend vers zéro en un temps théoriquement infini suivant une loi exponentielle (fig. 116). En fait, l'intensité devient pratiquement nulle en un temps généralement très court et est réduite au dix-

millième de sa valeur initiale en un temps $t = 9,2 \tau$.

13-7. Énergie électromagnétique.

Nous venons d'étudier les régimes variables correspondant à l'établissement et à la rupture d'un courant constant; nous allons maintenant nous placer au point de vue énergétique en leur appliquant le principe de la conservation de l'énergie.

1° Établissement du courant.

A l'instant t nous avons

$$E = Ri + L \frac{di}{dt},$$

d'où, en multipliant les deux membres par $i dt$ de façon à faire apparaître les énergies mises en jeu pendant le temps dt :

$$Ei dt = Ri^2 dt + Li di = Ri^2 dt + d\left(\frac{1}{2} Li^2\right).$$

Le terme $Ei dt$ représente l'énergie fournie par le générateur, le terme $Ri^2 dt$ l'énergie calorifique dissipée dans le circuit par effet Joule. Quant au terme

$$dW = d\left(\frac{1}{2} Li^2\right),$$

on est conduit à admettre qu'il correspond à l'accroissement progressif du flux d'induction propre à travers le circuit : dW est l'augmentation de ce que l'on appelle l'énergie électromagnétique W .

Quand le courant atteint la valeur I du régime permanent, l'énergie électromagnétique correspondante est

$$W = \int_0^I dW = \frac{1}{2} LI^2.$$

On considère que cette énergie, fournie par le générateur, est mise en réserve dans tout l'espace vide sous forme d'énergie électromagnétique.

2° Suppression du courant.

Considérons tout d'abord le cas (13-6, 2°) où l'on court-circuite le générateur à l'instant $t = 0$. L'énergie électromagnétique W est restituée au milieu extérieur (elle avait été fournie par le générateur) sous forme de chaleur dans le passage de l'extra-courant d'auto-induction.

A l'instant t nous avons $Ri + L \frac{di}{dt} = 0$, par suite

$$Ri^2 dt = - d \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) = - dW.$$

— dW représente la diminution de l'énergie électromagnétique et $Ri^2 dt$ l'effet Joule pendant le temps dt .

L'énergie totale transformée en chaleur par l'extra-courant est

$$\int_0^\infty Ri^2 dt = - \int_I^0 d \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) = \frac{1}{2} LI^2 = W.$$

Nous retrouvons l'expression de l'énergie électromagnétique correspondant à l'établissement du courant.

Dans le cas où l'on ouvre l'interrupteur K (13-6, 1°) aux bornes duquel un condensateur est en dérivation, l'énergie W est d'abord transformée en énergie électrostatique $\frac{1}{2} CU^2$ égale à celle du condensateur chargé, puis en chaleur pendant la décharge du condensateur dans le circuit. S'il n'y a pas de condensateur, l'énergie électromagnétique apparaît en définitive sous forme de chaleur dans l'étincelle et dans le circuit.

13-8. Localisation de l'énergie électromagnétique. Relation de Maxwell.

Nous avons vu (Electricité I, 8-5) que l'on est conduit à considérer l'énergie électrostatique comme répartie dans le vide avec la densité volumique

$$\frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2.$$

On établit que l'énergie électromagnétique W est également localisée dans tout l'espace vide avec la densité volumique

$$(1) \quad \frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} BH,$$

B étant l'induction et H l'excitation magnétique au point considéré.

Montrons que si l'on admet la formule (1) on retrouve bien l'expression

$$W = \frac{1}{2} LI^2$$

pour un circuit linéaire rigide de contour C dans le vide (fig. 117), d'inductance propre L et parcouru par un courant d'intensité constante I .

Considérons pour cela un tube élémentaire d'induction et, dans ce tube, un élément de volume

$$d^2v = d\Sigma dl,$$

de section $d\Sigma$ et de longueur dl , limité par deux surfaces équipotentiellles infiniment voisines. L'énergie d^2W localisée dans ce volume est

$$d^2W = \frac{1}{2\mu_0} B^2 d^2v = \frac{1}{2} \frac{B dl}{\mu_0} B d\Sigma.$$

L'énergie électromagnétique localisée dans le volume du tube est, en tenant compte de ce que le flux d'induction

$$d\Phi = B d\Sigma$$

est constant dans tout le tube,

$$dW = \frac{1}{2} B d\Sigma \int_{\Gamma} \frac{B dl}{\mu_0},$$

l'intégrale étant étendue à un parcours le long d'une ligne d'induction Γ .

D'après le théorème d'Ampère la circulation de $\frac{B}{\mu_0}$ le long de Γ est égale à I , par suite

$$dW = \frac{1}{2} IB d\Sigma = \frac{1}{2} I d\Phi.$$

Si nous considérons une surface S quelconque limitée au contour C , l'intégrale

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S d\Phi = \Phi$$

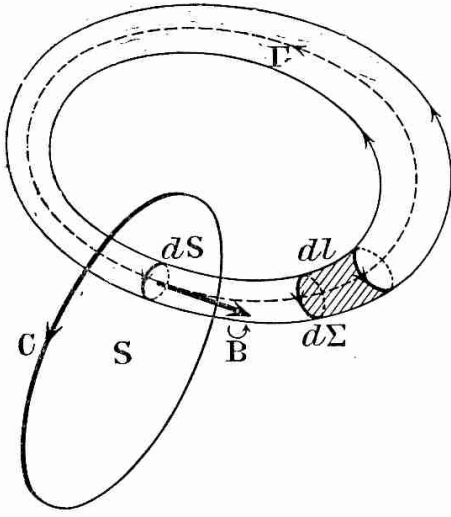


FIG. 117.

est égale au flux d'induction propre Φ du circuit par suite de la définition même de l'inductance propre $\Phi = LI$, et l'énergie électromagnétique W s'obtient en faisant la somme des énergies dW pour l'ensemble de tous les tubes d'induction :

$$W = \frac{1}{2} I \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{1}{2} LI^2.$$

L'expérience conduit à admettre que *la répartition de l'énergie électromagnétique dans le vide correspond à une réalité physique.*

Si l'on considère la décharge oscillante d'un condensateur dans un circuit inductif (l'ensemble constitue un circuit oscillant), un élément de volume pris dans le vide contient à la fois une énergie électrostatique $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dv$ et une énergie électromagnétique $\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$, ces énergies subissant des variations périodiques. Le phénomène correspond à la propagation d'ondes électromagnétiques avec la célérité c de la lumière dans le vide, son étude conduit précisément à **la relation de Maxwell**

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

qui lie c aux *constantes dimensionnées* que sont la permittivité et la perméabilité du vide. Elle subsiste sans modification dans le système S.I. non rationalisé avec $\epsilon'_0 = 4\pi\epsilon_0$ et $\mu'_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}$.

Pour interpréter le résultat négatif de la célèbre expérience de Michelson et Morley (Mécanique II), Einstein proposa en 1905 d'admettre qu'il est impossible de mettre en évidence une variation de la vitesse de la lumière dans le vide pour les observateurs en mouvement rectiligne et uniforme. Cette **hypothèse de base de la relativité restreinte** s'énonce :

La vitesse de la lumière, ou plus généralement d'une onde électromagnétique, dans le vide, est un invariant dans tous les référentiels en translation uniforme les uns par rapport aux autres.

Il en découle que le produit $\epsilon_0 \mu_0$, homogène à l'inverse carré d'une vitesse, est, comme c , un « *invariant relativiste* ».

13-9. Décharge d'un condensateur dans un circuit inductif.

Nous étudions la décharge d'un condensateur de capacité C dans une bobine de résistance R et d'inductance propre L . A l'instant initial, celui

où l'on ferme l'interrupteur K (fig. 118), la charge du condensateur est

$$Q = C(U_A - U_B) = CU$$

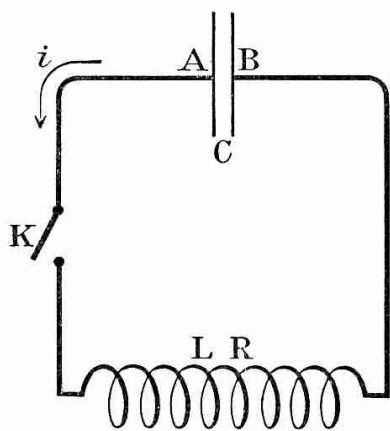


FIG. 118.

et l'intensité du courant dans le circuit est nulle.

A l'instant t la charge est q , la différence de potentiel est $u = u_A - u_B$ et l'intensité est i , comptée positivement de l'armature A primitivement positive vers l'armature B. La loi d'Ohm appliquée à l'instant t donne

$$u = \frac{q}{C} = Ri + L \frac{di}{dt},$$

et l'on a
$$i = -\frac{dq}{dt},$$

parce que la quantité d'électricité $i dt$ transportée par le courant pendant le temps dt tend à décharger le condensateur.

Prenons q comme variable; les relations précédentes fournissent l'équation différentielle qui régit la décharge:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0,$$

équation différentielle du second ordre, à coefficients constants et sans second membre.

La forme de l'intégrale de cette équation dépend de la nature, complexe ou réelle, des solutions de l'équation caractéristique

$$Lx^2 + Rx + \frac{1}{C} = 0,$$

et par suite du signe de son discriminant

$$\Delta = R^2 - 4 \frac{L}{C}.$$

1° Décharge apériodique.

Si la résistance R est suffisamment grande,

$$R > R_c = 2 \sqrt{\frac{L}{C}},$$

le discriminant Δ est positif. L'équation caractéristique a deux racines réelles négatives, $-\alpha$ et $-\beta$.

L'intégrale générale est

$$q = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t},$$

d'où, en tenant compte des conditions initiales ($t = 0$, $q = Q$,

$$i = -\frac{dq}{dt} = 0),$$

$$q = \frac{Q}{\beta - \alpha} (\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t}), \quad i = Q \frac{\alpha \beta}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}).$$

La figure 119 représente les variations de q et de i en fonction du temps; elles ont toujours le signe de Q , et tendent asymptotiquement vers zéro lorsque t tend vers l'infini (i , partant de zéro, passe par un maximum).

Un cas particulier est celui où L est très faible (circuit non inductif); l'équation différentielle se réduit alors à

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{CR} = \frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = 0.$$

On obtient les équations

$$q = Q e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad i = \frac{Q}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}};$$

en l'absence d'effet d'auto-induction qui retarde l'établissement du courant de décharge celui-ci s'établit instantanément. q et i décroissent exponentiellement avec la constante de temps $\tau = CR$.

Un cas plus particulier encore est celui où, C et L étant donnés, la résistance a la valeur $R = R_c$ appelée *résistance critique*. Le discriminant Δ est alors nul et l'équation caractéristique admet la racine double $\alpha = -\frac{R}{2L}$; on obtient les intégrales

$$q = Q (1 + \alpha t) e^{-\alpha t}, \quad i = Q \alpha^2 t e^{-\alpha t},$$

la décharge est encore apériodique. On démontre que, pour les mêmes valeurs de L et de C , la *résistance critique* est celle pour laquelle q et i tendent le plus rapidement vers zéro; les courbes correspondantes sont

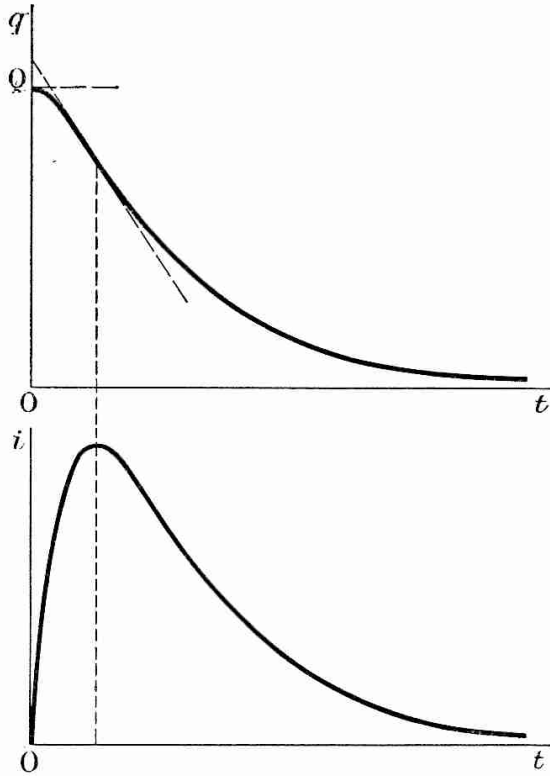


FIG. 119.

au-dessous de celles pour lesquelles R est supérieur à R_c ; le régime de décharge est *le régime critique*.

2° Décharge oscillatoire amortie.

Si la résistance est inférieure à la résistance critique,

$$R < R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

le discriminant Δ est négatif et les racines de l'équation caractéristique sont imaginaires, $-\lambda \pm j\omega$, avec

$$\lambda = \frac{R}{2L}; \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{1}{CL} - \lambda^2};$$

q est alors de la forme

$$q = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t - \varphi),$$

et l'intensité

$$i = Ae^{-\lambda t} [\lambda \cos(\omega t - \varphi) + \omega \sin(\omega t - \varphi)],$$

A et φ étant déterminés par les conditions initiales $t = 0$, $q = Q$,

$$i = -\frac{dq}{dt} = 0.$$

La charge et l'intensité sont des fonctions sinusoïdales amorties du temps; les courbes (fig. 120) sont comprises entre deux exponentielles symétriques par rapport à l'axe des temps.

$\lambda = \frac{R}{2L}$ caractérise l'amortissement; celui-ci est d'autant plus rapide que la constante de temps $\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{2L}{R}$ est plus petite.

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ est la *pseudo-période*.

Si l'amortissement est faible, λ^2 est négligeable par rapport à $\frac{1}{CL} = \omega_0^2$ dans l'expression de ω et l'on a

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \simeq \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0 = 2\pi\sqrt{CL};$$

T_0 est la période propre du circuit caractérisé par la capacité C et l'inductance propre L .

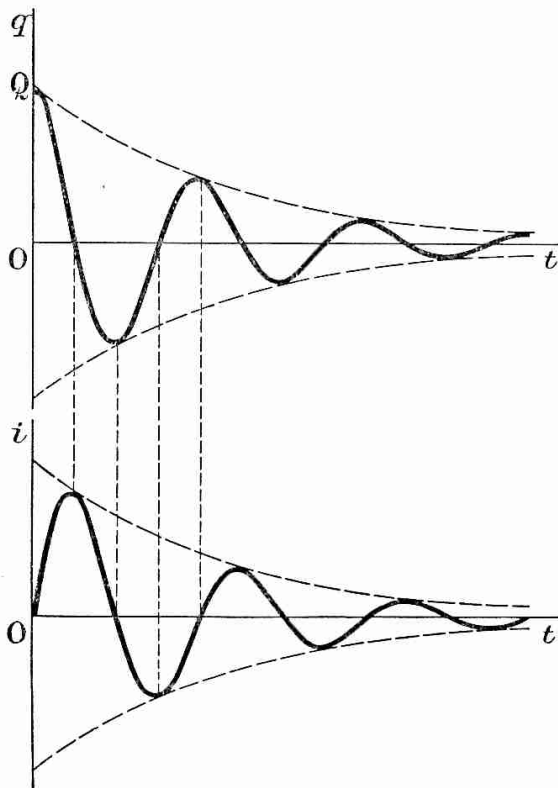


FIG. 120.

Enfin, si dans l'équation différentielle

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{CL} = \frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0,$$

le second terme, terme d'amortissement, est négligeable, ce qui correspond à un circuit inductif de très faible résistance, l'équation se réduit à

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0.$$

La décharge est alors sinusoïdale non amortie; on a, compte tenu des conditions initiales,

$$q = Q \cos \omega_0 t = Q \cos 2\pi \frac{t}{T_0}; \quad i = Q \omega_0 \sin \omega_0 t = \frac{2\pi}{T_0} Q \sin 2\pi \frac{t}{T_0};$$

la période des oscillations est alors la période propre du circuit. D'une façon générale la pseudo-période d'un régime oscillatoire amorti diffère d'autant moins de T_0 que λ est plus petit.

Exercices.

Exercice 21. — Une bobine plate de surface $S = 5 \text{ cm}^2$, comportant $N = 100$ spires, est placée au centre d'un solénoïde très long, d'axe horizontal, qui comprend 2 500 spires par mètre; elle est fixée dans un plan horizontal à l'extrémité du fléau d'une balance. Un plateau est fixé à l'autre extrémité du fléau à la distance $d = 12,5 \text{ cm}$ de l'arête du couteau central. La balance est en équilibre lorsqu'il ne passe aucun courant dans le solénoïde et la bobine placés en série.

1° On lance un courant d'intensité $i = 1 \text{ A}$ dans l'ensemble. Quelle masse faut-il placer dans le plateau de la balance pour rétablir l'équilibre? On donne $g = 9,80 \text{ m.s}^{-2}$.

2° On remplace le plateau de la balance par une armature d'un condensateur plan formé de deux disques conducteurs de 10 cm de rayon et distants de 0,5 cm. Calculer la force qui s'exerce sur chaque armature en fonction de la différence de potentiel U entre les deux armatures. Calculer la valeur de U qui permet d'équilibrer le couple électromagnétique calculé au paragraphe précédent.

3° Montrer que si l'on fait agir la même différence de potentiel U , d'une part entre les armatures du condensateur, d'autre part aux extrémités du circuit de résistance R comprenant le solénoïde et la bobine en série, de façon à réaliser l'équilibre de la balance, celui-ci ne dépend ni de U , ni de i et permet une mesure absolue de R . Trouver la relation entre R et les constantes de l'appareil. Calculer R .

1° L'induction au centre du solénoïde est

$$B = \mu_0 n i = 4\pi \cdot 10^{-7} \times 2\,500 = 3,142 \cdot 10^{-3} \text{ tesla}.$$

La bobine est soumise au couple électromagnétique de moment

$$\Gamma = NSBi = 10^2 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 3,142 \cdot 10^{-3} = 1,57 \cdot 10^{-4} \text{ J. rad}^{-1}.$$

La condition d'équilibre de la balance est

$$mgd = NSB,$$

d'où

$$m = \frac{NSB}{gd} = \frac{1,57 \cdot 10^4}{12,5 \cdot 10^{-2} \times 9,8} = 1,28 \cdot 10^{-4} \text{ kg} = 0,128 \text{ g}.$$

2° La force électrostatique qui s'exerce sur chaque armature du condensateur est

$$F = \frac{\epsilon_0 S'}{2e^2} \cdot U^2 = \frac{\pi \cdot 10^{-2} U^2}{36\pi \cdot 10^9 \times 2 \times 25 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{18} \cdot 10^{-7} U^2.$$

La condition d'équilibre, $Fd = \Gamma = mgd$, donne

$$U^2 = 18 \cdot 10^7 \times 0,128 \times 9,8 = 2,26 \cdot 10^8,$$

d'où

$$U = 15\,000 \text{ volts} = 15 \text{ kilovolts}.$$

3° Le solénoïde et la bobine sont parcourus par un courant d'intensité $i = \frac{U}{R}$. La condition d'équilibre s'exprime par

$$\Gamma = \mu_0 n NS i^2 = \mu_0 n NS \frac{U^2}{R^2} = Fd = \frac{\epsilon_0 S' d}{2e^2} U^2,$$

d'où

$$R^2 = \frac{2\mu_0 n NS e^2}{\epsilon_0 S' d},$$

$$R = e \sqrt{\frac{2\mu_0 n NS}{\epsilon_0 S' d}} = 475 \, \Omega.$$

Exercice 22. — 1° On considère le dispositif de la figure 121. En réunissant les points M et N on charge le condensateur C à travers une résistance R à l'aide d'une batterie d'accumulateurs de force électromotrice E et de résistance intérieure négligeable. Établir les équations différentielles qui, par intégration, donneront à chaque instant la charge q du condensateur et la tension $v = V_A - V_B$ à ses bornes.

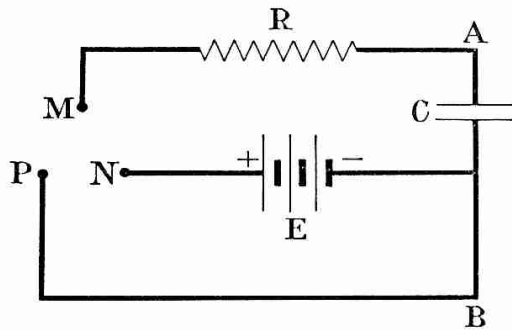


FIG. 121.

2° Intégrer cette équation, en supposant $q = 0$, $v = 0$ pour $t = 0$.

En déduire l'intensité du courant dans le circuit à chaque instant. Donner l'allure des courbes $v = f(t)$ et $i = g(t)$.

3° Calculer l'intervalle de temps $t_2 - t_1$ nécessaire pour faire passer la tension aux bornes de C de la valeur V_1 à la valeur $V_2 > V_1$.

4° Lorsque la tension atteint la valeur V_2 , on coupe M et N et l'on relie M à P : le condensateur se décharge dans R jusqu'à ce que la tension atteigne V_1 . Écrire l'équation différentielle de la décharge, l'intégrer et calculer l'intervalle de temps $t_3 - t_2$ qui s'écoule lorsque la tension passe de V_2 à V_1 .

5° Le phénomène se reproduit par la manœuvre automatique de l'inverseur MNP; quelle est la période T du phénomène?

Donner l'allure de la courbe qui le représente à partir de l'instant zéro. Quelle

valeur T' prendrait la période si le condensateur chargé à travers R se déchargeait dans une résistance très faible devant R ? Donner l'allure de la nouvelle courbe.

Application numérique : $C = 3,75 \mu\text{F}$; $E = 2 \cdot 10^4 \text{ V}$; $V_1 = 5 \cdot 10^3 \text{ V}$; $V_2 = 15 \cdot 10^3 \text{ V}$; $R = 18 \cdot 10^4 \Omega$.

Calculer $t_2 - t_1$; $t_3 - t_1$; T .

$$1^\circ E = \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt}; \quad E = v + CR \frac{dv}{dt}.$$

$$2^\circ q = CE(1 - e^{-\frac{t}{RC}}); \quad v = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}); \quad i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

$$3^\circ t = RC \text{Log}_e \frac{E}{E - v}; \quad t_2 - t_1 = RC \text{Log}_e \frac{E - V_1}{E - V_2}.$$

$$4^\circ v + CR \frac{dv}{dt} = 0;$$

$$v = V_2 e^{\frac{t_2 - t}{CR}}; \quad t_3 - t_2 = CR \text{Log}_e \frac{V_2}{V_1}.$$

$$5^\circ T = t_3 - t_1 = t_3 - t_2 + t_2 - t_1 = CR \text{Log}_e \frac{V_2(E - V_1)}{V_1(E - V_2)}.$$

La courbe de la figure 122 représente le phénomène. Si la décharge

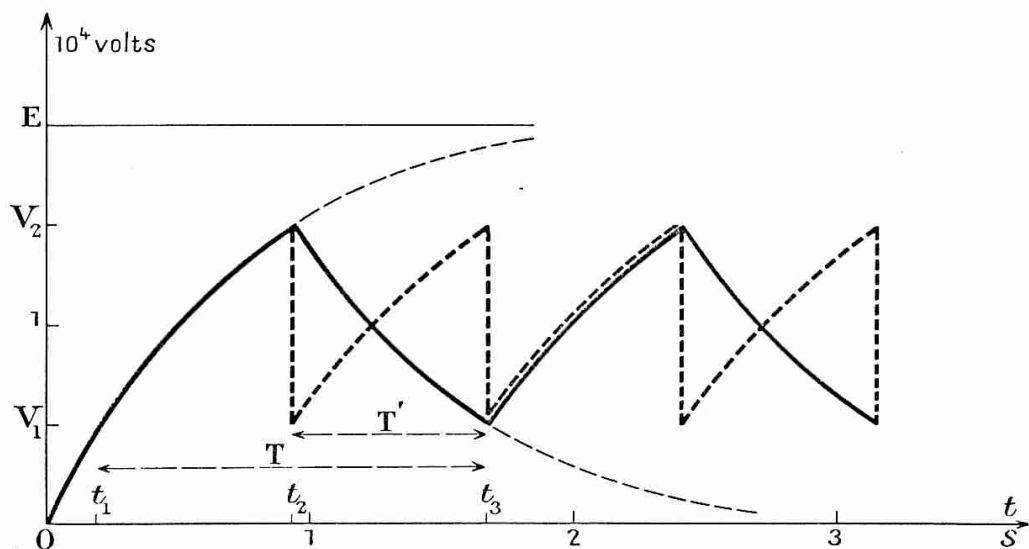


FIG. 122.

se produisait dans une résistance très faible devant R , elle serait pratiquement instantanée, la période T' serait égale à $t_2 - t_1$ (courbe en trait discontinu).

Application numérique :

$$CR = 0,675 \text{ s}; \quad 2,3 CR = 1,553 \text{ s}.$$

$$t_1 = 1,553 \log_{10} \frac{4}{3} = 0,19 \text{ s};$$

$$t_2 - t_1 = 1,553 \log_{10} 3 = 0,74 \text{ s};$$

$$t_3 - t_2 = 1,553 \log_{10} 3 = 0,74 \text{ s}; \quad T = 1,48 \text{ s}.$$

Exercice 23. — On considère (fig. 123) une bobine comportant N_1 spires jointives

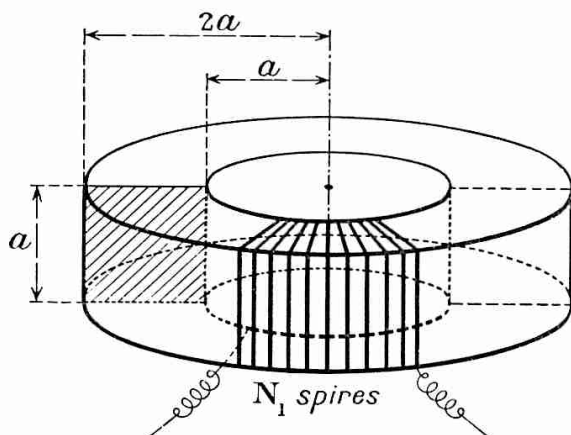


FIG. 123.

enroulées sur un noyau de fer doux dont la perméabilité relative a une valeur constante μ . Ce noyau occupe le volume d'un anneau à section carrée compris entre : d'une part, deux cylindres de révolution de rayons respectifs a et $2a$ et, d'autre part, deux plans parallèles, perpendiculaires à l'axe et situés à une distance a l'un de l'autre.

1° Exprimer le coefficient de self-induction (auto-inductance) L_1 de cette bobine en fonction de μ , a , N_1 .

2° Cette bobine étant soumise à l'action d'une force électromotrice constante produisant un cou-

rant permanent d'intensité I_0 , on met brusquement ses bornes en court-circuit à un instant que l'on prendra comme origine du temps. Au bout de quel temps T l'intensité dans la bobine sera-t-elle réduite de moitié? On admettra que la longueur d'une spire est sensiblement $4a$; on donne en outre $\mu = 5\,000$, $N_1 = 100$, la section du conducteur est $s = 2\text{ mm}^2$ et sa résistivité $\rho = 1,6 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$.

3° Sur le même noyau on enroule une deuxième bobine comportant N_2 spires d'un conducteur identique au précédent; cette bobine étant en circuit ouvert, on répète l'expérience précédente. Exprimer la force électromotrice maximale qui apparaîtra entre ses bornes; montrer qu'elle est indépendante de μ et de N_1 . Calculer cette force électromotrice en volts, sachant que $N_2 = 20$, $a = 10\text{ cm}$ et $I_0 = 5\text{ A}$.

4° Cette deuxième bobine étant maintenant fermée sur elle-même, on répète l'expérience du paragraphe 2. En prenant comme origine des temps l'instant où les bornes du générateur sont mises en court-circuit, exprimer en fonction du temps les intensités respectives i_1 et i_2 des courants traversant les deux bobines après la mise en court-circuit de la première bobine.

Évaluer le temps T' au bout duquel l'intensité i_1 est réduite à la valeur $\frac{I_0}{2}$.

1° Soit φ le flux d'induction magnétique à travers une section carrée de l'anneau; le flux à travers la bobine est $\Phi = N_1\varphi$ et l'auto-inductance L_1 de cette bobine est

$$L_1 = \frac{\Phi}{i} = \frac{N_1\varphi}{i}.$$

Soit $B = \mu_0\mu H$ l'induction magnétique en un point distant de x de l'axe du noyau et la bande rectangulaire de largeur dx , de surface $dS = a\,dx$. Le flux d'induction magnétique $d\varphi$ à travers dS est

$$d\varphi = B\,dS = Ba\,dx.$$

Le vecteur B est normal à la section et tangent à une ligne d'induction qui est un cercle de rayon x , il en est de même du vecteur excitation magnétique H . L'application du théorème d'Ampère donne

$$2\pi xH = N_1 i,$$

d'où

$$B = \frac{\mu_0\mu}{2\pi} N_1 i \frac{1}{x};$$

par suite

$$d\varphi = Ba \, dx = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} N_1 a i \frac{dx}{x}.$$

Le flux d'induction magnétique à travers une section est

$$\varphi = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} N_1 a i \int_a^{2a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} N_1 a i \operatorname{Log}_e 2,$$

par suite

$$L_1 = \frac{N_1 \varphi}{i} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} N_1^2 a \operatorname{Log}_e 2 = 0,69 \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} N_1^2 a.$$

2° L'équation différentielle qui régit l'évolution du courant i après mise en court-circuit de la bobine est

$$L_1 \frac{di}{dt} + Ri = 0,$$

l'intensité à l'instant origine étant I_0 .

Par suite

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L_1} dt = -\frac{dt}{\tau},$$

en posant $\tau = \frac{L_1}{R}$, et, par intégration,

$$\operatorname{Log}_e \frac{i}{I_0} = -\frac{t}{\tau}.$$

Calculons

$$R = \rho \frac{l}{s} = \frac{1,6 \cdot 10^{-8} \times 400 a}{2 \cdot 10^{-6}} = 3,2 a,$$

$$L_1 = 2 \cdot 10^{-7} \times 5000 \times 10^4 a \operatorname{Log}_e 2 = 10 a \operatorname{Log}_e 2;$$

d'où

$$\tau = \frac{L_1}{R} = \operatorname{Log}_e 2 \times \frac{10}{3,2} = \frac{2,3 \times 0,3 \times 10}{3,2} = 2,156 \text{ s.}$$

Par suite

$$T = \tau \operatorname{Log}_e 2 = 2,156 \times 2,3 \times 0,3 = 1,5 \text{ s.}$$

3° Le flux Φ_2 à travers le second enroulement est, à l'instant t ,

$$\Phi_2 = N_2 \varphi = \frac{N_2}{N_1} L_1 i;$$

la force électromotrice induite est

$$e = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{N_2}{N_1} L_1 \frac{di}{dt}.$$

Comme

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L_1} I_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

nous avons

$$e = \frac{N_2}{N_1} R I_0 e^{-\frac{t}{\tau}};$$

d'autre part

$$R = \rho \frac{4aN_2}{s},$$

par suite

$$e = \frac{4a\rho}{s} N_2 I_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

dont la valeur maximale (à l'instant $t = 0$),

$$e_m = \frac{4a\varphi}{s} N_2 I_0 = 0,32 \text{ volt},$$

est bien indépendante de μ et de N_1 .

Exercice 24. — Un circuit (fig. 124) comprend une résistance non inductive r et un

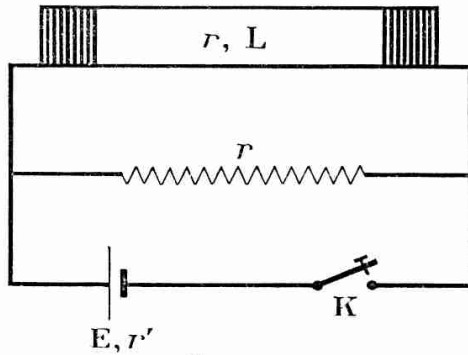


FIG. 124.

solénoïde de même résistance r formé de N spires, sa longueur est l , son diamètre, d . La résistance et le solénoïde sont en dérivation aux bornes d'un générateur de force électromotrice E et de résistance intérieure r' .

Pour les applications numériques on prendra $r = 10 \, \Omega$; $N = 2\,000$; $l = 0,5 \text{ m}$; $d = 0,1 \text{ m}$; $E = 54 \text{ V}$; $r' = 1 \, \Omega$ et $\pi^2 = 10$.

1° On ferme l'interrupteur K et l'on attend que le régime permanent soit établi. Calculer les intensités dans les deux dérivation.

2° Calculer l'auto-inductance L du solénoïde supposé très long.

3° Le régime permanent étant établi, on ouvre l'interrupteur K très rapidement. Déterminer l'intensité i qui circule dans le circuit constitué par la résistance et le solénoïde; calculer le temps au bout duquel cette intensité est réduite à la moitié de sa valeur initiale.

1° Les intensités dans les deux branches, de même résistance, sont égales à I , celle débitée par le générateur est $2I$, par suite

$$E = 2r'I + rI,$$

d'où

$$I = \frac{E}{r + 2r'} = \frac{54}{12} = 4,5 \text{ A.}$$

2° Nous avons

$$L = \mu_0 \frac{\pi}{4} \frac{N^2}{l} d^2 = 8\pi^2 \cdot 10^{-3} \simeq 0,08 \text{ henry.}$$

3° L'interrupteur ayant été ouvert, nous avons à l'instant t

$$L \frac{di}{dt} + 2ri = 0,$$

d'où, en tenant compte de la condition $i = I$ à l'instant $t = 0$, et en posant $\tau = \frac{L}{2r}$ (constante de temps du circuit),

$$i = I e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad t = 2,3\tau \log_{10} \frac{I}{i}.$$

Nous avons $\tau = 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}$; pour $\frac{I}{i} = 2$:

$$t = 2,3 \times 4 \cdot 10^{-3} \log_{10} 2 \simeq 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ s.}$$

QUATRIÈME PARTIE

UNITÉS ET MESURES ÉLECTRIQUES

Chap. XIV. — Les systèmes d'unités électriques.

Chap. XV. — Électrodynamomètres.

Chap. XVI. — Galvanomètre à cadre mobile.

CHAPITRE XIV

LES SYSTÈMES D'UNITÉS ÉLECTRIQUES

14-1. Généralités sur les systèmes d'unités.

Nous avons tout d'abord restreint l'étude des systèmes d'unités au seul domaine de la Mécanique (Unités et Mesures, Chap. I), les systèmes les plus commodes étant du type longueur, masse, temps, avec, dans le système international (S.I.), les unités fondamentales, mètre, kilogramme et seconde.

La Thermodynamique introduit une grandeur fondamentale nouvelle (Chaleur II, Chap. I), la température thermodynamique, dont l'unité S.I. est le degré Kelvin. La photométrie (Optique II, Chap. IV) impose une nouvelle grandeur fondamentale, l'intensité lumineuse, dont l'unité S.I. est la candela.

Il semble donc bien que **toute extension de la Physique à des domaines ne se prêtant pas à une interprétation purement mécaniste nécessite l'introduction de nouvelles grandeurs fondamentales.**

Reprenons sous une forme plus générale le problème que nous nous sommes déjà posé (Unités et Mesures, 1-4) :

Est-il possible sans graves inconvénients de réduire le nombre de grandeurs fondamentales ?

Nous allons envisager ce problème en Mécanique, puis en Thermodynamique.

1° En Mécanique.

Choisissons les deux grandeurs fondamentales longueur et masse et les unités fondamentales correspondantes, le mètre et le kilogramme par exemple. Nous pouvons définir les grandeurs force et temps en tant que grandeurs dérivées parce que nous disposons des deux relations

$$(1) \quad f = G \frac{mm'}{d^2}, \quad (2) \quad f = km\gamma$$

qui relient les grandeurs longueur, masse, temps et force.

Nous définissons l'unité de force de façon que la constante de gravitation G soit égale à 1; la relation (2) dans laquelle nous faisons $k = 1$ nous définit l'unité d'accélération et par suite l'unité de temps. Nous avons donc dans ce système à deux grandeurs fondamentales :

$$f = \frac{mm'}{d^2}, \quad f = m\gamma.$$

Ne nous arrêtons pas sur l'incommodité d'un tel système. Plaçons-nous au seul point de vue de la représentation des phénomènes dans le cadre de la Mécanique newtonienne à seule fin d'écarter des questions délicates qui ne sont pas de notre sujet.

Les relations (1) et (2) sont de nature bien différente. La seconde constitue une véritable *relation de définition de la grandeur force*; elle est certes suggérée par l'expérience, mais elle est indépendante de tout phénomène lié à une propriété de la matière ou du vide; le facteur k peut par là même être dépouillé de toute dimension et il n'y a que des avantages à le choisir égal à 1.

La relation (1) traduit *la loi de l'attraction universelle*, loi expérimentale dont la vérification directe est peu précise, mais les conséquences qu'elle entraîne permettent de la considérer comme rigoureuse. La choisir pour définir la grandeur force présente deux graves inconvénients : d'une part le phénomène utilisé, pour important qu'il soit, est très particulier (on pourrait employer bien d'autres types de force), d'autre part, en faisant $G = 1$, nous supprimons tout vestige de la propriété du vide relative aux actions gravifiques.

La solution adoptée qui consiste, en ne retenant que la seule relation (2) de définition, à ne concevoir que des systèmes d'unités mécaniques à trois grandeurs fondamentales, sauvegarde la forme (1) de la loi de l'attraction universelle en attribuant à la constante de gravitation le caractère de *grandeur dimensionnelle à détermination unique* représentative d'une propriété du vide.

Ajoutons que la commodité de systèmes comme le système S.I. suffirait à elle seule à rejeter un système à deux grandeurs fondamentales en Mécanique.

2° En Thermodynamique.

La grandeur température thermodynamique est définie au moyen du rapport de deux quantités de chaleur dans un cycle de Carnot (1-12) :

$$(1) \quad \frac{T}{T_0} = \left| \frac{Q}{Q_0} \right|.$$

Il revient au même de la définir à l'aide des propriétés thermoélastiques

d'une masse de gaz parfait par le rapport

$$(2) \quad \frac{T}{T_0} = \frac{pv}{p_0v_0}.$$

Dans les deux cas le rapport de deux températures est mesuré par le rapport de grandeurs homogènes à un travail, donc exprimables en joules dans le système S.I. On ne peut pas en conclure que température et travail (ou chaleur) soient des grandeurs de la même espèce, les phénomènes choisis (fonctionnement d'une machine ditherme réversible et propriétés d'un gaz parfait) manquant de généralité puisque les relations (1) et (2) cessent d'être vraies pour un cycle quelconque (non réversible) et pour un gaz réel.

Considérons momentanément T et Q comme des grandeurs de même espèce : nous avons pour une mole de gaz parfait $pv = kT$, k étant un facteur numérique sans dimension. Pour conserver l'échelle Kelvin, nous devons attribuer à k la valeur numérique R , constante molaire des gaz parfaits, exprimée dans le système S.I. Dès lors T s'exprime en joules et R est sans dimension.

Il est difficile de trouver un avantage à ce procédé, tandis qu'il présente de très graves inconvénients. Il nous conduirait à constater qu'un mélange de glace et d'eau recevant, ou cédant, la quantité de chaleur Q joules, demeure à la température constante T joules. C'est dire que nous aurions retiré tout caractère de grandeur à l'entropie $S = \frac{Q}{T}$ qui se trouverait dépourvue de dimensions; on retirerait par

là même à la température son rôle de facteur de tension, à l'entropie celui de facteur de quantité dans les échanges thermiques (Chaleur II, 2-4).

L'étude de la Thermodynamique nécessite bien l'introduction d'une nouvelle grandeur fondamentale; celle-ci n'est pas la quantité de chaleur qui est une forme particulière de l'énergie, mais bien la température.

Les considérations précédentes ont pour but de montrer qu'il nous faut ériger au rang de grandeur fondamentale toute grandeur qui ne peut être rattachée aux grandeurs mécaniques que d'une façon artificielle, nuisible à la compréhension des phénomènes. Nous devons nous garder d'égaliser à 1 des constantes dimensionnelles qui sont représentatives de propriétés du vide ou de la matière.

Il se trouve, d'autre part, qu'en respectant ces directives il soit possible d'obtenir un système d'unités, le système S.I., d'usage commode aussi bien pour l'ingénieur que pour le physicien, et qui permette une très grande précision dans les définitions des unités.

14-2. Le problème des unités en électricité.

Nous nous proposons tout d'abord de définir le système international (S.I.). Le problème a été traité dans les deux tomes de l'électricité mais

la principale difficulté est que l'ordre d'enseignement que nous avons suivi n'est pas celui qui convient le mieux à une présentation rationnelle des unités. Le lecteur nous évitera de trop nombreuses redites en se reportant dans les deux ouvrages aux paragraphes concernant la question. Nous n'étudierons les systèmes C.G.S. (électrostatique et électromagnétique) que dans le dessein de faciliter la lecture des textes qui les utilisent.

Les grandeurs mécaniques ne pouvant assurer seules l'explication des phénomènes de l'électricité, il nous faut choisir une quatrième grandeur et une quatrième unité fondamentales.

Les formules utilisables pour leur définition sont :

a) Celle qui exprime *la loi de Coulomb* dans le vide,

$$f = k \frac{qq'}{d^2}.$$

b) *La formule d'Ampère* dans le vide,

$$\vec{d^2F'} = k'I' \vec{dl'} \wedge \left(\frac{I \vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2} \right)$$

ou la formule qui en découle (2-5),

$$F' = k' \frac{2II'l'}{a}.$$

Il semblerait que deux grandeurs fondamentales et deux unités fondamentales soient nécessaires. Il n'en est rien; en effet, *dans un système cohérent d'unités*, les grandeurs q et i sont liées par la relation

$$q = it,$$

d'autre part l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide conduit à *la relation de coordination de Maxwell*

$$\frac{k'}{k} c^2 = 1,$$

dans laquelle c est la célérité de la lumière dans le vide.

Dans un système d'unités non rationalisé (N.R.) on pose

$$k = \frac{1}{\epsilon'_0}, \quad k' = \mu'_0,$$

dans un système rationalisé (R.) :

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad k' = \frac{\mu_0}{4\pi}.$$

Dans un même système nous avons

$$\varepsilon'_0 = 4\pi\varepsilon_0, \quad \mu'_0 = \frac{\mu_0}{4\pi};$$

la relation de Maxwell, s'écrivant

$$\varepsilon'_0\mu'_0c^2 = \varepsilon_0\mu_0c^2 = 1,$$

n'est pas affectée par la rationalisation.

ε_0 (et ε'_0), μ_0 (et μ'_0) sont des grandeurs dimensionnelles à détermination unique, appelées respectivement *permittivité* et *perméabilité du vide* : la première est représentative des propriétés des charges statiques dans le vide, la seconde, des propriétés des charges en mouvement dans le vide. La relation de Maxwell exprime la corrélation entre les deux groupes de phénomènes. Leurs valeurs (ε_0 et μ_0 , ε'_0 et μ'_0) sont différentes suivant que le système est rationalisé ou non.

Un système d'unités électriques est défini soit par le choix de la valeur numérique attribuée à k , soit par celui de la valeur de k' :

a) Le choix de k entraîne la valeur attribuée à la *permittivité du vide*,

$$\varepsilon'_0 = \frac{1}{k} \text{ (N.R.)}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \text{ (R.)};$$

celle-ci est alors prise comme *grandeur fondamentale*.

La formule de Coulomb définit l'*unité de quantité d'électricité*, qui est l'*unité fondamentale* ; elle est la même, que le système soit rationalisé ou non.

La relation de Maxwell détermine la valeur (μ_0 ou μ'_0) de la perméabilité du vide, qui ne peut être qu'approchée puisque son calcul fait intervenir la valeur de la célérité de la lumière dans le vide.

Nous appellerons *système électrostatique* tout système basé sur le choix de k (donc de ε_0 ou ε'_0).

b) Le choix de k' entraîne la valeur attribuée à la *perméabilité du vide*,

$$\mu'_0 = k' \text{ (N.R.)}, \quad \mu_0 = 4\pi k' \text{ (R.)};$$

celle-ci est alors prise comme *grandeur fondamentale*.

La formule d'Ampère définit l'*unité d'intensité électrique*, qui est l'*unité fondamentale* que le système soit rationalisé ou non.

La relation de Maxwell détermine la valeur (ε_0 ou ε'_0) de la permittivité du vide, qui ne peut être qu'approchée puisque son calcul fait intervenir la valeur de la célérité de la lumière dans le vide.

Nous appellerons *système électromagnétique* tout système basé sur le choix de k' (donc de μ_0 ou μ'_0).

En résumé :

Dans un système électrostatique la grandeur fondamentale est la permittivité électrique du vide (grandeur pour laquelle on ne peut parler d'unité) **et l'unité fondamentale est l'unité de quantité d'électricité.**

Dans un système électromagnétique la grandeur fondamentale est la perméabilité magnétique du vide (grandeur pour laquelle on ne peut parler d'unité) **et l'unité fondamentale est l'unité d'intensité électrique.**

14-3. Rationalisation d'un système d'unités.

Dans un système d'unités non rationalisé les formules de Coulomb et d'Ampère ont la forme

$$(N.R.) f = \frac{1}{\epsilon'_0} \frac{qq'}{d^2} \quad \text{et} \quad \vec{d^2F'} = \mu'_0 I' \vec{dl'} \wedge \left(\frac{I \vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2} \right).$$

Rationaliser le système consiste à remplacer ϵ'_0 par $4\pi\epsilon_0$ et μ'_0 par $\frac{\mu_0}{4\pi}$; les formules précédentes deviennent

$$(R.) f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{d^2} \quad \text{et} \quad \vec{d^2F'} = \frac{\mu_0}{4\pi} I' \vec{dl'} \wedge \left(\frac{I \vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2} \right).$$

La rationalisation modifie les valeurs attribuées à la permittivité et à la perméabilité du vide en conservant l'unité fondamentale et la plupart des unités dérivées. *La forme des formules est modifiée tant qu'on n'explicite pas les valeurs numériques de ϵ'_0 ou de ϵ_0 , de μ'_0 ou de μ_0 , mais elles deviennent identiques dès que l'on passe aux applications numériques.*

La rationalisation fait apparaître 4π dans certaines formules, elle le fait disparaître dans d'autres. Nous avons constamment utilisé un système rationalisé, le système S.I. (R.); on passe aux formules non rationalisées en effectuant les remplacements inverses de ceux indiqués ci-dessus. Voici ce que donne cette transposition dans le système S.I. pour quelques formules choisies parmi les plus importantes.

Théorème de Gauss :

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i = \frac{4\pi}{\epsilon'_0} \sum q_i \simeq 36\pi \cdot 10^9 \sum q_i.$$

Capacité d'un condensateur sphérique :

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \epsilon'_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \simeq \frac{1}{9 \cdot 10^9} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Capacité d'un condensateur plan :

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{e} = \frac{\epsilon'_0}{4\pi} \frac{S}{e} \simeq \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \frac{S}{e}.$$

Induction produite par un courant rectiligne indéfini :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = 2\mu'_0 \frac{I}{a} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{I}{a}.$$

Induction au centre d'une spire circulaire :

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} = 2\pi\mu'_0 \frac{I}{R} = 2\pi \cdot 10^{-7} \frac{I}{R}.$$

Induction à l'intérieur d'un long solénoïde :

$$B = \mu_0 n I = 4\pi\mu'_0 n I = 4\pi \cdot 10^{-7} n I.$$

Les formules où la permittivité ou la perméabilité du vide n'interviennent pas explicitement ne sont pas affectées par la rationalisation :

$$Q = CU, W = \frac{1}{2} CU^2, \dots, U = RI, W = RI^2 t, \dots$$

$$F = BI l, W = I(\Phi_2 - \Phi_1), \mathcal{M} = SI, \dots$$

L'avantage de la rationalisation semble être de faire disparaître 4π (en apparence seulement puisqu'il réapparaît dans une application numérique) dans les formules très importantes qui donnent la capacité d'un condensateur plan et l'induction à l'intérieur d'un solénoïde. Cet avantage assez illusoire est compensé par l'apparition de 4π (en apparence seulement puisqu'il disparaît dans une application numérique) dans certaines formules comme celles qui donnent la capacité d'un condensateur sphérique et l'induction créée par un courant rectiligne. D'autre part, dans un système rationalisé, soit $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, soit $\frac{\mu_0}{4\pi}$, alourdissent les démonstrations, 4π ne disparaissant *in fine* que dans quelques calculs seulement.

En résumé, la rationalisation paraît être une complication inutile si l'on s'en tient à l'étude de l'électrostatique et de l'électromagnétisme du vide.

Par contre :

La rationalisation est une nécessité dans l'étude des milieux diélectriques et des milieux magnétiques.

Bornons-nous à rappeler la simplification essentielle qu'apporte la rationalisation dans l'étude de l'aimantation :

L'intensité d'aimantation et l'excitation magnétique sont des grandeurs de même affinité, le vecteur aimantation représentant l'excitation locale

(10-4). Dans un système rationalisé, la relation fondamentale des milieux magnétiques a la forme

$$(R.) \quad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}),$$

et dans un système non rationalisé (11-2) :

$$(N.R.) \quad \vec{B} = \mu'_0(\vec{H}' + 4\pi\vec{J}).$$

Alors que dans un système rationalisé H et J sont mesurées avec la même unité [l'ampère par mètre dans le système S.I. (R.)], un système non rationalisé nécessite deux unités différentes [dans le système S.I. (N.R.) l'unité d'aimantation est l'ampère par mètre alors que l'unité d'excitation vaut $\frac{I}{4\pi}$ ampère par mètre].

Le théorème d'Ampère, sous sa forme la plus générale (10-6)

$$(R.) \quad \oint_r \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Sigma I,$$

est extrêmement simple dans un système rationalisé; il devient, dans un système non rationalisé,

$$(N.R.) \quad \oint_r \vec{H} \cdot d\vec{s} = 4\pi \Sigma I.$$

De même, l'excitation à l'intérieur d'un long solénoïde prend les formes

$$(R.) \quad H = nI, \quad (N.R.) \quad H' = 4\pi nI.$$

Ainsi la non-rationalisation laisse apparaître 4π et cette fois d'une façon qui n'est plus seulement apparente.

Il est évident qu'il est inacceptable d'utiliser un système non rationalisé pour le vide et un système rationalisé pour l'étude des milieux diélectriques et magnétiques, aussi la rationalisation est-elle pleinement justifiée.

14-4. Le système international (S.I.).

Nous avons tout dit sur ce système, l'ayant constamment utilisé en électricité sous sa forme rationalisée. Il a été rendu obligatoire en France par le décret du 3 mai 1961 où il est appelé « *le système métrique décimal à six unités de base appelé, par la conférence générale des Poids et Mesures, système international S.I.* ».

Nous avons défini ces six unités de base :

Le mètre, unité de longueur, le kilogramme, unité de masse et la seconde, unité de temps (Unités et Mesures, Chap. 1); l'ampère, unité d'intensité électrique (dans cet ouvrage même, 2-6); le degré Kelvin, unité de température (Chaleur I, 1-6), et la candela, unité d'intensité lumineuse (Optique II, 4-8).

Dans le domaine de l'électricité le système S.I. est un système à quatre unités fondamentales puisqu'il comporte les trois unités m, kg, s, du système d'unités mécaniques anciennement appelé système M.K.S., auquel on a adjoint une unité électrique, l'ampère (anciennement système M.K.S.A. ou système Giorgi).

Le système S.I. est un système électromagnétique au sens où nous l'avons entendu précédemment (14-2). La définition de l'ampère résulte du choix de la perméabilité du vide comme grandeur fondamentale à laquelle on attribue la valeur $\mu_0 = 10^{-7}$ dans le système non rationalisé et par suite la valeur

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,256\,637 \cdot 10^{-6}$$

dans le système rationalisé.

De ce choix découle la valeur attribuée à la permittivité du vide :

$$\frac{1}{\epsilon'_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9,$$

déterminée avec une précision relative d'environ $1,5 \cdot 10^{-4}$.

Sans vouloir faire l'historique de la question des unités en électricité indiquons que le choix de l'ampère en tant que quatrième unité fondamentale a été fait pour conserver l'ampère, autrefois défini comme le dixième de l'unité du système C.G.S. électromagnétique, et par là même un certain nombre d'unités dites pratiques (volt, ohm, henry, farad,...) dont l'usage était familier.

La question des équations aux dimensions des grandeurs électriques ne présente qu'un intérêt secondaire; elles permettent cependant de vérifier l'homogénéité de formules. Bornons-nous à donner celles des grandeurs à détermination unique que l'on établit facilement à partir des formules d'Ampère et de Coulomb :

$$[\mu_0] = \text{LMT}^{-2}\text{I}^{-2}, \quad [\epsilon_0] = \text{L}^{-3}\text{M}^{-1}\text{T}^4\text{I}^2.$$

14-5. Les systèmes C.G.S. électrostatique et électromagnétique.

Au système C.G.S. d'unités mécaniques sont rattachés deux systèmes d'unités électriques qui ont toujours été utilisés sous leur *forme non rationalisée*.

Le système électrostatique, C.G.S.é.s., rattache l'unité de charge électrique aux unités mécaniques C.G.S. à l'aide de la loi de Coulomb; il convient en Électrostatique.

Le système électromagnétique, C.G.S.é.m., rattache l'unité d'intensité électrique aux unités mécaniques C.G.S. à l'aide de la loi d'Ampère; il convient en Électromagnétisme.

Les deux systèmes n'ont en commun que les unités mécaniques, fondamentales et dérivées, *toutes les unités électriques sont différentes*, leurs rapports sont obtenus grâce à la formule de coordination de Maxwell dans laquelle la célérité de la lumière dans le vide doit être exprimée en C.G.S., donc en centimètres par seconde. Par raison de commodité nous adopterons la valeur approchée $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm.s⁻¹.

1° Le système C.G.S.é.s. (N.R.).

Il est défini en prenant la permittivité du vide égale à 1. La formule de Coulomb, prenant la forme ($\epsilon'_0 = 1$)

$$f = \frac{qq'}{r^2},$$

devient la relation de définition de la grandeur quantité d'électricité rattachée aux grandeurs mécaniques. La permittivité du vide ayant été escamotée, donc dépouillée de toute dimension, l'équation aux dimensions d'une quantité d'électricité ne fait intervenir que la longueur, la masse et le temps (on établirait facilement cette équation).

L'unité C.G.S.é.s de charge électrique est la charge électrique ponctuelle qui est repoussée avec une force de 1 dyne lorsqu'elle est placée dans le vide à 1 centimètre d'une charge identique.

Deux charges ponctuelles de 1 coulomb placées dans le vide à 1 cm de distance sont soumises à la force répulsive

$$f \simeq 9 \cdot 10^9 \frac{q^2}{r^2} = 9 \cdot 10^{13} \text{ N} = 9 \cdot 10^{18} \text{ dynes.}$$

Nous voyons, puisque la force est proportionnelle au carré de la charge électrique, que

$$1 \text{ coulomb} \simeq \sqrt{9 \cdot 10^{18}} = 3 \cdot 10^9 \text{ C.G.S.é.s.}$$

L'unité de temps, la seconde, étant la même dans les systèmes S.I. et C.G.S., on a

$$1 \text{ ampère} \simeq 3 \cdot 10^9 \text{ C.G.S.é.s.}$$

Toutes les formules dans lesquelles ne figurent pas la permittivité du vide ont la même forme dans les deux systèmes C.G.S.é.s. et S.I., (R.) ou (N.R.), par exemple

$$f = qE, \quad W = qU, \quad Q = CU, \quad U = RI, \quad W = UI t, \dots;$$

elles permettent de trouver facilement des relations entre unités, dont les plus intéressantes sont

$$1 \text{ volt} \simeq \frac{1}{300} \text{ C.G.S.é.s.}; \quad 1 \text{ farad} \simeq 9 \cdot 10^{11} \text{ C.G.S.é.s.};$$

$$1 \text{ ohm} \simeq \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{ C.G.S.é.s.}$$

Quant aux formules qui contiennent la permittivité du vide, elles se transposent du système S.I.(R.) dans le système C.G.S.é.s. en remplaçant $4\pi\epsilon_0$ par 1 ou ϵ_0 par $\frac{1}{4\pi}$. Par exemple :

Théorème de Gauss :

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \Sigma q_i \rightarrow \Phi = 4\pi \Sigma q_i.$$

Capacité d'un condensateur sphérique :

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \rightarrow C = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Capacité d'un condensateur plan :

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{e} \rightarrow C = \frac{S}{4\pi e}.$$

Remarquons que, dans le système C.G.S.é.s., une capacité est homogène à une longueur! Comme $1 \text{ F} \simeq 9 \cdot 10^{11} \simeq 10^{12} \text{ C.G.S.é.s.}$ et que, par suite,

$$1 \text{ C.G.S.é.s.} \simeq 10^{-12} \text{ F} = 1 \text{ pF},$$

on a pu dire que le picofarad est peu différent de 1 centimètre!

Si l'on veut appliquer le système C.G.S.é.s. en électromagnétisme, il faut prendre

$$\mu'_0 = \frac{1}{\epsilon'_0 c^2} = \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}.$$

2° Le système C.G.S.é.m. (N.R.).

Il est défini en prenant la perméabilité du vide égale à 1.

La formule d'Ampère prend la forme ($\mu'_0 = 1$)

$$d^2 F' = I' \vec{dl}' \wedge \left(\frac{1}{r^2} \vec{dl} \wedge \vec{u} \right),$$

qui donne, pour l'action entre deux courants rectilignes parallèles indéfinis,

$$F' = 2II' \frac{l'}{a'},$$

relation qui définit l'intensité de courant électrique en la rattachant aux grandeurs mécaniques.

Supposons $I = I'$ et soit I_1 et I_2 les mesures respectives de I dans les systèmes C.G.S.é.m. et S.I.; nous avons, si $l' = a'$,

$$F' = 2I_1^2 \text{ dynes} = 2 \cdot 10^{-7} I_2^2 \text{ newtons} = 2 \cdot 10^{-2} I_2^2 \text{ dynes.}$$

Par suite

$$\frac{I_2}{I_1} = 10,$$

et, comme le rapport des mesures est égal au rapport inverse des unités,

$$1 \text{ C.G.S.é.m.} = 10 \text{ ampères.}$$

Les formules suivantes, dont la forme est la même dans les deux systèmes (μ_0 n'intervenant pas), donnent les relations entre les unités :

$Q = It,$	1 C.G.S.é.m. = 10 C.
$P = UI,$	1 C.G.S.é.m. = 10^{-8} V.
$U = RI,$	1 C.G.S.é.m. = 10^{-9} Ω .
$F = BI l,$	1 C.G.S.é.m. = 1 gauss = 10^{-4} T.
$\Phi = BS,$	1 C.G.S.é.m. = 1 maxwell = 10^{-8} Wb.
$\mathcal{M} = SI,$	1 C.G.S.é.m. = 10^{-3} A.m ² .
$\Phi = LI,$	1 C.G.S.é.m. = 10^{-9} H.

On vérifiera aisément que dans le système C.G.S.é.m. une inductance est homogène à une longueur.

Quant aux formules qui contiennent la perméabilité du vide, elles se transposent du système S.I.(R.) dans le système C.G.S.é.m. en remplaçant $\frac{\mu_0}{4\pi}$ par 1 ou μ_0 par 4π . On obtient par exemple :

Induction produite par un courant rectiligne indéfini,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \rightarrow B = \frac{2I}{a}.$$

Induction au centre d'un courant circulaire,

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} \rightarrow B_0 = \frac{2\pi I}{R}.$$

Induction à l'intérieur d'un long solénoïde,

$$B_0 = \mu_0 n I \rightarrow B_0 = 4\pi n I.$$

Remarquons que dans le système C.G.S.é.m., μ_0 ayant été dépouillé de dimensions, l'induction et l'excitation magnétiques sont des grandeurs de même affinité.

Si l'on veut appliquer le système C.G.S.é.m. en Électrostatique, il faut prendre

$$\epsilon'_0 = \frac{1}{\mu'_0 c^2} = \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}.$$

Donnons, pour terminer, le rapport des unités de charge électrique (et par suite d'intensité électrique) dans les deux systèmes :

$$1 \text{ coulomb} = 3 \cdot 10^9 \text{ C.G.S.é.s.} = 10^{-1} \text{ C.G.S.é.m.}$$

$$1 \text{ C.G.S.é.m.} = 3 \cdot 10^{10} \text{ C.G.S.é.s.}$$

Exercice.

Exercice 25. — Déterminer, en fonction des unités S.I., les principales unités électriques du système M.T.S.A. à quatre unités fondamentales (mètre, tonne, seconde, ampère). Quelles sont, dans ce système, les valeurs (R.) de la perméabilité et de la permittivité du vide?

Le tableau ci-dessous donne les résultats

Grandeur	Formule	M.T.S.A.	Grandeur	Formule	M.T.S.A.
Force	$F = ml/t^2$	1 kN	Inductance.	$e = Ldi/dt$	1 kH
Travail . . .	$W = Fl$	1 kJ	Flux d'induction	$\Phi = LI$	1 kWb
Puissance .	$P = W/t$	1 kW	Induction .	$B = \Phi/S$	1 kT
Diff. de pot.	$U = P/I$	1 kV	Capacité ..	$C = Q/U$	1 mF
Résistance .	$R = U/I$	1 kΩ	Excitation (R.).....	$H = nI$	A.m ⁻¹
μ_0 (R.)	Biot et Savart	$4\pi \cdot 10^{-10}$	ϵ_0 (R.)	$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$	$\frac{1}{36\pi \cdot 10^6}$

CHAPITRE XV

ÉLECTRODYNAMOMÈTRES

15-1. Principe d'un électrodynamomètre. Mesures absolues d'intensité.

Mettons en présence deux circuits C_1 et C_2 parcourus par les courants d'intensités constantes I_1 et I_2 ; le premier est maintenu fixe, le second, mobile, est soumis à des liaisons mécaniques mesurables. C_1 crée une induction magnétique B_1 , proportionnelle à I_1 en tout point (d'après la loi de Biot et Savart), induction dans laquelle C_2 est placé. Un élément quelconque de C_2 est soumis à une force dF proportionnelle à B_1 , donc aussi à I_1 d'après la loi de Laplace; la force dF est donc proportionnelle au produit $I_1 I_2$ des intensités dans les deux circuits.

Plaçons-nous dans l'un des deux cas simples où le torseur des forces dF appliquées à C_2 est équivalent à un couple unique Γ ou à une force unique F ; nous avons

$$\Gamma = k I_1 I_2 \quad \text{ou} \quad F = k' I_1 I_2,$$

k et k' dépendant des circuits (forme, nombre de spires, ...) et de leurs positions relatives. Γ et F peuvent être mesurés en les équilibrant par un couple mécanique (couple de torsion par exemple) ou par une force (un poids par exemple).

Supposons de plus que l'on ait $I_1 = I_2 = I$, les deux circuits étant en série; l'action mécanique est alors proportionnelle à I^2 :

$$\Gamma = k I^2 \quad \text{ou} \quad F = k' I^2.$$

La connaissance de k ou de k' dans lesquels, d'après le théorème d'Ampère, n'interviennent que des grandeurs géométriques et μ_0 , la mesure de Γ ou de F , permettent donc d'effectuer des *mesures absolues d'intensité*.

15-2. Électrodynamomètre-balance.

Le circuit fixe C_1 est constitué par un long solénoïde comportant $n = \frac{N_1}{l}$ spires par mètre; il produit dans la région centrale une induction

magnétique pratiquement uniforme

$$B_1 = \mu_0 n I_1 \cos \alpha,$$

α étant l'angle sous lequel le rayon d'une spire terminale est vu du centre du solénoïde (en première approximation $B_1 \simeq \mu_0 n I_1$).

Le circuit mobile C_2 est un solénoïde court (bobine quasi plate) pour que ses N spires, de surface unitaire S , demeurent dans la région uniforme de B_1 .

Supposons que C_2 soit mobile autour d'un axe Δ perpendiculaire à l'axe magnétique de C_1 ; son moment magnétique étant

$$\vec{M}_2 = N I_2 \vec{S},$$

et

$$\theta = (\vec{B}_1, \vec{M}_2),$$

étant l'angle des axes magnétiques des deux bobines, C_2 est soumise au couple électromagnétique

$$\vec{\Gamma} = \vec{M}_2 \wedge \vec{B}_1 = N I_2 \vec{S} \wedge \vec{B}_1,$$

de module

$$\Gamma = N S I_2 B_1 \sin \theta.$$

Si la position définie par θ est une position d'équilibre réalisée en faisant agir sur C_2 un couple mécanique antagoniste Γ' mesurable, la condition d'équilibre s'exprime par

$$\Gamma' = N S I_2 B_1 \sin \theta = \mu_0 n \cos \alpha N S' I_1 I_2 \sin \theta.$$

Dans l'électrodynamomètre-balance de Pellat (fig. 125) l'équilibre réalisé

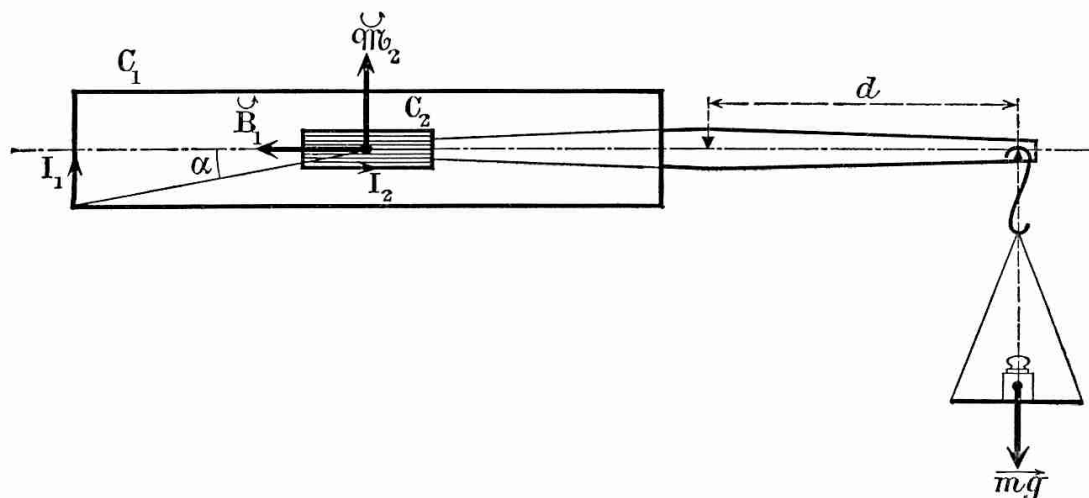


FIG. 125.

correspond à $\theta = \frac{\pi}{2}$ et le moment antagoniste est celui d'un poids qui s'exerce à une extrémité d'un fléau de balance, la bobine C_2 étant fixée à l'autre extrémité. Les courants I_1 et I_2 ont la même intensité I ; les bobines étant en série, leurs sens sont tels que le couple électromagnétique tend à soulever C_2 . Dans ces conditions,

$$\Gamma' = mgd$$

étant le moment par rapport à l'arête du couteau central du poids qui réalise l'équilibre, on a ($\sin \theta$ étant égal à 1)

$$mgd = \mu_0 n N S I^2 \cos \alpha,$$

d'où

$$I = \sqrt{\frac{mgd}{\mu_0 n N S \cos \alpha}}.$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ étant connu d'une façon aussi rigoureuse que l'on veut une mesure absolue d'intensité I comporte des mesures de grandeurs géométriques, la mesure d'une masse et la connaissance de l'intensité de la pesanteur au lieu de l'expérience. Il est difficile d'obtenir une précision relative meilleure que 10^{-3} .

Remarquons, bien que la méthode ne soit guère employée, que l'électrodynamomètre permet d'effectuer des mesures relatives d'intensité. En effet, si l'on maintient constante l'intensité I_1 dans le solénoïde fixe, et si, au cours de deux expériences, I et I' sont les intensités dans la bobine C_2 , le rapport de ces intensités est égal à celui des masses m et m' qui réalisent les deux équilibres.

Signalons enfin qu'un électrodynamomètre dont les bobines sont en série est utilisable en courant alternatif par suite de la proportionnalité des couples ou des forces à I^2 ; I est alors l'intensité efficace.

15-3. Balances électrodynamiques. Etalons d'intensité.

Une balance électrodynamique est un électrodynamomètre à bobines plates qui permet une meilleure précision que celui de Pellat. Son principe réside dans la mesure de la force d'attraction f qui s'exerce entre deux spires coaxiales parcourues par le même courant I circulant dans le même sens. Cette force est proportionnelle au carré de l'intensité, $f = kI^2$. Le facteur k est calculable, il dépend des rayons des spires et de leur distance. *L'appareil du Laboratoire Central d'Electricité* (fig. 126) est

une balance dont le fléau supporte deux bobines identiques mobiles

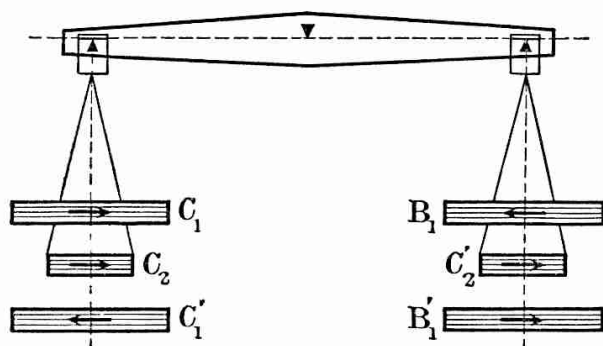


FIG. 126.

C_2 , C_2' placées en regard de quatre bobines fixes C_1 , C_1' et B_1 , B_1' . Les six bobines sont en série de sorte qu'elles sont parcourues par le même courant I à mesurer.

Lorsque la balance est en équilibre, l'ensemble des bobines est symétrique comme l'indique la figure. Soit f le module de la force qu'exerce

une bobine fixe sur une bobine mobile; les sens des courants (représentés sur la figure) sont tels que la masse m qu'il faut placer du côté droit pour établir l'équilibre a un poids égal à $4f$, par suite

$$mg = 4f = 4kI^2.$$

Pour éliminer les défauts de justesse et pour compenser les effets de légères dissymétries du dispositif, on refait l'expérience en inversant le sens du courant (dans toutes les bobines); il faut placer une masse $m' \simeq m$ du côté gauche. Pour le calcul de I on prend

$$m_0 = \sqrt{mm'}.$$

Moyennant de multiples précautions la précision relative de la mesure absolue d'une intensité atteint 10^{-4} .

La définition de l'ampère (2-6) est théorique en ce sens que l'expérience qui lui correspond ne peut pas se prêter à des mesures précises d'intensité. Elle revient à fixer rigoureusement la valeur de μ_0 qui intervient dans les expressions des couples et des forces qu'un circuit fixe exerce sur un autre circuit. C'est dans ce sens qu'il faut entendre que les électrodynamomètres sont des appareils absolus. De ce fait ils servent à l'étalonnage et au contrôle des ampèremètres. Indiquons toutefois que l'on obtient plus commodément la même précision et même une meilleure précision par la méthode d'opposition (Électricité I, 17-2).

15-4. Wattmètres électrodynamiques.

Supposons que les bobines C_1 et C_2 d'un électrodynamomètre soient en série; l'appareil a donc deux bobines. Si sa résistance est faible et s'il est placé en série dans un circuit C , il donne une indication qui est propor-

tionnelle à I^2 , I étant sensiblement l'intensité qui passait dans C avant qu'on l'y intercale. L'électrodynamomètre fonctionne en ampèremètre non polarisé. Si sa résistance est grande et s'il est en dérivation aux bornes de C , il donne une indication qui est proportionnelle à U^2 , U étant sensiblement la différence de potentiel aux bornes de C . L'électrodynamomètre fonctionne alors en voltmètre non polarisé.

Un wattmètre électrodynamique sert à la mesure de la puissance consommée $P = UI$ dans un circuit d'utilisation C dont les bornes sont A et B (fig. 127); il possède quatre bornes, deux, M et N , sont reliées au

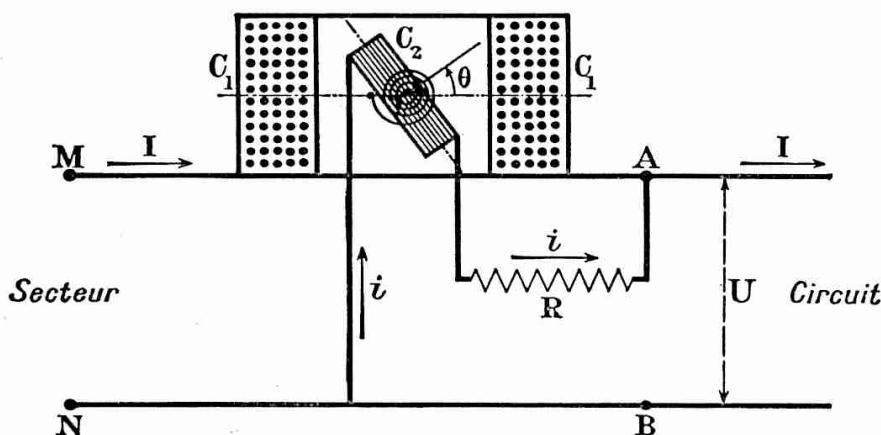


FIG. 127.

secteur, les deux autres à A et B . Dans ces conditions la bobine C_1 , de faible résistance, est en série avec le circuit C , elle est donc traversée par le courant I ; elle constitue *le circuit des ampères*. La bobine mobile C_2 , de grande résistance, est en dérivation aux bornes A et B de C , elle est donc traversée par un courant d'intensité i très faible, proportionnelle à U ; elle constitue *le circuit des volts*. L'indication de l'appareil est donc fonction de iI et par suite de la puissance consommée UI .

Un ressort spiral crée un couple antagoniste qui équilibre le couple électromagnétique Γ . On peut s'arranger pour que la déviation θ de C_2 soit sensiblement proportionnelle à ce couple; on a alors $\theta = kP$. De toute façon l'appareil, fonctionnant en wattmètre, doit être étalonné.

Un wattmètre électrodynamique n'est pas polarisé, car si l'on intervertit les connexions on change à la fois les sens de I et de i dans C_1 et dans C_2 . Moyennant certaines précautions l'appareil est utilisable en courant alternatif et indique la puissance réelle consommée (19-1) $P = UI \cos \varphi$.

Exercice.

Exercice 26. — 1° Une bobine circulaire plate B_1 comprend N_1 spires de rayon moyen R_1 . Donner l'expression de l'induction magnétique B sur l'axe $x'x$ de cette

bobine lorsqu'elle est traversée par le courant I . On posera $b = \frac{B}{B_0}$, B_0 désignant l'induction au centre de la bobine, et $u = \frac{x}{R_1}$.

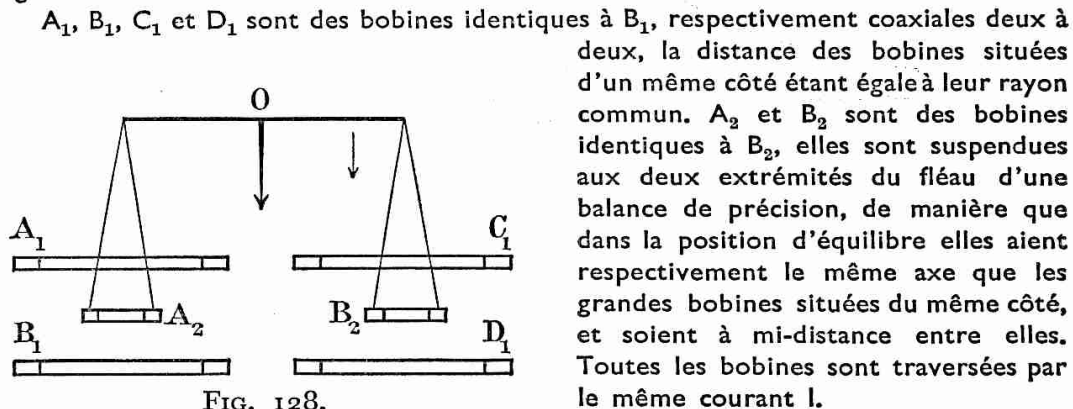
Construire les courbes $b = f(u)$ et $\frac{db}{du} = g(u)$, préciser leurs points remarquables.

2° Une deuxième bobine circulaire plate, B_2 , comprend N_2 spires de rayon moyen $R_2 \ll R_1$. Elle est disposée de manière que les axes de B_1 et de B_2 coïncident.

Les deux bobines étant traversées par le même courant I , exprimer la force F qui s'exerce entre elles en fonction de x ; pour quelle distance cette force est-elle maximale et quelle est l'expression de cette force maximale?

Application : $N_1 = 800$; $R_1 = 20$ cm; $N_2 = 100$; $R_2 = 2$ cm; $I = 2$ A.

3° Pour mesurer l'intensité d'un courant on réalise le dispositif représenté par la figure 128.



A_1, B_1, C_1 et D_1 sont des bobines identiques à B_1 , respectivement coaxiales deux à deux, la distance des bobines situées d'un même côté étant égale à leur rayon commun. A_2 et B_2 sont des bobines identiques à B_2 , elles sont suspendues aux deux extrémités du fléau d'une balance de précision, de manière que dans la position d'équilibre elles aient respectivement le même axe que les grandes bobines situées du même côté, et soient à mi-distance entre elles. Toutes les bobines sont traversées par le même courant I .

a) Préciser sur une figure le sens des courants à respecter pour que, la balance étant équilibrée pour $I = 0$, le couple tendant à la faire basculer dans le sens de la flèche soit maximal.

b) La balance étant équilibrée pour $I = 0$, on lance un courant I . Il faut ajouter une masse m sur le plateau de droite pour rétablir l'équilibre. Établir l'expression de I en fonction de m et des données géométriques et mécaniques du système. On donne l'accélération de la pesanteur au lieu de l'expérience $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Déterminer m pour $I = 1$ A.

1° L'induction magnétique en un point de l'axe est dirigée suivant l'axe et son intensité est

$$B = \frac{\mu_0 N_1 I}{2R_1} \left(1 + \frac{x^2}{R_1^2} \right) = B_0 (1 + u^2)^{-\frac{3}{2}},$$

d'où, b et u étant des nombres sans dimension,

$$b = (1 + u^2)^{-\frac{3}{2}}; \quad \frac{db}{du} = -3u(1 + u^2)^{-\frac{5}{2}}; \quad \frac{d^2b}{du^2} = 3(1 + u^2)^{-\frac{7}{2}}(4u^2 - 1).$$

La courbe $b = f(u)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (fig. 129) sur lequel elle présente le maximum $b = 1$; elle a deux points d'inflexion symétriques, $u = \pm 0,5$, $b = 0,716$, pour lesquels la pente de la tangente d'inflexion est

$$\frac{db}{du} = \pm 0,859.$$

Pour faciliter les calculs nous avons posé $u = \operatorname{tg} \alpha$ et par suite $b = \cos^3 \alpha$; nous avons obtenu le tableau de valeurs numériques

u	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2
b	1	0,913	0,716	0,512	0,355	0,170	0,089

pour construire la courbe de la figure 129.

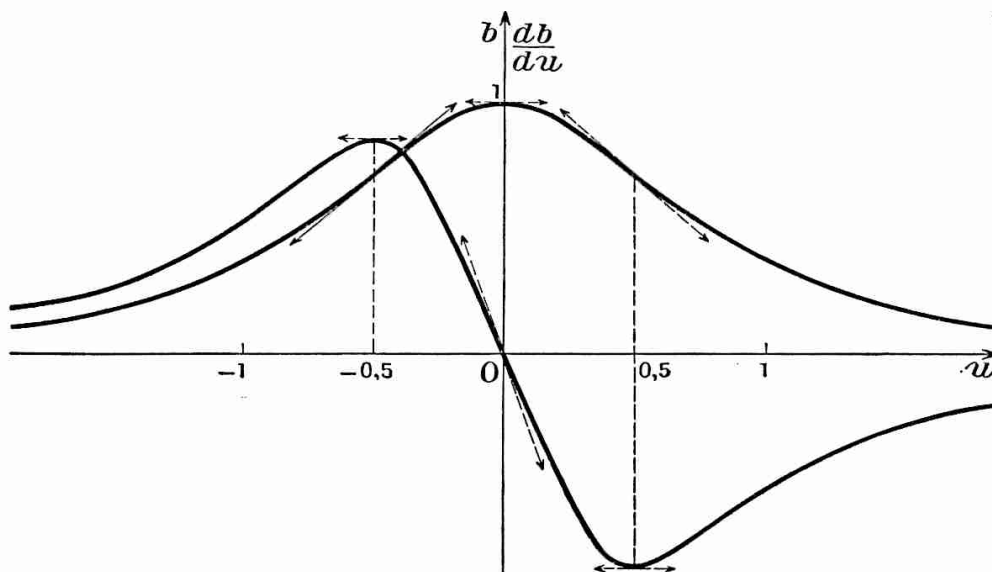


FIG. 129.

Quant à la courbe $\frac{db}{du} = g(u)$, elle est symétrique par rapport au point O, qui est un point d'inflexion dont la tangente d'inflexion a pour pente -3 . Elle présente deux maximums en valeur absolue :

$$u = \pm 0,5; \quad \frac{db}{du} = \mp 0,859.$$

2° R_1 étant beaucoup plus grand que R_2 par hypothèse, nous admettrons que la composante de B parallèle à $x'x$ est constante à l'intérieur de B_2 et égale à B . Dans ces conditions le flux d'induction magnétique qui traverse la bobine B_2 est

$$\Phi = \pi R_2^2 N_2 B = \pi R_2^2 N_2 B_0 \left(1 + \frac{x^2}{R_1^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \Phi_0 (1 + u^2)^{-\frac{3}{2}},$$

d'où, φ étant un nombre sans dimension,

$$\varphi = \frac{\Phi}{\Phi_0} = (1 + u^2)^{-\frac{3}{2}} = b.$$

La force qui s'exerce entre les deux bobines parcourues par le même courant I est

$$F = I \frac{d\Phi}{dx} = I \Phi_0 \frac{d\varphi}{dx} = F_0 \frac{db}{du},$$

d'où, f étant un nombre sans dimension,

$$f = \frac{F}{F_0} = \frac{db}{du}.$$

Par suite de l'étude faite précédemment, f est maximal en valeur absolue, et égal à 0,859, pour $u = \pm 0,5$.

Nous avons en valeur absolue, compte tenu des expressions de F_0 , Φ_0 et B_0 ,

$$F = F_0 \left| \frac{db}{du} \right| = \frac{3\pi\mu_0 N_1 N_2 R_2^2}{2R_1^2} I^2 x (1 + 25x^2)^{-\frac{5}{2}};$$

F est proportionnelle au carré de l'intensité et sa valeur maximale, pour

$$x = \pm 0,5 \quad R_1 = \pm 0,2 \text{ m},$$

est

$$F_M = 0,859 F_0 = 0,859 \frac{\pi\mu_0 R_2^2 N_1 N_2}{2R_1} I^2 = 2,71 \cdot 10^{-4} I^2;$$

pour $I = 2A$,

$$F_M = 1,084 \cdot 10^{-3} \text{ newton.}$$

3° a) Les positions des bobines sont telles que les forces exercées sur A_2 et B_2 sont maximales. Le couple qui tend à faire basculer la balance est maximal pour les sens de courant représentés sur la figure 130.

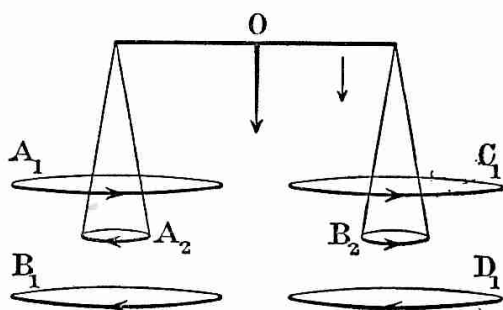


FIG. 130.

b) La masse m est telle que son poids au lieu considéré soit égal à $4F_M$:

$$mg = 4F_M = 1,084 \cdot 10^{-3} I^2;$$

pour $I = 1A$,

$$m = \frac{1,084}{9,81} \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 0,110 \text{ g.}$$

CHAPITRE XVI

GALVANOMÈTRE A CADRE MOBILE

16-1. Généralités.

Nous venons d'étudier les électrodynamomètres, qui permettent des mesures absolues d'intensité; ces instruments sont utilisés pour étalonner des galvanomètres dont l'emploi est beaucoup plus pratique. Nous ne décrirons que le galvanomètre à cadre mobile, dont le principe essentiel est l'action de l'induction produite par un aimant permanent sur le courant à mesurer; sa qualité essentielle, la sensibilité, le fait employer non seulement à des mesures d'intensités très faibles, mais aussi comme appareil de zéro (Electricité I, 17-2).

Le galvanomètre à cadre mobile est utilisable non seulement en ampèremètre mais aussi en voltmètre; enfin convenablement conçu et employé, il sert à des mesures de quantités d'électricité (galvanomètre balistique) et de flux d'induction (fluxmètre).

16-2. Description et principe du galvanomètre à cadre mobile.

Nous décrivons le galvanomètre Déprez-d'Arsonval (fig. 131), dont dérivent les modèles les plus employés.

Une bobine plate rectangulaire comportant N spires de surface $S = ab$ (côté vertical de longueur a , horizontal de longueur b) est placée dans l'entrefer d'un aimant en U; elle est mobile autour de deux fils métalliques qui servent également à l'arrivée et au départ du courant d'intensité i . Dans la position de zéro ($i = 0$) la torsion des fils de suspension est nulle pour l'élongation angulaire nulle ($\theta = 0$); pour un angle de rotation θ les fils exercent un couple de torsion, couple de rappel de moment — $C\theta$, proportionnel à θ , C étant leur constante de torsion.

En donnant aux pièces polaires une forme cylindrique (fig. 132) et en plaçant à l'intérieur du cadre un cylindre de fer doux, on réduit l'entrefer. L'induction magnétique est par suite fortement augmentée et, dans la partie utile où se déplacent les côtés verticaux du cadre, les lignes d'induction sont dirigées vers l'axe de rotation, le module B de l'induction étant constant : **l'induction est radiale**. Dans ces conditions le vecteur $\vec{B}$ est, dans le plan du cadre, normal

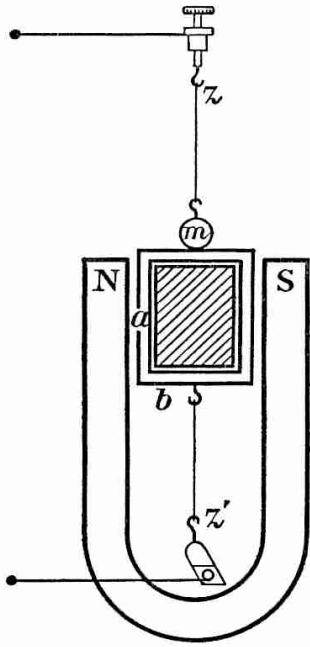


FIG. 131.

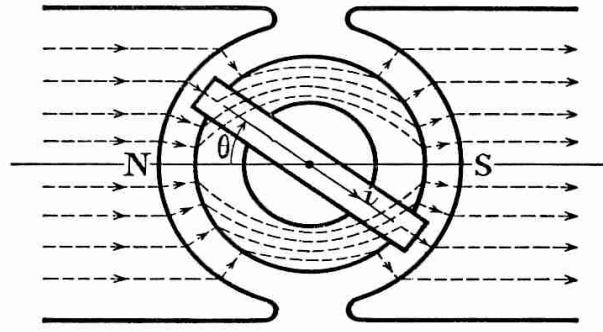


FIG. 132.

à ses côtés verticaux quel que soit l'angle θ .

Un miroir concave m , solidaire du cadre, permet la mesure de l'angle de rotation θ par la méthode de Poggendorff. A l'extrémité supérieure du fil de suspension, deux boutons permettent de régler la tension des fils de suspension et d'amener le spot au zéro sur l'échelle translucide convenablement disposée.

Le cadre étant parcouru par le courant d'intensité i_0 prend une position d'équilibre définie par l'angle θ_0 , il est alors soumis à deux couples de moments opposés, le couple de torsion $-C\theta_0$ et le couple électromagnétique Γ ; la condition d'équilibre est

$$\Gamma = C\theta_0.$$

A titre d'exercice calculons Γ de deux façons :

1° Par application de la loi de Laplace (fig. 133).

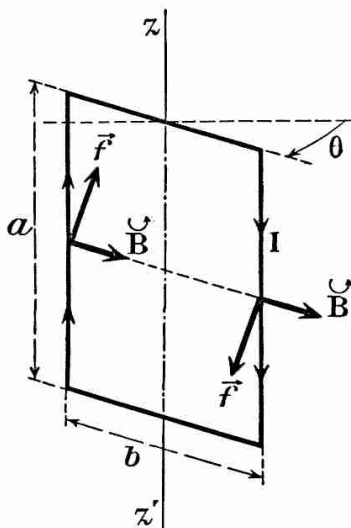


FIG. 133.

Les côtés horizontaux du cadre sont soumis à des forces verticales dont le moment par rapport à l'axe est nul puisque les lignes d'induction sont horizontales. Elles ne peuvent donc que tendre à déformer le cadre; celui-ci étant rigide, leur effet est nul.

Un tour rectangulaire de fil comporte deux côtés verticaux parcourus par des courants de sens contraires, les forces de module f qui leur sont appliquées leur sont donc normales et forment un couple de moment fb et, comme en vertu de la loi de Laplace $f = Bi_0a$, et qu'il y a N tours :

$$\Gamma = Nfb = N b a i_0 = N S B i_0 = \Phi_0 i_0,$$

Φ_0 étant le flux d'induction qui traverserait le cadre disposé normalement à une induction uniforme B . Par suite la condition d'équilibre se traduit par

$$\theta_0 = \frac{NSB}{C} i_0 = \frac{\Phi_0}{C} i_0.$$

2° Par application de la formule (8-5) (fig. 134)

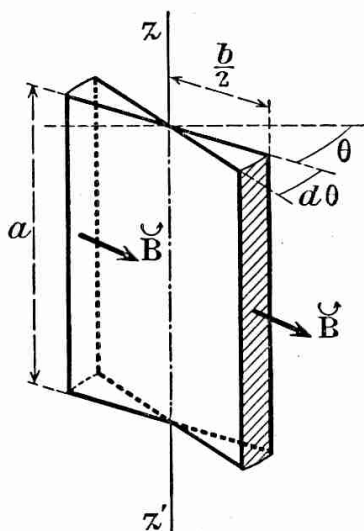


FIG. 134.

$$\Gamma = i_0 \frac{d\Phi}{d\theta}.$$

Pour une rotation $d\theta$ le flux coupé par un côté vertical est

$$d\varphi = a \frac{b}{2} d\theta B = \frac{1}{2} S B d\theta,$$

et comme il y a $2N$ brins verticaux, le flux total coupé par le cadre est

$$d\Phi = 2N d\varphi = NSB d\theta = \Phi_0 d\theta.$$

Nous retrouvons bien l'expression

$$\Gamma = i_0 \frac{d\Phi}{d\theta} = \Phi_0 i_0.$$

En résumé la déviation est proportionnelle à l'intensité du courant qui traverse le cadre.

Remarque. En l'absence de cylindre de fer doux, l'induction ne serait pas radiale dans l'entrefer mais elle pourrait être considérée comme uniforme. On montre facilement que dans ce cas la condition d'équilibre s'exprimerait par

$$C\theta_0 = \Phi_0 i_0 \cos \theta_0;$$

la proportionnalité de i_0 à θ_0 ne subsisterait que pour les faibles déviations ($\cos \theta_0 \simeq 1$).

16-3. Sensibilité du galvanomètre.

La sensibilité du galvanomètre à cadre mobile,

$$\sigma = \frac{d\theta}{di} = \frac{NSB}{C} = \frac{\Phi_0}{C},$$

est indépendante de l'intensité. Ce fait, très important, se traduit pour les ampèremètres à cadre mobile par l'égalité des intervalles de la graduation tout le long de l'échelle.

1° La sensibilité est inversement proportionnelle à la constante de torsion C des fils de suspension.

Pour un fil cylindrique de longueur l , de diamètre d , C est donné par la formule de Coulomb

$$C = \gamma \frac{d^4}{l},$$

dans laquelle γ , module de torsion, ne dépend que du matériau qui constitue le fil.

On accroît donc la sensibilité :

a) En augmentant la longueur des fils de suspension; on est très vite limité par l'encombrement.

b) En diminuant leur diamètre d ; ce moyen est très efficace puisque C est proportionnel à la quatrième puissance de d . On utilise donc des fils très fins; on est cependant limité par l'obligation d'assurer la suspension de l'équipage mobile et par l'accroissement de la résistance électrique des fils. Dans les meilleurs appareils on emploie des fils aplatis en forme de ruban qui, pour une même section, ont une constante C plus petite que celle d'un fil cylindrique.

c) En utilisant un matériau de faible module de torsion. L'argent convient bien, d'autant mieux qu'il possède une grande conductivité. On emploie également des alliages tenaces et bons conducteurs et même des fils de silice dont le module de torsion est très faible, mais dans ce dernier cas, comme le matériau est un isolant, les bornes du galvanomètre sont reliées directement au cadre par des très fins rubans d'or qui exercent sur le cadre un couple pratiquement nul.

2° La sensibilité est proportionnelle à $\Phi_0 = NSB$.

a) On prend d'excellents aimants qui permettent d'obtenir une induction B de l'ordre de 0,1 Wb.m⁻² et même dans certains cas des électro-aimants.

b) L'accroissement de la surface S du cadre et du nombre N de spires présente divers inconvénients : on accroît simultanément le moment d'inertie J (et par suite la période d'oscillation) et la résistance électrique du cadre; d'autre part les valeurs élevées de B ne peuvent être obtenues que dans des entrefers relativement restreints. En fait, les cadres des appareils modernes ont une surface qui ne dépasse guère quelques centimètres carrés et comportent quelques centaines de spires.

Étudions l'influence de N sur la sensibilité σ et sur la résistance g du galvanomètre. Si l'on multiplie N par k , σ est aussi multiplié par k . Le volume de l'enroulement étant supposé constant, la longueur l du fil est multipliée par k tandis que sa section est divisée par k . Par suite, le rapport $\frac{l}{s}$ et la résistance g sont multipliés par k^2 . Comme σ , $\sqrt{r}$ est donc multiplié par k ; par suite

$$\sigma = \frac{\alpha}{i_0} = A\sqrt{g}; \quad \alpha = A\sqrt{gi_0^2}.$$

Pour les cadres de même volume la déviation est proportionnelle à la racine carrée de la puissance consommée par effet Joule dans le cadre.

Supposons que le galvanomètre soit dans un circuit contenant une force électromotrice E , R étant la résistance du circuit extérieur au galvanomètre; la déviation est

$$\alpha = Ai_0\sqrt{g} = AE \frac{\sqrt{g}}{g + R} = \frac{AE}{\sqrt{g} + \frac{R}{\sqrt{g}}}.$$

Dans l'expression de α , le numérateur AE est constant alors que le dénominateur est la somme de deux termes dont le produit R est constant; ce dénominateur est donc minimal et la déviation est maximale pour

$$\frac{R}{\sqrt{g}} = \sqrt{g}; \quad R = g.$$

La déviation est donc maximale quand la résistance du galvanomètre est égale à la résistance extérieure g .

3° Sensibilité et période d'oscillation.

L'équipage mobile constitue un pendule de torsion dont la période des oscillations est

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}.$$

Remplaçons C par son expression $C = \frac{\Phi_0}{\sigma}$ en fonction de la sensibilité; il vient

$$T_0 = 2\pi\sqrt{J} \sqrt{\frac{\sigma}{\Phi_0}}; \quad \sigma = \frac{\Phi_0}{4\pi^2 J} T_0^2.$$

La sensibilité est proportionnelle au carré de la période.

La réduction du moment d'inertie J obtenue en employant un cadre léger allongé dans le sens vertical permet de diminuer C et par conséquent d'augmenter la sensibilité σ sans modifier la période et par suite la durée des mesures. Les galvanomètres courants ont des moments d'inertie de l'ordre de $2 \cdot 10^{-8}$ kg.m²; on construit même des équipages dont le moment d'inertie est inférieur à 10^{-9} kg.m².

4° Sensibilité en ampères et sensibilité en volts.

La sensibilité σ que nous avons définie est aussi appelée *sensibilité en ampères*; elle qualifie le galvanomètre dans son emploi pour déceler des intensités très faibles. Dans la pratique, avec les ordres de grandeur des caractéristiques précédemment données et en mettant en œuvre la méthode de Poggendorff dans les meilleures conditions, on arrive à déceler des courants de 10^{-10} et même de 10^{-12} ampère. Par exemple, pour un galvanomètre dont les caractéristiques sont

$$B = 0,2 \text{ Wb.m}^{-2}; \quad S = 4 \text{ cm}^2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2; \quad N = 400;$$

$$C = 10^{-8} \text{ N.m.rd}^{-1}; \quad J = 10^{-8} \text{ kg.m}^2;$$

on a

$$\sigma = \frac{400 \times 4 \cdot 10^{-4} \times 0,2}{10^{-8}} = 3,2 \cdot 10^6 \text{ A.rd}^{-1}; \quad T_0 = 2\pi = 6,3 \text{ s.}$$

Sur une échelle placée à 2 m on peut facilement déceler un déplacement du spot de 0,2 mm; au plus petit courant décelable di correspond une rotation $d\theta$:

$$2 d\theta = \frac{0,2}{2000} = 10^{-4} \text{ rd},$$

par suite

$$di = \frac{d\theta}{\sigma} = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{3,2 \cdot 10^6} \simeq 1,6 \cdot 10^{-11} \text{ A.}$$

La grande sensibilité du galvanomètre à cadre mobile le fait employer dans les *méthodes de zéro* où l'on a à constater l'existence et le sens de courants très faibles. Quant au *galvanomètre différentiel*, il sert à vérifier l'égalité d'un courant i étudié et d'un courant connu i_0 ; son équipement mobile est constitué par deux cadres identiques placés dans la même induction radiale : deux courants de même intensité traversant les cadres dans les sens convenables ne donnent aucune déviation.

Le galvanomètre est souvent utilisé pour déceler des forces électromotrices très faibles, la quantité intéressante est alors *la sensibilité en volts* σ' , rapport de la déviation $d\theta$ à la force électromotrice correspondante. Si R est la résistance de tout le circuit (comprenant la résistance du galvanomètre), on a

$$\sigma' = \frac{d\theta}{dE} = \frac{1}{R} \frac{d\theta}{di} = \frac{\sigma}{R}.$$

La sensibilité en volts dépend donc de la sensibilité en ampères et de la résistance du circuit; nous verrons que celle-ci conditionne aussi la façon dont l'équipage atteint sa position d'équilibre.

16-4. Mouvement de l'équipage mobile du galvanomètre. Amortissement.

Considérons un circuit de résistance R comprenant une force électromotrice constante E et un galvanomètre à cadre mobile. Nous nous proposons d'étudier le mouvement qui conduit l'équipage mobile à sa position d'équilibre lorsqu'on ferme le circuit. Nous négligerons l'inductance propre du circuit qui n'intervient que dans des cas exceptionnels.

Au cours du mouvement le cadre est soumis à différents couples et nous avons, $\Sigma\Gamma$ représentant la somme algébrique des moments de ces couples,

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Sigma\Gamma,$$

par application du principe fondamental de la dynamique.

Les frottements dus à la viscosité de l'air (il ne doit pas y avoir de frottements solides qui nuiraient à la fidélité de l'instrument) créent un couple résistant $-f \frac{d\theta}{dt}$ proportionnel à la vitesse angulaire, f étant un coefficient constant (non homogène à une force). Le couple de rappel dû aux fils de torsion est $-C\theta$. Enfin, i étant l'intensité du courant à l'instant t , le couple électromagnétique agissant est $\Phi_0 i$, et nous avons par suite

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -f \frac{d\theta}{dt} - C\theta + \Phi_0 i.$$

Dans le calcul de i nous devons tenir compte de la force électromotrice d'induction e qui prend naissance dans le cadre du fait de son déplacement dans l'induction magnétique de l'aimant; nous avons, en vertu de la loi fondamentale de l'induction,

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d\Phi}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = - \Phi_0 \frac{d\theta}{dt},$$

et l'application de la loi d'Ohm au circuit à l'instant t nous donne, en posant $i_0 = \frac{E}{R}$,

$$i = \frac{E + e}{R} = i_0 - \frac{\Phi_0}{R} \frac{d\theta}{dt}.$$

D'où finalement, en posant $F = f + \frac{\Phi_0^2}{R}$,

$$(1) \quad J \frac{d^2\theta}{dt^2} + F \frac{d\theta}{dt} + C\theta = \Phi_0 i_0.$$

Nous voyons, comme nous pouvions nous y attendre, que les phénomènes d'induction introduisent un couple résistant proportionnel à la vitesse angulaire. Le courant i produit donc un couple moteur constant $\Phi_0 i_0$ et un couple résistant dont le facteur $\frac{\Phi_0^2}{R}$ caractérise l'amortissement par les courants induits au même titre que le facteur f caractérise l'amortissement par les frottements de l'air. Le facteur f est le plus souvent négligeable par rapport à celui dû à l'induction électromagnétique.

A la position d'équilibre, $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ et $\frac{d\theta}{dt}$ sont nuls et nous retrouvons la valeur

$$\theta_0 = \frac{\Phi_0}{C} i_0,$$

qui définit cette position. θ_0 est une solution particulière de l'équation (1), équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre.

L'intégrale générale θ de cette équation est la somme

$$\theta = \theta_0 + \theta_1,$$

θ_1 étant l'intégrale générale de l'équation sans second membre. Par suite le mouvement autour de la position d'équilibre défini par θ_0 est le même que celui, $\theta_1 = \varphi(t)$, autour de la position d'équilibre particulière correspondant à $i_0 = 0$.

La fonction $\theta_1 = \varphi(t)$ dépend de la nature des racines de l'équation caractéristique

$$Jx^2 + Fx + C = 0,$$

donc du signe du discriminant

$$\Delta = F^2 - 4JC.$$

Supposons, ce qui est le cas le plus fréquent, que f soit négligeable

par rapport à $\frac{\Phi_0^2}{R}$; le discriminant,

$$\Delta \simeq \frac{\Phi_0^4}{R^2} - 4JC,$$

est nul pour une valeur particulière de R , appelée résistance critique R_c ,

$$R_c = \frac{\Phi_0^2}{2\sqrt{JC}}.$$

Deux cas sont à considérer :

1° Mouvement oscillatoire amorti. $R > R_c$, la résistance du circuit est supérieure à la résistance critique. Le discriminant de l'équation caractéristique est négatif.

Le facteur d'amortissement $F \simeq \frac{\Phi_0^2}{R}$ est alors faible. Les deux racines de l'équation caractéristique sont imaginaires,

$$x = -\lambda \pm j\omega,$$

avec

$$\lambda = \frac{F}{2J} \simeq \frac{\Phi_0^2}{2JR} \quad \text{et} \quad \omega^2 = \frac{C}{J} - \frac{F^2}{4J^2} = \omega_0^2 - \lambda^2,$$

en posant

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}} = \frac{2\pi}{T_0}.$$

L'équation du mouvement,

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 = \theta_0 + \theta_m e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi),$$

est celle d'un mouvement oscillatoire amorti autour de la position d'équilibre $\theta = \theta_0$, les constantes θ_m et φ étant déterminées par les conditions initiales.

Si la résistance du circuit est infinie, autrement dit si le circuit est ouvert, nous avons $i_0 = 0$ et $\frac{\Phi_0^2}{R} = 0$, F se réduit à f qui est en général petit, de sorte que l'équation différentielle du mouvement

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + C\theta = 0,$$

ou

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0,$$

est celle d'un mouvement sinusoïdal,

$$\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = \theta_m \sin\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi\right),$$

de période

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}.$$

T_0 est la *période propre* de l'équipage mobile. Les oscillations sont celles d'un pendule de torsion très faiblement amorti par les frottements de l'air, les phénomènes électriques et électromagnétiques ne jouant aucun rôle. Si par exemple, à l'instant initial $t = 0$, le cadre est écarté de sa position d'équilibre de l'angle θ_m et abandonné sans vitesse initiale, l'équation du mouvement est

$$\theta = \theta_m \cos \omega_0 t = \theta_m \cos 2\pi \frac{t}{T_0}.$$

Si R n'est pas très grand tout en restant supérieur à la résistance critique, la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ des oscillations amorties est supérieure à la période propre T_0 (puisque $\omega < \omega_0$). La courbe I représentative (fig. 135) est comprise entre les deux exponentielles

$$\theta = \theta_0 \pm \theta_m e^{-\lambda t}.$$

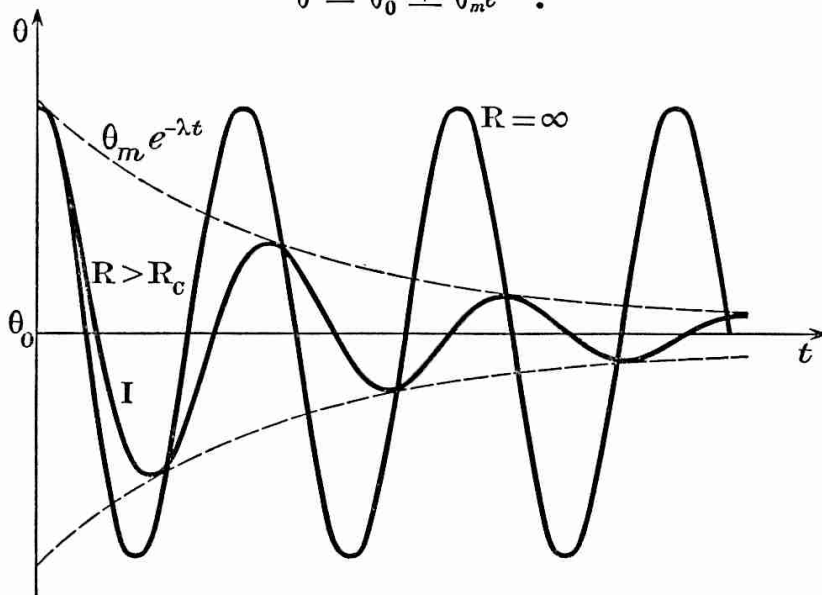


FIG. 135.

Le cadre atteint sa position d'équilibre en un temps théoriquement infini. Si l'on appelle *décrément logarithmique* la grandeur

$$\delta = \lambda T = \frac{F}{2J} T \simeq \frac{\Phi_0^2}{2JR} T,$$

l'équation du mouvement s'écrit

$$\theta = \theta_0 + \theta_m e^{-\delta \frac{t}{T}} \sin(\omega t + \varphi),$$

θ_m et φ étant déterminés par les conditions initiales.

Pendant une durée T , l'amplitude, rapportée à la position d'équilibre $\theta = \theta_0$, est multipliée par $e^{-\delta}$ (divisée par e^δ); par suite le rapport de deux élongations maximales successives d'un même côté de la position $\theta = \theta_0$ est égal à $e^{-\delta}$. Nous avons d'autre part

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \omega_0^2 - \lambda^2 = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \lambda^2,$$

d'où l'expression de la pseudo-période T en fonction du décrement logarithmique δ et de la période propre T_0 :

$$T = T_0 \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2}} \simeq T_0 \left(1 + \frac{\delta^2}{8\pi^2}\right).$$

L'écart entre T et T_0 est d'autant plus réduit que R est plus grand en même temps que l'amortissement, caractérisé par δ , diminue. Par contre, lorsque R se rapproche de la résistance critique R_c , δ croissant, le nombre d'oscillations pour lequel la position d'équilibre est pratiquement atteinte diminue.

2° Mouvement apériodique. $R \leq R_c$, la résistance du circuit est au plus égale à la résistance critique.

Le discriminant de l'équation caractéristique est positif, les racines de cette équation, $-\lambda_1$ et $-\lambda_2$, sont négatives et l'équation du mouvement est de la forme

$$\theta = \theta_0 + A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t},$$

les constantes A_1 et A_2 étant déterminées par les conditions initiales. L'équipage mobile atteint sa position d'équilibre, en un temps théoriquement infini, sans oscillations; le mouvement est apériodique (fig. 136).

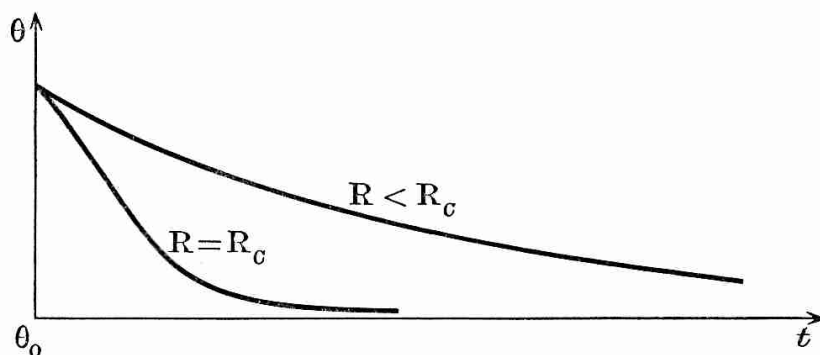


FIG. 136.

3° Cas limite où R est égal à R_c .

L'équation caractéristique admet une racine double négative

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{C}{J}} = \omega_0;$$

l'équation du mouvement est alors de la forme

$$\theta = \theta_0 + (A + Bt)e^{-\lambda_0 t}.$$

Pratiquement, le mouvement s'arrête lorsque l'élongation donnée par la formule théorique (mouvement périodique aussi bien qu'apériodique) est devenue suffisamment petite pour que les frottements solides, qui existent toujours même très réduits, interviennent. On établit que, pour une valeur déterminée de la période propre T_0 (donc pour des valeurs données de J et de C), l'amortissement correspondant à $R = R_c$, appelé *amortissement critique*, est celui pour lequel la position d'équilibre est pratiquement atteinte pendant le temps le plus court. Ce résultat se traduit sur le diagramme de la figure 136 par le fait que la courbe critique $\theta_1 = f(t)$ est au-dessous de toutes les courbes apériodiques, celles-ci s'en éloignant d'autant plus que R , inférieur à R_c , est plus petit.

La résistance R est au moins égale à la résistance g du galvanomètre, laquelle est toujours inférieure à la résistance critique R_c ; la différence $R_E = R_c - g$, que l'on peut appeler *résistance critique extérieure*, est la résistance extérieure qui réalise l'amortissement critique. Il en résulte que, lorsqu'on court-circuite le galvanomètre ($R = g$), l'amortissement est le plus fort et le cadre atteint le plus lentement sa position d'équilibre par un mouvement apériodique. On mesure R_c en déterminant la résistance extérieure R_E pour laquelle le régime du mouvement change.

On a intérêt, pour réduire la durée d'une mesure, à réaliser l'amortissement critique, la position d'équilibre est alors atteinte en un temps dont l'ordre de grandeur est celui de la période propre T_0 du cadre. On s'arrange cependant le plus souvent pour obtenir un amortissement légèrement inférieur à l'amortissement critique, l'équipage mobile n'effectue alors que quelques oscillations et l'observation de celles-ci permet de vérifier que le cadre n'est pas arrêté par des frottements solides trop grands qui nuiraient à la fidélité de l'instrument.

16-5. Ampèremètres et voltmètres à cadre mobile.

Dans l'industrie, et souvent même au laboratoire, une très grande sensibilité n'est pas nécessaire et le galvanomètre à cadre mobile, tel que nous l'avons décrit, est modifié pour satisfaire à certaines conditions pratiques; il constitue alors un *ampèremètre à cadre mobile ou ampèremètre magnéto-électrique*.

Un ampèremètre doit être robuste, fonctionner dans toutes les

positions et permettre une mesure directe par simple lecture. Pour cela

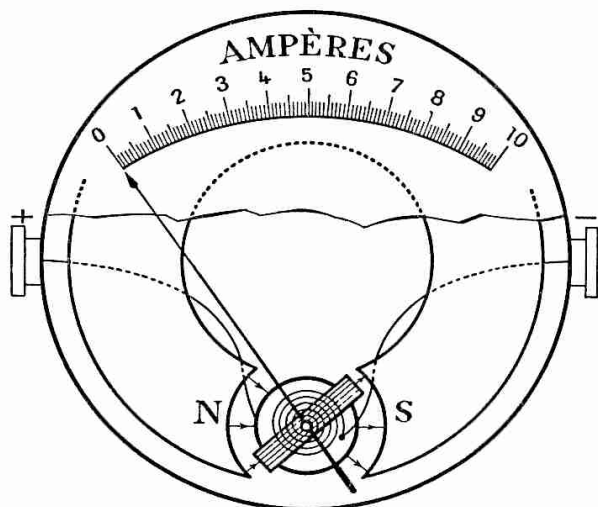


FIG. 137.

(fig. 137) le cadre est monté sur deux pivots et le couple de torsion des fils de suspension est remplacé par le couple élastique de deux ressorts spiraux en bronze phosphoreux, conducteurs mais non magnétiques, qui servent également à conduire le courant. Une aiguille solidaire du cadre se déplace devant une graduation; un contrepoids amène le centre de gravité de l'équipage mobile sur l'axe de rotation de sorte que l'appareil peut fonctionner dans n'importe quelle position.

Bien que la construction d'un ampèremètre sacrifie la sensibilité dans une certaine mesure, celle-ci est encore souvent trop grande, l'appareil ne pouvant supporter des intensités trop fortes. L'emploi de shunts dont la résistance est faible reviendrait pratiquement à court-circuiter l'ampèremètre et l'équipage mobile, très fortement amorti, ne gagnerait que très lentement sa position d'équilibre, sa résistance g étant elle-même faible. On évite cet inconvénient à l'aide d'un *réducteur*.

Dans le montage du réducteur le cadre est fermé sur une résistance R (fig. 138 *a*) voisine de la résistance critique R_c ; une des bornes de l'appareil de mesure est O (borne zéro), l'autre, A , est telle que la

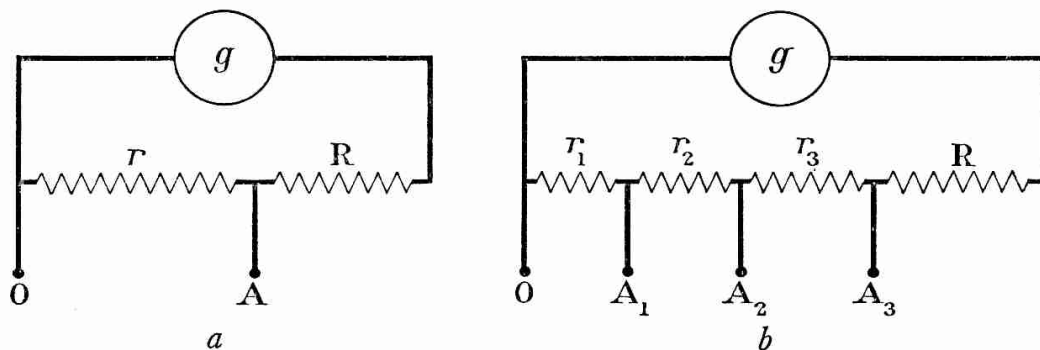


FIG. 138.

résistance de OA soit r , petite par rapport à R . Si I est l'intensité à mesurer, l'ampèremètre est traversé par

$$i = I \frac{r}{g + R} = \frac{I}{n}.$$

En dotant l'appareil de plusieurs bornes A_1, A_2, A_3 (fig. 138 b) correspondant aux valeurs $r_1, r_1 + r_2, r_1 + r_2 + r_3$, de r , on peut disposer de plusieurs facteurs de multiplication :

$$n_1 = \frac{g + R + r_2 + r_3}{r_1} \simeq \frac{R}{r_1}; \quad n_2 = \frac{g + R + r_3}{r_1 + r_2} \simeq \frac{R}{r_1 + r_2};$$

$$n_3 = \frac{g + R}{r_1 + r_2 + r_3} \simeq \frac{R}{r_1 + r_2 + r_3}.$$

Les ampèremètres à cadre mobile ont supplanté d'autres types d'appareils par suite de nombreux avantages qu'ils présentent :

Grâce au champ radial *la déviation est proportionnelle à l'intensité* (appareil à sensibilité constante), par suite les divisions sont équidistantes dans toute l'étendue de la graduation pour une rotation maximale pouvant dépasser 90° . Leur étalonnage se fait par comparaison et reste valable dans la mesure où l'aimantation de l'aimant permanent est invariable avec le temps; certains alliages ont permis de réaliser cette condition essentielle d'une façon satisfaisante.

Ils sont robustes, par suite transportables, *et pratiquement insensibles aux actions magnétiques extérieures*, ce qui permet leur emploi au voisinage des machines électriques.

Éventuellement dotés d'un shunt ou d'un réducteur, leur résistance est faible et la différence de potentiel maximale entre leurs bornes est de l'ordre de quelques centièmes de volt, de sorte que *leur consommation est faible*, de l'ordre du centième de watt, pour fixer les idées.

Leur emploi exige cependant quelques précautions élémentaires, car il faut tenir compte du fait qu'ils sont polarisés et non utilisables en courant alternatif. Bien entendu il faut éviter, par une faute de montage, de trop dépasser l'intensité maximale qu'un ampèremètre peut mesurer; *les appareils à plusieurs sensibilités* limitent ce danger.

Les ampèremètres à cadre mobile sont particulièrement utilisés comme *appareils de contrôle*. Afin de pouvoir bénéficier de leur sensibilité, l'extrémité de l'aiguille, aplatie normalement à la surface de la graduation, se déplace au-dessus d'une glace; en plaçant l'œil de façon à voir l'aiguille dans le prolongement de son image, on évite les erreurs de parallaxe. Dans ces conditions il est possible de mesurer une intensité avec une incertitude qui ne dépasse pas le millième de l'intensité maximale que l'ampèremètre peut mesurer; aussi, avec les appareils à plusieurs sensibilités, une précision relative de l'ordre du millième est facilement atteinte; il suffit de choisir la sensibilité (après un premier essai) qui donne la plus grande déviation.

Nous savons déjà (Elect. I) qu'un *appareil galvanométrique peut être monté en voltmètre en le mettant en série avec une grande résistance*, l'ensemble étant placé en dérivation entre les points dont on veut mesurer la diffé-

rence de potentiel. Le cadre du voltmètre peut alors sans inconvénient avoir une résistance assez grande et l'appareil offrir une grande sensibilité, ce qui est avantageux puisque dans ce cas l'intensité qui le traverse est très faible. Certains voltmètres ont plusieurs sensibilités, obtenues en mettant en série différentes résistances additionnelles.

Les appareils appelés *contrôleurs universels* (fig. 139) sont utilisables

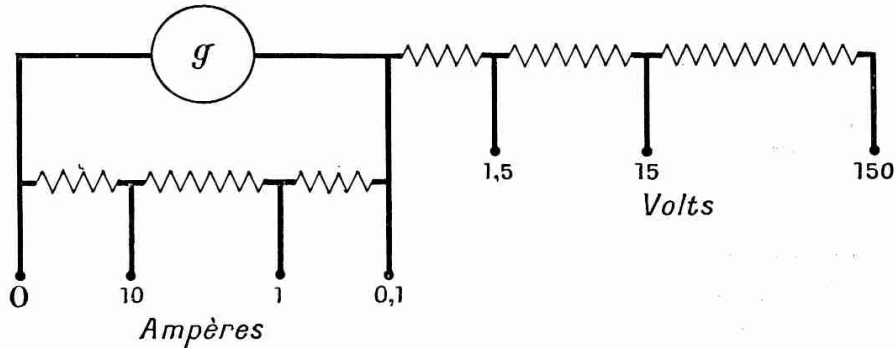


FIG. 139.

en ampèremètres à plusieurs sensibilités grâce à un réducteur, et en voltmètres à plusieurs sensibilités grâce à un jeu de résistances additionnelles en série. Certains, pourvus d'un redresseur intercalable par un double jeu de bornes, sont utilisables en courant alternatif (appareils à redresseur incorporé).

16-6. Classe d'un appareil de mesure.

Les appareils (ampèremètres, voltmètres, fluxmètres) où l'on repère la position d'une aiguille mobile devant une graduation ne fournissent en général pas une précision absolue égale à celle qui ne résulte que de l'incertitude de la lecture. Les constructeurs caractérisent la précision absolue réelle par un nombre appelé classe de l'appareil :

La classe d'un appareil est n si l'incertitude absolue d'une mesure est $n\%$ de ce que représente toute l'étendue de l'échelle.

Par exemple, pour un milliampèremètre de classe 1 à deux sensibilités, dont la graduation maximale est soit 15 mA, soit 150 mA, l'incertitude absolue d'une mesure est soit 0,15 mA, soit 1,5 mA suivant la sensibilité utilisée.

Les appareils étalons sont de classe 0,1 ou 0,2, les appareils de contrôle ou de vérification, de classe 0,5 ou 1, les appareils industriels, de classe 1,5 ou 2,5.

16-7. Galvanomètre balistique.

1° Principe.

Un galvanomètre balistique est un galvanomètre utilisé à la mesure d'une quantité d'électricité Q qui traverse, pendant une durée très courte τ , un circuit dans lequel est intercalé l'appareil. Il s'agit par exemple de la charge ou de la décharge d'un condensateur, ou de la quantité d'électricité induite dans une bobine que l'on soustrait rapidement à l'action d'une induction magnétique.

A l'instant $t = 0$ le cadre est immobile dans sa position de zéro. Les phénomènes peuvent être scindés en deux phases :

a) *Entre les instants zéro et τ* , la quantité d'électricité Q a traversé le galvanomètre.

τ est supposé suffisamment court par rapport à la période propre de l'équipage mobile,

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}},$$

pour que celui-ci n'ait pas eu le temps de se déplacer d'une façon appréciable alors que la vitesse angulaire a pris une valeur $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0$. Autrement dit, lorsque la quantité d'électricité Q a traversé le galvanomètre, l'élongation angulaire θ du cadre est nulle mais l'énergie cinétique de celui-ci est

$$\frac{1}{2} J \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0^2.$$

L'équation différentielle du mouvement du cadre parcouru par l'intensité i à l'instant t est (16-4)

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + F \frac{d\theta}{dt} + C\theta = \Phi_0 i.$$

Exprimons que pendant le temps τ la quantité d'électricité

$$Q = \int_0^\tau i dt$$

a traversé le galvanomètre. Nous avons

$$J \int_0^\tau \frac{d^2\theta}{dt^2} dt + F \int_0^\tau \frac{d\theta}{dt} dt + C \int_0^\tau \theta dt = \Phi_0 \int_0^\tau i dt = \Phi_0 Q,$$

d'où, puisque θ est constamment nul pendant cette première phase du phénomène,

$$\int_0^\tau \frac{d^2\theta}{dt^2} dt = \left[\frac{d\theta}{dt}\right]_0^\tau = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0; \quad \int_0^\tau \frac{d\theta}{dt} dt = [\theta]_0^\tau = 0; \quad \int_0^\tau \theta dt = 0,$$

et par suite

$$J \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_0 = \Phi_0 Q; \quad \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_0 = \frac{\Phi_0}{J} Q.$$

b) A l'instant τ , pris pour origine des temps de la deuxième phase des phénomènes :

L'équipage mobile est lancé à partir de sa position de zéro avec la vitesse initiale $\left(\frac{d\theta}{dt} \right)_0$ proportionnelle à la quantité d'électricité qui a traversé le galvanomètre.

Le mouvement ultérieur du cadre dépend de l'amortissement, et l'on démontre que

Quel que soit l'amortissement, la première élongation maximale θ_m atteinte est proportionnelle à la vitesse initiale, donc à la quantité d'électricité Q .

On a donc

$$\theta_m = A \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_0 = A \frac{\Phi_0}{J} Q = BQ.$$

Les grandeurs A et B dépendent de l'amortissement, B est la constante du galvanomètre dans les conditions particulières de son utilisation en balistique.

2° Conditions d'utilisation.

Nous allons établir l'expression de B dans deux cas particuliers :

a) *Amortissement nul.*

Ce cas correspond pratiquement à celui où, à l'instant τ , le galvanomètre est en circuit ouvert ($F = f \simeq 0$); il se trouve réalisé dans la charge et dans la décharge d'un condensateur à travers le galvanomètre. *Le mouvement du cadre est sinusoïdal.*

Nous avons, en prenant l'instant τ pour origine des temps,

$$\theta = \theta_m \sin \omega_0 t, \quad \frac{d\theta}{dt} = \theta_m \omega_0 \cos \omega_0 t,$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)_0 = \frac{\Phi_0}{J} Q = \theta_m \omega_0 = \theta_m \sqrt{\frac{C}{J}},$$

et par suite

$$\theta_m = \frac{\Phi_0}{\sqrt{JC}} Q.$$

b) *Amortissement critique.*

L'équation du mouvement est de la forme (16-4)

$$\theta = (A + Bt)e^{-\lambda_0 t},$$

avec

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}.$$

Compte tenu des conditions initiales

$$\theta_0 = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = \frac{\Phi_0}{J} Q,$$

on trouve

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0;$$

par suite

$$\theta = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 t e^{-\lambda_0 t}; \quad \frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 (1 - \lambda_0 t) e^{-\lambda_0 t}.$$

A l'instant

$$t = \frac{1}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{J}{C}},$$

l'élongation passe par le maximum

$$\theta_m = \frac{1}{e} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 \frac{1}{\lambda_0} = 0,368 \frac{\Phi_0}{\sqrt{JC}} Q.$$

L'amortissement critique est réalisé par exemple si l'on mesure la quantité d'électricité induite dans une bobine dont la résistance est égale à la résistance critique extérieure R_E .

Dans le premier cas, l'élongation maximale est atteinte au bout du temps $\frac{T_0}{4}$, dans le second, au bout du temps

$$\frac{1}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{J}{C}} = \frac{T_0}{2\pi}.$$

Ces temps sont donc d'autant plus grands que la période propre du galvanomètre est elle-même plus grande; ce résultat est d'ailleurs valable quel que soit l'amortissement.

La mesure d'une élongation maximale, qui s'effectue au cours d'un mouvement, est d'autant plus facile que cette élongation est atteinte dans un temps plus long; *on a donc intérêt à augmenter la période*. Il ne faut d'ailleurs pas oublier que le résultat essentiel que nous avons obtenu, à savoir la proportionnalité de θ_m à Q , n'est valable que si τ est petit par rapport à T_0 .

L'augmentation de la période se réalise le plus souvent en surchargeant le cadre par de petites masses de plomb portées par des tiges; on augmente ainsi le moment d'inertie J et par suite T_0 mais l'on diminue

la sensibilité de l'appareil. Certains galvanomètres sont conçus pour fonctionner en balistique : leur constante de torsion C est réduite et leur cadre est large dans le sens horizontal de façon à augmenter J sans alourdir l'équipage mobile.

Le galvanomètre balistique ne se prête que difficilement à des mesures absolues. Il est préférable de le réserver à des mesures relatives, de l'étalonner dans chaque cas et même de ne l'employer qu'à la mesure d'un rapport de quantités d'électricité dans les mêmes conditions d'utilisation; ce rapport est alors égal à celui des élongations maximales correspondantes.

3° Shunt d'un balistique.

Lorsqu'un galvanomètre balistique, de résistance g et d'inductance propre L , est muni d'un shunt de résistance s et d'inductance propre L' , la quantité d'électricité Q se partage entre le cadre, dans lequel il passe q , et le shunt, dans lequel il passe q' , comme en courant continu; autrement dit l'on a

$$Q = q + q', \quad gq = sq'.$$

En effet, à chaque instant pendant la durée τ , les différences de potentiel aux bornes du cadre et du shunt sont égales et l'on a, i et i' étant les intensités dans les deux dérivations à cet instant,

$$gi + L \frac{di}{dt} = si' + L' \frac{di'}{dt},$$

la force électromotrice d'induction dans le cadre étant nulle puisque le cadre est immobile.

Nous avons par suite, en intégrant entre les instants zéro et τ correspondant à la première phase des phénomènes,

$$\int_0^\tau gi \, dt + \int_0^\tau L \frac{di}{dt} \, dt = \int_0^\tau si' \, dt + \int_0^\tau L' \frac{di'}{dt} \, dt,$$

$$gq + L[i]_0^\tau = sq' + L'[i']_0^\tau,$$

et, comme i et i' sont nuls aux instants zéro et τ , on a bien $gq = sq'$. En somme, comme L est beaucoup plus grand que L' , l'inductance propre L , qui retarde l'établissement du courant dans le cadre, l'y prolonge à la fin du phénomène de sorte que q et q' restent bien inversement proportionnelles à g et à s .

Il est donc possible de shunter un balistique mais à condition de tenir compte de ce que l'amortissement s'en trouve modifié, *aussi doit-on l'étalonner muni de son shunt.* Ces résultats sont applicables au fluxmètre.

16-8. Fluxmètre.

Un fluxmètre est un galvanomètre privé de son couple de rappel. Ce résultat est obtenu en rendant l'équipage mobile sur deux pivots, son centre de gravité étant sur l'axe de rotation; le courant est amené par des rubans d'argent dont la torsion est négligeable. Le cadre, qu'aucun courant ne parcourt, est en équilibre dans une position quelconque; une butée mobile permet de le ramener à sa position de zéro.

Si R est la résistance totale du circuit, y compris celle du fluxmètre, et e une force électromotrice extérieure, l'équation du mouvement du cadre est, d'après la relation (1) du paragraphe 16-4 dans laquelle $C = 0$,

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + F \frac{d\theta}{dt} = \Phi_0 i = \Phi_0 \frac{e}{R},$$

avec $F = \frac{\Phi_0^2}{R}$, en négligeant les frottements de l'air.

Le fluxmètre a deux principaux usages :

1° Mesures d'un flux d'induction et d'une induction magnétique.

Le circuit extérieur au fluxmètre comprend une bobine plate que l'on peut déplacer dans une induction magnétique. Initialement immobile dans une position 1, la bobine est traversée par le flux Φ_1 et le fluxmètre est en équilibre à la division θ_1 .

A l'instant $t_1 = 0$ la bobine est déplacée; au cours du déplacement, à l'instant t , elle est traversée par le flux Φ et elle est le siège d'une force électromotrice

$$e = - \frac{d\Phi}{dt},$$

de sorte que l'équation du mouvement du cadre est

$$(1) \quad J \frac{d^2\theta}{dt^2} + F \frac{d\theta}{dt} = - \frac{\Phi_0}{R} \frac{d\Phi}{dt}.$$

A l'instant t_2 la bobine est immobilisée dans la position 2; à partir de cet instant elle est traversée par le flux Φ_2 constant et elle n'est le siège d'aucune force électromotrice d'induction. A l'instant τ , un peu postérieur à l'instant t_2 , le cadre s'arrête à la division θ_2 sous l'action des courants induits [l'équation du mouvement est (1) sans le second membre].

La rotation du cadre entre les instants 0 et τ est donc $\alpha = \theta_2 - \theta_1$ et la variation de flux à travers la bobine est $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$.

Intégrons l'équation (1) entre les instants zéro et τ ; nous avons

$$\begin{aligned} J \int_0^\tau \frac{d^2\theta}{dt^2} dt + F \int_0^\tau \frac{d\theta}{dt} dt &= -\frac{\Phi_0}{R} \int_0^\tau \frac{d\Phi}{dt} dt, \\ \int_0^\tau \frac{d^2\theta}{dt^2} dt &= \left[\frac{d\theta}{dt} \right]_0^\tau = 0; \quad \int_0^\tau \frac{d\theta}{dt} dt = [\theta]_0^\tau = \theta_2 - \theta_1; \\ \int_0^\tau \frac{d\Phi}{dt} dt &= [\Phi]_0^\tau = \Delta\Phi, \end{aligned}$$

d'où

$$F\alpha = -\frac{\Phi_0}{R} \Delta\Phi.$$

La déviation du fluxmètre, proportionnelle à la variation du flux à travers la bobine, est indépendante de la durée de cette variation.

On peut s'arranger pour que f soit négligeable par rapport à $\frac{\Phi_0^2}{R}$; on a alors (16-4)

$$\alpha = -\frac{\Delta\Phi}{\Phi_0},$$

relation qui nous montre que le flux $\alpha\Phi_0$ coupé par le cadre est égal à la diminution du flux à travers la bobine : ce résultat traduit la loi de Lenz.

La déviation α (exprimée en radians) mesure ainsi directement un rapport de flux, elle est indépendante de la résistance R du circuit et par suite de la résistance g du fluxmètre. On peut donc étalonner le fluxmètre directement en flux et les divisions de la graduation devant laquelle se déplace l'aiguille sont équidistantes. Par exemple, si $\Phi_0 = 0,01 \text{ Wb} = 10^6 \text{ maxwells}$ et si une division correspond à $0,01 \text{ rd}$, chaque division correspond à une variation de flux $\Delta\Phi = 10^{-4} \text{ Wb} = 10^4 \text{ maxwells}$. La précision relative des mesures de variations de flux peut atteindre quelques millièmes.

Remarquons que si $\Delta\Phi$ est connue, la mesure de α permet de déterminer Φ_0 .

Supposons que la bobine précédemment utilisée soit une bobine plate comportant N' spires de surface S' et qu'elle soit tout d'abord disposée normalement aux lignes d'une induction uniforme B' (rappelons que les notations N , S , B sont relatives au fluxmètre et que $\Phi_0 = NSB$). Elle est traversée par le flux $\Phi = N'S'B'$. Eloignons-la dans une région de l'espace où l'induction est nulle (on suppose B' suffisamment grand pour qu'on puisse négliger l'induction terrestre). Nous avons

$$\Delta\Phi = -\Phi = -N'S'B',$$

et par suite

$$\alpha = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{N'S'B'}{\Phi_0}.$$

L'expérience permet donc de mesurer l'induction

$$B' = \frac{\alpha \Phi_0}{N'S'}.$$

Si l'on avait retourné la bobine face pour face, la variation $\Delta\Phi = -2\Phi$ eût été double.

Dans le cas où l'induction n'est pas uniforme, sans être cependant trop rapidement variable dans l'espace, on utilise une bobine de surface réduite pour qu'on puisse considérer l'induction comme uniforme dans la région où elle est placée.

2° Mesure de quantités d'électricité et de capacités.

L'expérience précédente montre la possibilité de mesurer la quantité d'électricité Q transportée dans le circuit par le courant induit dans la bobine; on a en effet (16-8)

$$\alpha = \frac{\Delta\Phi}{\Phi_0} = \frac{R}{\Phi_0} Q.$$

Il est essentiel de remarquer que la déviation α dépend de la résistance R du circuit :

Le fluxmètre ne peut donc pas être gradué en quantités d'électricité et un étalonnage n'est valable que pour une valeur déterminée de R .

Le problème se pose d'une façon différente lorsqu'il s'agit de mesurer la charge Q d'un condensateur C . Si l'on déchargeait directement le condensateur chargé sous la tension U dans le fluxmètre, la déviation α serait infinie (l'aiguille viendrait buter à l'extrémité de la graduation) puisque R est infini et cela quelle que soit Q . *Il est nécessaire de shunter le fluxmètre pour effectuer une mesure.*

Soit q et q' les quantités d'électricité qui, après la décharge, ont traversé respectivement le fluxmètre (résistance g) et le shunt (résistance s) (fig. 140). Nous avons, d'après ce que nous avons établi (16-7),

$$(1) \quad sq' = gq; \quad q + q' = Q.$$

La résistance du circuit du fluxmètre est $R = g + s$, et la déviation du fluxmètre est donc

$$\alpha = \frac{R}{\Phi_0} q = \frac{g + s}{\Phi_0} q,$$

par suite,

$$\alpha = \frac{s}{\Phi_0} Q.$$

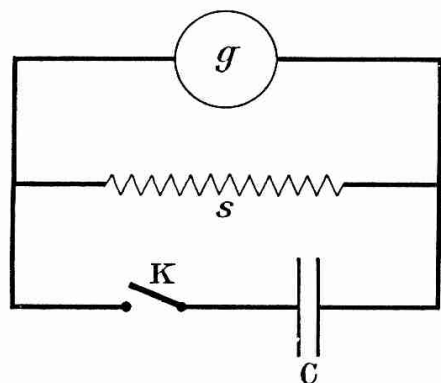


FIG. 140.

La déviation est proportionnelle à la charge du condensateur, mais le facteur

de proportionnalité dépend de la résistance s du shunt. La sensibilité aux mesures de charges de condensateur est donc proportionnelle à s ; elle serait infinie sans shunt ($s = \infty$) et, comme nous l'avons dit, l'appareil serait inutilisable. Le fluxmètre peut donc servir à la comparaison des charges et des capacités de condensateurs préalablement chargés sous la même tension et déchargés dans le fluxmètre *pourvu du même shunt*.

Exercice.

Exercice 27. — On se propose de mesurer l'induction magnétique uniforme B à l'aide du montage de la figure 141. F est un fluxmètre gradué en divisions équidistantes mais non étalonné, sa résistance est g .

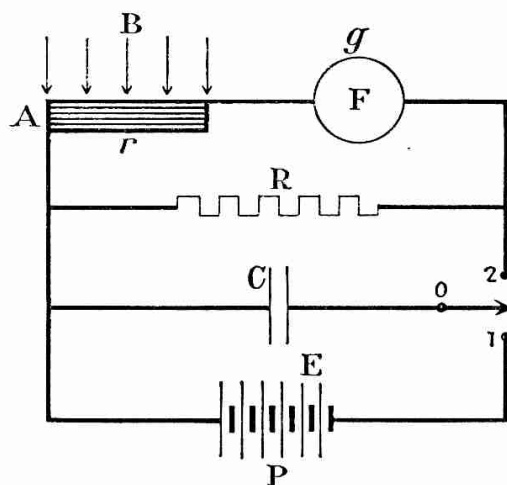


FIG. 141.

A est une bobine plate de résistance r comportant N spires de surface S , R est une résistance inconnue, C est la capacité connue d'un condensateur, P est une batterie de piles de force électromotrice connue E .

1° La pile et le condensateur sont hors-circuit (comme sur la figure). La bobine A étant normale à B est amenée brusquement dans une région où l'induction peut être considérée comme nulle. On observe la déviation θ du fluxmètre.

2° On charge le condensateur (interrupteur en position 1) puis on le décharge dans le fluxmètre shunté par R (interrupteur en position 2). On mesure la déviation θ' .

Exprimer B en fonction des mesures θ et θ' et des données nécessaires.

On a pour la première mesure

$$\theta = \frac{NSB}{\Phi_0},$$

pour la seconde (décharge d'un condensateur dans un fluxmètre shunté)

$$\theta' = \frac{R}{\Phi_0} Q = \frac{RCE}{\Phi_0}.$$

D'où, par division membre à membre,

$$\frac{\theta}{\theta'} = \frac{NSB}{RCE},$$

et enfin

$$B = \frac{RCE}{NS} \frac{\theta}{\theta'}.$$

CINQUIÈME PARTIE

COURANTS ALTERNATIFS

- Chap. XVII. — Définitions et généralités sur les courants alternatifs.
Chap. XVIII. — Loi d'Ohm en courant alternatif.
Chap. XIX. — Puissance en courant alternatif.

CHAPITRE XVII

DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS SUR LES COURANTS ALTERNATIFS

17-1. Définitions (fig. 142 a, b, c).

Nous n'avons jusqu'ici considéré que des courants d'intensité constante ou *courants continus*. Ce n'est qu'exceptionnellement que nous avons été conduits à envisager des *courants variables* dont l'intensité est fonction du temps. Rappelons que nous avons étudié l'établissement d'un régime permanent (13-5), la rupture du courant (13-6) dans un circuit inductif, la décharge d'un condensateur dans une résistance morte (Électricité I, 15-3) et dans un circuit inductif (13-8). Dans ce dernier cas nous avons vu que la décharge pouvait être oscillatoire amortie et même sinusoïdale lorsque la résistance du circuit inductif est suffisamment faible.

Un *courant périodique* de période T (fig. 142 a) est un courant variable dont l'intensité est une fonction périodique du temps; à deux instants quelconques séparés par T l'intensité i reprend la même valeur, et l'on a donc identiquement, quel que soit t ,

$$i = f(t) \equiv f(t + nT),$$

n étant un nombre entier. La période T s'exprime en secondes, son inverse N (ou f , ou ν), nombre de périodes par seconde ou fréquence, s'exprime en hertz (Hz ou s^{-1}).

Un *courant alternatif* est un courant périodique tel qu'au bout d'une demi-période l'intensité reprend la même valeur changée de signe; on a donc (fig. 142 b)

$$f(t) \equiv -f\left(t + \frac{T}{2}\right).$$

A partir de l'instant t où l'intensité est i , pendant la durée très petite dt , la quantité d'électricité transportée par le courant est

$$dq = i dt.$$

A partir de l'instant $t + \frac{T}{2}$ et pendant la même durée, elle est $-dq$.

Une période est donc décomposable en deux *demi-périodes* ou *alter-*

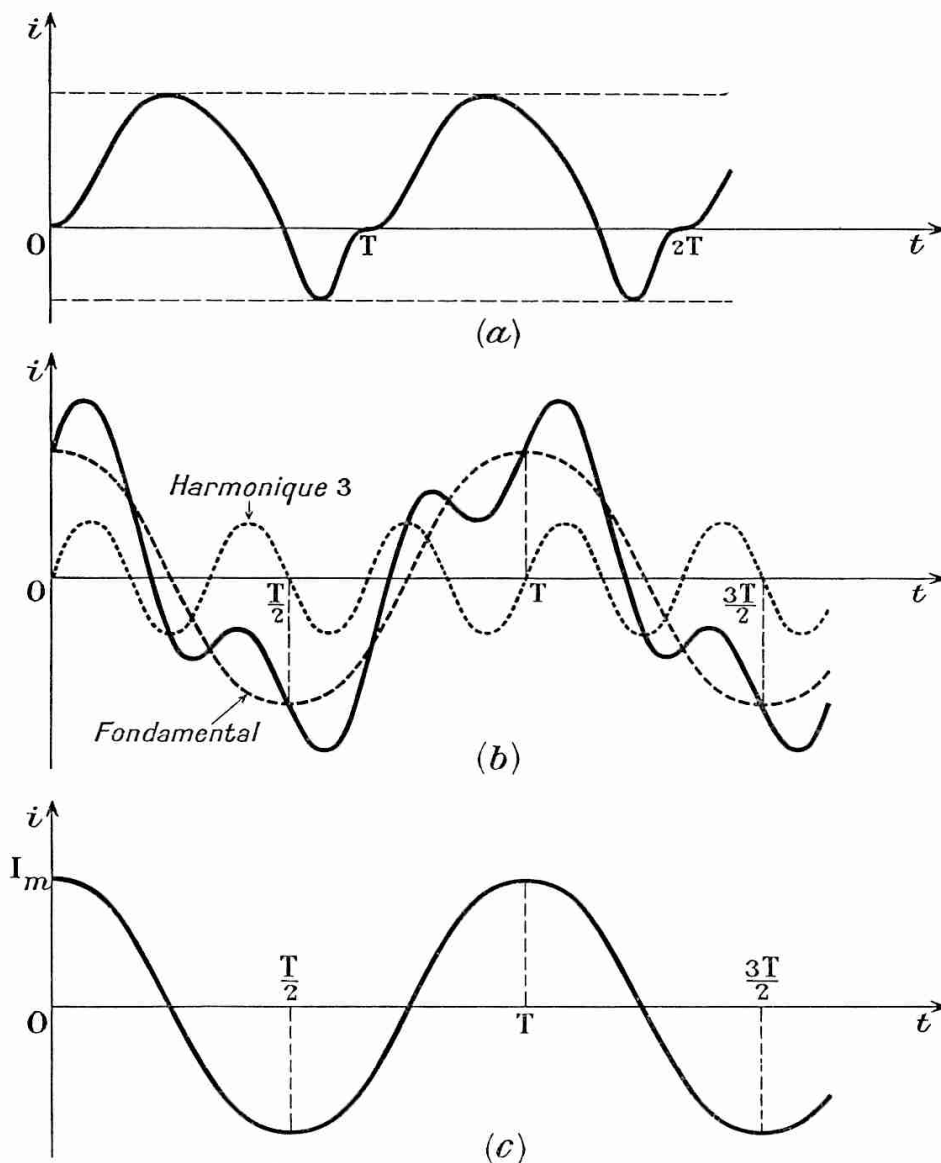


FIG. 142.

nances pendant lesquelles les quantités d'électricité transportées sont égales mais de signes contraires; il en découle que la *valeur moyenne*

$$\frac{1}{nT} \int_i^{i+nT} i \, dt$$

d'un courant alternatif pendant un nombre entier n de périodes est nulle.

Ce résultat reste valable en première approximation si la durée utilisée pour prendre la moyenne est grande par rapport à la période.

Le type le plus important de courant alternatif est le *courant sinusoïdal* (fig. 142 c), dont l'intensité est une fonction sinusoïdale du temps,

donc de la forme

$$i = I_m \cos (\omega t + \varphi) = I_m \cos \left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi \right) = I_m \cos (2\pi Nt + \varphi).$$

i est l'intensité à l'instant t ou *intensité instantanée*, I_m est l'*intensité maximale*, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi N$ est la *pulsation* (unité rd. s⁻¹), φ est la *phase* (rd).

Les définitions précédentes sont valables pour d'autres grandeurs électriques : on aura par exemple pour une force électromotrice e , pour une différence de potentiel u et pour une induction électromagnétique b , les variations sinusoïdales

$$e = E_m \cos (\omega t + \varphi); \quad u = U_m \cos (\omega t + \varphi); \quad b = B_m \cos (\omega t + \varphi).$$

Pour les applications pratiques il est commode de classer les courants périodiques d'après l'ordre de grandeur de leur fréquence :

Les courants industriels sont très sensiblement sinusoïdaux. La fréquence de la plupart des réseaux de distribution, et c'est le cas en France, est 50 Hz (elle est cependant de 60 Hz aux États-Unis); on utilise également des fréquences plus basses pour la traction électrique ($16 \frac{2}{3}$ hertz en Suisse).

Les courants téléphoniques (non sinusoïdaux) ont des *fréquences*, dites *musicales*, celles des sons qu'ils transmettent, qui s'échelonnent entre environ 100 Hz et quelques milliers de hertz, 1 000 hertz pouvant être pris comme ordre de grandeur.

Les courants utilisés par la radio sont des *courants de hautes fréquences*; celles-ci s'échelonnent depuis celles des ondes kilométriques (à partir de 0,1 MHz environ) jusqu'à celles des ondes centimétriques qui peuvent atteindre plusieurs milliers de mégahertz (courants de très hautes fréquences).

17-2. Théorème de Fourier.

Ce théorème s'énonce ainsi :

Une fonction périodique $f(t)$, de fréquence N , peut être considérée, et cela d'une seule façon, comme une forme linéaire de fonctions sinusoïdales de fréquences $N, 2N, \dots, kN, \dots$, k étant un nombre entier.

On a, en utilisant les notations relatives à un courant périodique,

$$f(t) = I_0 + I_1 \cos (2\pi Nt + \varphi_1) + \dots + I_k \cos (2k\pi Nt + \varphi_k) + \dots;$$

cette forme est appelée *série de Fourier*, certains de ses termes pouvant être nuls.

Le terme constant I_0 est nul dans le cas d'un courant alternatif. Le terme

$$i_1 = I_1 \cos (2\pi Nt + \varphi_1)$$

est le *terme fondamental*, les suivants sont les *harmoniques* (fig. 142 b).

Nous n'étudierons que les courants sinusoïdaux. Les courants industriels sont des courants quasi sinusoïdaux; cela signifie que les intensités maximales des harmoniques sont petites par rapport à celle du terme fondamental.

Il ne faudrait pas croire que toutes les propriétés d'un courant périodique soient purement et simplement la somme des propriétés des courants sinusoïdaux de sa représentation en série de Fourier, que, par exemple (Ex. 28 et 29) l'intensité efficace d'un courant alternatif non sinusoïdal soit égale à la somme des valeurs efficaces des différents termes de la série. Nous le comprendrons mieux lorsque nous aurons vu que *la fréquence intervient d'une façon prépondérante dans la plupart des phénomènes*.

Dans ce qui suit nous donnerons aux expressions courants sinusoïdaux et courants alternatifs la même signification.

17-3. Principe de la production d'un courant sinusoïdal. Conditions d'application des lois générales.

Considérons (fig. 143) une bobine plate comportant N spires chacune de surface S tournant d'un mouvement uniforme avec la vitesse angulaire ω autour d'un axe $z'z$ de son plan, dans une induction uniforme B normale à cet axe. Choisissons un sens positif sur le circuit et par suite une normale

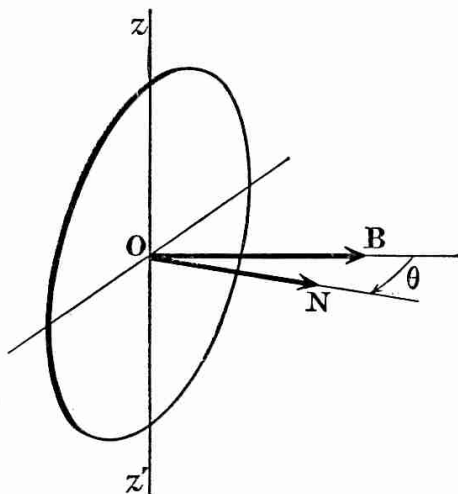


FIG. 143.

positive $\vec{ON}$ à son plan. Posons $\theta = (\vec{ON}, \vec{B})$ avec un choix de l'origine des temps tel que $\theta = \omega t$.

Le flux d'induction à travers le circuit à l'instant t est

$$\Phi = N'SB \cos \omega t = \Phi_m \cos \omega t,$$

et la force électromotrice induite,

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega\Phi_m \sin \omega t.$$

Ce dispositif peut être considéré comme un schéma très simplifié des alternateurs industriels. Si le circuit est ouvert il existe entre ses extrémités une force électromotrice sinusoïdale égale à e .

Si l'on intercale un alternateur dans un circuit, celui-ci est parcouru par un courant sinusoïdal dont la fréquence est celle de la force électromotrice, mais il existe en général une différence de phase entre celle-ci et l'intensité. En courant continu il n'y a lieu de tenir compte que de forces électromotrices et contre-électromotrices constantes, de résistances; un condensateur s'oppose au passage du *courant* en se comportant comme une résistance infinie. En alternatif, il faut tenir compte des phénomènes d'auto-induction et du fait qu'un condensateur peut être intercalé dans un circuit. Il faut cependant faire une restriction dans le cas d'une bobine à noyau ferromagnétique dont l'inductance n'est pas définie (13-3) : une force électromotrice sinusoïdale peut alors fournir un courant alternatif non sinusoïdal, des harmoniques se superposant à la fréquence fondamentale (celle de la force électromotrice).

Nous admettons dans l'étude des courants alternatifs que *les lois générales de l'électricité restent valables* (12-3) :

a) *A chaque instant l'intensité est la même en tous les points d'un circuit simple.*

b) *La résistance d'un conducteur est la même pour les courants alternatifs que pour les courants continus.*

c) *Les lois de la conservation de l'électricité, d'Ohm, de Joule et de Faraday (relative à l'électrolyse) ainsi que les lois de l'électromagnétisme et de l'induction, sont applicables.*

En fait les hypothèses précédentes constituent une excellente approximation pour les courants de basse fréquence, mais elles demanderaient à être révisées pour les courants de haute fréquence.

17-4. Effet thermique. Intensité efficace.

1° Effet Joule.

Le passage d'un courant alternatif dans un conducteur de résistance R s'accompagne d'un dégagement de chaleur par effet Joule; cela tient au fait que l'effet thermique, étant proportionnel au carré de l'intensité, donc indépendant du sens du courant (effet non polarisé), le dégagement de chaleur moyen n'est pas nul.

Le débit de chaleur n'est pas constant puisque Ri^2 est variable, cependant sa variation est la même pendant les deux alternances qui constituent une période, i^2 reprenant la même valeur, à deux instants séparés par une demi-période. Il en découle que *la fréquence des variations de la puissance calorifique dégagée est le double de la fréquence du courant.*

La température d'un conducteur varie avec le débit de chaleur qui

résulte de l'effet Joule; l'amplitude de ces variations dépend de l'*inertie thermique* du conducteur, laquelle est fonction de sa capacité calorifique et de certaines conditions (surface extérieure de la résistance, nature et température du milieu extérieur, ventilation); elle est d'autre part d'autant plus réduite que la fréquence est plus élevée.

Dans le cas du chauffage électrique, domestique ou industriel (four électrique à résistance), les variations de la température sont faibles et ne présentent pas d'inconvénient. Par contre, l'inertie thermique du filament d'une lampe à incandescence est assez réduite, par suite, ses variations de luminance sont considérables. Cependant, grâce à la persistance des impressions lumineuses sur la rétine, la luminance paraît constante pour la fréquence 50, deux maximums étant séparés par une durée de 0,01 s. Le courant alternatif est donc utilisable aussi bien pour l'éclairage que pour le chauffage. Pour des fréquences plus faibles on observe un papillotement désagréable; pour la fréquence 50 les variations de luminance peuvent être mises en évidence par observation au miroir tournant.

2° Intensité efficace.

Déterminons la *puissance calorifique moyenne* P (exprimée en watts) dégagée par effet Joule dans une résistance R traversée par le *courant périodique* i de période T ; nous effectuons le calcul pour un nombre entier de périodes ou, ce qui revient au même, pour une période.

Entre les instants infiniment voisins t et $t + dt$ l'effet Joule est

$$dW = Ri^2 dt,$$

au cours d'une période il est

$$W = R \int_0^T i^2 dt.$$

Par suite

$$P = \frac{W}{T} = \frac{R}{T} \int_0^T i^2 dt = RI^2,$$

en posant

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt.$$

I est l'*intensité efficace* du courant périodique; la relation de définition précédente nous montre que I est **la valeur quadratique moyenne de l'intensité instantanée au cours d'une période** (son carré est la moyenne de i^2).

L'intensité efficace est aussi l'intensité du courant continu qui, traversant la résistance R , dégagerait la puissance calorifique moyenne P .

Avant d'aller plus loin remarquons que les moyennes P et I^2 correspondent à un nombre entier de périodes. Elles ne sont plus les mêmes si elles sont prises pendant un temps quelconque $\theta = kT + \Delta\theta$. Cependant, si θ est grand par rapport à T , il comprend un grand nombre k de périodes, plus $\Delta\theta$ qui, *en valeur relative*, est petit par rapport à θ ($\frac{\Delta\theta}{\theta}$ petit); le résultat du calcul s'en trouve peu affecté. On montrerait par exemple que pour la fréquence 50 Hz et pour une durée $\theta = 10$ s l'écart relatif ne dépasse pas un millième.

Reprenons l'expression de définition de I^2 . Sa valeur dépend de la forme $i = f(t)$ du courant périodique; nous avons, dans le cas d'un courant sinusoïdal (fig. 144),

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{I_m^2}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{I_m^2}{2T} \int_0^T (1 + \cos 2\omega t) dt,$$

$$I^2 = \frac{1}{2} I_m^2 \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_0^T = \frac{1}{2} I_m^2,$$

par suite

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} I_m.$$

Dans la pratique il suffit le plus souvent de prendre $I = 0,7 I_m$.

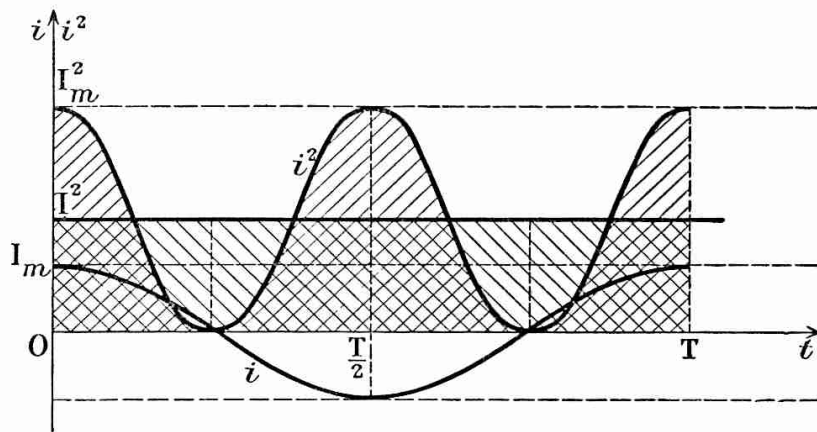


FIG. 144.

L'expression précédente de I n'est évidemment plus valable si le courant n'est plus sinusoïdal. On se rendra facilement compte que, pour les mêmes valeurs de l'intensité maximale I_m et de la période T ,

I^2 est inférieur à $\frac{1}{2} I_m^2$ si la courbe $i = f(t)$ est entièrement intérieure à la sinusoïde; il lui est supérieur dans le cas contraire; par exemple dans le cas d'un courant en créneaux que l'on sait obtenir, on a alors $I = I_m$. L'intensité efficace I est au plus égale à l'intensité maximale I_m .

D'autres valeurs efficaces (valeurs quadratiques moyennes) de grandeurs électriques périodiques (force électromotrice et différence de potentiel, induction, flux d'induction) interviennent dans l'étude des courants alternatifs. Nous utiliserons des minuscules italiques i, e, u, b et φ pour les valeurs instantanées, des capitales avec l'indice m , $I_m, E_m, \dots$, pour les valeurs maximales et des capitales sans indice, $I, E, \dots$, pour les valeurs efficaces. Étant donnée l'importance de ces dernières nous remplacerons souvent, dans le cas des grandeurs sinusoïdales, les valeurs maximales I_m, E_m , par $I\sqrt{2}, E\sqrt{2}, \dots$. Nous écrirons par exemple

$$i = I\sqrt{2} \cos \omega t, \quad u = U\sqrt{2} \cos \omega t.$$

3° Mesures des grandeurs efficaces I et U .

On utilise des appareils à redresseur incorporé (16-5); on obtient ainsi une grande sensibilité (emploi dans les méthodes de zéro), une bonne robustesse et une faible consommation; la graduation est en valeurs efficaces (I ou U).

Tous les appareils dont l'équipage mobile est soumis à un couple proportionnel au carré de l'intensité sont utilisables en courant alternatif. Ainsi les électrodynamomètres, sous le nom d'*ampèremètres électrodynamiques*, sont parmi les meilleurs, leur seul inconvénient est leur consommation un peu forte. Les *voltmètres électrostatiques* servent aux mesures de différences de potentiel relativement élevées, leur consommation est nulle.

Les *appareils thermiques*, sous leur forme ancienne qui utilisait la dilatation d'un fil parcouru par le courant à mesurer, ne sont plus employés par suite de multiples inconvénients. Pour les courants de fréquences téléphoniques et les basses fréquences de la radio ils subsistent sous la forme suivante : le courant passe dans une résistance dans une ampoule vide, l'échauffement qui en résulte est communiqué à la soudure d'un couple thermoélectrique dont le courant est mesuré par un instrument à cadre mobile. Le dispositif peut fonctionner en milliampèremètre.

Les *appareils à fer doux* sont utilisés pour les courants alternatifs en basse fréquence. Nous décrivons le plus employé (il existe normalisé pour la mesure de courants jusqu'à 5 ampères) à cause de sa grande robustesse et de son prix relativement réduit.

Il comporte (fig. 145) une bobine B parcourue par le courant à mesurer, à l'intérieur de laquelle sont disposées deux palettes de fer doux; l'une, P, est mobile et solidaire de l'aiguille, l'autre, P', est fixe. Placées dans l'induction magnétique créée par le courant, les deux palettes s'aimantent de la même façon quel que soit le sens du courant; par suite, elles se repoussent.

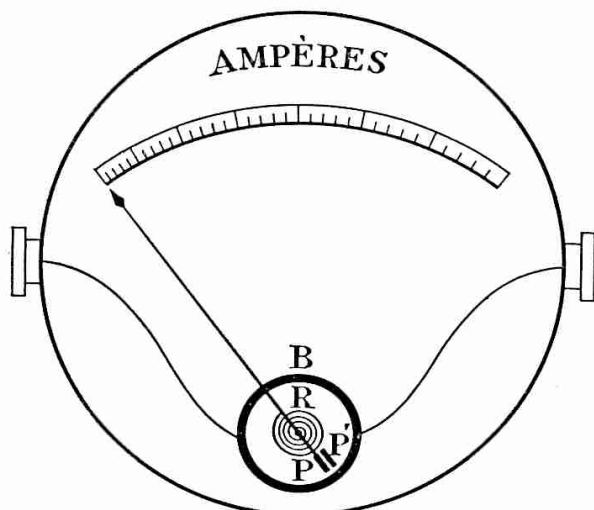


FIG. 145.

Le déplacement de P entraîne la rotation de l'aiguille, rotation qui est limitée par un ressort spiral R. Il n'existe pas de relation théorique entre la déviation et l'intensité, aussi étalonne-t-on l'ampèremètre par comparaison avec un

ampèremètre étalon; on peut s'arranger pour que les graduations soient à peu près équidistantes. L'emploi de palettes en alliages fer-nickel permet de réaliser des appareils de classe 1 à 2 (16-6) dont la précision est suffisante pour de nombreux usages.

17-5. Effet électrolytique.

Au cours d'une électrolyse en courant alternatif chaque électrode est alternativement cathode et anode. Pour interpréter les phénomènes, il faut tenir compte du fait qu'au cours d'une période, deux quantités égales d'électricité traversent le voltamètre en sens inverses. Les phénomènes de polarisation et de dépolarisation des électrodes peuvent plus ou moins jouer un rôle suivant l'ordre de grandeur de la fréquence. Nous nous bornons à choisir quelques exemples intéressants.

Utilisons tout d'abord une solution d'acide sulfurique avec des électrodes de platine identiques (voltmètre symétrique) M et N. Au cours d'une alternance M est cathode, N est anode. Une certaine quantité d'hydrogène se forme sur M, et correspond, d'après la loi de Faraday, à la quantité d'électricité

$$Q = \int_0^{\frac{\tau}{2}} i dt = \int_0^{\frac{\tau}{2}} I_m \cos \omega t dt = \frac{I_m}{\omega} = \frac{I_m}{2\pi N},$$

dans le cas d'un courant sinusoïdal.

Toutefois, une partie plus ou moins importante de cet hydrogène est adsorbée par le platine : c'est le phénomène de la polarisation; le reste se

dégage. A l'anode N l'adsorption de l'oxygène est cependant plus réduite.

Pendant l'alternance suivante, les rôles des électrodes étant inversés, une fraction de l'oxygène formé sur M se combine à l'hydrogène adsorbé pour redonner de l'eau (le platine catalyse la réaction), l'autre partie se dégage. On dit que l'électrode se dépolarise. Un phénomène analogue se produit sur N où l'hydrogène libéré se combine à l'oxygène adsorbé.

Compte tenu de la symétrie des phénomènes et de l'appareil, on recueille bien des volumes égaux (parce que les électrodes sont supposées identiques) de mélange tonnant, mais ces volumes sont inférieurs à ceux que laisserait prévoir la loi de Faraday. La polarisation et la dépolarisation des électrodes réduisent donc les résultats de l'électrolyse; leur rôle est d'autant plus important que la surface des électrodes est plus grande, que la température est plus élevée et que la fréquence du courant est plus grande. Pour des fréquences supérieures à 500 hertz environ, aucun dégagement ne se produit et le voltamètre se comporte comme une simple résistance.

D'une façon générale *le courant alternatif ne convient ni pour les appli-*

cations de l'électrolyse dans les industries chimique et métallurgique ni pour la charge des accumulateurs. Si par exemple on électrolyse, en courant alternatif, une solution de sulfate de cuivre avec électrodes en cuivre, aucun transport de métal d'une électrode à l'autre ne se produit : le courant alternatif ne convient donc pas non plus pour la préparation et l'affinage électrolytiques des métaux.

Pour ces applications on utilise des *redresseurs* qui transforment le courant alternatif en *courant variable de sens constant*, la quantité moyenne d'électricité transportée n'est alors plus nulle. On appelle indifféremment « redresseur » un appareil qui supprime une

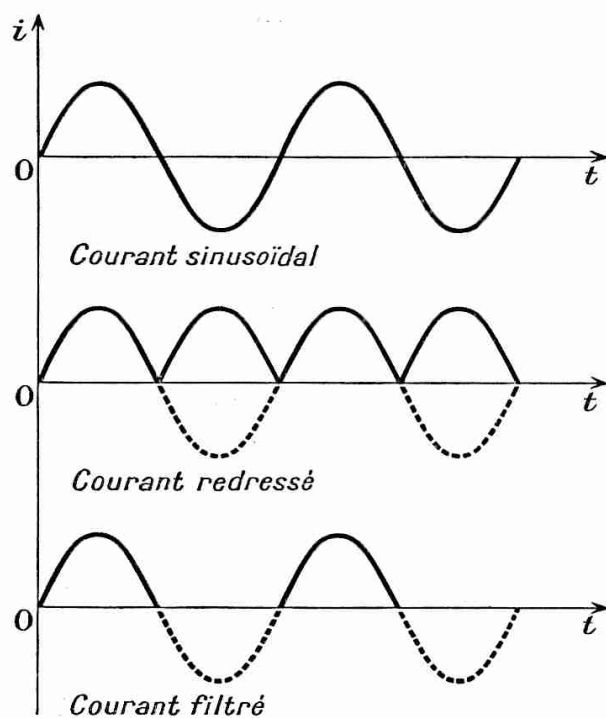


FIG. 146.

alternance (c'est alors plutôt une *soupape* ou *valve*) ou qui change son sens (fig. 146).

Donnons maintenant les exemples de deux électrolyses susceptibles d'être utilisées :

a) L'électrolyte est une solution de ferrocyanure de potassium

$K_4Fe(CN)_6$ et de nitrate d'ammonium NH_4NO_3 (solution de Janet).

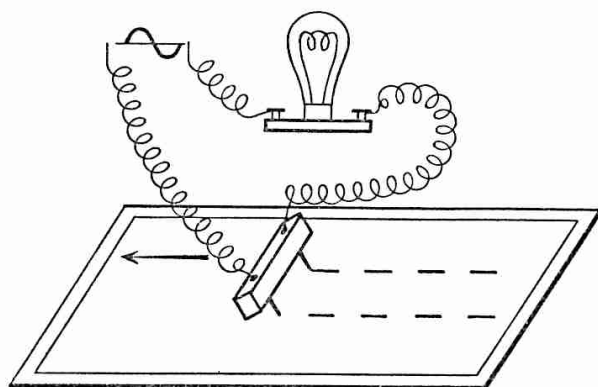


FIG. 147.

Une feuille de papier filtre trempée dans cette solution est placée sur une plaque de verre (fig. 147). Deux pointes de fer reliées au secteur sont déplacées rapidement sur le papier.

En courant continu l'anode seule trace un trait bleu : c'est que l'anion NO_3^- du nitrate, qui y est déchargé, oxyde le fer à l'état d'ion ferrique Fe^{3+} , lequel donne

avec le ferrocyanure de potassium la coloration bleue intense du ferrocyanure ferrique (bleu de Prusse). A la cathode, l'ion NH_4^+ , en se déchargeant, fournit le mélange réducteur $NH_3 + \frac{1}{2} H_2$, qui n'agit pas sur le fer.

En courant alternatif, les électrodes tracent deux traits bleus discontinus disposés en chicane, chaque pointe jouant alternativement le rôle d'anode. Si l'on applique le papier sur un cylindre tournant d'un mouvement uniforme, la fréquence du courant est déterminée d'après le nombre de traits tracés et le nombre de tours par seconde du cylindre tournant. Ce dispositif nous donne le principe d'un fréquencesmètre.

b) L'électrolyte est une solution de phosphate monoammonique $(NH_4)H_2PO_4$; une électrode est en plomb, l'autre en aluminium.

En courant continu, lorsque l'aluminium est anode, il est oxydé à l'état d'oxyde d'aluminium Al_2O_3 ; celui-ci étant un isolant, le voltamètre a une grande résistance et l'intensité du courant est très faible. Par contre, lorsque l'aluminium est cathode, il n'est pas altéré tandis que l'oxydation du plomb de l'anode donne des oxydes relativement conducteurs, de sorte que le courant est plus intense.

En courant alternatif, le courant ne passe pratiquement que pour l'alternance où le plomb est anode. Ce dispositif donne le principe d'un redresseur électrolytique; toutefois, par suite de l'inertie du phénomène, il ne fonctionne que pour les basses fréquences.

17-6. Phénomènes électromagnétiques en courant alternatif.

Les lois de l'électromagnétisme, en particulier les lois de Biot et Savart et de Laplace, la loi fondamentale de l'induction et toutes leurs conséquences, sont applicables aux courants alternatifs dans la mesure

où l'on peut négliger (12-3) les phénomènes de propagation, ce qui est pratiquement toujours le cas pour les basses fréquences.

1° Induction magnétique créée par un courant alternatif.

Une bobine parcourue par un courant alternatif de fréquence N ,

$$i = I_m \cos \omega t = I\sqrt{2} \cos 2\pi Nt,$$

crée en tout point de l'espace une induction magnétique $\vec{b}$ de direction constante dont le module,

$$b = B_m \cos \omega t,$$

est proportionnel à i ; par suite b est une fonction sinusoïdale de même fréquence et de même phase que le courant.

Par exemple, à l'intérieur d'un solénoïde très long (3-4, 3°), l'induction, parallèle à l'axe de la bobine, est

$$b = \mu_0 n i = \mu_0 n I_m \cos \omega t = B_m \cos \omega t;$$

sa valeur maximale est

$$B_m = \mu_0 n I_m,$$

sa valeur efficace,

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2} B_m = \mu_0 n \frac{\sqrt{2}}{2} I_m = \mu_0 n I.$$

Il faut cependant revenir sur une restriction déjà faite (12-3 et 17-3). Une force électromotrice sinusoïdale ne produit pas un courant sinusoïdal dans une bobine à noyau de fer du fait que la perméabilité relative μ du fer, et par suite l'inductance propre L de la bobine, ne sont pas définies. En pratique toutefois, on peut prendre pour μ et L des valeurs moyennes lorsque le fer est loin de la saturation dans les conditions d'emploi; le courant i est alors sensiblement sinusoïdal. Il n'en est plus de même lorsqu'on approche de la saturation: on obtient, à partir d'une force électromotrice sinusoïdale, un courant riche en harmoniques et il en est de même pour l'induction produite en un point de l'espace.

Les courants alternatifs, étant des courants variables, permettent d'obtenir des forces électromotrices alternatives d'induction de même fréquence. En effet, considérons un circuit C' (induit) placé au voisinage d'un circuit C (inducteur) parcouru par le courant

$$i = I_m \cos \omega t = I\sqrt{2} \cos \omega t.$$

C' est traversé à chaque instant par un flux d'induction magnétique φ de même fréquence que le courant i et en phase avec lui,

$$\varphi = \Phi_m \cos \omega t = \Phi\sqrt{2} \cos \omega t;$$

il est donc le siège de la force électromotrice sinusoïdale

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -\Phi\omega\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \Phi\omega\sqrt{2}\sin\omega t,$$

en quadrature avec φ et i . Nous voyons la possibilité d'obtenir, à partir d'une force électromotrice alternative dans un circuit, une force électromotrice alternative de même fréquence dans un second circuit; c'est, très simplifié, le principe des transformateurs.

Du fer doux placé dans une induction magnétique B s'aimante (11-11); l'aimantation $\mathcal{J}$ a le sens de B et elle est, *en première approximation*, proportionnelle à B . Comme l'excitation coercitive du fer doux est très faible, l'aimantation s'annule pratiquement avec l'induction et change de sens avec elle. Il en résulte que l'action d'un pôle d'électro-aimant sur une pièce de fer doux est une force d'attraction quel que soit le sens du courant; cette force d'attraction (force portante) étant sensiblement proportionnelle à B et à $\mathcal{J}$ (elle-même proportionnelle à B) est donc proportionnelle au carré de B , donc de la forme $f = kB^2$. Si l'électro-aimant est alimenté en courant alternatif, la pièce de fer doux subit donc une force d'attraction variable, de la forme

$$f = kb^2 = F \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} F(1 + \cos 2\omega t),$$

qui nous montre que *la valeur moyenne de la force n'est pas nulle* et que son module varie autour de la valeur moyenne avec une fréquence $N' = 2N$ double de celle du courant.

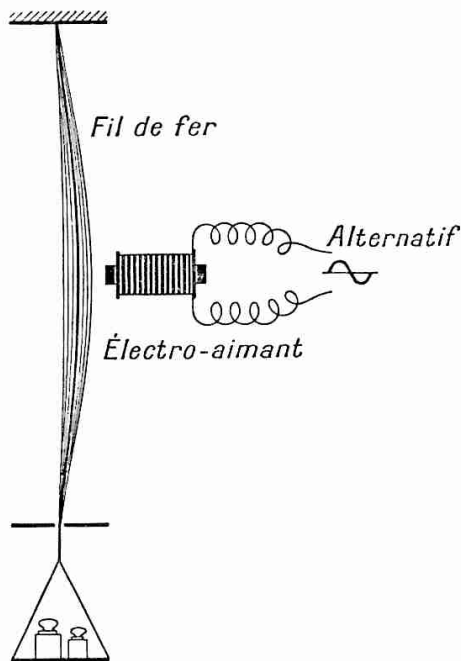


FIG. 148.

Réalisons l'expérience représentée par la figure 148. Un électro-aimant à noyau de fer est placé vers le milieu d'un fil de fer qui constitue une corde vibrante dont on peut faire varier la fréquence en modifiant sa tension. On constate en courant continu que la corde est attirée par le pôle de l'électro-aimant qui est en regard. Il en est de même en courant alternatif lorsque la tension du fil est quelconque mais, pour une tension convenable, donc pour une certaine fréquence propre N' , la corde vibre en un fuseau avec une forte amplitude. Il y a alors *résonance*, N' étant égale à la fréquence de la force d'attrac-

tion, donc égale au double de la fréquence du courant, $N' = 2N$. Ce dispositif nous donne le principe du *fréquencemètre à corde*.

Un fréquencesmètre industriel (fig. 149) comporte un certain nombre de lames d'acier de longueurs différentes, encastrées à une extrémité,

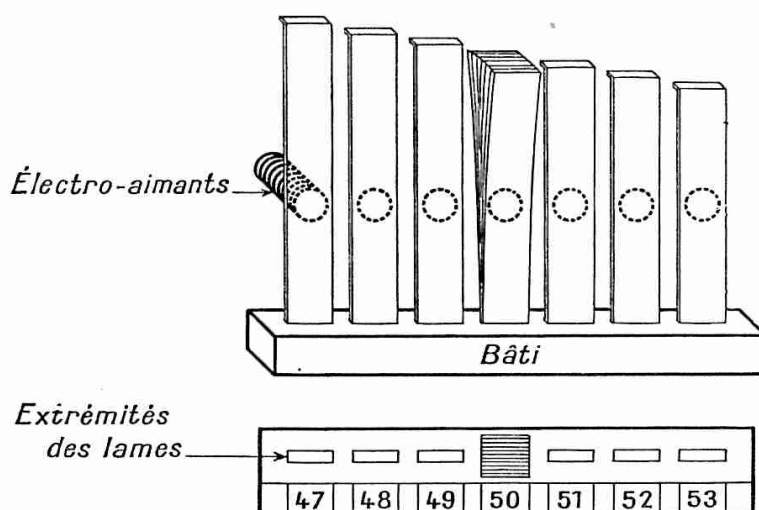


FIG. 149.

placées devant des électro-aimants parcourus par le courant alternatif à étudier. Les fréquences de courant (égales à la moitié de celles des lames) sont indiquées sur les lames, celle qui se met à vibrer fortement donne la fréquence cherchée.

2° Action d'une induction magnétique constante sur un courant alternatif.

Considérons un élément de courant parcouru par un courant sinusoïdal i , de fréquence N , placé dans une induction constante B . L'application de la loi de Laplace montre que cet élément est soumis à une force de direction constante dont le module, proportionnel à i , varie suivant une loi sinusoïdale avec la fréquence du courant; elle est donc de la forme

$$f = F_m \cos \omega t.$$

Dans le cas particulier où l'élément de longueur dl est normal à B , nous avons

$$df = Bi \, dl = B \, dl \, I_m \cos \omega t.$$

Si un circuit est placé dans une induction constante en chaque point (elle n'est cependant pas forcément uniforme), les forces électromagnétiques telles que df , appliquées aux différents éléments du circuit, ont toutes la même fréquence et la même phase, celles du courant.

On conçoit que les phénomènes observés soient particulièrement intéressants lorsque le circuit ou la partie de circuit est susceptible d'osciller.

a) *Première expérience* (fig. 150).

On utilise une lampe à filament de carbone parce que celui-ci peut vibrer avec une amplitude assez grande; ses oscillations sont d'autre part assez peu amorties, il suffit de secouer la lampe pour s'en rendre compte.

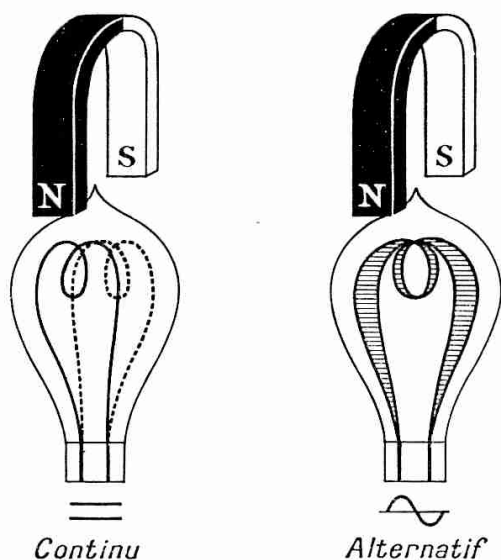


FIG. 150.

Approchons de la lampe, alimentée en courant continu, un aimant en U convenablement orienté, le filament subit une déviation; celle-ci change de sens si l'on change le sens du courant sans déplacer l'aimant.

En alternatif, le filament vibre et prend l'apparence d'un ruban lumineux par suite de la persistance des impressions lumineuses sur la rétine. La fréquence N des vibrations est celle du courant, leur amplitude est d'autant plus grande

que la fréquence propre N_0 du filament est plus voisine de N . Pour $N = N_0$ l'amplitude des oscillations est maximale, il y a *résonance*. Si l'on dispose d'un certain nombre de lampes différentes, on peut arriver à en trouver une pour laquelle le filament vibrant touche la paroi de l'ampoule, la condition de résonance est alors à peu près réalisée.

b) *Seconde expérience* (fig. 151).

On dispose un aimant en U de façon que l'induction dans son entrefer soit normale à un fil de cuivre tendu parcouru par un courant alternatif.

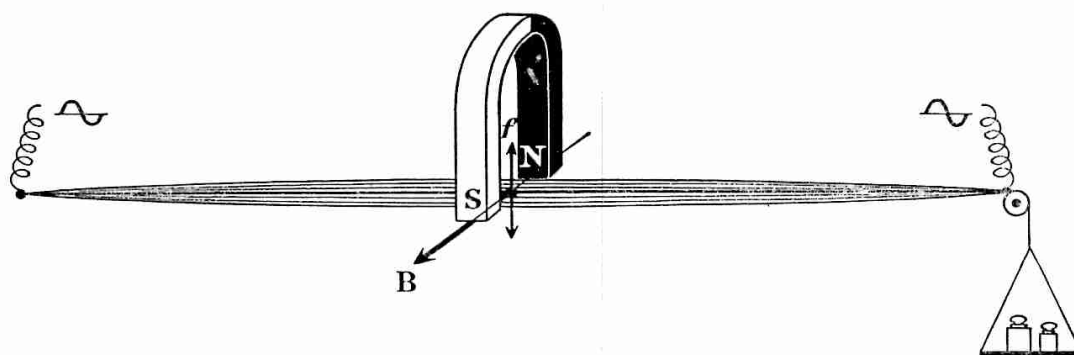


FIG. 151.

Pour une tension convenable du fil, celui-ci vibre fortement en un fuseau dans un plan normal à l'induction. La fréquence propre N_0 du fil est alors égale à celle de la force électromagnétique, donc à celle du courant, il y a *résonance*.

Exercices.**Exercice 28.** — Calculer l'intensité efficace du courant périodique

$$i = I_0 + I_1 \cos \omega t.$$

On a

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T (I_0 + I_1 \cos \omega t)^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_0^T I_0^2 dt + 2I_0 I_1 \int_0^T \cos \omega t dt + I_1^2 \int_0^T \cos^2 \omega t dt \right), \\ I^2 &= I_0^2 + \frac{1}{2} I_1^2; \quad I = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2} I_1^2}. \end{aligned}$$

Exercice 29. — Calculer l'intensité maximale I_m et l'intensité efficace I du courant

$$i = I_1 \cos \omega t + I_2 \sin \omega t.$$

 i est une fonction sinusoïdale de pulsation ω . Posons en effet

$$i = I_1 \cos \omega t + I_2 \sin \omega t \equiv I_m \cos (\omega t + \varphi) = I_m (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi).$$

Nous avons par identification

$$I_1 = I_m \cos \varphi \quad \text{et} \quad I_2 = -I_m \sin \varphi,$$

d'où

$$I_m = \sqrt{I_1^2 + I_2^2},$$

et

$$I^2 = \frac{1}{2} I_m^2 = \frac{1}{2} (I_1^2 + I_2^2); \quad I = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{I_1^2 + I_2^2}.$$

Exercice 30. — On considère un galvanomètre à cadre mobile; on appellera J le moment d'inertie du cadre par rapport au fil de suspension, C le couple de rappel par radian, F le coefficient d'amortissement mécanique et électrique.

L'équation du mouvement du cadre est

$$(1) \quad J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + F \frac{d\theta}{dt} + C\theta = Ai,$$

où i désigne l'intensité du courant qui traverse le galvanomètre.1° Établir l'équation (1). Expliciter les coefficients F et A .2° On envoie dans le galvanomètre un courant sinusoïdal d'intensité $i = I_m \cos \omega t$, où I_m et ω sont connus. L'équation (1) admet une solution particulière sinusoïdale

$$\theta = \theta_m \cos (\omega t + \varphi).$$

Cette solution est la seule que l'on considère ici; autrement dit, on ne s'occupe pas de la période initiale transitoire où le mouvement du cadre n'est pas sinusoïdal. Calculer θ_m .

3° On appellera θ_0 la valeur de θ_m pour $\omega = 0$. Exprimer $\frac{\theta_m}{\theta_0}$ en fonction de $\frac{\omega}{\omega_0}$, où $\omega_0^2 = \frac{C}{J}$. Tracer les courbes de réponse donnant $\frac{\theta_m}{\theta_0}$ en fonction de $\frac{\omega}{\omega_0}$ pour deux valeurs de $\alpha = \frac{F^2}{CJ}$:

$$\alpha = 0,04 \quad \text{et} \quad \alpha = 0,4.$$

4° On appellera Θ_0 la valeur de θ_m pour $\omega = \omega_0$. Pour quelle valeur de α a-t-on $\Theta_0 = \theta_0$? Tracer la courbe de réponse correspondante.

5° Tracer la courbe de réponse correspondant à $\alpha = 2$. Étudier en détail les variations de $\frac{\theta_m}{\theta_0}$ en fonction de $\frac{\omega}{\omega_0}$ au voisinage de $\frac{\omega}{\omega_0} = 0$.

6° On veut que l'amplitude θ_m soit aussi constante que possible pour I_m donné et $0 < \omega < \frac{\omega_0}{2}$. Parmi les quatre valeurs de α envisagées ci-dessus, laquelle faut-il choisir? Quel usage peut-on faire d'un appareil possédant cette caractéristique?

1° C'est une question de cours (16-4). Rappelons que $\Lambda = \Phi_0 = \text{NSB}$, Φ_0 étant le flux d'induction maximal à travers le cadre du galvanomètre, et que $F = f + \frac{\Phi_0^2}{R} \simeq \frac{\Phi_0^2}{R}$, f étant le facteur correspondant aux frottements fluides (facteur mécanique) et $\frac{\Phi_0^2}{R}$, prépondérant, correspondant au phénomène d'induction (facteur électrique d'amortissement).

2° L'intégrale de l'équation (1) est la somme de deux fonctions :

La première est l'intégrale générale de l'équation sans second membre, elle correspond au mouvement du cadre sans l'intervention du couple $\Phi_0 i = \Phi_0 I_m \cos \omega t$. Suivant le signe du discriminant de l'équation caractéristique, ce mouvement est oscillatoire amorti (les *oscillations* sont dites *libres*) ou apériodique. De toute façon, ce mouvement, étant amorti, n'intervient que dans une brève phase initiale.

La seconde est l'intégrale particulière,

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi),$$

de l'équation avec second membre; elle correspond aux oscillations forcées du cadre, oscillations d'amplitude constante θ_m dont la pulsation ω est celle du courant (celle du couple $\Phi_0 i$).

Pour déterminer l'amplitude maximale θ_m , utilisons les représentations complexes (i) et (θ) des fonctions sinusoïdales i et θ de même pulsation. Nous avons

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = j\omega(i); \quad \left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = -\omega^2(i).$$

Par suite l'équation (1) s'écrit

$$(\theta) (C - J\omega^2 - jF\omega) = \Phi_0(i);$$

l'expression de l'égalité des modules des deux membres nous donne

$$\theta_m = \frac{\Phi_0 I_m}{\sqrt{F^2 \omega^2 + (C - J\omega^2)^2}},$$

ou, en introduisant la pulsation propre du cadre (celle des oscillations libres non amorties) :

$$\theta_m = \frac{\Phi_0 I_m}{\sqrt{F^2 \omega^2 + J^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}.$$

3° L'élongation correspondant à $\omega = 0$,

$$\theta_0 = \frac{I}{C} \Phi_0 I_m = \frac{\Phi_0 I_m}{J \omega_0^2},$$

est la déviation constante produite par un courant continu d'intensité I_m .

Nous avons, en posant

$$\alpha = \frac{F^2}{CJ}, \quad y = \frac{\theta_m}{\theta_0} \quad \text{et} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0};$$

$$y = \frac{\theta_m}{\theta_0} = \sqrt{\frac{J^2 \omega_0^4}{F^2 \omega^2 + J^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} = \frac{I}{\sqrt{\alpha \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}} = \frac{I}{\sqrt{\alpha x^2 + (1 - x^2)^2}}.$$

Nous avons en somme à étudier les courbes $y = f(x)$ suivant les valeurs de α ; les remarques suivantes vont faciliter leur tracé :

Lorsque x tend vers l'infini, y tend vers zéro; les courbes sont donc asymptotes à l'axe Ox .

$y = 1$ pour $x = 0$ quel que soit α . D'autre part la dérivée,

$$\frac{dy}{dx} = x[2(1 - x^2) - \alpha][\alpha x^2 + (1 - x^2)^2]^{-\frac{3}{2}},$$

est nulle pour $x = 0$. Toutes les courbes ont la même tangente, $y = 1$, à leur origine $x = 0$ sur l'axe des ordonnées, point pour lequel $\theta_m = \theta_0$.

Cette dérivée s'annule pour $1 - x_m^2 = \frac{\alpha}{2}$, donc pour $x_m^2 = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

La quantité sous le radical du dénominateur de y est alors minimale et y a la valeur maximale

$$y_M = \frac{2}{\sqrt{\alpha(4 - \alpha)}}.$$

La courbe lieu des maximums de y s'obtient en éliminant α entre les expressions de x_m et de y_M :

$$y_M = \frac{1}{\sqrt{1 - x_m^4}};$$

cette courbe (fig. 152), tangente à la droite $y = 1$ au point $x = 0$, $y = 1$, est asymptote à la droite $x = 1$.

a) Pour $\alpha = 0,04$:

$$x_m^2 = 0,98; \quad x_m = 0,99; \quad y_M = 5.$$

Le maximum, très prononcé, correspond sensiblement à $\omega = \omega_0$. θ_m passe par un maximum pour une valeur de la pulsation ω du courant très voisine de

la pulsation propre ω_0 du cadre. Il y a résonance et *la résonance est aiguë* : cela signifie qu'une faible variation de ω au voisinage de ω_0 entraîne une variation

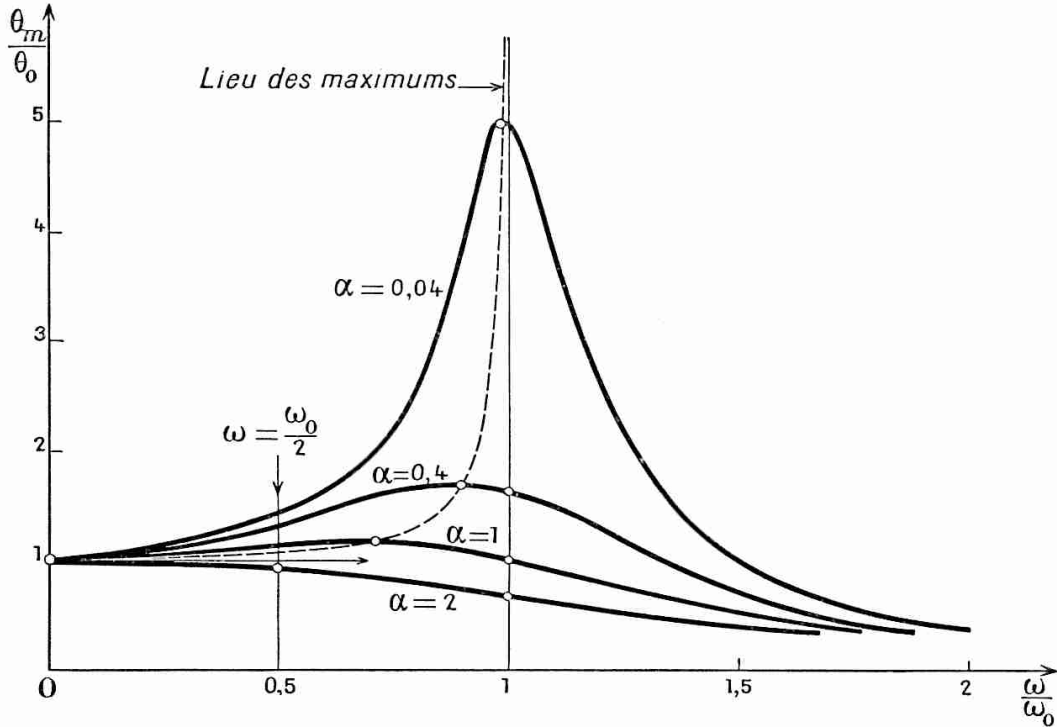


FIG. 152.

considérable de l'amplitude maximale des oscillations forcées du cadre. Remarquons que cela se produit pour une valeur de $\alpha = \frac{F^2}{CJ}$ correspondant à une faible valeur du coefficient d'amortissement.

b) Pour $\alpha = 0,4$:

$$x_m^2 = 0,8; \quad x_m = 0,9; \quad y_M = 1,7.$$

Le maximum de y est beaucoup moins marqué (*résonance floue*) et se produit pour la valeur $\omega = 0,9 \omega_0$ inférieure à ω_0 .

4° Pour $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$:

$$\theta_m = \Theta_0 = \frac{\Phi_0 I_m}{F \omega_0}.$$

Θ_0 est égal à θ_0 pour

$$\frac{\Theta_0}{\theta_0} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 1,$$

donc pour $\alpha = 1$. Les coordonnées du maximum sont alors

$$x_m = 0,71; \quad y_M = 1,15;$$

la résonance est très floue.

5° Pour $\alpha = 2$:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^4}}.$$

Le maximum de y , $y_M = 1$, a lieu pour $x = 0$. On pourrait montrer que les dérivées de y par rapport à x sont nulles, jusqu'à la dérivée troisième incluse, pour $x = 0$. Procédons autrement. Pour une petite valeur ε de x :

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^4}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^4,$$

d'où

$$1 - y \simeq \frac{1}{2} \varepsilon^4.$$

Par suite, l'écart $1 - y$ entre la courbe $y = f(x)$ et sa tangente $y = 1$ au voisinage de $x = 0$ est un infiniment petit du quatrième ordre par rapport à x (autrement dit $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ pour $x = 0$).

Le maximum est donc un méplat; cela signifie que la courbe de réponse correspondant à $\alpha = 2$ est confondue avec la droite $y = 1$ dans un grand intervalle à partir de $x = 0$. Pour $x = 0,5$, donc pour $\omega = \frac{1}{2} \omega_0$, nous trouvons $y = 0,97$.

6° C'est évidemment la valeur $\alpha = 2$ qu'il faut choisir. L'appareil peut alors être utilisé comme oscillographe dans le domaine de ω compris entre 0 et $\frac{\omega_0}{2}$, domaine dans lequel θ_m conserve sensiblement la valeur θ_0 quelle que soit la fréquence du courant.

Du fait que la résonance, extrêmement floue, se situe dans le domaine des faibles fréquences, découle qu'aucune fréquence n'a son amplitude favorisée. On peut obtenir la courbe des oscillations du cadre en formant l'image du spot sur une plaque photographique à l'aide d'un miroir tournant; cette courbe est celle du courant non déformée, à condition toutefois que ce courant ne contienne pas des harmoniques de pulsation supérieure à $\frac{\omega_0}{2}$.

Le résultat précédent, obtenu pour $\alpha = \frac{F^2}{CJ} = 2$, correspond à une grande valeur du coefficient d'amortissement. Ce fait entraîne d'autre part un rapide établissement du régime des oscillations forcées.

CHAPITRE XVIII

LOI D'OHM

EN COURANT ALTERNATIF

POSITION DU PROBLÈME.

MÉTHODES DE CALCUL

18-1. Application de la loi d'Ohm. Le régime sinusoïdal.

Nous considérons entre deux points A et B un circuit plus ou moins compliqué (un réseau) pouvant comporter des résistances non inductives R, des bobines inductives de résistances très faibles (L, R = 0) ou non (L, R) et des condensateurs (C), en série ou en dérivation. A l'instant $t = 0$ pris pour origine des temps on établit entre A et B la différence de potentiel sinusoïdale

$$u = U_m \cos \omega t = U\sqrt{2} \cos \omega t.$$

On se propose de déterminer les intensités dans les différentes branches du circuit et les différences de potentiel aux bornes de ces branches ou des appareils qu'elles comprennent.

Le problème se présente donc comme en courant continu, à ceci près que les intensités et les différences de potentiel sont variables et doivent être définies par des fonctions du temps. Il faut en outre tenir compte des forces électromotrices d'auto-induction et des différences de potentiel aux bornes des condensateurs, condensateurs qui ne peuvent intervenir en continu que lors de leur charge ou de leur décharge (Électricité I, 15-2).

Les lois de l'électrocinétique sont applicables dans ces conditions aux valeurs instantanées (avec la restriction déjà faite, relative au cas d'une bobine à noyau de fer); nous pouvons donc exprimer la loi d'Ohm,

les lois des courants dérivés et, d'une façon plus générale, les lois de Kirchhoff.

Considérons pour le moment **les cas les plus simples d'appareils en série.**

Nous choisissons comme sens positif, pour l'intensité et les chutes de tension, celui qui va de A vers B.

a) *Résistance non inductive* (R) :

$$u_A - u_B = u_1 = Ri.$$

b) *Bobine inductive de résistance nulle* (self L).

Nous avons, e étant la force électromotrice d'auto-induction,

$$u_A - u_B = u_2 = -e = L \frac{di}{dt}.$$

c) *Résistance inductive* (R, L).

$$u_A - u_B = u_3 = u_1 + u_2 = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

d) *Condensateur* (capacité C).

La charge q a le signe de la charge de l'armature A; elle croît algébriquement lorsque l'intensité i est positive, et, par suite,

$$u_A - u_B = u_3 = \frac{q}{C}; \quad i = \frac{dq}{dt},$$

et

$$u_3 = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt.$$

e) *Résistance R, auto-inductance L et capacité C en série* (fig. 153).

$$u = u_1 + u_2 + u_3,$$

d'où

$$(1) \quad Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = U \sqrt{2} \cos \omega t.$$

Nous avons encore, en prenant q pour variable,

$$q = \int i dt; \quad i = \frac{dq}{dt}; \quad \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2},$$

et par suite

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U \sqrt{2} \cos \omega t.$$

Compte tenu des conditions initiales, cette dernière équation détermine q et par suite $i = \frac{dq}{dt}$.

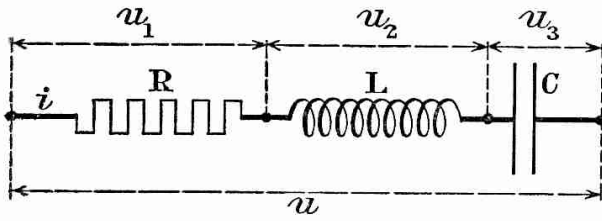


FIG. 153.

Son intégrale générale est la somme de l'intégrale générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation complète.

L'équation sans second membre est identique à celle, déjà étudiée (13-9), de la décharge d'un condensateur dans un circuit inductif. Nous savons que son intégrale générale s'annule au bout d'un temps théoriquement infini suivant un régime apériodique ou un régime oscillatoire amorti.

Une solution particulière de l'équation complète est une fonction sinusoïdale dont la pulsation ω est celle de la tension u ; cela résulte du fait que les dérivées et la primitive d'une fonction sinusoïdale sont des fonctions sinusoïdales de même période. Il en découle que la solution particulière de l'intensité est de la forme

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi).$$

En fait, au bout d'un laps de temps très court, l'intensité qui correspond à l'intégrale générale de l'équation sans second membre est pratiquement nulle, et seule subsiste l'intensité sinusoïdale i .

En résumé, à partir de l'instant où l'on impose une tension sinusoïdale u aux bornes d'un circuit, à un régime transitoire de très courte durée pendant laquelle deux courants sont superposés, succède un régime sinusoïdal.

De même que pour le courant continu nous avons étudié le régime permanent, de même ici nous étudierons le régime sinusoïdal.

Les considérations précédentes nous conduisent à la conclusion suivante :

Lorsqu'une tension sinusoïdale u est établie aux bornes d'un circuit, les intensités dans les branches et les différences de potentiel à leurs bornes et aux bornes des différents appareils sont des fonctions sinusoïdales du temps, dont la période est celle de la tension u .

Si la phase de u est prise comme origine des phases, le but du calcul est de déterminer, pour chaque intensité et pour chaque tension, la valeur efficace (ou la valeur maximale) et la phase. Pour une intensité par exemple, les résultats du calcul se traduiront par l'expression

$$(2) \quad i = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi).$$

Nous allons utiliser plusieurs méthodes de calcul dont l'emploi se justifie par le fait que :

La loi d'Ohm conduit toujours à des expressions linéaires de fonctions sinusoïdales de même période.

Nous nous bornerons à la recherche de la solution particulière (2) de l'équation (1); nous appliquerons pour cela la méthode trigonométrique, celle de Fresnel et celle des représentations complexes.

18-2. Méthode trigonométrique. Impédance Z.

Ayant posé

$$i = I\sqrt{2} \cos (\omega t + \varphi),$$

la méthode trigonométrique consiste simplement à identifier les deux membres de l'équation

$$(1) \quad Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = U\sqrt{2} \cos \omega t.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} i &= I\sqrt{2} (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi), \\ \frac{di}{dt} &= -\omega I\sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi) = -\omega I\sqrt{2} (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi), \\ \int i dt &= \frac{I}{\omega} \sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi) = \frac{I}{\omega} \sqrt{2} (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi); \end{aligned}$$

par suite, en divisant les deux membres de (1) par $\sqrt{2}$ et en mettant $I \cos \omega t$ et $I \sin \omega t$ en facteurs dans le premier membre,

$$\begin{aligned} \left[R \cos \varphi - \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \sin \varphi \right] I \cos \omega t \\ - \left[R \sin \varphi + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \cos \varphi \right] I \sin \omega t = U \cos \omega t. \end{aligned}$$

L'identification se fait aussi bien en écrivant que les coefficients de $\cos \omega t$ et de $\sin \omega t$ sont égaux dans les deux membres qu'en exprimant l'égalité pour les deux valeurs particulières zéro et $\frac{\pi}{2}$ de ωt . De toute façon on obtient les deux relations suivantes qui déterminent I et φ :

$$\begin{aligned} \left[R \cos \varphi - \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \sin \varphi \right] I &= U, \\ \left[R \sin \varphi + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \cos \varphi \right] I &= 0. \end{aligned}$$

La seconde donne, par sa tangente, la phase φ du courant; par élévation au carré et addition membre à membre des deux relations

on obtient l'intensité efficace :

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = -\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}, \quad I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.}$$

Par définition, la grandeur donnée par la relation

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

est l'*impédance* de la branche formée par R, L, C en série pour le courant sinusoïdal de pulsation ω ; R étant la résistance (comme en continu), $L\omega - \frac{1}{C\omega}$ est la *réactance* de la branche (pour la pulsation ω).

Pour que cette relation soit homogène, l'impédance Z et les grandeurs $L\omega$ et $\frac{1}{C\omega}$ qui interviennent dans la réactance, doivent être *homogènes à des résistances*; ces grandeurs s'expriment donc en ohms.

Par suite de la définition de Z nous avons

$$\boxed{U = ZI,}$$

relation qui a la forme de la loi d'Ohm $U = RI$ en continu, mais Z y remplace R, et U et I sont les valeurs efficaces.

Il importe dès maintenant de remarquer que Z dépend non seulement des caractéristiques R, L, C du circuit, mais aussi de la pulsation ω du courant sinusoïdal. Si la tension u est alternative non sinusoïdale, Z a des valeurs différentes pour la fréquence fondamentale et pour ses différents harmoniques; il n'est pas possible de définir une impédance pour un tel courant, le circuit est bien parcouru par un courant alternatif mais celui-ci n'a pas la même forme que la tension. Nous reviendrons sur cette question lorsque nous en ferons une étude plus détaillée.

18-3. Méthode de la représentation vectorielle de Fresnel.

1° Représentation d'une grandeur sinusoïdale par un vecteur tournant.

Ce qui suit s'applique à n'importe quelle grandeur sinusoïdale bien que les notations employées concernent une intensité.

Soit la grandeur sinusoïdale

$$(1) \quad i = I_m \cos(\omega t + \varphi) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi);$$

$\omega t + \varphi$ est la *phase* de i à l'instant t , et φ est sa *phase initiale*.

Prenons un axe orienté $x'Ox$ (fig. 154) et choisissons pour sens positif de rotation dans le plan le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre, sens que nous appelons le sens des avances de phase.

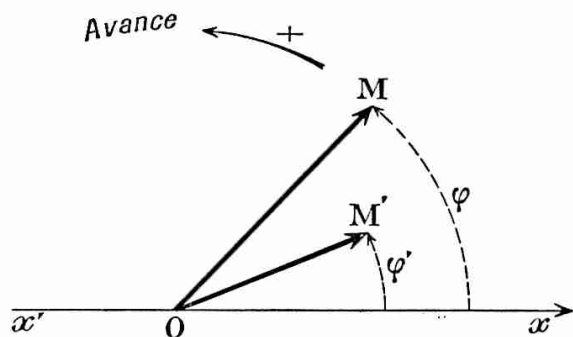


FIG. 154.

Considérons le vecteur $\overrightarrow{OM}$, dont le module représente avec une unité convenable la valeur maximale I_m , tournant avec la vitesse angulaire ω et faisant l'angle φ avec Ox à l'instant origine. Sa projection sur l'axe est donnée à l'instant t par la relation (1) qui définit i . Nous

représentons la grandeur sinusoïdale i par le vecteur tournant $\overrightarrow{OM}$.

La grandeur sinusoïdale de même pulsation ω ,

$$(2) \quad i' = I'_m \cos(\omega t + \varphi') = I' \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi'),$$

est représentée par le vecteur tournant $\overrightarrow{OM'}$ de module I'_m . L'angle

$$(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}) = \varphi - \varphi'$$

est constant et par suite l'ensemble des deux vecteurs tournants forme une figure invariable.

$\varphi - \varphi'$ est la *différence de phase* entre i et i' . Si $\varphi - \varphi'$ est positif nous dirons que i est *en avance* (de phase) sur i' et que i' est *en retard* (de phase) sur i . Si $\varphi - \varphi' = +\frac{\pi}{2}$ (vecteurs rectangulaires), i est *en quadrature avance* sur i' , lequel est *en quadrature retard* sur i . Enfin, si $\varphi - \varphi' = \pm\pi$, i et i' sont *en opposition*.

2° Somme de deux grandeurs sinusoïdales de même pulsation. Vecteur de Fresnel.

Considérons n grandeurs sinusoïdales, $i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_n$, de même pulsation

$$i_k = I_{mk} \cos(\omega t + \varphi_k),$$

et leurs vecteurs représentatifs $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \dots, \overrightarrow{OM_k}, \dots, \overrightarrow{OM_n}$ formant une figure invariable tournant avec la vitesse angulaire ω . Leur résultante

$$(1) \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \dots + \overrightarrow{OM_k} + \dots + \overrightarrow{OM_n}$$

forme elle-même une figure invariable avec l'ensemble des vecteurs. Elle tourne donc avec la vitesse angulaire ω et par suite représente une fonction sinusoïdale

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi) = I \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

de même pulsation ω .

Projetons l'égalité vectorielle (1) sur l'axe $x'Ox$; nous obtenons la relation

$$i = \sum_1^n I_{mk} \cos (\omega t + \varphi_k),$$

qui nous montre que le vecteur résultante $\vec{OM}$ représente la somme des fonctions sinusoïdales et que celle-ci est une fonction sinusoïdale de même pulsation ω .

Pour déterminer cette somme il suffit d'en connaître la valeur maximale I_m , module de $\vec{OM}$, et sa phase initiale φ . Or cette détermination peut être faite sur la figure invariable formée par les vecteurs dans une position quelconque; il est commode de la prendre à l'instant zéro puisque dans cette position l'angle que fait un vecteur avec Ox est précisément la phase initiale φ (nous dirons dorénavant plus simplement la phase).

Nous sommes ainsi conduits à représenter une grandeur sinusoïdale i par un vecteur immobilisé de module I_m faisant l'angle φ avec l'axe polaire Ox et nous appellerons ce vecteur, *vecteur de Fresnel*. Les considérations précédentes nous montrent que :

Le vecteur de Fresnel représentatif d'une somme de grandeurs sinusoïdales de même période est la somme géométrique de vecteurs de Fresnel représentatifs de ces grandeurs.

Ce résultat reste valable si nous prenons pour modules des vecteurs les valeurs efficaces puisque cela revient à remplacer la figure par celle qui lui est homothétique dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$; c'est ce que nous ferons en électricité, où les valeurs efficaces jouent un rôle plus important que les valeurs maximales.

Dans la représentation vectorielle que nous venons de définir nous avons

$$\vec{i} = \sum_0^n \vec{i}_k.$$

Le vecteur $\vec{i}$ peut s'obtenir en appliquant la règle du parallélogramme, mais il est plus commode, en électricité, de former le contour polygonal des vecteurs (fig. 155). On peut avoir à tenir compte dans cette opération

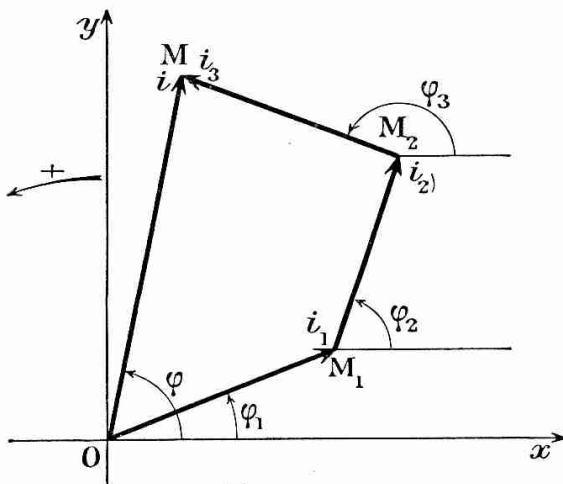


FIG. 155.

des propriétés d'une somme géométrique d'être commutative, associative et distributive.

Pour déterminer i projetons l'égalité vectorielle précédente sur Ox et sur l'axe rectangulaire Oy : nous obtenons

$$I \cos \varphi = \sum_0^n I_k \cos \varphi_k, \quad I \sin \varphi = \sum_0^n I_k \sin \varphi_k;$$

par suite

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum_0^n I_k \sin \varphi_k}{\sum_0^n I_k \cos \varphi_k}, \quad I^2 = \left(\sum_0^n I_k \sin \varphi_k \right)^2 + \left(\sum_0^n I_k \cos \varphi_k \right)^2.$$

Dans le cas de deux grandeurs seulement, on a

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2}{I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2};$$

$$I^2 = (I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2)^2 + (I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2)^2.$$

Les résultats précédents peuvent être obtenus par la méthode trigonométrique en procédant par identification :

$$I \cos (\omega t + \varphi) \equiv \Sigma I_k \cos (\omega t + \varphi_k),$$

en faisant successivement $\omega t = 0$ puis $\omega t = \frac{\pi}{2}$.

3° Dérivées et primitive d'une grandeur sinusoïdale (fig. 156).

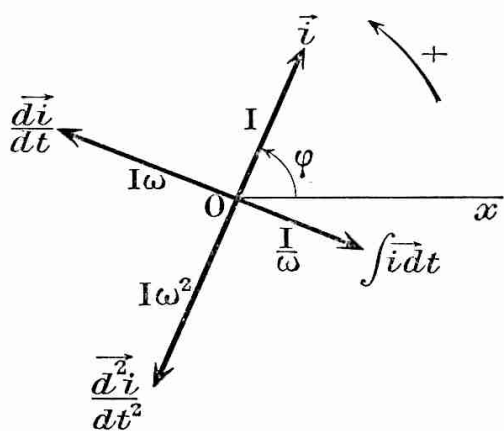


FIG. 156.

Nous avons

$$\begin{aligned} i &= I \sqrt{2} \cos (\omega t + \varphi); \\ \frac{di}{dt} &= \omega I \sqrt{2} \cos \left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2} \right); \\ \frac{d^2i}{dt^2} &= \omega^2 I \sqrt{2} \cos (\omega t + \varphi + \pi) = \omega^2 i; \\ \int i dt &= \frac{I}{\omega} \sqrt{2} \cos \left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Ces relations nous montrent que :

On passe du vecteur représentatif de i à celui de $\frac{di}{dt}$ par une rotation de $\frac{\pi}{2}$

dans le sens des avances et en multipliant le module par ω .

On passe au vecteur représentatif de la primitive par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens des retards et en divisant le module par ω .

Le vecteur $\frac{d\vec{i}}{dt}$ est en quadrature avance sur le vecteur $\vec{i}$.

Les vecteurs $\frac{d^2\vec{i}}{dt^2}$ et $\vec{i}$ sont en opposition.

Le vecteur $\int \vec{i} dt$ est en quadrature retard sur le vecteur $\vec{i}$.

4° Application de la représentation vectorielle au circuit R, L, C en série (fig. 157).

Le vecteur $\vec{u}$ est la résultante des vecteurs tensions

$$\vec{u}_1 = R\vec{i}, \quad \vec{u}_2 = L \frac{d\vec{i}}{dt}, \quad \vec{u}_3 = \frac{1}{C} \int \vec{i} dt,$$

aux bornes de R, L et C. Nous avons

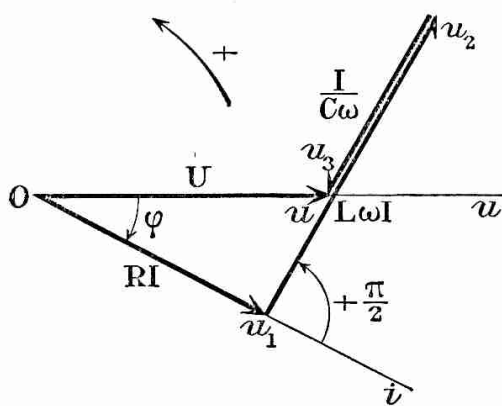


FIG. 157.

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3.$$

u_1 est en phase avec $\vec{i}$ et a pour module RI , $\vec{u}_2$ est en quadrature avance sur $\vec{i}$ et a pour module $L\omega I$, $\vec{u}_3$ est en quadrature retard sur $\vec{i}$ et a pour module $\frac{I}{C\omega}$.

Le diagramme nous montre que la phase φ et l'intensité efficace I de $\vec{i}$ sont définies par

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}; \quad U^2 = \left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right] I^2.$$

Par suite, $U = ZI$, Z étant l'impédance du circuit.

Remarquons dès maintenant que $\vec{i}$ est en retard ou en avance sur $\vec{u}$ suivant que $L\omega$ est supérieur ou inférieur à $\frac{1}{C\omega}$, autrement dit suivant que la réactance $L\omega - \frac{1}{C\omega}$ est positive ou négative.

18-4. Méthode de la représentation complexe. Impédance complexe.

En électricité, pour éviter les confusions nous représentons $\sqrt{-1}$ par j . Considérons de nouveau le vecteur tournant $\vec{OM}$ représentatif de la

fonction sinusoïdale i de valeur maximale $I_m = I\sqrt{2}$ et de phase φ . Plaçons-le dans le plan imaginaire : l'axe Ox est l'axe réel, l'axe Oy est l'axe imaginaire. Les coordonnées du point M sont

$$x = I_m \cos (\omega t + \varphi); \quad y = I_m \sin (\omega t + \varphi).$$

M est l'image de la fonction complexe

$$(i) = I_m [\cos (\omega t + \varphi) + j \sin (\omega t + \varphi)] = I_m e^{j(\omega t + \varphi)} = I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t},$$

représentative de la fonction sinusoïdale i .

Nous n'aurons à considérer que des fonctions sinusoïdales de même période, leurs dérivées et leurs primitives, dans des formes linéaires qui résultent de l'application de la loi d'Ohm. Par suite $e^{j\omega t}$ figure en facteur dans tous les termes des expressions; nous pouvons donc le remplacer partout par 1, ce qui revient à fixer les positions des images à l'instant $t = 0$.

Si d'autre part nous faisons intervenir les valeurs efficaces, nous pourrions simplifier toutes les relations par $\sqrt{2}$, ce qui revient à remplacer les valeurs maximales par les valeurs efficaces.

Nous sommes ainsi conduits à représenter i par le nombre complexe

$$(i) = I(\cos \varphi + j \sin \varphi) = Ie^{j\varphi},$$

dont le module est la valeur efficace I et l'argument φ , la phase de i . La pulsation ω ne figure donc pas dans les représentations complexes que nous utiliserons, mais il est sous-entendu que toutes les fonctions sinusoïdales qu'elles représentent ont la même pulsation.

De cette façon nous transposons dans la représentation complexe les résultats donnés par celle de Fresnel :

1° Addition.

$$i = i_1 + i_2,$$

$$(i) = (i_1) + (i_2) = I_1 e^{j\varphi_1} + I_2 e^{j\varphi_2} = I e^{j\varphi},$$

ou encore

$$I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2 + j(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) = I(\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

L'identification s'effectue en écrivant l'égalité des parties réelles et des coefficients de j . Nous retrouvons ainsi les relations qui déterminent φ et I .

2° Dérivées et primitive.

Nous avons

$$\begin{aligned}(i) &= Ie^{j\tau}; \quad \left(\frac{di}{dt}\right) = \omega Ie^{j\left(\tau + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega Ie^{j\tau}e^{\frac{\pi}{2}} = j\omega(i), \\ \left(\frac{d^2i}{dt^2}\right) &= j\omega\left(\frac{di}{dt}\right) = -\omega^2(i), \\ \left(\int i dt\right) &= \frac{I}{\omega}e^{j\left(\tau - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{I}{\omega}e^{j\tau}e^{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{j}{\omega}(i) = \frac{(i)}{j\omega}.\end{aligned}$$

Les règles données précédemment se transposent donc de la façon suivante dans la représentation complexe :

Pour dériver on multiplie par $j\omega$; la primitive s'obtient en multipliant par $-\frac{j}{\omega}$ (ou en divisant par $j\omega$). La première opération revient bien, dans le plan imaginaire, à une rotation de l'image M de $\frac{\pi}{2}$ autour de O et à une homothétie de rapport ω par rapport à l'origine.

3° Application de la représentation complexe au circuit R, L, C, en série.

Nous avons

$$\begin{aligned}(u_1) &= R(i); \quad (u_2) = L\left(\frac{di}{dt}\right) = jL\omega(i); \\ (u_3) &= \frac{I}{C} \int i dt = -\frac{j}{C\omega}(i);\end{aligned}$$

par suite

$$(u) = (u_1) + (u_2) + (u_3) = \left[R + j\left(L\omega - \frac{I}{C\omega}\right)\right](i) = z(i) = Ze^{j\theta}(i),$$

en posant

$$(1) \quad z = R + j\left(L\omega - \frac{I}{C\omega}\right) = Ze^{j\theta},$$

dont le module est l'impédance Z du circuit et dont l'argument θ est défini par

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{L\omega - \frac{I}{C\omega}}{R}.$$

Nous avons, d'après la relation $(u) = z(i)$,

$$|(u)| = U = |z||i| = ZI,$$

et, en prenant la phase de (u) pour origine des phases, φ étant celle de (i) ,

$$0 = 0 + \varphi,$$

d'où

$$\operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{tg} 0 = -\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R};$$

la phase φ de i est égale à l'argument de z changé de signe.

4° Impédance complexe.

L'expression complexe z définie par la relation (1) du paragraphe précédent est l'impédance complexe du circuit R, L, C , en série. Son introduction conduit à la relation

$$(u) = z(i),$$

qui, au point de vue formel, est semblable à l'expression de la loi d'Ohm, $U = RI$, en courant continu.

Posons

$$z_1 = Re^0 = R, \quad z_2 = jL\omega = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad z_3 = -\frac{j}{C\omega} = \frac{1}{C\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}},$$

z_1, z_2 , et z_3 étant les impédances complexes respectives de la résistance R , de l'inductance L et de la capacité C . Nous avons

$$z = z_1 + z_2 + z_3, \\ (u_1) = z_1(i), \quad (u_2) = z_2(i), \quad u_3 = z_3(i).$$

Ainsi, la forme de la loi d'Ohm est applicable en courant sinusoïdal à condition d'utiliser les impédances complexes et les représentations complexes des tensions et des intensités.

L'impédance complexe d'une résistance non inductive est réduite à une partie réelle R (argument 0 ou $2k\pi$), celle d'une inductance L est une imaginaire pure dont le coefficient de j est positif (argument $+\frac{\pi}{2}$), celle d'une capacité est également une imaginaire pure dont le coefficient de j est négatif (argument $-\frac{\pi}{2}$).

En série les impédances complexes s'ajoutent; par exemple,

$$z_1 + z_2 = R + jL\omega = Ze^{j\theta},$$

avec

$$Z = |z_1 + z_2| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \quad \text{et} \quad \text{tg } \theta = \frac{L\omega}{R};$$

$$z_1 + z_3 = R - j\frac{1}{C\omega} = Ze^{j\theta},$$

avec

$$Z = |z_1 + z_3| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \quad \text{et} \quad \text{tg } \theta = -\frac{1}{RC\omega};$$

$$z_2 + z_3 = j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = Ze^{j\theta},$$

avec

$$Z = \left|L\omega - \frac{1}{C\omega}\right| \quad \text{et} \quad \theta = \pm \frac{\pi}{2};$$

ces résultats sont d'ailleurs des cas particuliers du circuit R, L, C, en série.

Remarquons que, si l'on a bien la relation $U = ZI$ entre valeurs efficaces et impédance, les impédances en série ne s'ajoutent cependant pas puisque l'impédance du circuit est le module d'une somme d'impédances complexes.

Considérons des appareils en dérivation, une résistance R, une inductance L et une capacité C dans trois dérivations par exemple. Nous avons

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 + i_3; & (i) &= (i_1) + (i_2) + (i_3); \\ u &= u_1 = u_2 = u_3 = Ri_1 = L \frac{di_2}{dt} = \frac{1}{C} \int i_3 dt, \\ (u) &= R(i_1) = jL\omega(i_2) = -\frac{j}{C\omega}(i_3), \end{aligned}$$

enfin,

$$(u) = z_1(i_1) = z_2(i_2) = z_3(i_3).$$

Les lois des courants dérivés sont donc applicables avec les représentations complexes. On démontre, comme en courant continu, que si z , définie par la relation

$$(u) = z(i) = z[(i_1) + (i_2) + (i_3)],$$

est l'impédance complexe équivalente aux dérivations, on a

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}, \quad \text{ou} \quad A = A_1 + A_2 + A_3;$$

$A = \frac{1}{z}$ est l'admittance complexe équivalant aux dérivations, elle est égale à la somme des admittances complexes des dérivations.

D'une façon générale, pour étudier un problème de distribution des courants et calculer les tensions dans un réseau en courant alternatif, on applique les lois de Kirchhoff avec les représentations complexes (u), (i) et z . On résout le système d'équations obtenu et l'on explicite les valeurs des impédances complexe; phases et valeurs efficaces s'obtiennent par identification de nombres complexes, ce qui fournit des relations entre modules (entre valeurs efficaces et impédances) et entre les arguments (phases). L'exercice classique suivant est une application de cette méthode; sa résolution par la méthode de représentation vectorielle serait plus délicate.

Exercice.

Exercice 31. — On considère le circuit représenté par la figure 158. On établit entre ses bornes A et B une tension sinusoïdale u de valeur efficace U , de pulsation ω .

Calculer l'intensité i dans la résistance R . A quelle condition doivent satisfaire L et C pour que l'intensité efficace du courant i soit constante et indépendante de R ?

Les notations employées sont indiquées sur la figure 158. Nous utilisons les représentations complexes. Nous avons

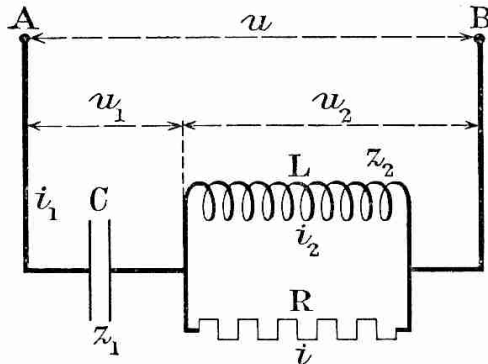


FIG. 158.

$$(u) = (u_1) + (u_2) = z_1(i_1) + R(i),$$

$$R(i) = z_2 i_2,$$

$$(i_1) = (i) + (i_2) = (i) \left(1 + \frac{R}{z_2} \right);$$

par suite

$$(u) = (i) \left[z_1 + R \left(\frac{z_1}{z_2} + 1 \right) \right].$$

(i) est indépendant de R si

$$\frac{z_1}{z_2} + 1 = 0,$$

c'est-à-dire si

$$z_1 + z_2 = -\frac{j}{C\omega} + jL\omega = 0,$$

autrement dit

$$LC\omega^2 = 1.$$

Cette condition étant remplie, nous avons

$$(u) = z_1(i) = -\frac{j}{C\omega} (i) = -z_2(i) = -jL\omega(i);$$

ces relations nous montrent que l'intensité i dans R est en quadrature avance sur u et que sa valeur efficace est

$$I = C\omega U = \frac{U}{L\omega}.$$

18-5. Étude des cas particuliers importants.

Nous nous bornons à donner des résultats déjà acquis par les trois méthodes précédemment étudiées. La phase de la tension u est prise comme origine; on a

$$u = U \sqrt{2} \cos \omega t.$$

1° Résistance non inductive R (résistance pure).

$$\begin{aligned} u &= Ri; \quad (u) = R(i) = z(i); \quad Z = R; \\ i &= I \sqrt{2} \cos \omega t = \frac{U}{R} \sqrt{2} \cos \omega t. \end{aligned}$$

L'intensité est en phase avec la tension et l'on a $U = RI$.

2° Bobine inductive de résistance nulle (self pure L).

$$\begin{aligned} u &= L \frac{di}{dt}; \quad (u) = jL\omega(i); \quad (i) = e^{-j\frac{\pi}{2}} \frac{(u)}{L\omega}; \\ i &= I \sqrt{2} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{U}{L\omega} \sqrt{2} \sin \omega t. \end{aligned}$$

L'intensité est en quadrature retard sur la tension et l'on a $U = ZI$ avec $Z = L\omega$.

Alors que l'impédance d'une résistance est indépendante de la pulsation, celle d'une inductance pure est proportionnelle à la pulsation, donc à la fréquence. Il en résulte que Z est très grande pour les tensions de haute fréquence et que l'intensité efficace est très petite: *une self est un bouchon pour les courants de haute fréquence.*

3° Bobine inductive de résistance non nulle (R, L).

$$\begin{aligned} u &= R + L \frac{di}{dt}; \quad (u) = (R + jL\omega)(i) = Ze^{-j\varphi}(i); \quad (i) = \frac{e^{j\varphi}}{Z}(u); \\ i &= I \sqrt{2} \cos (\omega t + \varphi) = \frac{U}{Z} \sqrt{2} \cos (\omega t + \varphi); \\ Z &= \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{L\omega}{R}. \end{aligned}$$

L'intensité est en retard sur la tension, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$, le retard est d'autant plus grand et se rapproche d'autant plus de $-\frac{\pi}{2}$ (quadrature retard) que $\frac{L}{R}$ et la fréquence sont plus grands. Z croît (I décroît) avec la fréquence, pour les fréquences élevées Z tend vers $L\omega$.

4° Capacité C.

$$u = \frac{1}{C} \int i \, dt; \quad (u) = -\frac{j}{C\omega} (i); \quad (i) = e^{j\frac{\pi}{2}} C\omega (u);$$

$$i = I\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = UC\omega\sqrt{2} \sin \omega t.$$

L'intensité est en quadrature avance sur la tension et l'on a $U = ZI$ avec $Z = \frac{1}{C\omega}$.

L'impédance Z , inversement proportionnelle à la fréquence, est très faible en haute fréquence (I devient très grand).

5° Résistance pure R et capacité C en série.

$$u = Ri + \frac{1}{C} \int i \, dt; \quad (u) = \left(R - \frac{j}{C\omega}\right) (i) = Ze^{-j\varphi} (i); \quad (i) = \frac{e^{j\varphi}}{Z} (u);$$

$$i = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) = \frac{U}{Z} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi);$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{RC\omega}.$$

L'intensité est en avance sur la tension, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, l'avance est d'autant plus réduite que la fréquence est plus élevée. Z décroît (I croît) quand la fréquence croît; pour les très hautes fréquences Z tend vers R (I vers $\frac{U}{R}$) et φ tend vers zéro. Ainsi l'effet de capacité se manifeste d'autant plus que la fréquence est plus basse alors que c'est le contraire pour l'effet de self.

6° Inductance pure et capacité en série (L, C).

$$u = L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \, dt; \quad (u) = j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) (i) = Ze^{\pm j\frac{\pi}{2}} (i);$$

$$i = I\sqrt{2} \cos\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) = \frac{U}{Z} \sqrt{2} \cos\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right),$$

avec

$$Z = \left|L\omega - \frac{1}{C\omega}\right|.$$

Si $L\omega > \frac{1}{C\omega}$, on a $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, l'intensité est en quadrature retard sur la tension, l'effet de self l'emporte sur l'effet de capacité.

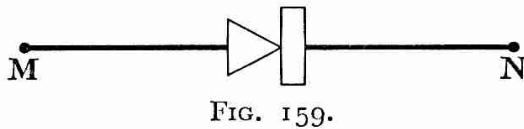
Si $\frac{I}{C\omega} > L\omega$, on a $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, l'intensité est en quadrature avance sur la tension, c'est l'effet de capacité qui l'emporte.

L et C étant donnés, l'effet de self l'emporte pour les hautes fréquences ($Z \simeq L\omega$), l'effet de capacité l'emporte pour les basses fréquences ($Z \simeq \frac{I}{C\omega}$).

Pour $L\omega = \frac{I}{C\omega}$, on aurait $Z = 0$ et l'intensité serait infinie; en fait elle est très grande parce que la résistance de la bobine inductive n'est jamais nulle.

Exercice.

Exercice 32. — Le redresseur envisagé ici, réalisé avec des semi-conducteurs, sera considéré comme *parfait* : il présente, aux différences de potentiel à ses bornes de sens $\overrightarrow{MN}$, une résistance nulle, et, à celles de sens $\overrightarrow{NM}$, une résistance infinie (fig. 159).



Il est placé en série avec un appareil

S, un ampèremètre à cadre mobile A (dont la résistance et l'inductance sont nulles et dont la période propre est beaucoup plus grande que 0,02 seconde) et un ampèremètre thermique B de résistance négligeable (fig. 160). L'ensemble est alimenté par un générateur d'impédance négligeable, dont la force électromotrice

$$e = E\sqrt{2} \sin \omega t$$

a pour valeur efficace $E = 127$ volts, sa fréquence étant $f = 50$ Hz. L'interrupteur K est fermé à l'instant $t = 0$.

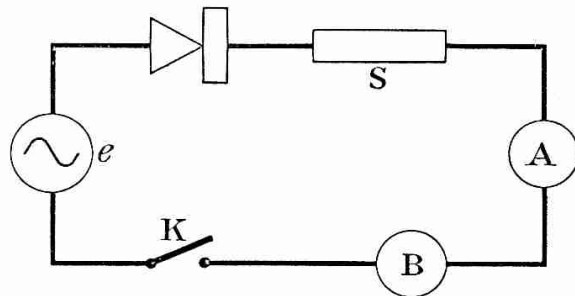


FIG. 160.

Trouver l'expression du courant instantané i et donner les indications des deux ampèremètres dans les quatre cas suivants :

- 1° S est une résistance pure $R = 127 \Omega$.
- 2° S est un récepteur électrochimique de force contre-électromotrice $E' = 127$ volts et de résistance $R = 127 \Omega$.
- 3° S est une inductance pure $L = 0,1$ henry.
- 4° S est un condensateur parfait $C = 1 \mu F$.

Tracer dans chaque cas la courbe représentant, pendant une période, le courant instantané i en fonction du temps et, dans le dernier cas, la courbe représentant la tension v aux bornes du condensateur.

1° La période $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ est divisée en deux alternances : pendant la première, i varie suivant la loi

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E\sqrt{2}}{R} \sin \omega t = I\sqrt{2} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

I étant l'intensité efficace du courant non redressé; pendant la seconde alternance l'intensité est nulle (fig. 161 a).

La période propre du cadre de l'ampèremètre A étant beaucoup plus grande que celle, 0,02 s, du courant, l'ampèremètre indique l'intensité moyenne que

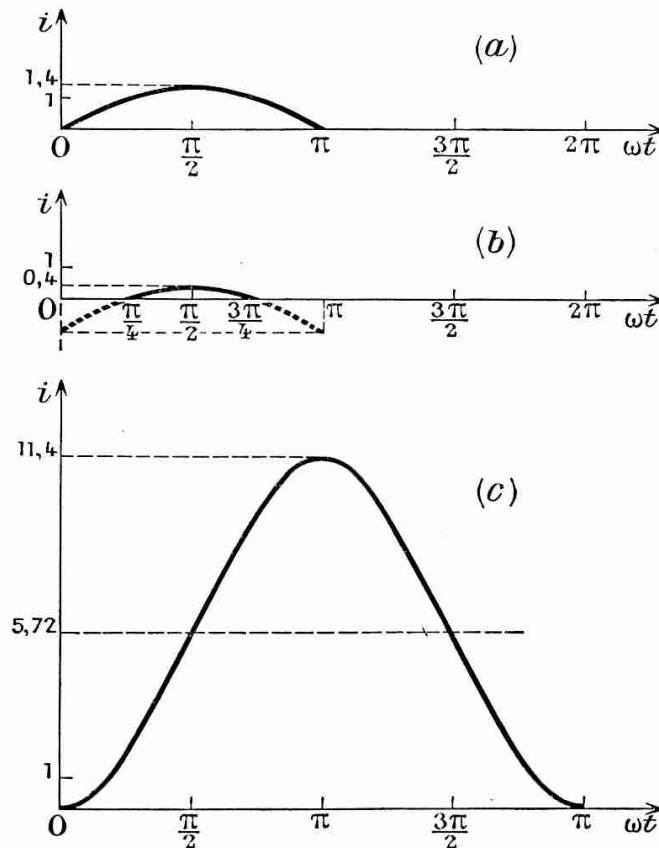


FIG. 161.

l'on obtient en calculant la valeur moyenne I_m de i pendant une période; cette moyenne n'est pas nulle parce qu'une alternance est supprimée. Nous avons

$$I_m = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I\sqrt{2} \sin \omega t \, dt = -\frac{I\sqrt{2}}{2\pi} [\cos \omega t]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} I.$$

L'application donne

$$I = \frac{E}{R} = 1 \text{ A}; \quad I_m = \frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0,45 \text{ A}.$$

L'ampèremètre thermique marque l'intensité efficace I_e du courant redressé,

c'est-à-dire l'intensité du courant continu qui dissiperait dans R la puissance RI_e^2 par effet Joule. Or cette puissance est la moitié de celle, RI^2 , qui correspond aux deux alternances, par suite

$$I_e^2 = \frac{I}{2} I^2; \quad I_e = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707 \text{ A};$$

on vérifierait ce résultat par le calcul direct :

$$I_e^2 = \frac{I}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i^2 dt = \frac{I}{2T} \int_0^T i^2 dt.$$

2° Comme $E = E'$ on a, i étant positif (sinon $i = 0$),

$$i = \frac{E}{R} \sqrt{2} \sin \omega t - \frac{E}{R} = I(\sqrt{2} \sin \omega t - 1).$$

Prenons ωt comme variable; il suffit d'étudier le phénomène au cours d'une période, celle pour laquelle $0 < \omega t < 2\pi$. L'intensité i n'est positive que dans l'intervalle

$$\frac{\pi}{4} < \omega t < \frac{3\pi}{4} \quad (\text{fig. 161 } b).$$

L'ampèremètre A marque la valeur moyenne de l'intensité :

$$I_m = \frac{I\omega}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sqrt{2} \sin \omega t - 1) dt = \frac{I\omega}{2\pi} \left[-\frac{\sqrt{2}}{\omega} \cos \omega t - \frac{1}{\omega} \omega t \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}},$$

$$I_m = I \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} \right) = 0,068 \text{ A}.$$

L'ampèremètre thermique indique l'intensité efficace définie par

$$I_e^2 = \frac{I^2\omega}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sqrt{2} \sin \omega t - 1)^2 dt = \frac{I^2\omega}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (2 - \cos 2\omega t - 2\sqrt{2} \sin \omega t) dt,$$

$$I_e^2 = \frac{I^2\omega}{2\pi} \left[\frac{2}{\omega} \omega t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t + \frac{2\sqrt{2}}{\omega} \cos \omega t \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{I^2}{2} \left(1 - \frac{3}{\pi} \right) = 0,022 \text{ A};$$

$$I_e = 0,15 \text{ A}.$$

3° Nous avons (fig. 161 c)

$$e = E\sqrt{2} \sin \omega t = L \frac{di}{dt},$$

et, comme $i = 0$ à l'instant $t = 0$,

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega} (1 - \cos \omega t).$$

Cette expression est valable pendant toute la période parce qu'elle est toujours positive, par suite

$$\begin{aligned}
 I_m &= \frac{E\sqrt{2}}{2\pi L} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \omega t) dt = \frac{E\sqrt{2}}{2\pi L} \left[\frac{1}{\omega} \omega t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right]_0^{2\pi} = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega} = 5,72 \text{ A.} \\
 I_e^2 &= I_m^2 \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \omega t)^2 dt = \frac{\omega I_m^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos \omega t + \cos^2 \omega t) dt \\
 &= \frac{\omega I_m^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos \omega t + \frac{1}{2} \cos 2 \omega t \right) dt \\
 &= \frac{\omega I_m^2}{2\pi} \left[\frac{3}{2\omega} \omega t - \frac{2}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{4\omega} \sin 2 \omega t \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{\omega I_m^2}{2\pi} \frac{3\pi}{\omega} = \frac{3}{2} I_m^2 = \frac{3E^2}{L^2 \omega^2},
 \end{aligned}$$

d'où

$$I_e = \frac{E\sqrt{3}}{L\omega} = 7,0 \text{ A.}$$

4° Dans le cas où S est un condensateur C, étudions les phénomènes à partir de l'instant $t = 0$ où l'on ferme l'interrupteur K.

Au cours du premier quart de période, ωt variant de zéro à $\frac{\pi}{2}$, la force électromotrice e croît de zéro à $U = E\sqrt{2} = 180$ volts, suivant la loi

$$e = E\sqrt{2} \sin \omega t;$$

le condensateur se charge, la différence de potentiel v à ses bornes est en opposition avec e . La charge du condensateur, donnée par

$$q = Cv = CE\sqrt{2} \sin \omega t = Q \sin \omega t,$$

croît de zéro à $Q = CE\sqrt{2} = 0,18 \text{ mC}$, v croissant de zéro à U (fig. 162 b).

Le courant i , dont le sens est positif, varie suivant la loi (fig. 162 a)

$$i = \frac{dq}{dt} = Q \omega \cos \omega t,$$

en décroissant de $Q\omega = 0,0565 \text{ A}$ à zéro.

Dès lors, à partir de l'instant

$$t = \frac{T}{4} = 0,005 \text{ s,}$$

aucun courant ne parcourt le circuit et le condensateur conserve la charge Q . En effet, d'une part la tension à ses bornes ne dépassera pas U , d'autre part, il ne peut se décharger qu'en fournissant un courant dans le sens

négatif. En résumé les phénomènes se réduisent à ceux que nous venons de décrire pendant le premier quart de période.

Pendant cette durée très courte (0,005 s), l'ampèremètre A, dont la période est très longue par rapport à 0,005 s, est traversé par la quantité d'électricité Q ;

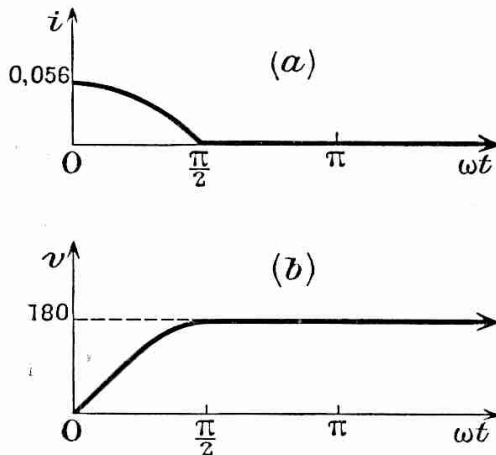


FIG. 162.

il fonctionne donc en balistique, le cadre s'écarte de la position d'équilibre pour y revenir ensuite, l'élongation maximale étant proportionnelle à Q .

Quant à l'ampèremètre B il ne donnera aucune indication même fugitive parce que l'énergie transformée en chaleur dans sa résistance r (très petite par hypothèse),

$$W = r \int_0^{\frac{T}{4}} i^2 dt,$$

ne peut être que très faible; elle est d'autre part libérée pendant un temps très court.

18-6. Circuit R, L, C en série. Résonance. Étude expérimentale.

1° Expressions générales.

Rappelons des résultats essentiels. Comme nous l'avons fait jusqu'ici, nous ne tenons compte que de la solution permanente de l'équation

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = u = U \sqrt{2} \cos \omega t,$$

qui donne, avec les représentations complexes,

$$(u) = z(i) = \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] (i) = Ze^{j\theta}(i),$$

d'où

$$(i) = \frac{1}{Z} e^{-j\theta}(u).$$

Ce résultat, aussi bien que la méthode trigonométrique d'identification ou la construction de Fresnel nous donne

$$i = I \sqrt{2} \cos (\omega t + \varphi),$$

avec

$$I = \frac{U}{Z}; \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{R} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right); \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}.$$

La valeur $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ de la pulsation qui annule la réactance $L\omega - \frac{1}{C\omega}$ est la pulsation propre du circuit, la période correspondante $T_0 = 2\pi \sqrt{LC}$ est sa période propre.

2° Variations de φ et de I en fonction de ω .

Pour des valeurs données de L et de C , l'impédance Z et par suite l'intensité efficace I et la phase φ varient en fonction de ω . Supposons que

nous faisons varier ω de zéro (courant continu) à de très grandes valeurs (hautes fréquences) en passant par la valeur particulière ω_0 . Les diagrammes de la figure 163 et le tableau ci-dessous représentent les variations de φ et de ω .

ω	0	$\nearrow$	ω_0	$\nearrow$	$+\infty$
$\text{tg } \varphi$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
φ	$+\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$
Z	$+\infty$	$\searrow$	R	$\nearrow$	$+\infty$
I	0	$\nearrow$	$\frac{U}{R}$	$\searrow$	0

Pour $\omega = 0$, correspondant à un courant continu, aucun courant ne passe, le condensateur offrant une impédance infinie.

Pour les très basses fréquences (ω petit),

$$Z \simeq \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \simeq \frac{1}{C\omega}; \quad \text{tg } \varphi \simeq \frac{1}{RC\omega},$$

l'inductance L ne joue pratiquement aucun rôle, l'effet de capacité l'emporte. Z est très grand, I très petit et l'intensité i est sensiblement en quadrature avance sur la tension.

Pour les tensions de très haute fréquence on a

$$Z \simeq \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \simeq L\omega, \quad \text{tg } \varphi \simeq -\frac{L\omega}{R};$$

la réactance $\frac{1}{C\omega}$ de la capacité est pratiquement nulle, l'effet de self, très grand, subsiste seul. Z est très grand, I très petit et le courant i , très faible, est sensiblement en quadrature retard sur la tension.

3° Résonance électrique.

Il y a résonance électrique lorsque la pulsation du courant est égale à la pulsation propre du circuit. Pour la résonance :

a) L'impédance Z est minimale et égale à la résistance R du circuit.

b) *L'intensité efficace est maximale et égale à l'intensité $\frac{U}{R}$ d'un courant continu qui passerait dans la résistance R soumise à la tension continue U .*

c) *L'intensité i est en phase avec la tension ($\varphi = 0$).*

Il y a compensation des effets de self et de capacité. Les impédances complexes $z_2 = jL\omega$ et $z_3 = -\frac{j}{C\omega}$ sont alors conjuguées,

$$z_2 + z_3 = 0$$

et l'impédance complexe du circuit se réduit à $z = R$.

Supposons L et C , et par suite ω_0 , déterminés, les caractères de la résonance ne dépendent alors que de la résistance R . Si R est petit, d'une part l'intensité maximale $\frac{U}{R}$

est très grande, d'autre part une variation relative faible $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta N}{N_0}$ de la fréquence à partir de $\omega = \omega_0$ entraîne une diminution relative $\frac{\Delta I}{I}$ considérable de l'intensité efficace; le maximum de I est très pointu (fig. 163, courbe I), on dit que *la résonance est aiguë*. Par contre, si R est grand, l'intensité maximale est faible et le maximum est peu prononcé (fig. 163, courbe II), on dit que *la résonance est floue*.

Ainsi, la résistance R conditionne non seulement la valeur

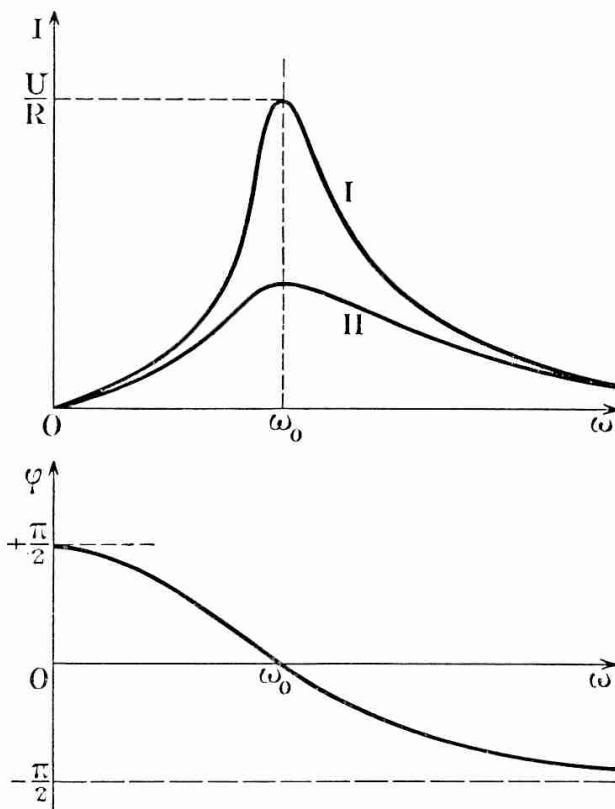


FIG. 163.

maximale de I mais aussi *l'acuité de la résonance*.

4° Surtensions.

Portons notre attention sur les tensions u_2 et u_3 aux bornes de la self (supposée distincte de la résistance) et de la capacité. Utilisons les représentations complexes; nous avons pour la résonance

$$z_2 = -z_3; \quad (u_2) + (u_3) = 0; \quad (u_3) = -(u_2).$$

La tension aux bornes de l'ensemble self-capacité est nulle, les tensions aux bornes de la self et de la capacité sont en opposition et leurs valeurs efficaces sont égales. Nous avons pour leur valeur efficace commune $U' = U_2 = U_3$:

$$U' = L\omega_0 I = \frac{I}{C\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R} U = \frac{I}{RC\omega_0} U = \frac{I}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U.$$

Si R est petit ($\frac{L}{C}$ ne l'étant pas), les tensions efficaces aux bornes de L et de C sont beaucoup plus grandes que U , on les appelle *surtensions*; le rapport $\frac{U'}{U}$ est d'autant plus grand que la résonance est plus aiguë.

Les caractéristiques des réseaux de distribution à basse fréquence sont telles que la fréquence du courant est faible par rapport aux fréquences propres des lignes et des appareils d'utilisation, de sorte que les surtensions ne se produisent pas. Toutefois, si les forces électromotrices des alternateurs n'étaient pas sinusoïdales, la résonance pourrait s'établir sur un harmonique. Les surtensions étant dangereuses pour les isolants, on s'efforce de réduire le plus possible l'importance des harmoniques par rapport à la fréquence fondamentale. Notons que les isolants doivent supporter la différence de potentiel maximale $U_m = U\sqrt{2}$ (avec une marge de sécurité).

Signalons que les phénomènes de résonance jouent un rôle fondamental en radio.

5° Étude expérimentale.

Pour mettre en évidence les effets de self et de capacité et le phénomène de la résonance, la réactance $L\omega$ d'une bobine sans fer est trop petite pour la fréquence 50 Hz. On utilise une bobine à noyau de fer, L est alors mal définie mais, dans les conditions où l'on utilise la bobine, la courbe du courant est assez peu déformée et reste sensiblement une sinusoïde. Avec un noyau de fer mobile on réalise ainsi une inductance variable entre de larges limites.

Les variations de l'intensité efficace sont mises en évidence à l'aide d'un ampèremètre thermique ou simplement en intercalant une lampe à incandescence convenable dans le circuit. Les surtensions sont mesurées avec des voltmètres thermiques. Pour montrer le déphasage entre l'intensité et la tension il est commode d'utiliser *un oscillographe cathodique* donnant sur l'écran fluorescent deux spots parcourant deux sinusoïdes, celle de la tension et celle de l'intensité.

On peut ainsi étudier l'effet de self sans condensateur ($C = \infty$), l'effet de capacité ($L = 0$) et la résonance (circuit R, L, C).

Exercice.

Exercice 33. — Une plaque P, indéformable, de masse m peut se déplacer parallèlement à elle-même suivant une direction $x'x$ normale à son plan (fig. 164); écartée à une distance x de sa position d'équilibre ($x = 0$), elle est rappelée vers cette position par une force $f' = -\frac{x}{s}$; s est la « souplesse » du système élastique ($\frac{1}{s}$ est sa « raideur »).

De plus, par suite de frottements fluides, elle est soumise dans son mouvement à une force f'' dirigée en sens inverse de sa vitesse et proportionnelle à cette vitesse :

$$f'' = -rv = -r \frac{dx}{dt}.$$

1° Écrire l'équation différentielle du mouvement de la plaque sous l'action d'une force f , dirigée suivant $x'x$, et fonction quelconque du temps.

FIG. 164.

2° La force f varie suivant la loi $f = F_0 \cos \omega t$ dont l'expression complexe est $f = F_0 e^{j\omega t}$. Établir la formule $v = V_0 \cos (\omega t - \varphi)$, dont l'expression complexe est $v = V_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} = V e^{j\omega t}$, qui donne la vitesse en régime permanent (oscillations forcées); V est l'amplitude complexe de la vitesse, son module est l'amplitude V_0 , son argument est la phase φ de v (la phase de f étant prise comme origine des phases).

3° Montrer l'analogie de l'expression de v et de celle de l'intensité du courant qui parcourt une portion de circuit de résistance R , d'inductance L et de capacité C entre les extrémités de laquelle on maintient une différence de potentiel $u = U_0 \cos \omega t$ (représentation complexe $u = U_0 e^{j\omega t}$). En déduire une définition de l'impédance mécanique (réelle ou complexe) et l'expression de l'impédance mécanique des différents éléments du système pris seuls ou en combinaison.

4° Donner l'allure des courbes représentant les variations de V_0 et de φ en fonction de ω en signalant les points remarquables.

Application numérique : $m = 0,01$ kg; $r = 10$ kg.s⁻¹; s est tel qu'il faut charger la plaque, supposée horizontale, avec une masse de 400 grammes pour qu'elle s'abaisse de 1 mm. On donne $g = 9,8$ m.s⁻².

1° L'application du principe fondamental de la dynamique donne

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + \frac{x}{s} = f,$$

ou

$$(1) \quad m \frac{dv}{dt} + rv + \frac{1}{s} \int v dt = f.$$

2° f étant une fonction sinusoïdale du temps, lorsque le régime permanent est atteint l'équation du mouvement est une intégrale particulière de l'équation complète; elle correspond aux oscillations forcées de la lame, dont la vitesse est de la forme

$$v = V_0 \cos (\omega t + \varphi).$$

Utilisons les représentations complexes; nous avons

$$\frac{dv}{dt} = j\omega v; \quad \int v dt = -\frac{j}{\omega} v;$$

l'équation (1) s'écrit

$$(2) \quad f = \left[r + j \left(m\omega - \frac{1}{s\omega} \right) \right] v,$$

équation qui détermine le module V_0 et l'argument φ de v :

$$(3) \quad V_0 = \frac{F_0}{\sqrt{r^2 + \left(m\omega - \frac{1}{s\omega}\right)^2}}; \quad (4) \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{r} \left(m\omega - \frac{1}{s\omega}\right).$$

3° L'intensité i dans un circuit R, L, C en série, entre les extrémités duquel on maintient la différence de potentiel $u = U_0 \cos \omega t$, est donnée en régime permanent par une intégrale particulière de l'équation différentielle

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = u,$$

qui donne avec les représentations complexes

$$u = \left[R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] i = zi.$$

z est l'impédance complexe du circuit, son module Z est l'impédance; soit φ' l'argument, nous avons

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi' = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}.$$

Par analogie l'impédance complexe mécanique du système mécanique est

$$z = r + j \left(m\omega - \frac{1}{s\omega} \right),$$

dont le module est l'impédance mécanique

$$Z = \sqrt{r^2 + \left(m\omega - \frac{1}{s\omega} \right)^2}$$

et dont l'argument est défini par

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{1}{r} \left(m\omega - \frac{1}{s\omega} \right).$$

Dès lors, la relation (2) : $f = zv$ définit v par son module $V_0 = \frac{F_0}{Z}$ et par sa phase $\varphi = -\varphi'$.

L'impédance mécanique complexe est la somme des impédances complexes r , $j m\omega$ et $-\frac{j}{s\omega}$ des différents éléments du système et ceci nous conduit à comparer les rôles joués par

$$f \text{ et } u, \quad v \text{ et } i, \quad r \text{ et } R, \quad m \text{ et } L, \quad s \text{ et } C.$$

La pulsation des oscillations libres du système sans frottement est $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{ms}}$, elle joue un rôle analogue à la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ d'un circuit R, L, C .

Faisons apparaître la pulsation propre ω_0 du système dans les expressions (3) et (4); il vient

$$V_0 = \frac{F_0}{\sqrt{r^2 + m^2 \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right)^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{r} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega \right),$$

et par suite le tableau de variations

ω	0	$\nearrow$	ω_0	$\nearrow$	$+\infty$
V_0	0	$\nearrow$	$\frac{F_0}{r}$	$\searrow$	0
$\operatorname{tg} \varphi$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
φ	$+\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

Lorsque ω croît de zéro à l'infini, V_0 passe par le maximum $\frac{F_0}{r}$ pour $\omega = \omega_0$, v est alors en phase avec f . L'expression (2) prend donc la forme $vr = f$: l'impédance mécanique complexe du système se réduit ainsi à son terme réel, celui qui correspond aux frottements fluides.

Application : $\frac{1}{s} = 0,4 \times 9,8 \times 10^3 = 3\,920 \text{ N.m}^{-1}$;

$\omega_0^2 = \frac{s}{m} = 3,92 \cdot 10^4$; $\omega_0 = 198 \text{ s}^{-1} \simeq 200 \text{ s}^{-1}$.

Les courbes $\frac{V_0}{F_0}(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ de la figure 165 *a, b*, ont été construites en portant $\log \omega$ en abscisses avec les valeurs de l'application numérique.

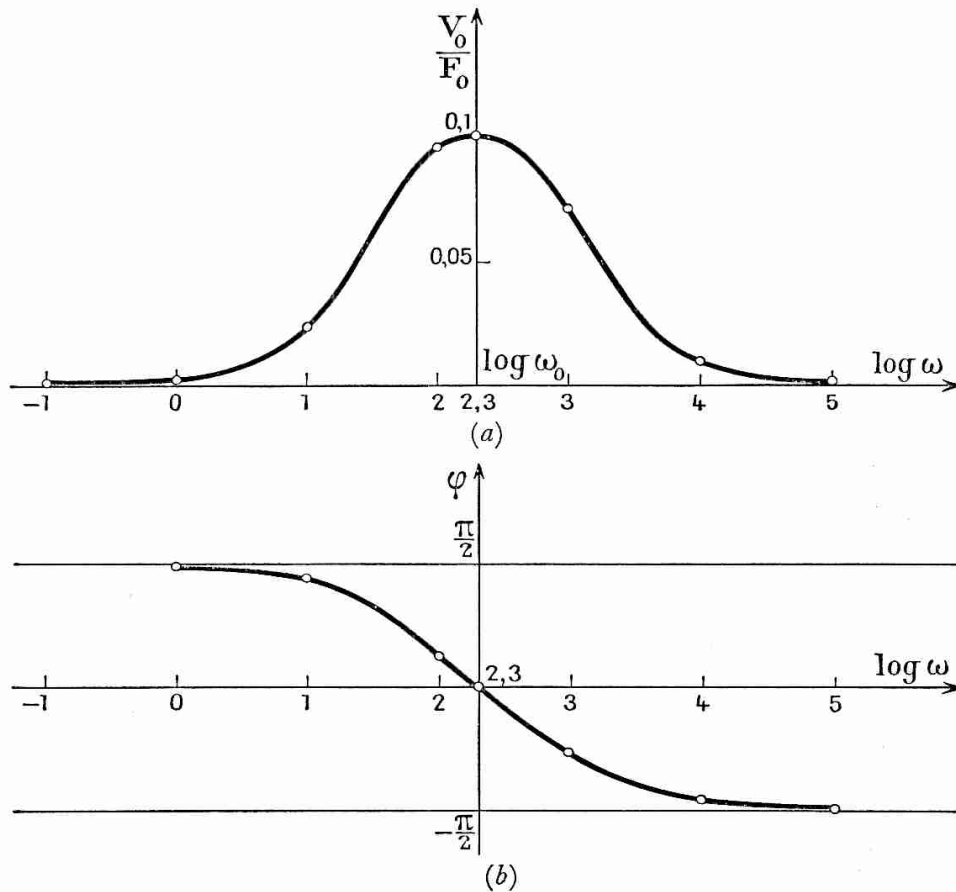


FIG. 165.

18-7. Appareils en dérivation.

Les réseaux de distribution mettent à la disposition des usagers des tensions alternatives de fréquence 50 Hz et de valeurs efficaces sensiblement constantes. Les appareils sont placés en dérivation aux bornes du secteur. Le problème suivant se pose donc :

Aux bornes d'une ligne de transport d'énergie électrique (bornes d'arrivée) sont branchés des appareils d'utilisation, appareils de chauffage, moteurs, ..., définis par leur résistance, leur inductance propre, leur force électromotrice et éventuellement par leur capacité; on se propose de définir les intensités, dans les dérivationes et dans la ligne, par leur phase (rapportée à la tension à l'arrivée) et par leur intensité efficace.

L'application de la méthode de Fresnel se révèle laborieuse dès que le réseau est un peu compliqué; la méthode des représentations imaginaires s'impose alors; comme nous l'avons vu, elle consiste à appliquer les lois de Kirchhoff. Par exemple, pour trois dérivationes en l'absence de moteur, on a

$$(i) = (i_1) + (i_2) + (i_3); \quad (u) = z_1(i_1) = z_2(i_2) = z_3(i_3) = z(i),$$

z étant défini par

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}.$$

On a

$$(i_1) = \frac{(u)}{z_1}, \quad \dots, \quad (i) = \frac{(u)}{z};$$

i_1 est défini par $I_1 = \frac{U}{Z_1}$ et $\varphi_1 = -$ argument de z_1 .

Étudions ici deux problèmes classiques, d'autres exemples étant traités sous forme d'exercices.

1° Circuit-bouchon (fig. 166).

Un alternateur maintient une tension sinusoïdale u de pulsation ω aux bornes de deux dérivationes; la première comporte une bobine de résistance r et d'inductance propre L , la seconde est un condensateur de capacité C . Construire le diagramme de Fresnel qui détermine les intensités i_1 et i_2 dans les dérivationes et l'intensité i fournie par l'alternateur. Établir, avec les représentations complexes, les relations qui déterminent ces mêmes grandeurs.

Étudier particulièrement le cas où la résistance r est petite par rapport à $L\omega$, la condition $LC\omega^2 = 1$ étant satisfaite.

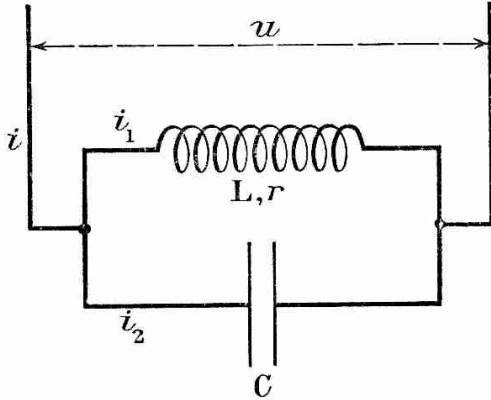


FIG. 166.

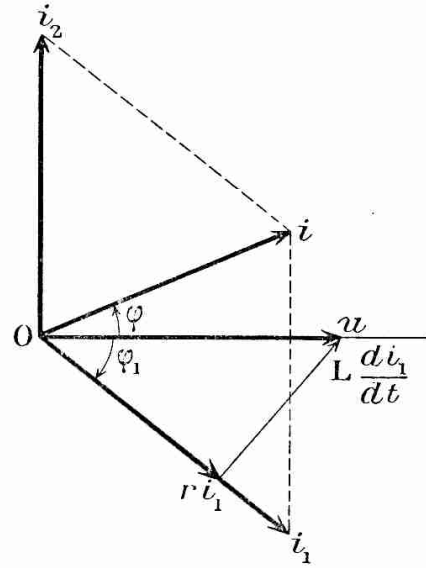


FIG. 167.

Le diagramme de Fresnel (fig. 167) permet de résoudre le problème. Utilisant les représentations complexes, nous avons

$$\begin{aligned}
 (1) \quad i_1 &= \frac{(u)}{z_1} = \frac{(u)}{r + jL\omega}, \\
 (2) \quad i_2 &= \frac{(u)}{z_2} = jC\omega(u), \\
 (3) \quad (i) &= (u) \left(\frac{1}{r + jL\omega} + jC\omega \right) = (u) \left(\frac{r - jL\omega}{r^2 + L^2\omega^2} + jC\omega \right) \\
 &= (u) \frac{r + j[C\omega(r^2 + L^2\omega^2) - L\omega]}{r^2 + L^2\omega^2}.
 \end{aligned}$$

Les relations (1), (2) et (3) nous donnent

$$\begin{aligned}
 (1)' \quad I_1 &= \frac{U}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}}, \quad \text{tg } \varphi_1 = -\frac{L\omega}{r}; \\
 (2)' \quad I_2 &= C\omega U, \quad \varphi_2 = +\frac{\pi}{2}; \\
 (3)' \quad I &= U \frac{\sqrt{r^2 + [C\omega r^2 + L\omega(1 - LC\omega^2)]^2}}{r^2 + L^2\omega^2}, \\
 \text{tg } \varphi &= \frac{1}{r} [C\omega r^2 + L\omega(LC\omega^2 - 1)]
 \end{aligned}$$

Nous avons effectué ces calculs dans le cas général pour montrer qu'un circuit en apparence très simple conduit déjà à des expressions assez compliquées.

Supposons que l'impédance de la self soit égale à celle de la capacité, la condition $LC\omega^2 = 1$ est satisfaite; les formules (3)' deviennent

$$(3)'' \quad I = \frac{r}{L\omega} \frac{I}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}}, \quad \text{tg } \varphi = C\omega r = \frac{r}{L\omega}.$$

Nous aurions, dans le cas idéal où r serait rigoureusement nul,

$$(i_1) = \frac{(u)}{jL\omega} = -jC\omega(u) = -(i_2), \quad \text{et} \quad (i) = 0;$$

l'intensité dans la ligne est nulle, les intensités i_1 et i_2 , de même valeur efficace, sont en opposition. Le circuit L, C en dérivation, appelé *circuit antirésonnant* ou *circuit bouchon*, ne laisse pas passer de courant dont la pulsation est égale à sa pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Si l'on considère le circuit antirésonnant comme autonome et si l'on choisit un sens positif de circulation, on voit que le circuit est parcouru par des *oscillations non amorties* de pulsation ω_0 . La résistance r étant supposée nulle, aucune énergie n'est dissipée par effet Joule; la tension u n'est intervenue qu'au cours d'une durée très courte pour amorcer les oscillations qui ne nécessitent ensuite aucun apport d'énergie ($i = 0$) pour leur entretien. Le circuit est un *circuit oscillant non amorti*.

En fait, r ne peut être que très petit. La condition $LC\omega^2 = 1$ étant toujours satisfaite, supposons r négligeable par rapport aux réactances égales $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$.

Le diagramme correspondant est représenté par la figure 168. Les formules (1)', (2)' et (3)'' deviennent

$$I_1 \simeq \frac{U}{L\omega_0} = C\omega_0 U = U \sqrt{\frac{C}{L}} = I_2;$$

$$\text{tg } \varphi_1 \simeq -\infty; \quad \varphi_1 \simeq -\frac{\pi}{2} = -\varphi_2;$$

$$\begin{aligned} I &= U \frac{r \sqrt{1 + C^2 \omega_0^2 r^2}}{r^2 + L^2 \omega_0^2} \\ &= U \frac{r}{L\omega_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + L^2 \omega_0^2}} \simeq \frac{r}{L\omega_0} U = C\omega_0 r U; \\ \text{tg } \varphi &= C\omega_0 r \simeq 0, \quad \varphi \simeq 0. \end{aligned}$$

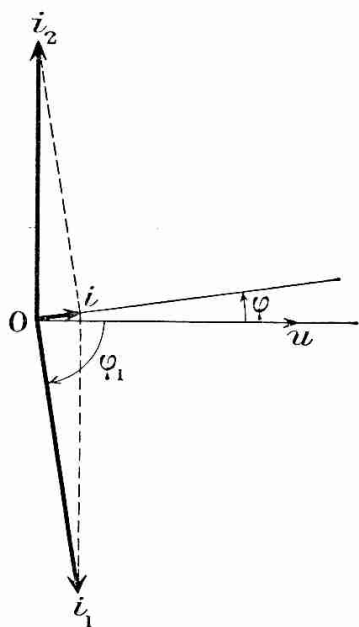


FIG. 168.

L'intensité i dans la ligne, de valeur efficace très faible, est sensiblement en phase avec la tension u . Le circuit L, C se comporte donc comme une très grande résistance $\frac{L\omega_0}{r}$ non inductive et il est le siège d'oscillations de pulsation

ω_0 , qui seraient amorties (par suite de l'effet Joule) si la tension u ne maintenait pas leur amplitude constante par la fourniture du courant i qui compense l'amortissement : *les oscillations sont entretenues*. Leur intensité efficace

$$I' = U \sqrt{\frac{C}{L}}$$

est d'autant plus grande que $\sqrt{\frac{C}{L}}$ est plus grand.

Exercice.

Exercice 34. — Le circuit représenté par la figure 169 est équivalent à un quartz piézoélectrique destiné à la stabilisation d'une horloge radioélectrique; il comporte dans une dérivation la bobine d'auto-inductance L et le condensateur de capacité C , dans l'autre, le condensateur de capacité C_0 . On adoptera les valeurs $C = 0,05$ pF, $C_0 = 8$ pF. On négligera la résistance toujours très petite qui existe dans le circuit.

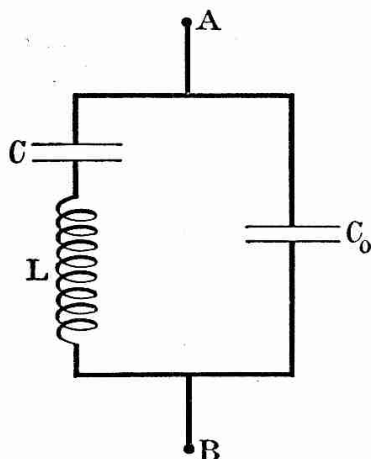


FIG. 169.

1° Donner l'expression du module Z de l'impédance complexe z entre les bornes A et B.

On établit entre les bornes A et B une différence de potentiel sinusoïdale, d'amplitude U et de pulsation ω imposées. Représenter graphiquement la variation de Z en fonction de ω . Montrer que la courbe présente des singularités pour deux pulsations ω_1 et ω_2 (fréquences f_1 et f_2); préciser leur signification physique.

Montrer que pour la fréquence la plus élevée le circuit précédent peut être réduit à l'auto-inductance L et à la capacité C en dérivation. La fréquence correspondante est de 10^5 hertz. En déduire la valeur de L .

2° On fait osciller le circuit sur la fréquence la plus basse, et l'intensité qui le traverse est très grande, mais néanmoins finie (parce que la résistance du circuit n'est pas rigoureusement nulle). L'amplitude U de la tension sinusoïdale maintenue entre les bornes A et B est constante, mais la fréquence f de la source qui le produit est sujette à fluctuations.

Quelle est la variation de Z produite par une fluctuation de la fréquence excitatrice de 1 hertz? En déduire les propriétés stabilisatrices du quartz.

$$1^\circ \quad z_1 = j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \quad \text{et} \quad z_0 = -\frac{j}{C_0\omega}$$

étant les impédances complexes des deux dérivation, l'impédance complexe du circuit entre A et B est, en posant $k = \frac{C}{C_0}$,

$$z = \frac{z_0 z_1}{z_0 + z_1} = \frac{j}{C_0\omega} \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{L\omega - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_0} \right)} = \frac{j}{C_0\omega} \frac{LC\omega^2 - 1}{LC\omega^2 - (1 + k)}.$$

Posons, pour les valeurs de ω qui annulent respectivement le numérateur et

le dénominateur de z ,

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1+k}{LC}} = \omega_1 \sqrt{1+k},$$

d'où

$$Z = |z| = \frac{1}{C_0 \omega} \left| \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega^2 - \omega_2^2} \right| = \frac{1}{2\pi C_0 f} \left| \frac{f^2 - f_1^2}{f^2 - f_2^2} \right|.$$

Pour une tension continue ($\omega = 0$), l'impédance est infinie; le circuit ne laisse pas passer de courant (une fois les condensateurs chargés sous la tension U).

Pour $\omega = \omega_1$, $f = f_1$, l'impédance du circuit est nulle parce que z_1 est nul; la branche LC est en résonance avec la tension dont la fréquence est égale à la fréquence propre $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ de cette branche; tout se passe pratiquement

comme si cette branche existait seule, l'intensité qui la parcourt étant très grande.

Pour $\omega = \omega_2$, $f = f_2$, z est infini, $z_1 = -z_0$ et comme $u = z_1 i_1 = z_0 i_0$, il s'ensuit que $i_1 = -i_0$. L'intensité dans le circuit principal est nulle et les intensités dans les deux branches sont égales et en opposition: le circuit est antirésonnant pour la fréquence f_2 .

Pour construire la courbe $Z(\omega)$ il suffit d'étudier la fonction

$$y = \frac{1}{C_0 \omega} \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega^2 - \omega_2^2}$$

et de la remplacer, dans l'intervalle $\omega_1 < \omega < \omega_2$ où elle est négative, par $|y| = Z$, ce qui revient, dans cet intervalle, à prendre la courbe symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Il en découle que, pour $\omega = \omega_1$, $\frac{dZ}{d\omega}$ subit une discontinuité en changeant de signe; la courbe Z présente donc alors un point anguleux dont les tangentes sont symétriques par rapport à une parallèle à l'axe des ordonnées. Pour déterminer la valeur absolue de la pente de ces tangentes il nous suffit d'appliquer la définition de la dérivée pour la valeur ω_1 ; on trouve

$$\left| \frac{dZ}{d\omega} \right|_1 = \frac{2}{C_0(\omega_2^2 - \omega_1^2)} = \frac{2}{C_0 k \omega_1^2} = \frac{2}{C \omega_1^2} = 2L.$$

Reprenons le circuit fonctionnant sous la tension de pulsation ω_2 , nous avons alors

$$LC\omega_2^2 = 1 + k = 1 + \frac{C}{C_0} = 1 + \frac{1}{160} \simeq 1;$$

or, si nous mettons L et C en parallèle, l'impédance complexe z du circuit ainsi constitué est définie par

$$\frac{1}{z} = j \left(C\omega_2 - \frac{1}{L\omega_2} \right);$$

son module

$$Z = |z| = \frac{L\omega}{LC\omega_2^2 - 1}$$

étant très grand et $\frac{1}{z}$ étant très petit, les impédances complexes des dérivations sont de signes contraires mais de modules très voisins

$$jL\omega \simeq \frac{j}{C\omega}.$$

Il en découle que le circuit L, C est sensiblement antirésonnant pour la fréquence f_2 , comme le circuit étudié LC, C_0 ; cela tient au fait que le circuit L, C est rigoureusement antirésonnant pour la fréquence f_1 , et qu'il l'est encore

pratiquement pour la fréquence f_2 qui est voisine; nous avons en effet

$$f_1 = \frac{f_2}{\sqrt{1+k}} \simeq f_2 \left(1 - \frac{k}{2}\right) = f_2 \left(1 - \frac{1}{80}\right).$$

La donnée $f_2 = 10^5$ hertz nous permet de calculer

$$L = \frac{1+k}{C\omega_2^2} = \frac{1+k}{4\pi^2 C f_2^2} = 51 \text{ henrys},$$

et

$$f_2 - f_1 \simeq \frac{1}{2} k f_2 = \frac{f_2}{80} = 1250.$$

Les résultats ainsi obtenus nous ont permis de tracer la courbe de la figure 170.

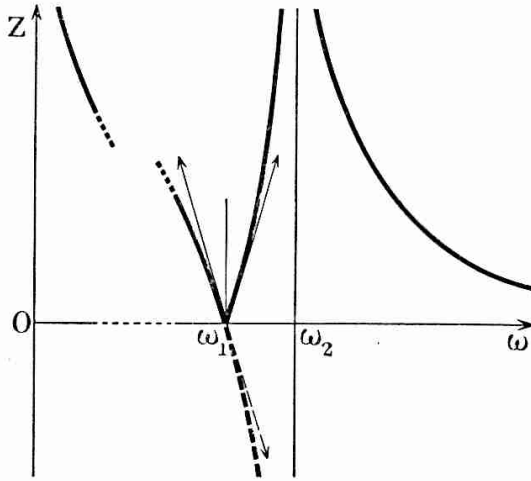


FIG. 170.

2° Supposons que le circuit LC, C_0 oscille sur la fréquence la plus basse f_1 . Au voisinage du point $\omega = \omega_1$, $Z = 0$ (en fait très petit), nous pouvons confondre les deux arcs de la courbe Z avec leurs tangentes de pentes $-2L$ et $+2L$. Une variation $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ de ω au voisinage de ω_1 entraîne l'accroissement ΔZ de Z à partir d'une valeur très petite :

$$\Delta Z = 2L\Delta\omega = 4\pi L\Delta f;$$

pour $\Delta f = \pm 1$ hertz,

$$\Delta Z = 4\pi \times 51 = 640 \Omega.$$

Il en résulte que le circuit, fonctionnant sous une tension efficace

constante U mais de fréquence $f = 10^5 \pm 1$ sujette à de faibles fluctuations, laissera passer une intensité efficace I très grande pour $f = f_1 = 10^5$ alors qu'elle sera très réduite pour des fréquences très voisines. La résonance du circuit est donc très aiguë pour $f = f_1$, le circuit est très sélectif pour cette fréquence.

2° Pont de Wheatstone.

Considérons le montage du pont de Wheatstone alimenté en courant alternatif, z_1, z_2, z_3 et z_4 (fig. 171) étant les impédances complexes des branches. Nous n'avons pas à établir de nouveau la condition d'équilibre du pont, l'application des lois de Kirchhoff avec les représentations complexes conduit à la relation

$$(1) \quad z_1 z_4 = z_2 z_3.$$

Pour réaliser l'équilibre du pont on utilise un galvanomètre associé à un redresseur ou, si la fréquence utilisée est musicale, un téléphone T, le réglage consiste alors à supprimer le son dans l'écouteur téléphonique.

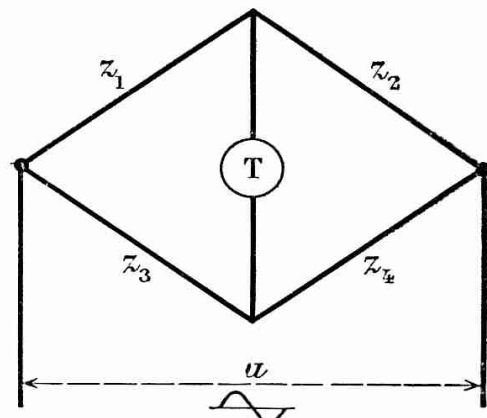


FIG. 171.

La condition (1) exprime en fait deux relations, relation entre les impédances et relation entre les arguments :

$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3, \quad \varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3,$$

ou, ce qui revient au même, égalités des parties réelles et des parties imaginaires pures des deux membres. Si les appareils mis dans les branches sont quelconques, il peut être impossible de satisfaire simultanément aux deux conditions; la première relation (entre les impédances) étant vérifiée, la seconde (entre les arguments) ne l'est pas en général : l'équilibre du pont est alors impossible. Bornons-nous à considérer les cas où il n'y a pas d'appareils en série dans les branches, celles-ci ne contenant que des résistances, selfs et capacités pures.

Les deux cas suivants conduisent par exemple à une impossibilité :

$$z_1 = R, \quad z_4 = R', \quad z_2 = jL\omega, \quad z_3 = jL'\omega;$$

on aurait

$$RR' = -LL'\omega^2.$$

$$z_1 = R, \quad z_4 = R', \quad z_2 = R'', \quad z_3 = jL\omega;$$

on aurait

$$RR' = jLR''\omega.$$

Les cas possibles donnent cependant des applications intéressantes, tout d'abord ceux dont les quatre appareils sont de même nature : les trois montages correspondants permettent la comparaison de résistances ($R_1 R_4 = R_2 R_3$) (ce qui ne présente guère d'intérêt, sauf pour les électrolytes, puisqu'il est possible d'opérer en courant continu), la comparaison de selfs ($L_1 L_4 = L_2 L_3$) et de capacités ($C_1 C_4 = C_2 C_3$).

Parmi d'autres combinaisons signalons la suivante :

$$z_1 = R, \quad z_4 = R', \quad z_2 = jL\omega, \quad z_3 = -\frac{j}{C\omega},$$

l'équilibre du pont donne

$$L = CRR'.$$

Le montage permet de mesurer une inductance propre L à l'aide d'une capacité étalonée et de deux boîtes de résistances étalonées.

Pour une combinaison la relation obtenue est indépendante de la fréquence, il n'est donc pas nécessaire d'utiliser une tension sinusoïdale.

Exercices.

Exercice 35. — On considère le pont de Wheatstone représenté par la figure 172.

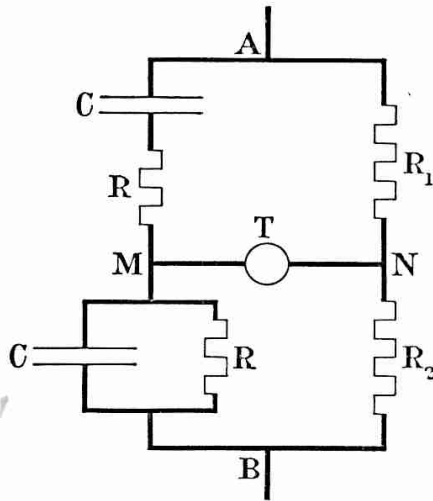


FIG. 172.

Les deux condensateurs ont la même capacité C farads et les deux résistances R sont identiques; R_1 et R_2 sont deux résistances. Les nœuds A et B du pont sont reliés à un générateur de courant alternatif sinusoïdal de pulsation ω . Un écouteur téléphonique est placé entre M et N .

Trouver les conditions d'équilibre du pont. Montrer que ce montage peut être utilisé comme fréquencesmètre.

Application numérique : C est constant et égal à $1 \mu\text{F}$; entre quelles limites doit varier R pour que le montage soit utilisable pour des fréquences variant de 100 à 1 000?

L'impédance complexe z de la branche AM est

$$z = R - \frac{j}{C\omega},$$

celle de la branche MB est donnée par

$$\frac{1}{z'} = \frac{1}{R} + jC\omega,$$

d'où

$$z' = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{R}{1 + jCR\omega}.$$

La condition d'équilibre du pont est $zR_2 = z'R_1$, ou

$$RR_2 - \frac{jR_2}{C\omega} = \frac{RR_1}{1 + jCR\omega},$$

d'où

$$R(2R_2 - R_1) + jR_2 \left(CR^2\omega - \frac{1}{C\omega} \right) = 0.$$

Elle se traduit par les deux conditions

$$R_1 = 2R_2 \quad \text{et} \quad C^2R^2\omega^2 = 1;$$

la première étant satisfaite, l'équilibre du pont permet de déterminer la fréquence f :

$$f = \frac{1}{2\pi CR} = \frac{0,16}{CR}.$$

Pour $C = 10^{-6}\text{F}$, nous avons

$$R = \frac{1,6 \cdot 10^5}{f};$$

f étant compris entre 100 et 1 000, R doit être compris entre 1 600 et 160 ohms.

Exercice 36. — Pont de Wien. Un pont en courant alternatif est constitué suivant la figure 173. Il est alimenté par une tension alternative sinusoïdale de pulsation ω égale à $2\,000 \text{ rd.s}^{-1}$.

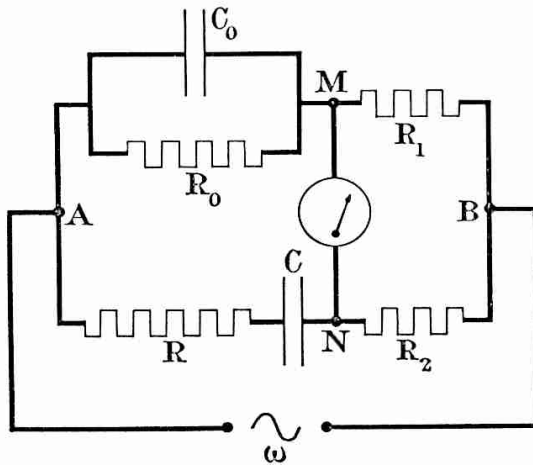


FIG. 173.

1° Calculer les impédances imaginaires des branches AM et AN.

2° L'équilibre du pont étant réalisé (les potentiels des points M et N sont égaux), trouver les expressions de R_0 et de C_0 en fonction de ω , R , C , et du rapport $\frac{R_1}{R_2}$.

3° L'équilibre est obtenu pour $R = 500 \, \Omega$ et $C = 1 \, \mu\text{F}$, la résistance R_1 étant égale à $1\,000 R_2$. Calculer numériquement la capacité C_0 et la résistance à mesurer R_0 .

1° L'impédance imaginaire z de la branche AM est donnée par

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{R_0} + jC_0\omega,$$

d'où

$$z = \frac{R_0}{1 + jC_0R_0\omega}.$$

L'impédance imaginaire de la branche AN est $z' = R - \frac{j}{C\omega}$.

2° La condition d'équilibre du pont est $zR_2 = z'R_1$, d'où

$$\frac{R_0R_2}{1 + jC_0R_0\omega} = RR_1 - \frac{jR_1}{C\omega},$$

$$RR_1 - R_0R_2 + \frac{C_0R_0R_1}{C} + jR_1 \left(C_0R_0\omega - \frac{1}{C\omega} \right),$$

relation qui entraîne, le coefficient de j et le terme réel devant être nuls :

$$C_0R_0 = \frac{1}{CR\omega^2}, \quad \text{et par suite} \quad R_0R_2 = RR_1 + \frac{C_0R_0R_1}{C},$$

d'où

$$R_0 = \frac{R_1R}{R_2} \left(1 + \frac{1}{\omega^2 C^2 R^2} \right), \quad C_0 = \frac{R_2}{R_1} \frac{C}{1 + \omega^2 C^2 R^2}.$$

3° L'application numérique donne

$$R_0 = 10^6 \, \Omega = 1 \, \text{M}\Omega; \quad C_0 = 0,5 \cdot 10^{-9} \, \text{F} = 0,5 \, \text{m}\mu\text{F}.$$

Exercice 37. — Un circuit comprend une résistance non inductive AB, $R = 25 \, \Omega$, une bobine BD de résistance négligeable et d'auto-inductance L et un condensateur DE de capacité $C = 10 \, \mu\text{F}$. On établit aux bornes AE de ce circuit une tension alternative de valeur efficace constante U égale à 100 volts et de fréquence 50 hertz.

1° Calculer L , sachant que l'intensité efficace du courant est $I = 2 \, \text{A}$. Expliquer qualitativement à l'aide de la méthode graphique l'existence de deux valeurs convenables pour L . Dans ce qui suit on adoptera la valeur la plus grande de L .

2° Avec quelle précision L est-il ainsi déterminé si la capacité C est connue à 10^{-3} près en valeur relative, les autres grandeurs étant supposées exactement connues?

3° La tension aux bornes extrêmes A et E étant de la forme

$$u = U \sqrt{2} \cos \omega t,$$

écrire les expressions des valeurs instantanées de l'intensité i du courant et des trois tensions $v_A - v_B$, $v_B - v_D$ et $v_D - v_E$.

4° Calculer la puissance électrique consommée dans chacune des trois parties du circuit total.

1° L'impédance du circuit est

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2};$$

par suite

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \pm \sqrt{\frac{U^2}{I^2} - R^2} = 318 \pm 44.$$

D'où les deux valeurs possibles pour $L\omega$;

$$L_1\omega = 362; \quad L_2\omega = 274,$$

et les deux valeurs possibles pour L :

$$L_1 = 1,15 \text{ H}; \quad L_2 = 0,87 \text{ H}.$$

Le diagramme de la figure 174, bien qu'il ne soit pas à l'échelle, montre que pour la même valeur de l'intensité efficace, $L_1\omega > \frac{1}{C\omega}$ correspond à un courant

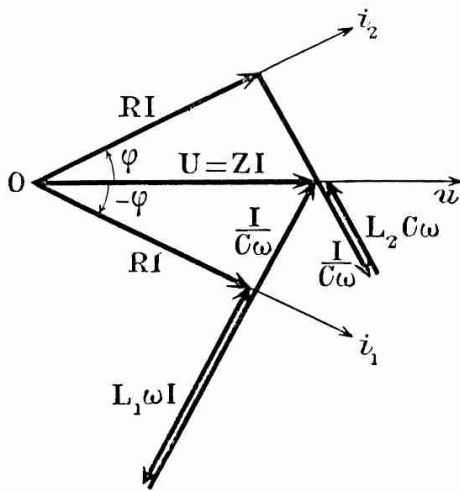


FIG. 174.

présentant un retard de phase φ sur la tension, alors que $L_2\omega < \frac{1}{C\omega}$ correspond à un courant présentant sur la tension une avance de phase égale au même angle φ .

2° Nous avons

$$\omega \Delta L = \frac{\Delta C}{\omega C^2},$$

d'où

$$\Delta L = \frac{1}{\omega^2 C} \frac{\Delta C}{C} \simeq 10^{-2};$$

comme L est de l'ordre de 1 henry :

$$\frac{\Delta L}{L} \simeq 10^{-2}.$$

Nous en tiendrons compte dans la suite pour exprimer numériquement les résultats.

3° Puisque nous adoptons la plus grande valeur de L , l'intensité i dans le circuit est en retard sur la tension de l'angle φ défini par

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{25}{50} = 0,5,$$

par suite $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Dans ce qui suit nous laissons figurer $\sqrt{2}$ en facteur de façon à mettre en évidence les valeurs efficaces. Nous avons

$$\begin{aligned} i &= I \sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi) = \frac{U}{Z} \sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi) = 2 \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right); \\ v_A - v_B &= Ri = RI \sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi) = 50 \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right); \\ v_B - v_D &= L \frac{di}{dt} = L\omega I \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = 725 \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right); \\ v_D - v_E &= \frac{1}{C} \int i dt = \frac{I}{C\omega} \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = 635 \sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

Nous voyons que les tensions efficaces aux bornes de la bobine et du condensateur sont très supérieures à la tension efficace aux bornes du circuit.

4° Seule la résistance consomme la puissance $P = RI^2 = 100$ W, puissance dont nous retrouvons la valeur par l'expression $P = UI \cos \varphi$.

Exercice 38. — On se propose de mesurer une tension sinusoïdale de grande amplitude au moyen d'un diviseur de tension constitué par deux condensateurs C_1 et C_2 (fig. 175). La tension à mesurer

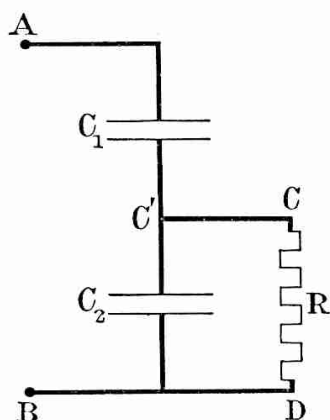


FIG. 175.

$$u_1 = U_1 \cos \omega t,$$

est appliquée aux bornes A et B. L'appareil ou les appareils de mesure, assimilables à une résistance R , sont branchés entre les bornes C et D.

Soit

$$u_2 = U_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

la tension aux bornes C et D.

Calculer U_2 et φ pour $R = 5 \cdot 10^4 \Omega$ et $R = 500 \Omega$, sachant que $U_1 = 10^5 \sqrt{2}$ volts; $C_1 = 0,01 \mu\text{F}$; $C_2 = 9,99 \mu\text{F}$; $\omega = 314$ (on prendra $\omega^2 \simeq 10^5$).

Nous avons fixé les notations sur la figure 176 et choisi les sens des courants pour l'application des lois de Kirchhoff aux représentations complexes. Nous avons

$$\begin{aligned} u_1 &= z_1 i_1 + u_2; & i &= \frac{u_2}{R}; \\ u_2 &= z_1(i_1 - i) = z_2 i_1 - z_2 \frac{u_2}{R}. \end{aligned}$$

Nous tirons de cette dernière relation

$$i_1 = \frac{u_2}{z_2} \left(1 + \frac{z_2}{R}\right);$$

par suite

$$\begin{aligned} u_1 &= z_1 i_1 + u_2 = u_2 \left[\frac{z_1}{z_2} \left(1 + \frac{z_2}{R}\right) + 1 \right], \\ u_2 &= u_1 \frac{R}{\frac{z_1}{z_2} (R + z_2) + R}. \end{aligned}$$

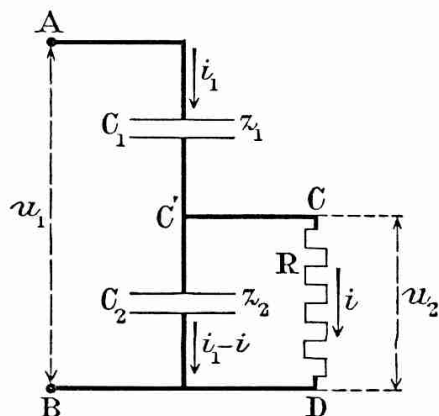


FIG. 176.

Mais nous avons

$$z_1 = -\frac{j}{C_1\omega}; \quad z_2 = -\frac{j}{C_2\omega}; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{C_2}{C_1},$$

par suite

$$u_2 = u_1 \frac{R}{\frac{C_2}{C_1} \left(R - \frac{j}{C_2\omega} \right) + R} = u_1 \frac{RC_1\omega}{R(C_1 + C_2)\omega - j};$$

$$u_2 = u_1 \frac{RC_1\omega}{1 + (C_1 + C_2)^2 R^2 \omega^2} [R(C_1 + C_2)\omega + j],$$

d'où

$$U_2 = U_1 \frac{RC_1\omega \sqrt{(C_1 + C_2)^2 R^2 \omega^2 + 1}}{(C_1 + C_2)^2 R^2 \omega^2 + 1} = U_1 \frac{RC_1\omega}{\sqrt{(C_1 + C_2)^2 R^2 \omega^2 + 1}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{(C_1 + C_2)R\omega}.$$

L'application numérique donne :

a) Pour $R = 5 \cdot 10^4 \Omega$:

$$U_2 = 100 \sqrt{2} = 140 \text{ volts}; \quad \operatorname{tg} \varphi = 6,4 \cdot 10^{-3}; \quad \varphi \simeq 21'.$$

b) Pour $R = 500 \Omega$:

$$U_2 = 84 \sqrt{2} = 120 \text{ volts}; \quad \operatorname{tg} \varphi = 0,64; \quad \varphi \simeq 36^\circ.$$

CHAPITRE XIX

PUISSANCE EN COURANT ALTERNATIF

19-1. Puissance instantanée et puissance moyenne.

Considérons un circuit aux bornes A et B duquel la tension, sinusoïdale, est

$$u = u_A - u_B = U \sqrt{2} \cos \omega t.$$

Choisissons pour sens positif de l'intensité i qui alimente le circuit, celui, de A vers B, pour lequel la tension u est positive. Le cas le plus fréquent dans la pratique étant celui où l'intensité est en retard sur la tension, posons

$$i = I \sqrt{2} \cos (\omega t - \varphi),$$

le déphasage φ étant le plus souvent positif.

Entre les instants t et $t + dt$, la quantité d'électricité $dq = i dt$ transportée par le courant subit la chute de potentiel u , le circuit fournit au milieu extérieur l'énergie

$$dW = ui dt = 2UI \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) dt = UI [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)] dt.$$

La puissance instantanée fournie par le courant est

$$p = \frac{dW}{dt} = UI [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)];$$

elle varie sinusoïdalement autour de la valeur $UI \cos \varphi$ avec la pulsation 2ω (période $\frac{T}{2}$).

La valeur moyenne P de la puissance instantanée, pendant une durée longue par rapport à la période T , diffère peu de celle que l'on calcule pendant un nombre entier de périodes (comparer au calcul de l'intensité efficace, 17-4, 2°), laquelle est égale, puisque p est une fonction périodique de période $\frac{1}{2}T$, à la valeur moyenne au cours de la période T . Cette moyenne comporte pour second terme la valeur moyenne

de $UI \cos (2\omega t - \varphi)$ pendant deux fois sa période $\frac{T}{2}$; cette valeur est nulle. Nous avons

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = UI \cos \varphi + \frac{1}{4\pi} [\sin (2\omega t - \varphi)]_0^T = UI \cos \varphi,$$

d'où l'expression de la puissance moyenne pour un courant sinusoïdal :

$$P = UI \cos \varphi.$$

$P' = UI$ est la *puissance apparente*; on a $P' \leq P$. Pour bien rappeler que P' n'est pas en général la puissance moyenne consommée dans le circuit, on l'exprime en volts $\times$ ampères (VA).

Si l'intensité est en phase avec la tension ($\varphi = 0$), la puissance moyenne est égale à la puissance apparente. Si intensité et tension sont en quadrature ($\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$), la puissance moyenne est nulle : nous voyons qu'un circuit peut être parcouru par un courant alternatif sans cependant consommer d'énergie.

3° Mesure de la puissance moyenne.

Un wattmètre (15-4) est utilisable en courant alternatif. L'inductance propre et la résistance du cadre sont assez faibles pour qu'on puisse admettre qu'aux basses fréquences le couple qui s'exerce sur l'équipage mobile est à chaque instant proportionnel à ui ; sa valeur moyenne est donc proportionnelle à $UI \cos \varphi$. Comme d'autre part la période propre de l'équipage est de l'ordre de quelques secondes, donc égale à plusieurs centaines de fois celle d'un courant industriel, tout se passe comme si le cadre était soumis à un couple constant proportionnel à P . *Le wattmètre, étalonné en courant continu, donne donc directement la puissance moyenne consommée dans le circuit.*

Les mesures de U et de I donnent la puissance apparente $P' = UI$; on en déduit

$$\cos \varphi = \frac{P}{P'}.$$

19-2. Étude de différents cas.

1° Générateur (alternateur). Soit

$$e = E \sqrt{2} \cos \omega t$$

la force électromotrice d'un alternateur, E étant sa force électro-

motrice efficace; soit

$$i = I \sqrt{2} \cos (\omega t - \varphi)$$

l'intensité qu'il débite.

La puissance électrique moyenne fournie par le générateur dans l'ensemble du circuit (y compris le générateur) est

$$P = EI \cos \varphi;$$

elle est, aux pertes d'énergie mécanique près, égale à la puissance mécanique moyenne qu'il faut fournir à l'alternateur pour le faire fonctionner.

La phase φ de i , et par suite $\cos \varphi$, dépendent surtout des caractéristiques du circuit extérieur au générateur (circuit d'utilisation). Dans les conditions de fonctionnement normal la force électromotrice efficace est E et l'intensité efficace supportée est I ; la puissance moyenne fournie par l'alternateur est au plus égale à la puissance apparente $P' = EI$; aussi caractérise-t-on le générateur, non pas par sa puissance P qui dépend du déphasage φ , donc du circuit d'utilisation, mais par sa puissance apparente, que l'on exprime le plus souvent en kilovolt-ampères (kVA).

2° Moteur. Considérons un moteur à courant alternatif fonctionnant sous la tension

$$u = U \sqrt{2} \cos \omega t;$$

il est parcouru par un courant i déphasé de l'angle φ par rapport à u , et la puissance moyenne consommée est encore

$$P = UI \cos \varphi.$$

3° Résistance non inductive.

$$\varphi = 0, \quad \cos \varphi = 1, \quad P = UI = RI^2.$$

La puissance moyenne transformée en chaleur dans une résistance a , en fonction de l'intensité efficace, la même expression qu'en courant continu.

$$4^\circ \text{ Inductance pure. } \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \cos \varphi = 0, \quad P = 0.$$

Une inductance pure ne consomme pas d'énergie.

5° Bobine résistante et inductive.

$$P = UI \cos \varphi = ZI^2 \cos \varphi = RI^2.$$

La puissance consommée résulte uniquement de l'effet Joule dans la résistance.

6° Condensateur. $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $\cos \varphi = 0$, $P = 0$.

Un condensateur ne consomme pas d'énergie.

7° Circuit R, L, C en série.

$$P = UI \cos \varphi = ZI^2 \cos \varphi = RI^2.$$

La seule puissance consommée résulte encore uniquement de l'effet Joule.

19-3. Puissances active et réactive. Courants watté et déwatté.

La puissance consommée dans un circuit, $P = UI \cos \varphi$, est encore appelée *puissance active* (on dit aussi *puissance réelle*).

Pour la commodité du langage et de certains calculs, on fait intervenir une puissance fictive,

$$P_r = UI \sin \varphi,$$

appelée *puissance réactive*. Pour bien rappeler que cette puissance ne correspond à aucun phénomène énergétique dans le circuit on l'exprime en *voltampères réactifs*.

Les puissances apparente P' (en voltampères), active P (en watts) et réactive P_r (en voltampères réactifs) sont liées par la relation

$$P'^2 = P^2 + P_r^2.$$

Nous avons

$$i = I \sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi) = I \sqrt{2} \cos \varphi \cos \omega t + I \sqrt{2} \sin \varphi \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = i_1 + i_2;$$

l'intensité i peut être considérée comme la somme du courant

$$i_1 = I \sqrt{2} \cos \varphi \cos \omega t,$$

appelé *courant watté*, en phase avec la tension u et d'intensité efficace $I_1 = I \cos \varphi$, et du courant

$$i_2 = I \sqrt{2} \sin \varphi \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

appelé *courant déwatté*, en quadrature retard sur la tension u et d'intensité efficace

$$I_2 = I \sin \varphi.$$

La puissance moyenne du courant watté n'est autre que la puissance active P , celle du courant déwatté est nulle; *la puissance réactive est la puissance apparente du courant déwatté.*

Dans une résistance non inductive le courant est entièrement watté, $i = i_1$, $i_2 = 0$, la puissance réactive est nulle.

Dans une inductance pure le courant est entièrement déwatté $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$, $P = 0$ et

$$P_r = UI \sin \varphi = ZI^2 = L\omega I^2;$$

on dit que *la self consomme de la puissance réactive.*

Il en est de même dans une bobine inductive et résistante où l'on a encore

$$P_r = UI \sin \varphi = ZI^2 \sin \varphi = L\omega I^2,$$

mais la puissance active, non nulle, est alors égale à RI^2 .

Dans un condensateur le courant est également complètement déwatté $\left(\varphi = -\frac{\pi}{2}\right)$, on a $P = 0$ et

$$P_r = UI \sin \varphi = -ZI^2 = -\frac{I^2}{C\omega};$$

la puissance réactive est négative, on dit que *le condensateur fournit de la puissance réactive au circuit.*

Dans un circuit R, L, C en série, la puissance active est $P = RI^2$, la puissance réactive,

$$P_r = UI \sin \varphi = ZI^2 \sin \varphi = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)I^2.$$

Suivant que la réactance $L\omega - \frac{1}{C\omega}$ est positive (l'effet de self l'emportant) ou négative (l'effet de capacité étant prépondérant), la puissance réactive est elle-même positive ou négative; elle est nulle pour la résonance, où le courant i est entièrement watté.

Nous allons voir, bien que la puissance réactive ne corresponde pas à un phénomène énergétique réel, qu'il y a intérêt à la réduire le plus possible, donc à diminuer la composante déwattée du courant.

19-4. Puissance complexe. Théorème de Boucherot.

Reprenons les notations complexes

$$u = U\sqrt{2} \cos \omega t, \text{ représenté par } (u) = U,$$

$$i = I\sqrt{2} \cos (\omega t - \varphi), \text{ représenté par } (i) = I(\cos \varphi - j \sin \varphi) = Ie^{-j\varphi}.$$

L'imaginaire conjuguée de (i) est

$$(\bar{i}) = I(\cos \varphi + j \sin \varphi) = Ie^{j\varphi}.$$

Nous appelons puissance complexe l'expression complexe

$$(p) = (u)(\bar{i}) = UI(\cos \varphi + j \sin \varphi) = UIe^{j\varphi} = P'e^{j\varphi}.$$

Son module est la puissance apparente P' , son argument est le déphasage φ ; sa partie réelle est la puissance active $P = UI \cos \varphi$, le coefficient de j est la puissance réactive $P_r = UI \sin \varphi$, qui peut être positive (i en retard sur u) ou négative (i en avance sur u). On a donc

$$(p) = P + jP_r.$$

Supposons qu'un circuit ne comporte que des appareils $A_1, A_2, \dots$ en série. Soit $u, u_1, u_2, \dots$ les différences de potentiel respectives aux bornes du circuit et des appareils; nous avons

$$(u) = (u_1) + (u_2) + \dots$$

Par suite, comme l'intensité i est la même en tous les points,

$$(p) = (u)(\bar{i}) = (u_1)(\bar{i}) + (u_2)(\bar{i}) + \dots = (p_1) + (p_2) + \dots$$

Supposons maintenant que les appareils soient en dérivation sous la tension u ; ils sont parcourus par les intensités $i_1, i_2, \dots$ et l'intensité totale est

$$(i) = (i_1) + (i_2) + \dots$$

Par suite

$$(p) = (u)(\bar{i}) = (u)(\bar{i}_1) + (u)(\bar{i}_2) + \dots = (p_1) + (p_2) + \dots$$

En définitive, si (p) est la puissance complexe d'un réseau et $(p_1), (p_2), \dots, (p_k), \dots$ les puissances complexes des différents appareils qui le constituent, nous avons

$$(1) \quad (p) = P + jP_r = \Sigma(p_k) = \Sigma P_k + j \Sigma P_{r,k}$$

qui exprime que :

La puissance complexe d'un réseau alimenté en courant sinusoïdal est égale à la somme des puissances complexes des appareils qui le constituent.

La relation (1) nous donne par identification

$$(2) \quad P = UI \cos \varphi = \Sigma P_k = \Sigma U_k I_k \cos \varphi_k,$$

$$(3) \quad P_{r,k} = UI \sin \varphi = \Sigma P_{r,k} = \Sigma U_k I_k \sin \varphi_k.$$

Ces relations expriment **le théorème de Boucherot** :

La puissance active consommée dans un réseau alimenté en courant sinusoïdal est égale à la somme des puissances actives consommées par les appareils du réseau, la puissance réactive est égale à la somme algébrique de leurs puissances réactives.

La relation (2), dont tous les termes sont positifs, ne fait qu'exprimer le principe de la conservation de l'énergie. Par contre la somme qui figure dans (3) peut comporter des termes négatifs (c'est pour cela que nous avons dit somme algébrique). Par exemple un condensateur fournit de la puissance réactive, $P_r = -\frac{I^2}{C\omega} < 0$, au réseau; il en est de même pour un moteur synchrone fonctionnant à faible charge : si celle-ci est nulle le moteur ne consomme pas de puissance active : fonctionnant comme un condensateur il ne fait que fournir de la puissance réactive au réseau.

Notons encore que si $\varphi = 0$, et par suite $\cos \varphi = 1$, le courant qui alimente le réseau est en phase avec la tension à ses bornes et la somme algébrique des puissances réactives est nulle.

Remarquons enfin que nous avons, par addition des relations (2) et (3) élevées au carré,

$$P'^2 = U^2 I^2 = (\sum P_k)^2 + (\sum P_{r,k})^2 = (\sum U_k I_k \cos \varphi_k)^2 + (\sum U_k I_k \sin \varphi_k)^2,$$

et que par suite la relation

$$P'^2 = \sum (U_k I_k)^2 = \sum P_k'^2$$

n'est en général pas satisfaite.

19-5. Facteur de puissance.

Dans l'expression de la puissance active $P = UI \cos \varphi$ d'un courant sinusoïdal, le facteur $k = \cos \varphi$ porte le nom de facteur de puissance. Dans le cas d'un courant alternatif non sinusoïdal la puissance conserve la forme $P = kUI$, k étant au plus égal à 1.

Considérons de nouveau un réseau d'utilisation fonctionnant sous la tension u , le courant qui l'alimente,

$$i = I \sqrt{2} \cos (\omega t - \varphi),$$

étant déphasé de φ par rapport à la tension.

L'intensité efficace dans la ligne d'alimentation de résistance R est

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi},$$

et la puissance P_L consommée par effet Joule dans la ligne est

$$P_L = RI^2 = \frac{P^2 R}{U^2 \cos^2 \varphi};$$

la perte relative de puissance est donc

$$p = \frac{P_L}{P} = \frac{PR}{U^2 \cos^2 \varphi}.$$

Pour l'ensemble ligne-installation et pour une puissance consommée P donnée, la perte relative de puissance est inversement proportionnelle au carré du facteur de puissance.

On a donc intérêt à prendre des dispositions pour augmenter le facteur de puissance, le cas le plus favorable étant celui où il est égal à 1. Comme les compteurs d'énergie consommée sont aux bornes d'entrée de l'installation, ils n'enregistrent pas les pertes en ligne. Aussi le fournisseur d'énergie pénalise-t-il les usagers industriels dont l'installation a un facteur de puissance trop faible; par contre il favorise d'un tarif plus bas ceux dont le facteur de puissance d'installation est voisin de 1. Indiquons que la question ne se pose pas pour les installations domestiques dont le facteur de puissance est très bon parce qu'elles comportent surtout des appareils de chauffage et d'éclairage peu inductifs.

Les usagers industriels ont donc tout intérêt à améliorer $\cos \varphi$ en le relevant. Or leurs appareils consomment non seulement de la puissance active, ce qui est profitable mais aussi de la puissance réactive, ce qui ne l'est pas puisque, pour une même valeur de la puissance active P , cela entraîne un accroissement de l'intensité et des pertes dans la ligne. L'amélioration du facteur de puissance doit donc s'effectuer à l'aide d'appareils fournissant de la puissance réactive au réseau.

Pour les petites installations un procédé simple consiste à mettre un condensateur C en dérivation aux bornes de l'installation (fig. 177). Le courant i_1 dans cette dérivation est entièrement déwatté, en quadrature avance sur la tension; l'intensité dans la ligne devient

$$i' = i + i_1$$

et l'intensité efficace déwattée

$$I' \sin \varphi' = I \sin \varphi - UC\omega.$$

Pour la valeur

$$C_0 = \frac{I \sin \varphi}{U\omega}$$

de C , la composante déwattée est nulle et le facteur de puissance est égal à 1. Les condensateurs à employer doivent avoir une très grande

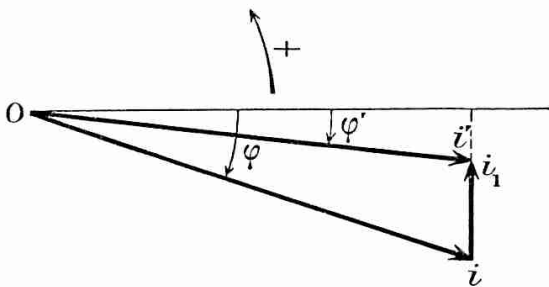


FIG. 177.

capacité. Pour les installations importantes, un moteur synchrone tournant à vide, en fournissant une forte puissance réactive au réseau d'utilisation, produit le même résultat. D'après le théorème de Boucherot, $\cos \varphi$ est égal à 1 lorsque la somme algébrique des puissances réactives est nulle.

Exercices.

Exercice 39 (fig. 178). — Une installation fonctionne sous une tension sinusoïdale de fréquence 50, de valeur efficace $U = 100$ volts. Elle comprend en dérivation un appareil de chauffage non inductif qui consomme la puissance $P_1 = 0,5$ kW et un moteur M de puissance $P_2 = 1$ kW dont le facteur de puissance est $\cos \varphi_2 = 0,6$.

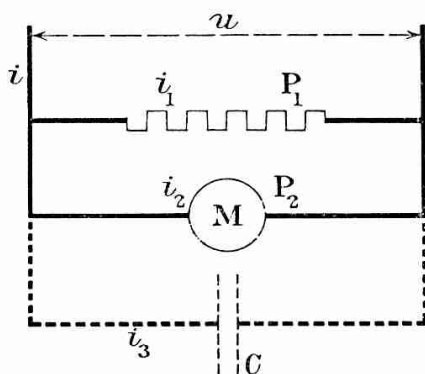


FIG. 178.

1° Définir les intensités i_1 , i_2 , i dans les deux dérivation et dans la ligne d'alimentation. Calculer le coefficient de puissance $\cos \varphi$ de l'installation.

2° On désire, en adjoignant un condensateur en dérivation, amener le coefficient de puissance $\cos \varphi'$ à être égal à 1. Quelle est la capacité C qui permet d'obtenir ce résultat?

1° L'intensité i_1 est en phase avec la tension ($\varphi_1 = 0$) et son intensité efficace est

$$I_1 = \frac{P_1}{U} = 5 \text{ A.}$$

i_2 est en retard de φ_2 sur u et sa valeur efficace est

$$I_2 = \frac{P_2}{U \cos \varphi_2} = \frac{50}{3} \simeq 16,7 \text{ A.}$$

Projetons la relation vectorielle $\vec{i} = \vec{i}_1 + \vec{i}_2$ (fig. 179) sur le support de $\vec{u}$ et sur l'axe rectangulaire; nous avons

$$I \cos \varphi = I_1 + I_2 \cos \varphi_2 = 15 \text{ A,}$$

$$I \sin \varphi = I_2 \sin \varphi_2 = \frac{40}{3} \simeq 13,3 \text{ A;}$$

par suite

$$I^2 = 225 + \frac{1600}{9} = \frac{3625}{9},$$

$$I = \frac{1}{3} \sqrt{3625} = 20,09 \simeq 20,1 \text{ A,}$$

d'où

$$\cos \varphi = \frac{I_1 + I_2 \cos \varphi_2}{I} = 0,747 \simeq 0,75.$$

2° Pour que la nouvelle intensité i' dans la ligne soit en phase avec la tension il suffit que l'intensité efficace $I_3 = UC\omega$ du courant i_3 dans le condensateur, qui est en quadrature avance sur u ,

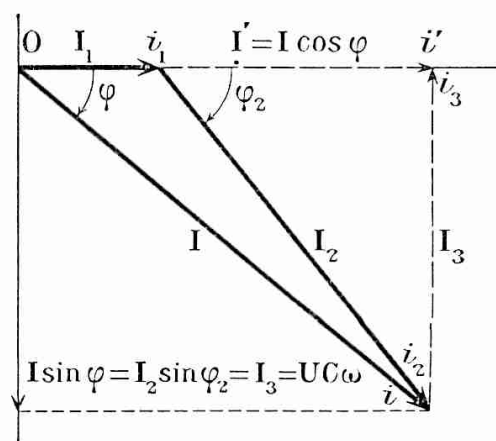


FIG. 179.

soit égale à l'intensité efficace du courant déwatté de i . On doit avoir

$$UC\omega = I \sin \varphi,$$

par suite

$$C = \frac{I \sin \varphi}{U\omega} = 4,24 \cdot 10^{-4} \text{ F} = 0,424 \text{ mF}.$$

On a alors

$$I' = I \cos \varphi = 15 \text{ A},$$

inférieure à I .

Exercice 40. — Nous considérons un circuit formé d'une bobine d'inductance propre L et de résistance R , d'un condensateur de capacité C en série, aux bornes duquel un alternateur établit la différence de potentiel

$$u = U_m \cos \omega t = U \sqrt{2} \cos \omega t.$$

1° a) Établir l'équation différentielle à laquelle satisfait l'intensité i dans le circuit. Il ne s'agira que de la solution permanente, c'est-à-dire que nous supposons négligeables au bout d'un temps assez court les termes qui sont introduits par la solution de l'équation sans second membre.

b) En posant $j^2 = -1$ et $(u) = U_m e^{j\omega t}$ et introduisant l'impédance imaginaire $z = Ze^{j\theta}$, montrer qu'une expression de la forme

$$(i) = I_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

est une solution. Calculer I_m et φ .

2° La puissance P dégagée sous forme de chaleur dans une résistance pure est exprimée par $\frac{1}{2} RI_m^2 = RI^2$ en courant sinusoïdal.

a) $\bar{z}$, $(\bar{i})$, $(\bar{u})$ étant les imaginaires conjuguées de z , (i) , (u) , $A = \frac{1}{z}$ étant l'admittance imaginaire du circuit et $\bar{A}$ la valeur conjuguée, établir les relations

$$\begin{aligned} 2R &= z + \bar{z}; & 4P &= (z + \bar{z})(i)(\bar{i}); \\ 4P &= (u)(\bar{i}) + (\bar{u})(i) = (A + \bar{A})(u)(\bar{u}). \end{aligned}$$

b) Calculer la puissance dépensée sous forme de chaleur dans le circuit, donner la variation de P en fonction de ω . On désignera par ω_0 la pulsation propre du circuit.

c) $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ étant le facteur de qualité du circuit, montrer que l'on a

$$Q = 2\pi \frac{W'}{W},$$

W étant, pour la pulsation ω_0 , l'énergie perdue sous forme de chaleur pendant une période et W' l'énergie électrostatique maximale emmagasinée par le condensateur.

1° Cette question a été traitée au paragraphe 18-6.

2° a) Nous avons

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= Z(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) = 2Z \cos \theta = 2Z \cos \varphi = 2R, \\ (z + \bar{z})(i)(\bar{i}) &= 2RI_m^2 + 4RI^2 = 4P; \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} (u) &= z(i) = \frac{(i)}{A}; & (\bar{u}) &= \bar{z}(\bar{i}) = \frac{(\bar{i})}{\bar{A}}, \\ (u)(\bar{i}) + (\bar{u})(i) &= (z + \bar{z})(i)(\bar{i}) = 4P, \\ &= (A + \bar{A})(u)(\bar{u}). \end{aligned}$$

b) La relation

$$P = \frac{I}{4} (A + \bar{A})(u)(\bar{u}) = \frac{I}{4} (A + \bar{A})U_m^2 = \frac{I}{2} (A + \bar{A})U^2$$

nous donne

$$P = \frac{I}{2} \frac{z + \bar{z}}{z \bar{z}} U^2 = \frac{R}{Z^2} U^2 = \frac{RU^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{I}{C\omega}\right)^2}.$$

P passe par le maximum

$$P_m = \frac{U^2}{R}$$

pour la pulsation propre $\omega_0 = \frac{I}{\sqrt{LC}}$ et s'annule pour $\omega = 0$ et $\omega = \infty$. D'où

la courbe de la figure 180.

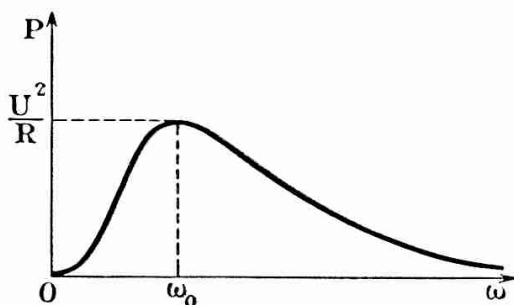


FIG. 180.

c) Nous avons

$$W = P_m T_0 = 2\pi \frac{P_m}{\omega_0} = 2\pi \frac{U^2}{R\omega_0}.$$

La condition de résonance $L\omega_0 = \frac{I}{C\omega_0}$ étant satisfaite, nous avons $Z = R$ et $U_m = RI_m$; par suite la différence de potentiel maximale aux bornes du condensateur est

$$U'_m = \frac{I_m}{C\omega_0} = \frac{U_m}{CR\omega_0}.$$

L'énergie électrostatique maximale du condensateur est

$$W' = \frac{I}{2} CU_m'^2 = \frac{I}{2} \frac{U_m^2}{R^2 C \omega_0^2} = \frac{L\omega_0}{R} \frac{U^2}{R\omega_0} = Q \frac{W}{2\pi},$$

par suite

$$Q = 2\pi \frac{W'}{W}.$$

Exercice 41. — Une bobine circulaire plate, de surface S , de résistance R et d'auto-inductance L , est maintenue fixe dans une induction magnétique

$$B = B_m \cos \omega t$$

qui fait l'angle α avec la normale au plan de la bobine. Calculer le couple instantané et le couple moyen qui agit sur la bobine.

Le flux d'induction magnétique à travers la bobine est

$$\Phi = NSB \cos \alpha = NSB_m \cos \alpha \cos \omega t,$$

la force électromotrice induite est

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega NSB_m \cos \alpha \sin \omega t,$$

l'intensité du courant induit est de la forme

$$i = I_m \cos (\omega t - \varphi).$$

La loi d'Ohm appliquée à l'instant t donne

$$Ri + L \frac{di}{dt} = \omega N S B_m \cos \alpha \sin \omega t,$$

avec les représentations complexes

$$i(R + jL\omega) = e,$$

d'où

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{\omega N S B_m \cos \alpha}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{R}{L\omega}.$$

Le moment du couple instantané qui agit sur la bobine est

$$C = NSBi \sin \alpha = \frac{N^2 S^2 B_m^2 \omega \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos (\omega t - \varphi) \cos \omega t;$$

pour calculer la valeur moyenne C_m de C calculons celle de $\cos (\omega t - \varphi) \cos \omega t$ pendant une période T ; nous avons

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos (\omega t - \varphi) \cos \omega t dt = \frac{1}{2} \cos \varphi,$$

d'où

$$C_m = \frac{N^2 S^2 B_m^2 \omega \sin \alpha \cos \alpha}{2\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \cos \varphi,$$

et, comme

$$\cos \varphi = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}},$$

$$C_m = \frac{N^2 S^2 B_m^2 L \omega^2 \sin 2\alpha}{4\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.$$

C_m est maximal pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, nul pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 42. — On considère le montage de la figure 181. Un équipement mobile est constitué par l'ensemble de deux bobines plates rectangulaires B_1 et B_2 identiques,

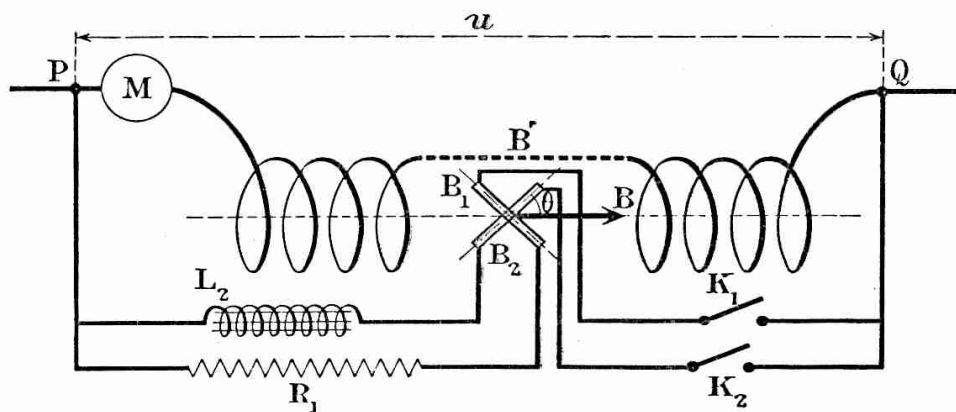


FIG. 181.

invariablement liées entre elles. L'ensemble est mobile autour d'un axe vertical qui coïncide avec la médiane commune des deux bobines. Il est placé à l'intérieur d'une longue bobine B' à axe horizontal dans laquelle on peut envoyer le courant alternatif

sinusoïdal de fréquence 50 hertz qui traverse un appareil M d'utilisation du courant alternatif. L'intensité i de ce courant présente un retard de phase φ sur la tension d'alimentation u qui existe entre les points P et Q .

Deux dérivations sont établies entre les points P et Q . L'une contient en série la bobine B_1 et une résistance non inductive R_1 ; l'autre, de résistance totale négligeable, contient la bobine B_2 et une bobine de grande inductance L_2 . La résistance R_1 et l'inductance L_2 sont choisies de façon que les impédances des deux dérivations soient égales. Les deux dérivations sont respectivement commandées par des interrupteurs, K_1 pour celle qui contient la bobine B_1 , K_2 pour celle qui contient la bobine B_2 .

On repère au préalable la position d'équilibre de l'équipage mobile quand l'interrupteur K_1 est fermé et que l'interrupteur K_2 est ouvert.

a) Les interrupteurs K_1 et K_2 étant tous deux fermés, montrer que les bobines B_1 et B_2 sont soumises à des couples électromagnétiques dont on calculera les moments.

b) Écrire l'équation d'équilibre de l'équipage; en déduire la relation entre φ et θ , θ étant l'angle de rotation de l'équipage mobile à partir de la position initiale (interrupteur K_1 fermé, interrupteur K_2 ouvert). Montrer que l'appareil est un phasemètre qui permet de mesurer la différence de phase entre u et i .

c) La relation simple entre φ et θ trouvée ci-dessus subsisterait-elle si la fréquence du courant alternatif venait à changer?

a) Prenons la phase de u comme origine des phases.

La bobine longue B' , parcourue par le courant i en retard de φ sur la tension u , produit une induction magnétique, dirigée suivant son axe, de la forme

$$B = B_m \cos (\omega t - \varphi).$$

Les bobines B_1 et B_2 , identiques et rectangulaires, sont à l'instant t , pour la rotation θ , soumises aux couples instantanés

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \mathcal{M}_1 B \sin \theta = k i_1 \sin \theta \cos (\omega t - \varphi), \\ \gamma_2 &= \mathcal{M}_2 B \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = -k i_2 \cos \theta \cos (\omega t - \varphi),\end{aligned}$$

i_1 , courant dans une dérivation non inductive, est en phase avec la tension u alors que i_2 , courant dans une inductance de résistance négligeable, est en quadrature retard sur la tension u . Les intensités maximales des deux courants sont d'autre part égales puisque les impédances des deux dérivations sont supposées égales :

$$(1) \quad R_1 + r = L_2 \omega;$$

par suite i_1 et i_2 sont de la forme

$$i_1 = I_m \cos \omega t; \quad i_2 = I_m \sin \omega t,$$

et γ_1, γ_2 , de la forme

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= k' \sin \theta \cos \omega t \cos (\omega t - \varphi), \\ \gamma_2 &= -k' \cos \theta \sin \omega t \cos (\omega t - \varphi).\end{aligned}$$

b) Le système est en équilibre lorsque les valeurs moyennes Γ_1 et Γ_2 de $|\gamma_1|$ et de $|\gamma_2|$ sont égales. Nous avons

$$\Gamma_1 = k' \sin \theta \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t \cos (\omega t - \varphi) dt = \frac{k' \sin \theta}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [\cos (2 \omega t - \varphi) + \cos \varphi] dt,$$

d'où

$$\Gamma_1 = \frac{I}{2} k' \sin \theta \cos \varphi;$$

et, par un calcul semblable,

$$\Gamma_2 = \frac{I}{2} k' \cos \theta \sin \varphi.$$

La condition d'équilibre s'exprime donc par

$$\sin \theta \cos \varphi = \cos \theta \sin \varphi,$$

d'où

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{et} \quad \theta = \varphi.$$

La rotation θ mesure donc la différence de phase φ entre u et i .

c) Le résultat précédent n'est valable que pour la pulsation ω ; si celle-ci venait à changer, la relation (1) ne serait plus satisfaite.

SIXIÈME PARTIE

ÉLECTRICITÉ CORPUSCULAIRE

- Chap. XX. — Équivalence d'une charge en mouvement et d'un élément de courant. La charge élémentaire. Expérience de Millikan.
- Chap. XXI. — Électrolyse. Conduction ionique.
- Chap. XXII. — Action d'un champ électrique et d'un champ magnétique sur des particules électrisées.
- Chap. XXIII. — Moment magnétique d'un atome. Spin. Expérience de Stern et Gerlach.

GÉNÉRALITÉS

L'expérience montre que les propriétés des courants électriques, les actions qu'ils exercent et celles qu'ils subissent, sont les mêmes, qu'ils résultent de la décharge de condensateurs ou qu'ils soient fournis par des machines électrostatiques, des piles ou des dynamos. On est conduit à *assimiler un courant électrique à un déplacement de charges électriques* (Électricité I, 9-1). L'expérience de Rowland va nous montrer que le déplacement d'un conducteur chargé produit une induction magnétique, le phénomène s'interprétant en assimilant une charge en mouvement à un élément de courant.

Le passage d'un courant s'effectue non seulement dans les milieux conducteurs comme les métaux, mais aussi dans les électrolytes, dans le vide et dans les gaz raréfiés. De nombreux faits ne s'expliquent bien qu'en admettant qu'une charge électrique a une *structure corpusculaire* et qu'il existe une *charge élémentaire* dont la mesure résulte de diverses expériences; celle de Millikan est parmi les plus directes.

Les corpuscules électrisés possèdent une ou plusieurs charges élémentaires, positives ou négatives; le plus simple est l'électron, porteur d'une charge négative; sa masse est beaucoup plus faible que celle d'un ion, susceptible d'avoir plusieurs charges positives ou négatives; celui dont la masse est la plus faible est le proton ou ion H^+ .

Suivant les cas, le courant électrique résulte du mouvement d'électrons dans un milieu conducteur ou dans le vide, d'électrons ou d'ions dans le vide, d'ions positifs et négatifs dans les électrolytes. Nous n'avons pas ici à étudier le mécanisme de la *conduction métallique*, qui est un des objets de l'électricité corpusculaire; nous en donnerons cependant une interprétation qualitative qui nous conduira, par une généralisation, à *assimiler une charge en mouvement à un élément de courant*. Cette assimilation nous fournira une interprétation satisfaisante du mouvement, dans le vide, de corpuscules placés dans un champ électrique ou dans un champ magnétique.

CHAPITRE XX

ÉQUIVALENCE D'UNE CHARGE EN MOUVEMENT ET D'UN ÉLÉMENT DE COURANT. LA CHARGE ÉLÉMENTAIRE. EXPÉRIENCE DE MILLIKAN

20-1. Courant de convection électronique dans un conducteur métallique. Équivalence $e\vec{v} = I\vec{dl}$.

Dans un conducteur métallique le courant électrique résulte d'un déplacement d'électrons en sens inverse du sens conventionnel du courant; c'est *un courant de convection électronique*.

En l'absence de courant un métal est formé d'ions positifs et d'atomes, immobiles dans le vide, constituant la matière proprement dite (la majeure partie de sa masse). Dans le vide qui sépare les corpuscules, des électrons ont un mouvement parfaitement désordonné comparable à celui des molécules d'un gaz, avec toutefois cette différence que ces divers corpuscules, mobiles et fixes, portent des charges et que les électrons dans leur mouvement, non seulement se rencontrent, mais rencontrent également les corpuscules fixes.

Un élément de volume, si petit soit-il à l'échelle macroscopique, est électriquement neutre puisque les électrons libres proviennent d'atomes ionisés. Il y a d'autre part, dans l'élément, autant d'électrons allant dans un sens que dans le sens opposé quelle que soit la direction, autrement dit les vecteurs vitesses des électrons ont une moyenne nulle. En l'absence de champ magnétique extérieur la quantité de mouvement moyenne cédée par les électrons aux corpuscules fixes est nulle : le conducteur n'est soumis à aucune force.

Considérons un fil conducteur de faible section s et un élément de longueur dl de ce fil; en l'absence de courant le nombre d'électrons qui traverse une section est en moyenne nul. Établissons une différence de potentiel entre les extrémités du conducteur. Les électrons sont soumis à une force parallèle au fil et dirigée en sens inverse du courant (e négatif); de ce fait les électrons acquièrent, en sens inverse du champ électrique, une composante de vitesse qui atteint très vite une valeur limite $\vec{v}$ du fait de leurs rencontres avec la matière (ions et atomes). *Au mouvement chaotique se superpose donc un mouvement d'ensemble de vitesse v (négatif) en sens inverse du courant.*

Soit n le nombre d'électrons contenus dans l'unité de volume; le nombre d'électrons qui traversent une section par seconde est nsv , et par suite, l'intensité du courant est, en grandeur et en signe (e et v sont tous deux négatifs),

$$I = nsve.$$

Plaçons le conducteur dans une induction magnétique $\vec{B}$; la loi de Laplace nous donne la force $d\vec{f}$ qui agit sur un élément dl ,

$$d\vec{f} = I \vec{dl} \wedge \vec{B} = nsve \vec{dl} \wedge \vec{B}.$$

Mais nous avons

$$v \vec{dl} \wedge \vec{B} = dl \vec{v} \wedge \vec{B},$$

puisque le sens de $\vec{v}$ change avec celui du courant, donc avec celui de $\vec{dl}$ ($\vec{dl}$ et $\vec{v}$ ayant la même direction); par suite

$$d\vec{f} = nse dl \vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Or, le mouvement des électrons n'étant plus parfaitement désordonné, la quantité de mouvement qu'ils cèdent aux corpuscules fixes n'est plus nulle, de sorte que la force $d\vec{f}$, appliquée à la matière, résulte en fait d'une force égale appliquée à l'ensemble des $ns dl$ électrons contenus dans le volume $s dl$ de l'élément. La force $\vec{f}$ agissant sur un électron est donc

$$\vec{f} = e\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Si nous comparons la formule précédente à celle qui exprime la loi de Laplace, nous voyons qu'un électron animé d'une vitesse v est soumis à la même force qu'un élément de courant défini par la relation

$$I \vec{dl} = e\vec{v}$$

dans laquelle e est négatif et où $I \frac{d\vec{l}}{dt}$ n'est évidemment pas celui de la démonstration précédente puisqu'il s'agit maintenant d'un élément fictif.

On est conduit à admettre que l'équivalence précédente reste valable dans tous les cas, aussi bien pour un corpuscule positif (on a alors $e > 0$ et le sens du courant I est celui du déplacement du corpuscule) que pour un corpuscule négatif, le déplacement pouvant avoir lieu aussi bien dans le vide que dans un milieu matériel.

Les considérations précédentes sont basées sur *la loi de Laplace*. L'expérience de Rowland, dont l'interprétation résulte de l'application de *la loi de Biot et Savart*, a pour but de montrer que le déplacement d'une charge liée à un support matériel équivaut à un courant de convection pour la production d'une induction magnétique.

20-2. Expérience de Rowland.

1^o Principe.

Si l'on déplace rapidement un conducteur neutre, on n'observe pas de champ magnétique parce que l'on déplace avec la même vitesse les électrons libres dont la vitesse moyenne d'agitation désordonnée est nulle et l'ensemble des ions positifs fixes par rapport au conducteur, ions dont la charge est égale et de signe contraire à la charge totale des électrons libres. Il ne peut y avoir que compensation des effets électromagnétiques produits par les deux groupes de corpuscules. Par contre, si le conducteur en mouvement est chargé, c'est-à-dire s'il possède soit un surcroît d'électrons libres par rapport aux ions positifs (il est alors chargé négativement), soit un déficit (sa charge est alors positive), on doit observer un champ magnétique dans l'espace voisin du conducteur (Electricité I, 11-5).

L'induction produite en un point étant proportionnelle à la charge et à la vitesse du déplacement, on se trouve conduit à déplacer le plus rapidement possible une charge élevée. Il est donc avantageux de réaliser *un courant de convection circulaire* en utilisant un disque conducteur D (de rayon R) animé d'un mouvement de rotation uniforme très rapide (vitesse angulaire ω) autour de son axe. Pour que la charge soit assez forte, on place un second disque conducteur fixe D', identique et coaxial au premier, à la distance e . Les deux disques constituant un condensateur plan de capacité C, si l'on maintient entre eux une différence de potentiel constante $U = U_D - U_{D'}$, positive par exemple, les deux faces conductrices en regard portent les charges $Q_D = Q$ et $Q_{D'} = -Q$ et l'on a, S étant la surface des disques,

$$Q = CU = \frac{\epsilon_0 S}{e} U.$$

Les faces portent donc les densités superficielles électriques $+\sigma$ et $-\sigma$,

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{\epsilon_0}{e} U.$$

On doit pouvoir observer, et mesurer à l'aide d'un magnétomètre, une induction magnétique B au point M de l'axe du disque mobile et à la distance a de son centre O . Nous allons effectuer le calcul de B en utilisant l'équivalence d'une charge en mouvement avec un élément de courant, ici circulaire, et l'expression de l'induction magnétique en un point

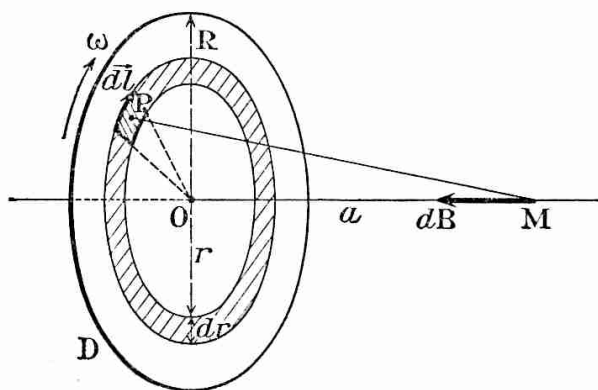


FIG. 182.

de l'axe d'un courant circulaire, expression résultant de l'application de la loi de Biot et Savart.

Considérons un petit élément de surface

$$d^2S = dr dl,$$

autour du point P (fig. 182), formé d'un élément de longueur dl de la bande circulaire comprise entre les cir-

conférences de centre O et de rayons r et $r + dr$. σ étant la densité électrique superficielle, il porte la charge $d^2q = \sigma d^2S = \sigma dr dl$, animée de la vitesse $v = \omega r$. Cette charge en mouvement est équivalente à un arc de courant circulaire, auquel on peut donner la longueur dl , l'intensité dI du courant étant telle que l'on ait, d'après la relation d'équivalence,

$$dI dl = d^2q \times v = \sigma \omega r dr dl,$$

par suite

$$dI = \sigma \omega r dr.$$

L'ensemble des éléments de la bande équivaut à un courant circulaire de rayon r ayant l'intensité dI précédente.

Nous savons, par application de la loi de Biot et Savart, que l'induction dB , produite par ce courant au point M , est dirigée suivant l'axe et que son module est

$$dB = \frac{1}{2} \mu_0 r^2 (r^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} dI = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega (r^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} r^3 dr.$$

L'induction B produite par l'ensemble des charges en mouvement

portées par le disque D est dirigée suivant l'axe et son module est, r étant la variable,

$$B = \int_0^R dB.$$

Pour effectuer cette intégration, posons

$$u = r^2 + a^2; \quad du = 2r dr;$$

il vient

$$dB = \frac{1}{4} \mu_0 \sigma \omega u^{-\frac{3}{2}} (u^2 - a^2) du = \frac{1}{4} \mu_0 \sigma \omega \left(u^{-\frac{1}{2}} - a^2 u^{-\frac{3}{2}} \right) du,$$

d'où

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega \left[u^{-\frac{1}{2}} (u^2 + a^2) \right]_0^R = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega \left[(r^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} (r^2 + 2a^2) \right]_0^R \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega \left[(R^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} (R^2 + 2a^2) - 2a \right] \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega R \left[\left(1 + \frac{2a^2}{R^2} \right) \left(1 + \frac{a^2}{R^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{2a}{R} \right]. \end{aligned}$$

Nous avons, a étant petit par rapport à R ,

$$\left(1 + \frac{2a^2}{R^2} \right) \left(1 + \frac{a^2}{R^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \left(1 + \frac{2a^2}{R^2} \right) \left(1 - \frac{a^2}{2R^2} \right) \simeq 1 + \frac{3a^2}{2R^2};$$

par suite,

$$B \simeq \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega R \left(1 - \frac{2a}{R} + \frac{3a^2}{2R^2} \right) = B_0 \left(1 - \frac{2a}{R} + \frac{3a^2}{2R^2} \right),$$

B_0 étant l'induction au point O ($a = 0$).

Tenons compte de l'expression de σ et de la relation de Maxwell, $c^2 \epsilon_0 \mu_0 = 1$, c étant la célérité de la lumière dans le vide; il vient

$$\sigma = \epsilon_0 \frac{U}{e} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{U}{e},$$

et par suite, $N = \frac{2\pi}{\omega}$ étant la vitesse de rotation du disque exprimée en tours par seconde,

$$B_0 = \frac{\pi N R U}{c^2 e}; \quad B = B_0 \left(1 - \frac{2a}{R} + \frac{3a^2}{2R^2} \right).$$

2° Réalisation de l'expérience. Précision.

Dans les expériences de Rowland (fig. 183), l'intensité de l'induction, $B' = 2B$, est doublée par l'emploi de deux condensateurs comprenant chacun un disque mobile (D_1 et D_2) et un disque fixe (D'_1 et D'_2); les disques mobiles tournent en sens inverses de façon à produire des inductions de même sens en M , milieu de O_1O_2 , où la mesure de B est effectuée à l'aide d'un magnétomètre très sensible. Les disques sont faits d'un isolant recouvert d'une mince couche d'or.

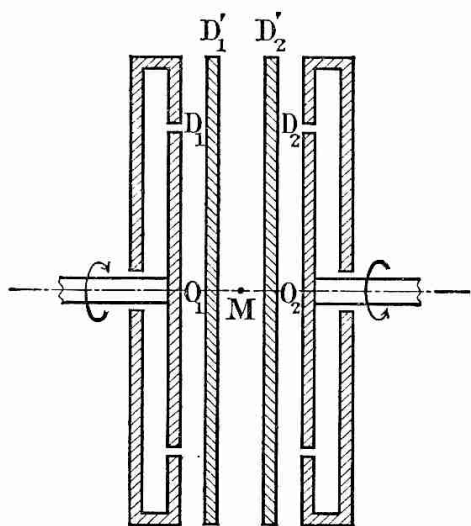


FIG. 183.

Les données sont les suivantes : $R = 0,20$ m; $U = 6000$ V; $N = 125$ tr.s⁻¹; $a = 0,02$ m; $e = 0,01$ m; elles donnent

$$B'_0 = 2B_0 = \frac{2 \times 3,142 \times 125 \times 0,2 \times 6\,000}{9 \cdot 10^{16} \times 0,01} = 1,047 \cdot 10^{-9} \text{ tesla,}$$

$$B' = B'_0(1 - 0,2 + 0,015) = 0,815 B'_0 = 8,53 \cdot 10^{-10} \text{ tesla.}$$

Cette induction est extrêmement faible puisqu'elle est de l'ordre de 5 cent millièmes de la composante horizontale de l'induction terrestre. Dans des expériences plus récentes, l'induction magnétique est mesurée à l'aide de la quantité d'électricité induite dans une bobine que l'on retourne face pour face (12-8). De toute façon la précision est de l'ordre de $2 \cdot 10^{-2}$. On doit considérer la concordance des mesures avec les prévisions comme satisfaisante; elle montre que les charges ne sont pas déplacées par rapport au conducteur dans le mouvement et que l'équivalence $I dl = e\vec{v}$ est vérifiée aussi bien dans l'application de la loi de Biot et Savart que dans celle de Laplace. Cette équivalence est aujourd'hui admise sans qu'on estime nécessaire d'en rechercher des vérifications directes plus précises.

20-3. La charge élémentaire. Expérience de Millikan.

La relation d'équivalence entre une charge électrique en mouvement et un élément de courant n'implique pas nécessairement que l'électricité possède une structure discontinue. De nombreux faits d'expérience montrent cependant que l'on n'observe jamais une charge inférieure à une valeur qui constitue la charge élémentaire et qu'une *quantité d'élec-*

tricité quelconque contient un nombre entier de charges élémentaires. Si, dans les anciennes théories des fluides électriques, on a pu expliquer un grand nombre de phénomènes en attribuant à l'électricité une structure continue, cela tient uniquement au fait que *la charge élémentaire est très petite.* L'expérience de Millikan en permet la mesure directe.

1° Mouvement d'une petite sphère dans un milieu visqueux.

Considérons une très petite sphère de rayon r et de masse m , en mouvement dans un fluide visqueux. Pour les très faibles vitesses, les seules que nous aurons à envisager ici, elle est soumise à une force de frottement f , *force résistante* (dirigée en sens inverse de la vitesse), *proportionnelle à la vitesse v* ; la force f est donnée par la formule de Stokes,

$$\vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v},$$

dans laquelle η est le coefficient de viscosité du fluide.

La vitesse et l'abscisse z initiales étant nulles, supposons que la sphère soit soumise à la force constante F dirigée suivant Oz . L'application du principe fondamental de la dynamique nous donne

$$(1) \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} = F - 6\pi\eta r v.$$

Le mouvement est accéléré, l'accélération initiale étant

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_0 = \frac{F}{m},$$

mais, f croissant avec v , l'accélération décroît et tend vers zéro. Par suite v tend vers la valeur limite $V = \frac{F}{6\pi\eta r}$; une fois cette limite atteinte le mouvement est rectiligne et uniforme. La relation (1) s'écrit

$$-\frac{dv}{V-v} = -\frac{6\pi\eta r}{m} dt.$$

Le second membre de cette équation, comme le premier, étant sans dimension, la grandeur $\tau = \frac{m}{6\pi\eta r}$, appelée *constante de temps du mouvement*, est homogène à un temps; nous avons par suite

$$-\frac{dv}{V-v} = -\frac{dt}{\tau}.$$

L'intégration de cette équation différentielle donne, compte tenu des conditions initiales,

$$\text{Log}_e \frac{V-v}{V} = -\frac{t}{\tau}, \quad \text{ou encore} \quad v = V\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right);$$

la vitesse limite V n'est donc atteinte qu'au bout d'un temps théoriquement infini.

Déterminons le temps t au bout duquel l'écart relatif $\frac{V-v}{V}$ de v avec sa limite n'est plus que 10^{-4} par exemple; nous avons

$$2,3 \log_{10} 10^{-4} = -\frac{t}{\tau}, \quad \text{d'où} \quad t = 9,2\tau.$$

ρ étant la masse volumique du corps en mouvement, nous avons

$$\tau = \frac{1}{6\pi\eta} \frac{m}{r} = \frac{2}{9} \frac{\rho}{\eta} r^2;$$

le temps au bout duquel la vitesse limite peut être considérée comme atteinte est donc proportionnel au carré du rayon. Ce temps est extrêmement court pour une sphère de très petit rayon, une gouttelette de liquide par exemple, et, négligeant la phase initiale, nous considérerons le mouvement comme uniforme de vitesse V . Quant à cette vitesse V , elle est d'autant plus petite que la force F est elle-même plus petite.

2° Réalisation de l'expérience de Millikan (fig. 184).

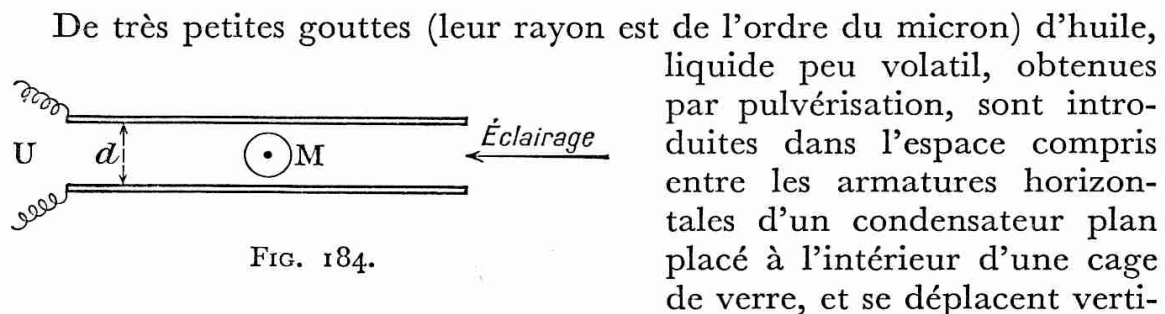


FIG. 184.

De très petites gouttes (leur rayon est de l'ordre du micron) d'huile, liquide peu volatil, obtenues par pulvérisation, sont introduites dans l'espace compris entre les armatures horizontales d'un condensateur plan placé à l'intérieur d'une cage de verre, et se déplacent verticalement dans l'air. Pour étudier leur mouvement, on éclaire latéralement l'atmosphère et on les observe à l'aide d'un microscope M muni d'un réticule à trois fils horizontaux équidistants. La vitesse V d'une goutte se déduit de la mesure du temps qui sépare son passage sur deux fils du réticule : elle est toujours très faible, de sorte qu'il est possible d'observer très longtemps une goutte déterminée.

Soit ρ et a les masses volumiques respectives de l'huile et de l'air. La goutte observée est soumise à son poids apparent (poids réel diminué de la poussée d'Archimède),

$$P = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - a)g.$$

L'huile étant un diélectrique, la goutte est électrisée par le frottement qui résulte de la pulvérisation; soit q sa charge. Établissons une différence de potentiel connue U entre les armatures du condensateur distantes de d ;

le champ électrique vertical uniforme $E = \frac{U}{d}$ ainsi créé exerce sur la goutte la force qE , et l'on peut s'arranger pour que cette force soit dirigée vers le haut, donc en sens inverse de P . La résultante des forces agissantes est donc $F = P - qE$ et la vitesse de la goutte, $V = \frac{F}{6\pi\eta r}$.

Supposons tout d'abord que le champ électrique soit nul; la force F se réduit au poids apparent et la vitesse de la goutte est

$$V_0 = \frac{P}{6\pi\eta r} = \frac{2}{9} \frac{r^2}{\eta} (\rho - a)g;$$

la mesure de V_0 permet donc, connaissant ρ , a , g et η , de déterminer le poids apparent P (et le rayon r) de la goutte.

Créons le champ électrique $E = \frac{U}{d}$ de sens et de grandeur convenables pour que F , tout en restant positive, soit inférieure à P ; on mesure une vitesse V_1 inférieure à V_0 ,

$$V_1 = \frac{P - qE}{6\pi\eta r} = V_0 - \frac{qE}{6\pi\eta r} = V_0 \left(1 - \frac{qE}{P} \right),$$

d'où

$$q = \frac{6\pi\eta r}{E} (V_0 - V_1) = \frac{P}{E} \frac{V_0 - V_1}{V_0},$$

qui donne la charge q en fonction de grandeurs connues.

Il est même possible d'immobiliser la goutte ($V_1 = 0$) en faisant agir un champ électrique E_0 tel que la force électrique équilibre le poids apparent, et l'on a alors $q = \frac{P}{E_0}$.

On peut même, par l'action d'un champ supérieur à E_0 , faire remonter la goutte, ce qui permet de nombreuses observations.

Différents expérimentateurs ont repris l'expérience de Millikan en utilisant divers liquides et des gaz sous pressions variées :

Les charges q mesurées se sont toujours trouvées être égales à un nombre entier de fois (1, 2, 3, ... fois) une charge e qui est précisément la charge élémentaire.

Au cours d'une expérience on observe parfois de brusques variations de vitesse, celle-ci pouvant même changer de sens. Le phénomène s'explique par la capture d'un ion positif ou négatif sans variation de masse, ce que l'on vérifie en annulant le champ pour mesurer de nouveau V_0 : on retrouve bien la même valeur. On augmente la fréquence de ces variations en ionisant plus fortement l'atmosphère par un faisceau de rayons X; il est ainsi possible, non seulement de mesurer des charges différentes $q = ne$ pour diverses gouttes, mais aussi pour la même goutte.

La principale cause d'incertitude dans la mesure de e par la méthode de Millikan résulte de *l'incertitude sur le coefficient de viscosité*; les progrès réalisés dans la mesure de cette grandeur ont permis d'améliorer la précision sans qu'il ait été nécessaire de recommencer les expériences. La précision relative est aujourd'hui de l'ordre de $2 \cdot 10^{-3}$, moins bonne que celle fournie par l'étude des phénomènes d'électrolyse et la détermination du nombre d'Avogadro (21-4).

Les expériences de Millikan et d'autres expérimentateurs n'en conservent pas moins une grande importance parce qu'elles prouvent d'une façon directe l'existence de la charge élémentaire; la valeur la plus probable qu'elles donnent,

$$e = (1,602 \pm 0,003) 10^{-19} \text{ C},$$

est en bon accord avec celles fournies par des déterminations plus précises.

CHAPITRE XXI

ÉLECTROLYSE. CONDUCTION IONIQUE

21-1. Électrolytes. Théorie ionique.

Le passage du courant électrique dans les métaux, les alliages et les semi-conducteurs s'explique par un mouvement d'ensemble d'électrons en sens inverse du sens conventionnel du courant : un tel *courant de convection électronique* ne transporte que des charges élémentaires négatives, il ne lui correspond pas de transport de matière.

Si l'on plonge deux *électrodes*, reliées aux bornes d'un générateur électrique (la *cathode* est reliée au pôle positif, l'*anode* au pôle négatif), dans un *électrolyte*, le passage du courant s'accompagne de phénomènes chimiques et de transport de matière dans l'électrolyseur.

Les électrolytes sont les composés ioniques, acides, bases et sels, à l'état liquide (fondus) ou en solution dans un solvant ionisant. Le solvant le plus important et le plus employé est l'eau; d'assez nombreux liquides sont ionisants : citons l'ammoniac NH_3 liquide et l'acétone; toutefois nous n'étudierons que les solutions aqueuses.

La théorie ionique, que l'on expose en Chimie, permet d'interpréter qualitativement et quantitativement les phénomènes de l'électrolyse, aussi bien au point de vue chimique qu'au point de vue de la conduction électrique. Rappelons les hypothèses essentielles de cette théorie.

La molécule d'un électrolyte (dans la mesure où l'on peut parler de molécule dans ce cas) est formée d'ions, ions positifs ou *cations* et ions négatifs ou *anions*. Un ion est un atome ou une association (ion complexe) d'atomes ayant perdu ou capturé un ou plusieurs électrons; un ion est donc porteur d'une charge globale égale à un nombre entier (le plus souvent 1, 2 ou 3) de charges élémentaires, positives pour un cation, négatives pour un anion. L'*électrovalence* d'un ion est le nombre de charges qu'il porte, affecté du signe plus pour un cation (électrovalence positive),

du signe moins pour un anion (électrovalence négative). Par exemple, le cation de la soude et des sels de sodium est l'ion Na^+ , d'électrovalence $+1$, celui de la baryte et des sels de baryum est Ba^{2+} , d'électrovalence $+2$, l'anion Cl^- de l'acide chlorhydrique et des chlorures métalliques a l'électrovalence -1 , l'anion SO_4^{2-} de l'acide sulfurique et des sulfates, l'électrovalence -2 . Un électrolyte étant électriquement neutre, le nombre de charges portées par les anions est égal à celui des charges portées par les cations; *la somme algébrique des électrovalences de tous les ions est donc nulle* : par exemple, le chlorure de calcium fournit les ions Ca^{2+} et 2Cl^- .

Alors que dans un cristal (de chlorure de sodium par exemple) ou dans un gaz (HCl par exemple) les ions sont étroitement associés, on doit admettre qu'à l'état liquide ou en solution dans un solvant ionique, les forces qui s'exercent entre ions de noms contraires sont beaucoup plus faibles, de sorte que, *sous l'action d'un champ électrique, les cations se déplacent dans le sens du champ alors que les anions se déplacent dans le sens inverse*.

La masse d'un ion est très sensiblement égale à celle de l'atome ou de l'édifice d'atomes qui le constitue. De même qu'à l'échelle macroscopique on raisonne sur les atomes-grammes et les molécules-grammes ou moles, c'est-à-dire sur des masses égales à celles des atomes et des molécules multipliées par le nombre d'Avogadro N , de même on raisonne, dans la théorie ionique, sur les *ions-grammes*, c'est-à-dire sur la masse de N ions. Cela nous amène à considérer la charge $F = Ne$, égale à N fois la charge élémentaire; cette charge est le *faraday*. Il est également commode de faire intervenir, dans l'étude de l'électrolyse comme en chimie, **l'équivalent électrochimique ou valence-gramme d'un ion, quotient de la masse de l'ion-gramme par la valeur absolue de son électrovalence**.

Si l'on excepte les sels complexes, les cations sont toujours simples; ce sont l'ion H^+ des acides, les ions métalliques Na^+ , Ag^+ , Fe^{2+} , Fe^{3+} , Al^{3+} ..., des sels et des hydroxydes métalliques; parmi les cations complexes la Chimie classique ne connaît guère que l'ion ammonium NH_4^+ monovalent. Par contre, en dehors des ions métalloïdiques comme Cl^- de l'acide chlorhydrique et des chlorures métalliques, les anions sont complexes, comme OH^- des bases, NO_3^- de l'acide nitrique et des nitrates, SO_4^{2-} de l'acide sulfurique et des sulfates,...

21-2. Mécanisme de la conduction ionique.

Établissons une différence de potentiel entre les électrodes d'un électrolyseur (on dit aussi : d'un voltamètre); l'électrolyte est traversé par un courant qui va de l'anode vers la cathode. Les ions se trouvent ainsi

soumis à un champ électrique dirigé dans le sens du courant. Les cations, soumis à des forces dirigées dans le sens du champ, se déplacent vers la cathode, où ils perdent leur charge en capturant les électrons qui, dans le circuit extérieur, arrivent en sens inverse du courant. Quant aux anions, soumis à des forces dirigées en sens inverse du champ, ils se dirigent vers l'anode, au contact de laquelle ils se déchargent en cédant des électrons qui sortent en sens inverse du courant dans le circuit extérieur.

Ainsi le passage d'une quantité d'électricité q dans le circuit correspond :

a) Dans les conducteurs extérieurs à l'électrolyseur, à un transport d'électrons qui véhiculent la charge $-q$ en sens inverse du courant.

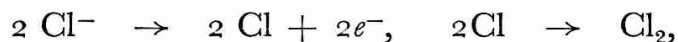
b) Dans l'électrolyseur, à un double transport d'ions, supports matériels de charges de signes contraires, les anions alimentant l'anode en charges négatives emportées par les électrons alors que la cathode fournit le même nombre d'électrons pour décharger les cations porteurs de la charge globale q .

Prenons l'exemple simple de l'électrolyse du chlorure de sodium fondu avec électrodes inattaquables. Lorsqu'à l'anode un ion Cl^- arrive pour perdre un électron, $\text{Cl}^- \rightarrow \text{Cl} + e^-$, un ion Na^+ capture un électron fourni par la cathode conductrice :

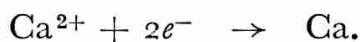


Le sodium se forme à la cathode tandis qu'à l'anode les atomes de chlore s'assemblent en molécules : $2 \text{Cl} \rightarrow \text{Cl}_2$, de sorte que du chlore gazeux se dégage sur l'anode (en charbon inattaquable).

Dans le cas de l'électrolyse du chlorure de calcium fondu, le passage d'une quantité d'électricité égale à deux charges élémentaires entraîne à l'anode



à la cathode

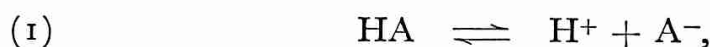


Les considérations précédentes nous conduisent à la conclusion suivante qui résume le *mécanisme de l'électrolyse* :

Lorsque n électrons passent, en sens inverse du sens conventionnel du courant, à travers une section du conducteur extérieur à l'électrolyseur, les anions de l'électrolyte fournissent à l'anode le même nombre d'électrons tandis qu'un nombre égal de ceux-ci est cédé aux cations par la cathode. Pendant la durée t de ces phénomènes la quantité d'électricité $q = ne$ a circulé dans le circuit, l'intensité du courant a été $i = \frac{q}{t} = \frac{ne}{t}$, e étant la charge élémentaire.

Il n'est pas nécessaire, pour que ce mécanisme puisse se poursuivre jusqu'à électrolyse complète, que l'électrolyte soit totalement ionisé :

Considérons le cas d'un électrolyte faible en solution aqueuse, un monoacide faible HA par exemple. Au début de l'électrolyse nous avons l'équilibre



régi par la relation

$$(2) \quad \frac{(\text{H}^+)(\text{A}^-)}{(\text{HA})} = k_A,$$

k_A étant la constante ionique de l'acide.

Les concentrations ioniques (H^+) et (A^-) tendant à diminuer du fait de l'électrolyse, l'équilibre (1) est déplacé vers la droite de façon que le premier membre de (2) reste constant. C'est dire que de nouvelles molécules HA ne cessent de s'ioniser jusqu'à épuisement complet au terme de l'électrolyse. Les concentrations ioniques initiales peuvent donc être très faibles; nous verrons cependant (21-6) que dans ce cas la conductivité de la solution est elle-même très faible.

21-3. Décharge d'un ion complexe.

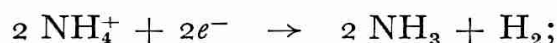
La décharge d'un ion simple donne un corps simple, et celui-ci se forme, après éventuellement association d'atomes en molécules, à l'électrode où l'ion s'est déchargé, à condition que le corps simple n'ait aucune action sur l'électrode, sur l'eau de la solution ou même sur l'électrolyte, autrement dit, à condition qu'il ne se produise pas d'actions secondaires (21-5).

L'hydrogène provenant des ions H^+ d'un acide, les métaux des ions métalliques d'un sel ou d'une base se forment à la cathode. L'halogène d'un acide halohydrique ou d'un halogénure métallique apparaît à l'anode.

Notons que les halogènes et l'oxygène sont les seules métalloïdes qui puissent se former : on n'observe par exemple jamais de dépôt de soufre.

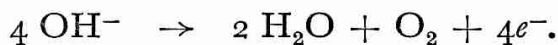
Les phénomènes ne sont pas aussi simples dans la décharge des ions complexes, qui donne toujours un édifice instable d'atomes. Envisageons les principaux exemples, toujours en l'absence d'actions secondaires.

Le cation ammonium NH_4^+ de l'ammoniaque et des sels d'ammonium donnerait l'édifice instable NH_4 ; on a en fait

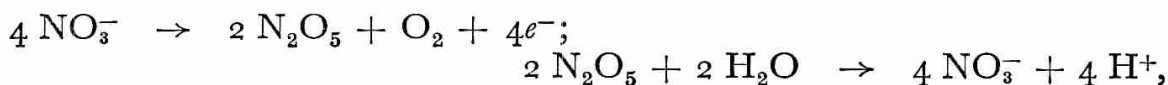


si l'on opère en solution, l'ammoniac se dissout et l'hydrogène se dégage.

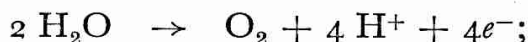
La décharge de l'anion OH^- des bases et de l'eau entraîne le dégagement d'oxygène à l'anode :



Les anions des oxacides donnent un dégagement d'oxygène à l'anode avec formation de l'anhydride qui, en solution aqueuse, réagit sur l'eau dans le cas des ions NO_3^- , SO_4^{2-} , PO_4^{3-} , ... Par exemple, dans l'électrolyse d'une solution d'un nitrate :



ce qui donne le processus anodique



il se dégage donc de l'oxygène à l'anode et la solution devient acide dans son voisinage.

Par contre, si l'anhydride est relativement peu soluble, il se dégage en grande partie et l'acidité (concentration en H^+) n'augmente que très peu au voisinage de l'anode. C'est le cas de l'électrolyse des carbonates :



le mélange gazeux se dégage à l'anode.

21-4. Lois de l'électrolyse. Le faraday et la charge élémentaire.

L'étude du mécanisme ionique nous explique les lois qualitatives et quantitatives de l'électrolyse telles que l'expérience a permis de les établir.

1° Lois qualitatives.

a) *Les produits de la décomposition électrolytique apparaissent et l'électrolyte disparaît au voisinage des électrodes, autrement dit, l'électrolyse ne change pas la composition de l'électrolyte dans les régions éloignées des électrodes.*

Précisons qu'il n'en est ainsi que si les phénomènes sont de courte durée; au bout d'un temps plus ou moins long les modifications de composition se répartissent par diffusion dans toute la masse de l'électrolyte. Cette homogénéisation est favorisée par élévation de la température et, bien entendu, par agitation du bain; il faut en tenir compte dans les applications.

b) Nous avons vu que, si l'on se place dans des conditions excluant des réactions secondaires :

Les corps simples formés à la cathode, métaux ou hydrogène, sont des éléments électropositifs; la perte de charges positives des cations, perte résultant de capture d'électrons, est une réduction au sens général du mot.

Les corps simples formés à l'anode, halogènes ou oxygène, sont des éléments électronégatifs; la perte de charges négatives des anions, perte résultant d'un abandon d'électrons, est une oxydation au sens général du mot.

Dans le cas particulier des composés ioniques binaires le cation est fourni par l'élément le plus électropositif, l'anion par l'élément le plus électronégatif. Un exemple remarquable est celui de l'hydruure de lithium LiH dont l'électrolyse donne un dégagement d'hydrogène à l'anode; c'est que le lithium est plus électropositif que l'hydrogène : la structure de l'hydruure est Li^+H^- .

2° Loi quantitative de Faraday. Détermination du faraday.

a) *Les masses d'électrolyte décomposé et des corps formés au cours d'une électrolyse sont proportionnelles à la quantité d'électricité $q = it$ qui a traversé l'électrolyseur.*

b) **Un faraday entraîne la décharge d'un équivalent électrochimique de cation et d'anion.**

L'interprétation de cette loi est évidente dans la théorie ionique. Tout se passe dans l'électrolyse comme s'il y avait transfert d'électrons des anions sur les cations de façon à établir l'électroneutralité des deux types de particules, le courant transportant une quantité d'électricité égale à la charge des électrons transférés. La décharge d'un équivalent électrochimique de chacun des types d'ions, anion et cation, nécessite le transport de N électrons (N étant le nombre d'Avogadro), donc le passage dans l'électrolyseur de la quantité d'électricité Ne précisément égale à un faraday par définition.

La loi de Faraday reste évidemment applicable aux produits donnés par la décharge d'un ion complexe et même à ceux qui résultent de réactions secondaires. Par exemple, dans l'électrolyse d'un sel d'ammonium, deux faradays entraînent la décharge de 2NH_4^+ et la formation de $2 \text{NH}_3 + \text{H}_2$.

Considérons plus particulièrement le cas des ions simples qui, en se déchargeant, fournissent un élément, métal ou hydrogène pour un cation, métalloïde comme le chlore ou l'iode pour un anion. Soit A la masse atomique du corps simple obtenu et, en valeur absolue, n l'électrovalence de l'ion. $\frac{A}{n}$ est aussi bien la masse d'un équivalent électrochimique de l'ion que la masse de l'élément libérée par un faraday, masse

que nous pouvons tout aussi bien appeler *équivalent électrochimique ou valence-gramme de l'élément*, n pouvant être considéré comme le nombre d'oxydation de l'élément engagé dans l'électrolyte considéré. Nous pouvons donc donner l'énoncé particulier suivant de **la loi de Faraday**:

Un équivalent électrochimique d'un élément est libéré par un faraday.

La masse m de l'élément, formée pendant le temps t par un courant d'intensité constante, est donc donnée par

$$m = \frac{A}{n} \frac{it}{F}.$$

La détermination du faraday avec une très grande précision est donc possible puisque les masses atomiques de la plupart des éléments sont très bien connues et qu'une quantité d'électricité est susceptible d'être mesurée avec une très faible incertitude (l'intensité i à l'aide d'un électrodynamomètre). En fait, la principale cause d'incertitude provient de la difficulté d'éviter toute réaction secondaire affectant même une faible partie de l'électrolyte; aussi le nombre d'électrolytes utilisables est-il très restreint.

Les déterminations de F ont surtout mis en œuvre le dépôt cathodique d'argent du nitrate d'argent et le dépôt anodique d'iode d'un iodure. Une étude critique des résultats a conduit à admettre la valeur actuellement *considérée comme la plus probable*,

$$F = (96\,490 \pm 10) \text{ coulombs},$$

avec une incertitude relative vraisemblablement inférieure à 10^{-4} .

Le nombre d'Avogadro a été déterminé par des méthodes variées de précisions très inégales; la valeur actuellement admise,

$$N = 6,023 \cdot 10^{23},$$

est déduite de l'étude de cristaux aux rayons X.

Des valeurs de F et de N on déduit la valeur de la charge élémentaire

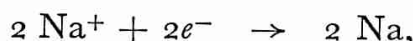
$$e = (1,602\,0 \pm 0,000\,4) 10^{-19} \text{ coulomb},$$

connue avec une précision de l'ordre de quelques dix-millièmes, précision bien meilleure que celle permise par l'expérience de Millikan.

21-5. Actions secondaires. Applications de l'électrolyse.

1° Considérons quelques cas simples d'électrolyses de composés binaires sans actions secondaires autres que la décharge d'ions complexes.

Chlorure de sodium fondu ($t > 800\text{ }^{\circ}\text{C}$), la cathode est en fer, l'anode en graphite. A la cathode



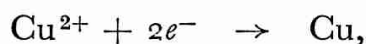
le sodium fondu est recueilli à l'abri de l'air; à l'anode



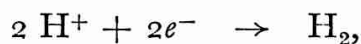
le chlore se dégage.

L'électrolyse de chlorures métalliques fondus est utilisée pour l'obtention de quelques métaux qui, comme le sodium, sont plus électropositifs que l'hydrogène : du calcium à partir du chlorure de calcium CaCl_2 fondu ($t \simeq 800\text{ }^{\circ}\text{C}$), du magnésium à partir du chlorure de magnésium MgCl_2 fondu ($t \simeq 750\text{ }^{\circ}\text{C}$).

Dans les exemples précédents, le processus, très simple, est un échange électronique, il y a *oxydation anodique* (libération de chlore à partir de Cl^-) et *réduction cathodique* (libération du métal à partir de l'ion électropositif). Il en est de même dans l'électrolyse de chlorures de métaux nettement moins électropositifs que l'hydrogène et de l'acide chlorhydrique lorsqu'on opère en solution avec une anode inattaquable par le chlore. Par exemple, pour le chlorure cuivrique, à la cathode



le cuivre se dépose; pour la solution chlorhydrique,



de l'hydrogène se dégage.

L'électrolyse de l'alumine pure anhydre Al_2O_3 utilisée pour la fabrication de l'aluminium est déjà plus compliquée car elle nécessite l'addition d'un fondant, la cryolithe $\text{Na}_3(\text{AlF}_6)$, qui abaisse la température de fusion au voisinage de $950\text{ }^{\circ}\text{C}$ et qui intervient dans le processus de l'électrolyse. En définitive l'aluminium se forme à la cathode tandis que l'oxygène brûle l'anode en charbon en donnant de l'oxyde de carbone CO et du gaz carbonique CO_2 .

Les électrolyses précédentes sont utilisées pour l'obtention de métaux.

Ajoutons un dernier exemple, celui de la fabrication du sodium pur par *électrolyse de la soude fondue* à $330\text{ }^{\circ}\text{C}$ (procédé Castner); il y a oxydation anodique :



Dans toutes ces électrolyses il est essentiel que les compartiments anodique et cathodique soient bien séparés pour éviter l'action du métalloïde (chlore ou oxygène) sur le métal.

2° Électrolyses avec actions secondaires.

Le processus global et les résultats d'une électrolyse peuvent dépendre de la nature des électrodes, des conditions où se trouve placé l'électrolyte (concentration, température, compartiments anodique et cathodique séparés ou non). Nous avons retenu un certain nombre d'exemples susceptibles d'applications en électrochimie et en électrometallurgie. Le plus souvent on choisit des électrodes qui n'interviennent pas dans le mécanisme de l'électrolyse (électrodes passives).

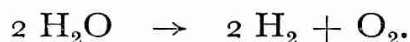
a) *Electrolyse d'une solution de soude.* Les électrodes, en fer, sont passives. Il se produit à la cathode :



à l'anode :



Le bilan est en définitive la décomposition de l'eau,



La conduction est bien assurée par les ions Na^+ et OH^- mais la concentration globale en soude ne change pas. Cependant, les ions OH^- disparaissant à l'anode, apparaissant à la cathode, les concentrations locales au voisinage des électrodes tendent à varier, à augmenter près de la cathode, à diminuer près de l'anode. Pratiquement les courants de convection, favorisés par l'élévation de la température, assurent une uniformisation suffisante de la concentration dans le bain.

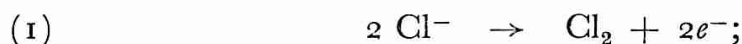
Cette électrolyse est utilisée industriellement à la fabrication de l'hydrogène.

L'électrolyse d'une solution d'acide sulfurique avec électrodes en platine revient également à la décomposition de l'eau, les ions SO_4^{2-} et H^+ étant les ions conducteurs. L'acidité reste bien constante dans l'ensemble mais elle tend à augmenter près de la cathode, à diminuer près de l'anode.

b) *Electrolyse du chlorure de sodium en solution* (électrodes passives).

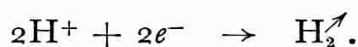
Supposons tout d'abord que les compartiments anodique et cathodique soient séparés (par un diaphragme par exemple).

A l'anode se déchargent les ions conducteurs :

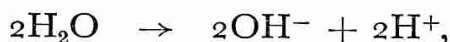


le chlore se dégage pratiquement en totalité.

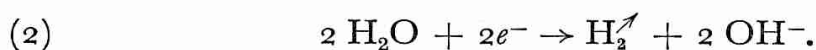
Les électrons fournis par la cathode sont captés par les ions H^+ de l'eau et non pas par les ions conducteurs Na^+ , parce que l'hydrogène est moins électropositif (plus électronégatif) que le sodium :



L'équilibre ionique de l'eau (faiblement ionisée) se trouve ainsi déplacé, des molécules d'eau s'ionisent,



de façon à alimenter les électrons d'une façon continue en ions H^+ . Le processus cathodique est donc

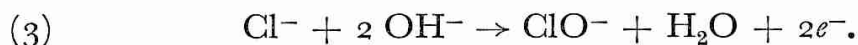


Comme les ions Na^+ sont les cations conducteurs, il en résulte qu'au dégagement de Cl_2 à l'anode correspond à la cathode la formation de 2OH^- et l'arrivée de 2Na^+ (non modifiés), autrement dit il se forme de la soude dans le compartiment cathodique en même temps qu'il se dégage de l'hydrogène à la cathode. Le bilan global de l'électrolyse s'obtient en additionnant (1) et (2) :



on prépare simultanément de l'hydrogène, du chlore et de la soude.

Supposons maintenant que l'on favorise l'homogénéisation de la solution maintenue à 20 °C par une circulation d'eau froide dans un serpentín. Les phénomènes ne sont pas modifiés à la cathode (2), où de l'hydrogène se dégage tandis qu'apparaissent des ions OH^- qui sont répartis dans tout le volume de l'électrolyte. Les anions conducteurs sont donc Cl^- et OH^- , leur décharge à l'anode donne



Le bilan global est obtenu par addition de (2) et (3) :

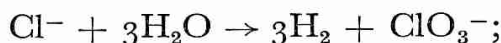


les ions Na^+ n'ayant joué aucun rôle sinon celui de cations conducteurs. On obtient ainsi une solution d'hypochlorite de sodium (ion hypochlorite ClO^-).

Si l'on opère à 50 °C, la réaction anodique



supplante la réaction (2) et le bilan global devient



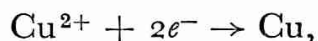
on obtient une solution de chlorate de sodium.

L'électrolyse d'une solution de chlorure de sodium dans des conditions différentes nous montre que

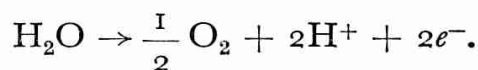
Il n'y a pas en fait de réactions secondaires mais bien des mécanismes différents de décharge d'ions.

c) *Electrolyse d'une solution d'un sel avec anode en métal du sel (anode soluble).*

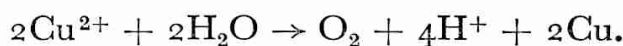
L'électrolyse d'une solution de sulfate de cuivre avec électrodes de platine donne à la cathode



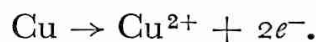
à l'anode (les ions SO_4^{2-} étant cependant les anions transporteurs)



Il y a dépôt de cuivre sur la cathode, la concentration en ions Cu^{2+} diminue au voisinage de la cathode alors que l'acidité augmente au voisinage de l'anode où la concentration (SO_4^{2-}) augmente en même temps que celle des ions H^+ . Si l'on assure l'homogénéité du bain, à la disparition de Cu^{2+} dans la masse correspond l'apparition de 2H^+ ; le bilan de l'électrolyse est



Le processus anodique est modifié si l'anode est en cuivre, on a alors



La concentration (Cu^{2+}) décroît près de la cathode, s'accroît près de l'anode, la concentration globale restant constante. Si l'on homogénéise la solution, le seul phénomène est un transport de cuivre de l'anode sur la cathode (laquelle peut également être en cuivre).

On obtient des résultats semblables lorsqu'on électrolyse une solution d'un sel avec une anode en métal de ce sel. L'élément passe de l'état cation à l'état métal à la cathode (réduction cathodique), et c'est le passage inverse qui se produit à l'anode (oxydation anodique).

Les électrolyses de ce dernier type sont importantes au point de vue des applications : elles sont mises en œuvre en métallurgie pour l'affinage et la préparation des métaux (cuivre, zinc, fer, ... électrolytiques), et permettent également d'obtenir des dépôts métalliques (argenture, chromage, nickelage, ...).

21-6. Conductivité des solutions d'électrolytes.

Les ions étant les véhicules du transport des charges dans le passage du courant dans un électrolyte, il est à prévoir que les concentrations ioniques doivent jouer un rôle essentiel dans la conduction électrolytique. Nous allons tout d'abord rappeler ou préciser quelques définitions et en donner de nouvelles.

1° Concentrations équivalentes. Conductivité équivalente.

Considérons une solution d'un électrolyte comprise entre deux électrodes planes et parallèles distantes de l ; établissons entre celles-ci une différence de potentiel constante U . En première approximation le champ électrique E ainsi créé entre les électrodes peut être considéré comme uniforme : $E = \frac{U}{l}$.

En un point le vecteur densité de courant j est lié au vecteur champ électrique par la relation d'Ohm

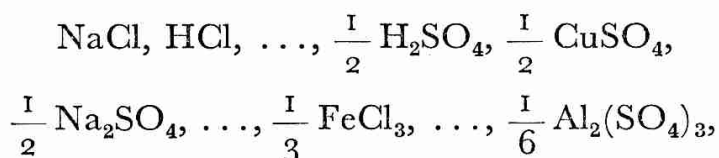
$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

dans laquelle γ est la conductivité de la solution à la température de l'expérience.

Soit s une petite surface plane disposée normalement au champ dans une région assez éloignée des électrodes pour que, si l'électrolyse n'est pas trop prolongée, nous puissions supposer constantes les concentrations ioniques (21-4, 1°). γ et j sont alors constants et l'intensité i du courant à travers s est

$$(1) \quad i = js = \gamma s E.$$

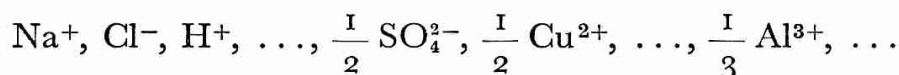
Donnons maintenant des définitions relatives aux concentrations. Un *équivalent-gramme* (nous dirons par la suite plus simplement : équivalent) de l'électrolyte est la masse de cet électrolyte décomposée par un faraday. Soit ν le nombre de charges (de faradays) portées par chacun des types d'ions qui constituent une mole; un équivalent d'électrolyte est $\frac{M}{\nu}$, M étant la masse molaire. Par exemple



sont des équivalents.

La concentration équivalente C_0 d'une solution est mesurée par le nombre d'équivalents par unité de volume de solution. Comme nous utilisons le système S.I., nous l'exprimons en équivalents par mètre cube alors que les chimistes expriment la concentration molaire c en moles par litre; nous avons donc $C_0 = 1000 \nu c$.

Etendons la définition d'un équivalent aux ions; par exemple



sont des équivalents d'ions. Les concentrations ioniques équivalentes

sont égales à C_0 si l'électrolyte est entièrement ionisé. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi (cas d'un électrolyte faible) et soit α la fraction ionisée, rapport du nombre de molécules ionisées au nombre total de molécules (ionisées ou non); les concentrations équivalentes des deux types d'ions sont égales à $C = \alpha C_0$, α étant fonction de C_0 .

Revenons à la conduction ionique. Par définition, la grandeur $\Lambda = \frac{\gamma}{C_0}$ est la conductivité équivalente de la solution.

Nous avons, d'après (1),

$$(2) \quad i = \Lambda C_0 E.$$

2° Mobilités des ions. Loi de Kohlrausch.

Cherchons, moyennant quelques hypothèses, à analyser le mécanisme de la conduction.

Sous l'action du champ électrique un ion est soumis à une force constante, proportionnelle à E , qui tend à l'entraîner dans le sens du champ ou dans le sens inverse suivant qu'il s'agit d'un cation ou d'un anion. Son mouvement est contrarié par des rencontres avec les particules présentes dans le milieu et particulièrement avec les molécules d'eau qui sont les plus nombreuses, cette gêne se traduit par une force résistante proportionnelle au coefficient de viscosité de l'eau et à la vitesse de l'ion. Dans ces conditions la vitesse atteint très vite une valeur limite v proportionnelle au champ E (sinon d'ailleurs la loi d'Ohm se trouverait en défaut). Nous avons respectivement pour le cation et l'anion

$$v_+ = u_+ E \quad \text{et} \quad v_- = u_- E;$$

par définition u_+ et u_- sont les mobilités du cation et de l'anion. Elles s'expriment, dans le système S.I. en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$.

On admet, dans une théorie simplifiée, que la mobilité d'un ion, indépendante de la concentration, ne dépend que de la nature de l'ion et de la température. Indiquons dès maintenant quelle est l'influence de la température. Une élévation de température entraîne une diminution de la viscosité de l'eau et par suite l'accroissement des mobilités. Or, nous allons voir que la conductivité est proportionnelle à la somme des mobilités des deux types d'ions, elle croît donc avec la température. L'expérience vérifie cette prévision.

Déterminons maintenant l'intensité i du courant à travers la surface s . Celle-ci est traversée, au cours d'une seconde, par la charge q_+ transportée par les cations dans le sens du courant et par la charge q_- , négative, transportée en sens inverse par les anions. Ce dernier transport équivaut à celui de la charge $-q_-$ (positive) dans le sens du courant, et nous avons donc

$$i = q_+ - q_-.$$

Les charges volumiques, positive due aux cations, négative due aux anions, sont égales en valeur absolue à $q = CF = \alpha C_0 F$.

q_+ est la charge positive qui, au début d'une seconde, se trouvait dans un volume cylindrique de section s , de longueur égale à v_+ ; nous avons donc

$$q_+ = qsv_+ = \alpha C_0 F s E u_+,$$

et, de même,

$$q_- = -\alpha C_0 F s E u_-.$$

Par suite

$$i = \alpha C_0 F s E (u_+ + u_-),$$

d'où, en tenant compte de l'expression (2) de i ,

$$(3) \quad \Lambda = \alpha F (u_+ + u_-) = \Lambda_+ + \Lambda_-.$$

$\Lambda_+ = \alpha F u_+$ et $\Lambda_- = \alpha F u_-$ sont les conductivités équivalentes du cation et de l'anion, proportionnelles à la fraction ionisée α et à la mobilité de l'ion correspondant.

L'expression (3) de Λ constitue la loi d'additivité de Kohlrausch :

La conductivité équivalente d'une solution d'un électrolyte est la somme de deux termes, l'un relatif au cation, l'autre relatif à l'anion.

Tout se passe comme si le courant i était la somme de deux courants du même sens que i (courants équivalant au transport des deux types d'ions), l'électrolyte ayant des conductivités différentes γ_+ et γ_- pour ces deux courants :

$$\gamma = \gamma_+ + \gamma_-,$$

dont le rapport est égal à celui des mobilités correspondantes :

$$\frac{\gamma_+}{\gamma_-} = \frac{\Lambda_+}{\Lambda_-} = \frac{u_+}{u_-}.$$

3° Conductivités équivalentes limites.

Faisons tendre la concentration C_0 vers zéro : la fraction ionisée α tend vers 1 d'après la loi de dilution d'Ostwald; γ tendant vers zéro (l'eau rigoureusement pure ayant une conductivité très faible) avec C_0 , la conductivité équivalente $\Lambda = \frac{\gamma}{C_0}$ tend vers une limite finie Λ_0 qui, toujours dans l'hypothèse où les mobilités sont indépendantes de la concentration, est donnée par la relation (3); nous avons

$$\Lambda_0 = F(u_+ + u_-) = \Lambda_0^+ + \Lambda_0^-.$$

Λ_0 est la conductivité équivalente limite de l'électrolyte, Λ_0^+ et Λ_0^- sont les concentrations équivalentes limites du cation et de l'anion. Ces grandeurs sont respectivement proportionnelles, avec le même facteur de proportionnalité $F = 96\,500$, la première à la somme des mobilités des ions, les deux autres à la mobilité de l'ion correspondant.

En fonction des grandeurs limites la relation (3) relative à une solution de concentration C_0 s'écrit

$$\Lambda = \alpha \Lambda_0 = \alpha(\Lambda_0^+ + \Lambda_0^-) = \alpha F(u_+ + u_-).$$

La conductivité équivalente limite et la mobilité d'un ion déterminé ne dépendent que de la température (elles croissent rapidement avec elles). L'expérience doit permettre de dresser un tableau des conductivités équivalentes limites (ou de leurs mobilités) à une température donnée. Donnons quelques valeurs numériques à 25 °C :

L'ion H^+ est celui qui a la plus grande mobilité; dans le système S.I.,

$$u_+ = 34 \cdot 10^{-8}; \quad \Lambda_0^+ = 0,0328.$$

Pour $E = 100 \text{ V.m}^{-1}$, la vitesse de l'ion H^+ est

$$v_+ = 3,28 \cdot 10^{-5} \text{ m.s}^{-1} = 32,8 \mu \cdot \text{s}^{-1}.$$

La mobilité de l'ion Cl^- est environ cinq fois plus faible :

$$u_- = 7 \cdot 10^{-8}; \quad \Lambda_- = 0,0068.$$

La conductivité équivalente limite d'une solution chlorhydrique est donc

$$\Lambda_0 = 0,0396 \simeq 0,04;$$

pour une solution centinormale, $C_0 = 10 \text{ équivalents.m}^{-3}$; par suite, la solution pouvant être considérée comme complètement ionisée ($\alpha = 1$),

$$\gamma = 0,4 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}; \quad \rho = 2,5 \Omega \cdot \text{m}.$$

4° Mesure des mobilités. Électrolytes faibles et électrolytes forts.

Le résultat le plus remarquable auquel conduit la théorie simple précédente (théorie d'Arrhénius) est que *la conductivité d'un ion est indépendante de l'électrolyte qui le fournit, autrement dit indépendante de la nature de l'ion qui lui est associé.*

Les vérifications expérimentales sont basées sur des mesures de mobilités. Une méthode consiste à mesurer des conductivités équivalentes et à passer à la limite pour la concentration nulle; elle comporte donc une extrapolation qui, nous le verrons, n'est pas toujours possible. Il existe des méthodes plus directes dont nous nous bornons à donner le principe :

a) *Méthode de la surface de séparation mobile.*

Par exemple, pour mesurer $u_{H^+} = \frac{v_{H^+}}{E}$ et par suite $\Lambda_0^+ = F u_{H^+}$, on

détermine directement la vitesse des ions H^+ soumis à un champ électrique connu E , dans un siphon (fig. 185) qui relie deux récipients contenant une solution sulfurique.

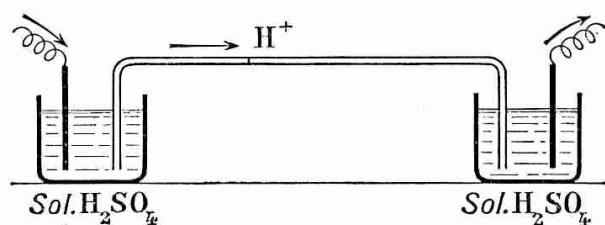


FIG. 185.

électrique connu E , dans un siphon (fig. 185) qui relie deux récipients contenant une solution sulfurique. Ce siphon contient une solution de chlorure de sodium à laquelle on a ajouté une goutte de soude et un peu de phtaléine. Les ions H^+ se déplaçant dans le sens

du courant, neutralisant les ions OH^- de la soude, ce qui décolore la phtaléine. Il suffit donc de mesurer la vitesse du déplacement de la frontière de décoloration.

La méthode s'applique aux ions colorés comme MnO_4^- (violet), Cu^{2+} (bleu), mais aussi aux ions incolores en suivant la progression, à l'aide d'un réfractomètre, de la frontière de variation d'indice de réfraction.

b) Méthode qui utilise le phénomène de Hittorf.

Prenons l'exemple simple de l'électrolyse d'une solution chlorhydrique, les compartiments cathodique et anodique étant restreints par des parois poreuses de façon à éviter la diffusion (fig. 186); la concentration

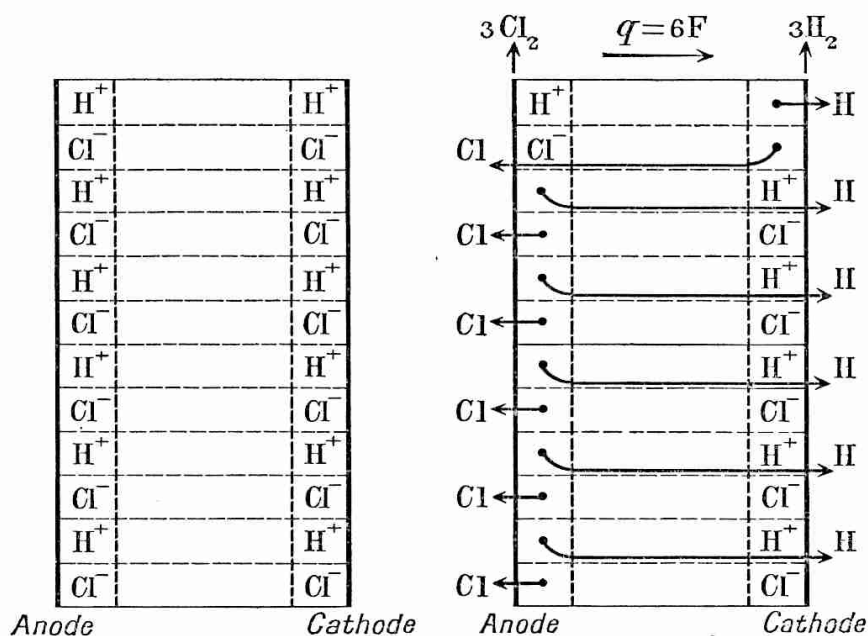


FIG. 186.

dans la région médiane ne varie pas. On a sensiblement $u_{H^+} = 5u_{Cl^-}$ et par suite $v_{H^+} = 5v_{Cl^-}$; l'appauvrissement en acide chlorhydrique est donc cinq fois plus rapide dans le compartiment cathodique que dans

le compartiment anodique. Les mobilités se déduisent de mesures de variations de concentrations dans les deux compartiments (phénomène de Hittorf).

Les résultats fournis par ces méthodes et par des mesures de conductivité permettent de fixer les limites de validité de la théorie d'Arrhénius et ont conduit à rechercher des théories qui soient en meilleur accord avec l'expérience (théorie de Debye et Hückel). Il importe de distinguer deux cas, celui des électrolytes forts et celui des électrolytes faibles.

a) *Électrolytes forts.*

Pour les électrolytes forts les mobilités des ions ne peuvent plus être considérées comme constantes, elles augmentent lorsque la concentration diminue. On peut donner de ce phénomène l'explication suivante. On suppose que l'ionisation est toujours totale ($\alpha = 1$) et qu'il faut tenir compte, dans la limitation de la vitesse d'un ion, non seulement de l'action retardatrice des molécules du solvant, mais aussi de celle des ions de signe contraire qui tendent, par attraction électrique, à s'agglomérer autour de lui. Cette gêne supplémentaire causée par les ions de signes contraires tend à disparaître quand la concentration tend vers zéro et la mobilité de l'ion doit tendre en décroissant vers une limite qui est la valeur prévue par la théorie d'Arrhénius; il en découle que les conductivités équivalentes Λ_+ , Λ_- et Λ qui en est la somme doivent tendre, en décroissant, vers les valeurs limites Λ_0^+ , Λ_0^- et Λ_0 .

La théorie de Debye et Hückel conduit à l'expression

$$(1) \quad \Lambda = \Lambda_0 - a \sqrt{C_0}.$$

pour les concentrations pas trop fortes. Cette formule, bien vérifiée par l'expérience, permet de mesurer les conductivités équivalentes limites

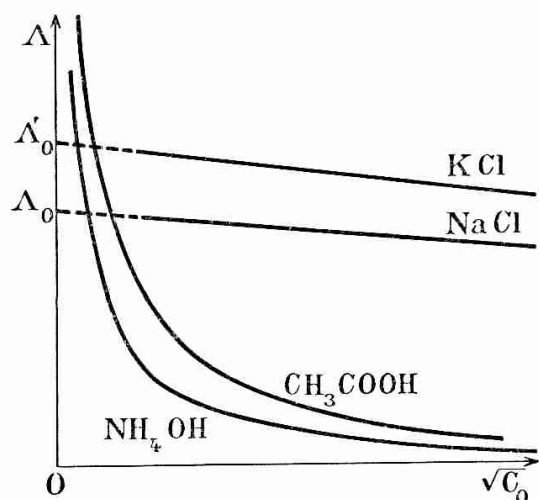


FIG. 187.

des électrolytes forts par des mesures de conductivités. En effet, si l'on porte $\sqrt{C_0}$ en abscisse et Λ en ordonnée, on obtient une droite de pente négative peu inclinée sur l'axe des abscisses; l'ordonnée à l'origine, obtenue par extrapolation, est Λ_0 (fig. 187). La connaissance de conductivités équivalentes limites d'ions, obtenues par des mesures directes de mobilités, permet d'obtenir les valeurs des Λ_0^+ et Λ_0^- pour les ions forts par application de la loi d'additivité de Kohlrausch, par exemple,

$$\Lambda_0(\text{Cl}^-) = \Lambda_0(\text{HCl}) - \Lambda_0(\text{H}^+); \quad \Lambda_0(\text{Na}^+) = \Lambda_0(\text{NaCl}) - \Lambda_0(\text{Cl}^-).$$

b) *Électrolytes faibles.*

Considérons un électrolyte faible uni-univalent comme l'acide acétique; nous avons l'équilibre ionique en solution



La loi de dilution d'Ostwald

$$\frac{C_0 \alpha^2}{1 - \alpha} = K,$$

qui résulte de l'application de la loi d'action de masse, prend la forme

$$\frac{C_0 \Lambda^2}{\Lambda_0^2 - \Lambda \Lambda_0} = K,$$

en tenant compte de la relation $\Lambda = \alpha \Lambda_0$ donnée par la théorie d'Arrhénius.

Les mesures de conductivité montrent que cette formule est bien vérifiée pour les électrolytes faibles si les concentrations ne sont pas trop fortes. La théorie d'Arrhénius est donc vérifiée. On le comprend puisque l'électrolyte est faiblement ionisé; les ions étant peu nombreux, il est possible de négliger leur gêne mutuelle, et ceci reste vrai lorsque la concentration tend vers zéro bien que la fraction ionisée tende vers 1.

La formule (1) n'est plus valable puisque celle-ci supposait $\alpha = 1$ quelle que soit la concentration. Elle reste cependant applicable sous la forme (formule d'Onsager)

$$\Lambda = \alpha(\Lambda_0 - a\sqrt{\alpha C_0}),$$

mais, α variant avec C_0 , la courbe $\Lambda = f(\sqrt{C_0})$ n'est plus une droite (fig. 187) et l'extrapolation à la concentration nulle pour déterminer Λ_0 n'est plus possible.

Les conductivités équivalentes limites des électrolytes faibles se déduisent toutefois des résultats de mesures effectuées avec les électrolytes forts par application de la loi d'additivité de Kohlrausch, par exemple

$$\begin{aligned} \Lambda_0(\text{CH}_3\text{COOH}) &= \Lambda_0(\text{HCl}) + \Lambda_0(\text{CH}_3\text{COONa}) - \Lambda_0(\text{NaCl}), \\ \Lambda_0(\text{CH}_3\text{COO}^-) &= \Lambda_0(\text{CH}_3\text{COONa}) - \Lambda_0(\text{Na}^+). \end{aligned}$$

CHAPITRE XXII

ACTION D'UN CHAMP ÉLECTRIQUE ET D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR DES PARTICULES ÉLECTRISÉES

22-1. Les particules électrisées.

Les deux particules électrisées les plus simples sont :

L'électron, corpuscule portant la charge élémentaire; sa masse au repos est

$$m_0 = 9,10 \cdot 10^{-31} \text{ kg.}$$

Le proton, corpuscule positif, porteur d'une charge élémentaire. C'est un atome de protium ou hydrogène léger ${}^1\text{H}$, dépourvu de son unique électron; sa masse est environ 1 835 fois celle de l'électron. On le représente par ${}^1\text{H}^+$ ou plus simplement par H^+ .

Le proton est le plus simple des ions positifs; comparé à l'électron c'est un corpuscule lourd. Les ions positifs en général sont encore plus lourds, ils proviennent d'atomes ou de molécules ayant perdu un ou plusieurs électrons; leur charge, positive, est mesurée en charges élémentaires par le nombre d'électrons manquants, leur masse est sensiblement celle de l'atome, ou de la molécule, correspondant. Avec le proton les ions positifs les plus importants sont :

Le deutéron ou deuton, formé par le noyau de deutérium ou hydrogène lourd ${}^2\text{H}$ ou ${}^2\text{D}$. Il est constitué par un proton et un neutron; il porte une charge élémentaire positive et sa masse est environ deux fois celle du proton. On le représente par ${}^2\text{H}^+$ ou plus simplement par D^+ .

L'hélion (constituant du rayonnement α des corps radioactifs) est le noyau d'hélium ${}^4\text{He}$. Il est formé de deux protons et de deux neutrons; il porte deux charges élémentaires positives et sa masse est environ quatre fois celle du proton. On le représente par ${}^4\text{He}^{2+}$ ou plus simplement par He^{2+} .

Nous avons employé les termes « léger » et « lourd » comme qualificatifs de la masse et non pas du poids. Dans tout ce qui suit, le poids d'une particule électrisée est toujours négligeable par rapport aux forces électriques ou électromagnétiques agissant sur elle. Par exemple, un deuton, placé dans un champ électrique de 1 kV.m^{-1} , est soumis à la force

$$F = eE = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3 = 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ N},$$

alors que son poids est

$$P = 2 \times 1\,835\, m_0 g = 9,1 \cdot 10^{-31} \times 3\,670 \times 9,8 \simeq 3,27 \cdot 10^{-26} \text{ N},$$

par suite $\frac{F}{P} \simeq 5 \cdot 10^9$.

22-2. Énergie cinétique d'une particule électrisée soumise à une différence de potentiel accélératrice. Variation relativiste de la masse.

1° Mécanique newtonienne.

Soit une particule de masse au repos m_0 , portant la charge q , en mouvement dans un champ électrique

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V.$$

Nous admettons tout d'abord, comme on le fait en *mécanique newtonienne*, que la masse est indépendante de la vitesse.

La particule est soumise à la force

$$\vec{F} = q\vec{E} = - q \overrightarrow{\text{grad}} V.$$

Si $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ est sa vitesse à l'instant t , l'application du théorème des forces vives entre les instants t et $t + dt$ donne

$$dW = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{F} \cdot d\vec{s} = - q \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{s}.$$

Comme le champ électrique dérive du potentiel V , la variation de l'énergie cinétique de la particule entre les instants t_0 et t est

$$\Delta W = \frac{1}{2} m_0 (v^2 - v_0^2) = - q \int_{V_0}^V \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{s} = - q(V - V_0),$$

ou encore, si $U = -(V - V_0)$ est la diminution du potentiel (chute

de potentiel) correspondant aux deux positions de la particule aux instants t_0 et t ,

$$\Delta W = \frac{1}{2} m_0 (v^2 - v_0^2) = qU.$$

Dans le cas particulier où la vitesse initiale (à l'instant $t_0 = 0$) est nulle, l'énergie cinétique de la particule à l'instant t est

$$(1) \quad W = \frac{1}{2} m_0 v^2 = qU.$$

Cette formule est valable en grandeur et en signe; si q est positif, la particule se déplace dans le sens du champ, c'est-à-dire dans le sens des potentiels décroissants et U est positif (il y a chute de potentiel dans le sens du mouvement) et inversement, si q est négatif (cas de l'électron), la particule « remonte les potentiels », U est négatif.

2° Mécanique relativiste.

Certains corpuscules électrisés, les plus légers et en particulier les électrons, acquièrent des vitesses assez voisines de la vitesse de la lumière sous l'action de tensions accélératrices suffisamment élevées. L'expérience montre que les vitesses calculées sont alors supérieures aux vitesses mesurées et que la mécanique newtonienne ne constitue qu'une approximation, approximation d'autant plus grossière que la vitesse est plus élevée.

La mécanique relativiste fournit la solution correcte de ce problème en attribuant à la masse une valeur croissante avec la vitesse suivant la relation

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

dans laquelle c est la célérité de la lumière dans le vide.

D'après cette même théorie, l'énergie de masse de la particule, minimale au repos et égale à $m_0 c^2$, est mc^2 lorsque sa vitesse est v . L'accroissement de cette énergie de masse

$$W = (m - m_0) c^2,$$

égale à l'énergie qU reçue par la particule, est son énergie cinétique correspondant à la vitesse v ; son expression est donc

$$(2) \quad W = (m - m_0) c^2 = m_0 c^2 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] = qU,$$

ou encore, en posant $\alpha = \frac{q}{m_0 c^2} \left(\frac{I}{\alpha} \right.$ est homogène à une différence de potentiel),

$$(3) \quad \frac{v_R}{c} = \frac{\sqrt{\alpha U (\alpha U + 2)}}{\alpha U + 1},$$

v_R étant la vitesse donnée par la mécanique relativiste.

La mécanique newtonienne donne, d'après la relation (1),

$$(1)' \quad \frac{v_N}{c} = \sqrt{2\alpha U}.$$

Les deux relations (3) et (1)' sont équivalentes pour les faibles valeurs de U ; par contre l'écart entre v_N et v_R s'accroît avec U . Lorsque U tend vers l'infini, v_N tend vers l'infini alors que v_R tend vers c :

La mécanique relativiste fixe donc une limite à la vitesse d'une particule, et cette limite est la vitesse de la lumière dans le vide.

Cas des électrons.

$$\alpha = \frac{e}{m_0 c^2} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31} \times 9 \cdot 10^{16}} = 1,95 \cdot 10^{-6} \simeq 2 \cdot 10^{-6} \text{ V}^{-1}.$$

La mécanique newtonienne donne, d'après (1)',

$$\frac{v_N}{c} = 2 \cdot 10^{-3} \sqrt{U},$$

et, si v_N est exprimée en kilomètres par seconde,

$$v_N = 600 \sqrt{U}.$$

La mécanique relativiste donne, d'après (3),

$$\begin{aligned} \frac{v_R}{c} &= \frac{\sqrt{2 \cdot 10^{-6} U (2 \cdot 10^{-6} U + 2)}}{2 \cdot 10^{-6} U + 1} \\ &= 2 \cdot 10^{-3} \sqrt{U} \frac{\sqrt{10^{-6} U + 1}}{2 \cdot 10^{-6} U + 1} = \frac{v_N}{c} \frac{\sqrt{10^{-6} U + 1}}{2 \cdot 10^{-6} U + 1}, \end{aligned}$$

d'où l'expression de v_R en kilomètres par seconde :

$$v_R = v_N \frac{\sqrt{10^{-6} U + 1}}{2 \cdot 10^{-6} U + 1} = 600 \sqrt{U} \frac{\sqrt{10^{-6} U + 1}}{2 \cdot 10^{-6} U + 1}.$$

Remarquons, d'après la relation (2), que l'énergie cinétique W

de la particule est égale à son énergie de masse au repos $W_0 = m_0 c^2$, et par suite que son énergie de masse est égale à $mc^2 = 2m_0 c^2$, si l'on a $\frac{m}{m_0} = 2$, ce qui correspond à

$$\frac{v_R}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866,$$

soit à une vitesse d'environ 260 000 km.s⁻¹ et à une tension accélératrice de l'ordre de 500 000 volts.

Les résultats donnés par le tableau ci-dessous et les courbes de la figure 188 ont été établis pour l'électron en prenant pour vitesse de la

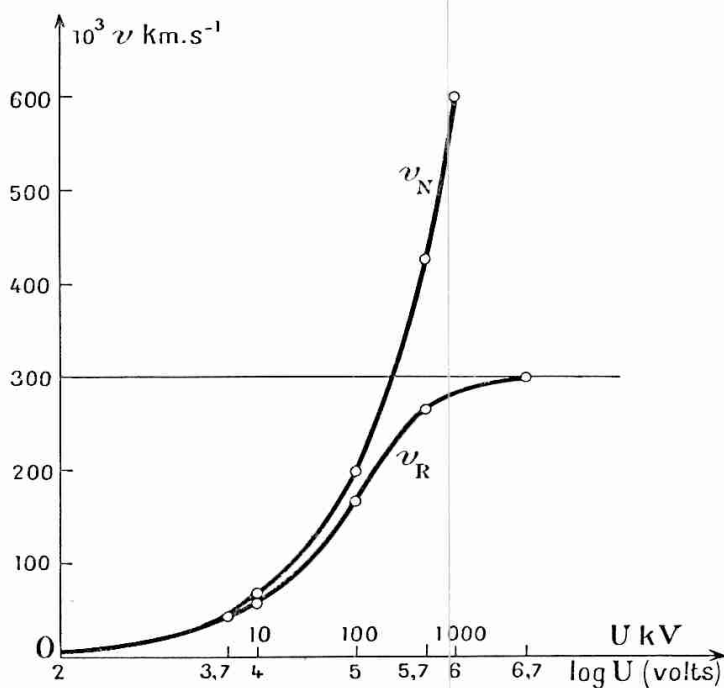


FIG. 188.

lumière dans le vide $c = 300\,000$ km.s⁻¹, les tensions sont données en kilovolts, les vitesses en kilomètres par seconde :

U	5	10	100	500	1 000	5 000
v_N	42 000	60 000	190 000	425 000	600 000	$1,35 \cdot 10^6$
v_R	42 000	58 600	165 500	260 000	283 000	299 700
$\frac{v_N - v_R}{v_R}$...	0,00	0,024	0,15	0,63	2,1	3,5

Ces résultats nous montrent que l'approximation newtonienne est acceptable pour des tensions accélératrices inférieures à 10 000 volts; très grossière ensuite jusque vers 100 000 volts, elle devient inacceptable au-dessus. On conçoit la nécessité d'utiliser la mécanique relativiste pour les calculs relatifs aux accélérateurs d'électrons.

Cas des ions positifs.

Plaçons-nous dans le cas de l'ion positif le plus léger, le proton. Comme sa masse est 1 835 fois celle de l'électron, nous utilisons (1)' et (3) en remplaçant α par $\alpha' = \frac{\alpha}{1\,835}$ puisque la charge a la même valeur absolue e . Nous avons

$$\alpha' = \frac{1,95 \cdot 10^{-6}}{1\,835} = 1,06 \cdot 10^{-9} \text{V}^{-1},$$

$$\frac{v_N}{v_R} = \sqrt{2} \frac{\alpha' U + 1}{\sqrt{\alpha' U + 2}} = \frac{\alpha' U + 1}{\sqrt{0,5 \alpha' U + 1}}.$$

Effectuons tout d'abord le calcul pour $U = 5 \cdot 10^6$ volts, nous avons $\alpha' U = 5,3 \cdot 10^{-3}$, petit par rapport à l'unité; par suite

$$\frac{v_N}{v_R} \simeq 1 + 0,75 \alpha' U = 1,004.$$

v_N ne diffère donc de v_R que de $4 \cdot 10^{-3}$ en valeur relative; cet écart peut sembler négligeable. Toutefois, dans les accélérateurs d'ions positifs comme le cyclotron (Ex. 43, 60), les particules subissent une série d'impulsions à intervalles de temps réguliers, il y a lieu de tenir compte de v_R pour maintenir le synchronisme (synchrocyclotron).

Les Etats n'autorisent pas la divulgation de tous les résultats obtenus dans le domaine de l'énergie atomique; il paraît cependant certain que l'on a réalisé des accélérateurs de particules fournissant des tensions d'accélération dont les effets cumulatifs atteignent plusieurs centaines de millions de volts (400 MV pour le synchrocyclotron de Berkeley aux États-Unis). Pour des hélions dont la masse est 4 fois celle du proton et dont la charge est $2e$, nous avons

$$\alpha'' = \frac{\alpha'}{2} = 0,53 \cdot 10^{-9} \text{V}$$

et, pour

$$U = 400 \text{ MV} = 4 \cdot 10^8 \text{ V},$$

$$\alpha'' U = 0,213; \quad \frac{v_N}{v_R} = 1,155.$$

L'approximation de la mécanique newtonienne n'est plus acceptable.

De la définition de l'électron-volt découle qu'un hélium par exemple, porteur de deux charges positives, acquiert une énergie de 2 keV sous l'action d'une tension d'un kilovolt.

L'énergie des corpuscules rapides ou très rapides s'exprime en mégaélectron-volts (1 MeV = 10^6 eV) et même en gigaélectron-volts (1 BeV ou 1 GeV = 10^9 eV, B signifiant billion).

En mécanique relativiste interviennent des expressions comme mc^2 qui sont homogènes à une énergie. Il est intéressant dans certains calculs de les exprimer en électron-volts. On a, W étant exprimé en électron-volts,

$$W = \frac{mc^2}{e} = 5,63 \cdot 10^{35} m.$$

Pour l'électron au repos

$$W_0 = 5,63 \cdot 10^{35} m_0 = 0,51 \cdot 10^6 \text{ eV} = 0,51 \text{ MeV},$$

cette énergie est augmentée de U électron-volts si l'électron est soumis à une tension de U volts.

Pour le proton au repos

$$W'_0 = 1835 W_0 = 9,36 \cdot 10^8 \text{ eV} = 0,94 \text{ GeV},$$

après avoir été soumis à une tension de 100 MV son énergie cinétique est de 100 MeV = 0,1 GeV et son énergie totale (énergie de masse), 1,04 GeV.

22-3 Action d'un champ électrique sur une particule électrisée.

Considérons au point O une particule électrisée animée à l'instant initial d'une vitesse v_0 parallèle à la direction Ox d'un champ électrique uniforme E . Elle est soumise à chaque instant à la force constante

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Plaçons-nous dans l'hypothèse où la mécanique newtonienne constitue une approximation suffisante; la masse m étant constante, nous avons

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{\gamma}.$$

Le mouvement de la particule est rectiligne et uniformément varié, et l'on a

$$x = \frac{1}{2} \gamma t^2 = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2; \quad v = v_0 + \gamma t = v_0 + \frac{qE}{m} t.$$

Le potentiel au point O étant pris pour zéro des potentiels et U étant le potentiel au point M atteint à l'instant t par la particule de vitesse v , le théorème des forces vives nous donne

$$(1) \quad qU = \frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2),$$

et, si la vitesse initiale est faible par rapport à la vitesse acquise,

$$(2) \quad qU = \frac{1}{2} mv^2.$$

On n'utilise pas en général un champ électrique uniforme mais un champ dont les surfaces équipotentielles présentent la symétrie de révolution par rapport à un axe. v étant alors la vitesse d'un corpuscule le long de cet axe, les relations (1) et (2) restent valables.

Ainsi, dans de nombreuses applications (oscilloscope et microscope électroniques, émetteurs et récepteurs de télévision), on utilise l'émission thermoélectronique, le flot d'électrons émis dans le vide étant diaphragmé, accéléré et focalisé par « un canon à électrons ».

La cathode émettrice C (fig. 189) est une petite surface métallique plane, recouverte d'une couche d'oxydes de baryum et de strontium; elle est portée à une température de l'ordre de 1 000 °C par un filament de nickel parcouru par un courant électrique (chauffage cathodique indirect). On peut la considérer comme un élément de surface équipotentielle au potentiel zéro.

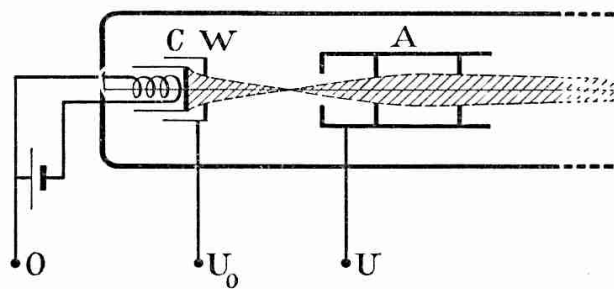


FIG. 189.

Les électrons émis par C sont en partie transmis par le *wehnelt* W formé d'une mince plaque portée à un potentiel réglable U_0 légèrement négatif par rapport à la cathode. En modifiant U_0 on règle la densité électronique du faisceau, le wehnelt fonctionnant comme un « robinet à électrons ». Les électrons issus du wehnelt ont de faibles vitesses; une anode cylindrique A munie de diaphragmes, portée à un potentiel positif élevé U (par exemple 1 500 volts), les accélère, diaphragme et focalise leur faisceau de sorte qu'on obtient à sa sortie un pinceau

délié d'électrons animés suivant l'axe de la même vitesse donnée par la relation $eU = \frac{1}{2}mv^2$. Ce pinceau « monocinétique » est focalisé sur un écran luminescent où il produit un spot ponctuel dans la direction de l'axe. L'anode, organe accélérateur d'électrons, joue donc en même temps le rôle de « lentille électrique ».

2° Champ électrique uniforme transversal.

a) Trajectoire.

Nous nous plaçons toujours dans les conditions (v assez petit par rapport à c) où la mécanique newtonienne constitue une approximation suffisante.

Le mouvement d'une particule électrisée soumise à un champ électrique uniforme parallèle à la vitesse initiale est semblable à celui d'un corps pesant lancé verticalement. D'une façon plus générale, lorsque les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{v}_0$ ne sont pas colinéaires, le mouvement est analogue à celui d'un projectile lancé dans le vide dans une direction quelconque, le champ électrique $\vec{E}$ jouant le rôle du champ de gravitation défini par le vecteur intensité de la pesanteur $\vec{g}$. Plaçons-nous dans le cas le plus important au point de vue pratique, celui où $\vec{E}$ est perpendiculaire (champ transversal) à $\vec{v}_0$.

Le champ électrique est celui d'un condensateur plan (fig. 190),

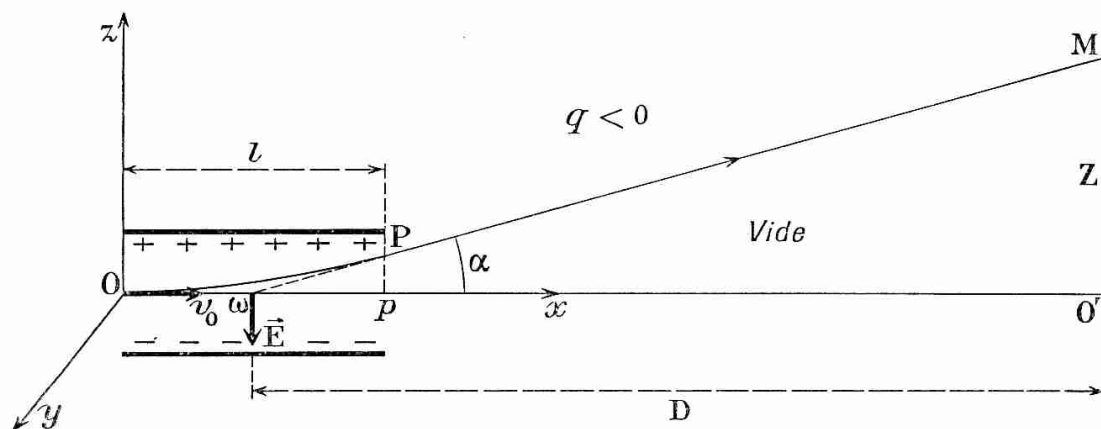


FIG. 190.

nous le supposons uniforme entre les armatures et nul dans tout l'espace extérieur. A l'instant initial la particule (charge q , masse m) pénètre en O à l'intérieur du condensateur, sa vitesse v_0 est dirigée suivant Ox . Tant que sa projection sur Ox ne dépasse pas l'abscisse l , elle est soumise à la force constante $\vec{F} = q\vec{E}$, verticale. Prenons pour plan xOz le plan

vertical qui contient $\vec{v}_0$ et $\vec{E}$. La composante suivant l'axe Oy de l'accélération

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q}{m} \vec{E}$$

est constamment nulle, la composante de v_0 suivant ce même axe est nulle également. Il en résulte que la trajectoire est plane, dans le plan xOz .

Les équations du mouvement sont

$$\begin{aligned} \gamma_x = \frac{d^2x}{dt^2} &= 0, & \frac{dx}{dt} &= v_0, & x &= v_0 t, \\ \gamma_z = \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{q}{m} E, & \frac{dz}{dt} &= \frac{q}{m} Et, & z &= \frac{1}{2} \frac{q}{m} Et^2. \end{aligned}$$

L'équation de la trajectoire, obtenue en éliminant t entre les expressions de x et de z ,

$$z = \frac{qE}{2mv_0^2} x^2,$$

est celle d'une parabole d'axe Oz , de tangente au sommet Ox .

b) *Déviation électrique.*

Soit P le point où la particule sort du condensateur. A partir de ce point, la force F cessant d'agir, la trajectoire est la tangente à la parabole; d'après une propriété de la sous-tangente, son prolongement rencontre l'axe Ox au point ω d'abscisse $\frac{l}{2}$, milieu de Op . L'ordonnée de P est

$$pP = \frac{qEl^2}{2mv_0^2}.$$

Nous avons, α étant la *déviation*, angle de la trajectoire rectiligne PM avec la direction initiale Ox ,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{pP}{Op} = El \frac{q}{mv_0^2}.$$

Imaginons qu'en O se succèdent des particules identiques de même vitesse initiale v_0 ; elles viennent frapper au même point M un écran luminescent placé normalement à Ox dans une position définie par $\omega O' = D$. Nous avons, $Z = O'M$ étant la *déviation sur l'écran*,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Z}{D} = El \frac{q}{mv_0^2},$$

d'où

$$Z = ElD \frac{q}{mv_0^2}.$$

Supposons que les particules arrivant en O soient des ions positifs de natures différentes, de deux types par exemple, caractérisés par m, q et m', q' ayant subi l'action de la même tension accélératrice U; nous avons

$$qU = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \text{et} \quad q'U = \frac{1}{2}m'v_0'^2;$$

par suite

$$\frac{q}{mv_0^2} = \frac{q'}{m'v_0'^2} = \frac{1}{2U}.$$

L'équation de la trajectoire, les expressions de $\text{tg } \alpha$ et de Z s'écrivent :

$$z = \frac{E}{4U}x^2, \quad \text{tg } \alpha = \frac{El}{2U}, \quad Z = \frac{ElD}{2U};$$

elles sont indépendantes de la nature des ions positifs; ainsi :

Des particules différentes, mais de même signe, ayant subi la même tension accélératrice, ont la même trajectoire dans le champ électrique.

Les particules viennent donc frapper l'écran luminescent au même point M après avoir suivi le même parcours; ce parcours commun est modifié par variation de la tension accélératrice U et par variation de la différence de potentiel entre les armatures du condensateur.

22-4. Action d'une induction magnétique sur une particule électrisée en mouvement.

1° Induction magnétique quelconque.

Considérons à l'instant t une particule électrisée animée de la vitesse v au point M où la seule action qu'elle subit est celle d'une induction magnétique $\vec{B}$. Par suite de l'équivalence $q\vec{v} = I\vec{dl}$, la loi de Laplace détermine la force électromagnétique $\vec{F}$ qui lui est appliquée et nous avons, par application du principe fondamental de la dynamique,

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{\gamma},$$

$\vec{\gamma}$ étant le vecteur accélération à l'instant t .

Le trièdre ($\vec{v}$, $\vec{B}$, $\vec{F}$) est direct (fig. 191) si la particule est positive ($q > 0$), inverse si elle est négative (cas de l'électron). Le module de la force est, θ étant l'angle de $\vec{B}$ et de $\vec{v}$,

$$F = |qBv \sin \theta|.$$

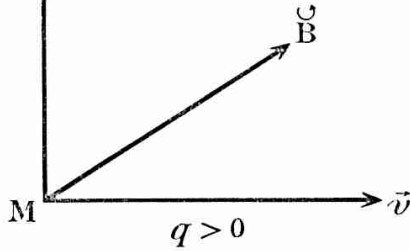


FIG. 191.

Si la particule est au repos ($v = 0$), la force F est nulle quelle que soit l'induction, et celle-ci ne peut pas la mettre en mouvement.

Si la particule est en mouvement, la force est constamment normale à la vitesse. Il en découle que :

a) La composante tangentielle de F et par suite celle, $\gamma_T = \frac{dv}{dt}$, de γ sont constamment nulles. La vitesse v est donc constante :

Le mouvement de la particule est uniforme.

b) *Le travail de la force électromagnétique est nul et l'énergie cinétique de la particule est constante.*

c) Le vecteur accélération est confondu avec sa composante normale (composante suivant la normale principale); son module est donc

$$\gamma = \gamma_N = \frac{v^2}{\rho},$$

ρ étant le rayon de courbure de la trajectoire.

Il existe donc entre les modules la relation

$$|qvB \sin \theta| = m \frac{v^2}{\rho};$$

v étant constant nous avons finalement

$$\boxed{\rho \sin \theta = \text{Cte.}}$$

Tous les résultats précédents sont rigoureux, c'est-à-dire valables en mécanique relativiste, à condition que la particule ne soit pas soumise en même temps à un champ électrique ou à des chocs susceptibles de faire varier sa vitesse. m est la masse de la particule animée de la vitesse v ; l'approximation newtonienne consiste à prendre pour m la masse au repos.

En résumé :

L'action d'une induction magnétique sur une particule électrisée en mouvement ne détermine que sa trajectoire; la vitesse et l'énergie de la particule conservent des valeurs constantes, celles qu'elles avaient lorsque la particule a commencé à subir l'action de l'induction magnétique.

2° Induction constante. Mouvement hélicoïdal uniforme.

Considérons une particule électrisée (supposée positive sur la figure 192) arrivant avec la vitesse $\vec{v}$ au point O dans une induction ma-

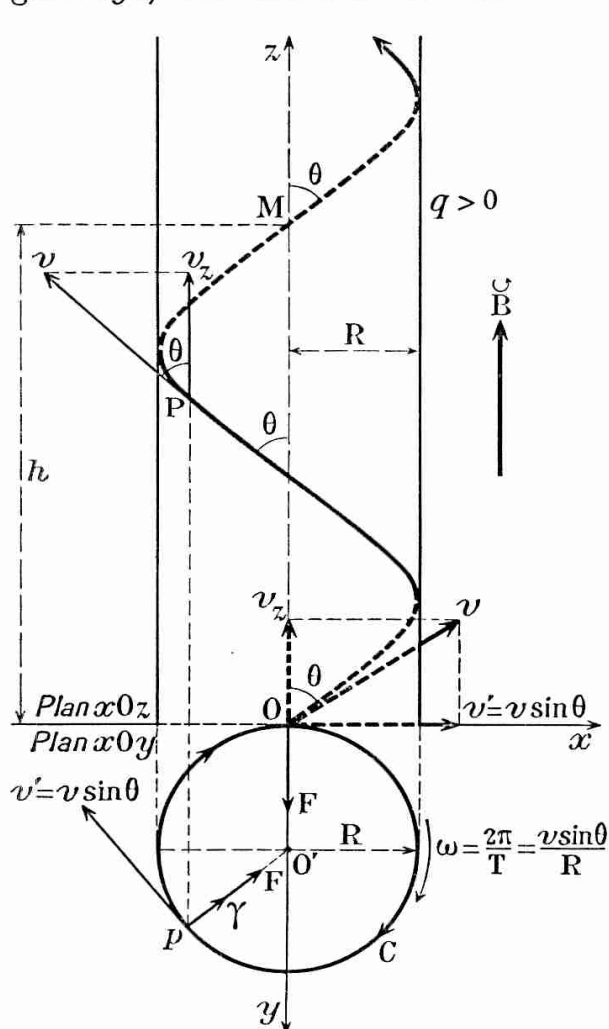


FIG. 192.

gnétique $\vec{B}$, uniforme et constante, dirigée suivant Oz. Rapportons son mouvement au trièdre trirectangle Oxyz, le plan xOz contenant la vitesse initiale. Utilisons les résultats précédemment établis :

Le mouvement de la particule sur sa trajectoire est uniforme, le module, constant, de la vitesse est donc v .

L'accélération $\vec{\gamma}$ étant, comme la force, normale à $\vec{B}$, sa composante suivant Oz est nulle; le mouvement projeté sur Oz est donc uniforme, de vitesse $v_z = v \cos \theta$. Par suite θ est constant puisque v l'est aussi :

La vitesse $\vec{v}$ fait donc un angle θ constant avec l'induction.

La vitesse $v' = v \sin \theta$ du mouvement projeté sur xOy est donc constante, comme on pouvait s'y attendre puisque ce mouvement serait

celui d'une particule arrivant en O avec la vitesse v' dirigée suivant Ox. L'accélération, normale à $\vec{B}$, se projette en vraie grandeur sur xOy, son module

$$\gamma = \frac{q}{m} B v \sin \theta = \frac{q}{m} B v',$$

est constant et comme sa projection est normale à v' , le mouvement projeté sur xOy est circulaire et uniforme.

Nous sommes donc conduits aux conclusions suivantes :

Lorsqu'une particule électrisée pénètre dans une induction uniforme constante :

a) Son mouvement est rectiligne et uniforme si sa vitesse initiale est parallèle à l'induction.

b) Son mouvement est circulaire et uniforme si sa vitesse initiale est perpendiculaire à l'induction.

c) Dans le cas général où la direction de la vitesse initiale est quelconque, le mouvement est hélicoïdal uniforme.

Nous savions déjà que le mouvement est uniforme quelle que soit l'induction, le fait que celle-ci est uniforme et constante détermine la forme de la trajectoire, l'hélice, la condition générale $\rho \sin \theta = \text{Cte}$ donnant $\theta = \text{Cte}$, $\rho = \text{Cte}$.

Déterminons dans le cas général les caractéristiques de la trajectoire et du mouvement. L'hélice se trouve sur un cylindre de révolution tangent au plan xOy défini par la vitesse initiale et l'induction; le rayon R de ce cylindre est donné par

$$\gamma = \frac{q}{m} B v' = \frac{v'^2}{R},$$

d'où

$$R = \frac{m v'}{q B} = \frac{m v \sin \theta}{q B}.$$

La durée T d'un tour de la particule projetée sur xOy est aussi le temps qui sépare deux passages consécutifs de la particule sur une même génératrice du cylindre; on a

$$T = \frac{2\pi R}{v'} = \frac{2\pi m}{q B};$$

T ne dépend pas de la vitesse de la particule; cette propriété est utilisée dans le cyclotron (Ex. 43).

Le pas h de l'hélice est

$$h = v_z T = \frac{2\pi m v \cos \theta}{q B}.$$

Remarquons que si θ est assez petit pour que $\cos \theta$ soit peu différent de 1, h ne dépend pas de θ . Les particules d'un pinceau monocinétique dont la direction moyenne est voisine de celle de l'induction se déplacent bien sur différents cylindres tous tangents entre eux le long de Oz , mais il se retrouvent sur Oz en $M, M' \dots$ distants de k .

3° Déviation magnétique.

Soit une particule électrisée (supposée négative sur la figure 193) arrivant en O animée de la vitesse v dirigée suivant OO' ; elle pénètre

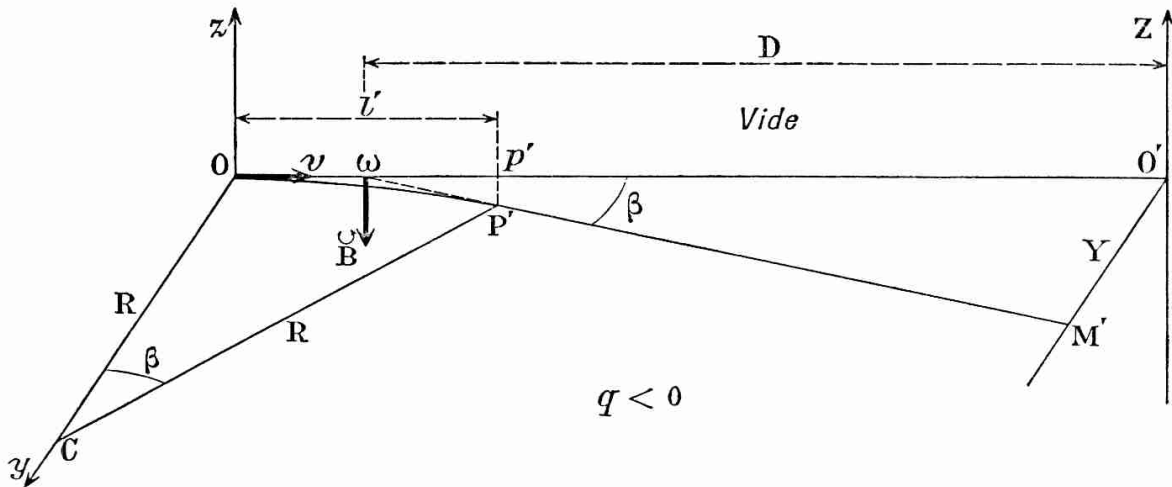


FIG. 193.

en ce point dans une induction magnétique $\vec{B}$ uniforme et constante perpendiculaire à $\vec{v}$, donc parallèle à Oz . Cette induction s'exerce sur une longueur l' .

La trajectoire est dans le plan $O'Oy$, c'est un arc de cercle de rayon $R = \frac{mv}{qB}$ dont le centre C est sur Oy . A partir de P' , où la particule sort du champ, la trajectoire est la tangente $P'M'$ au cercle, tangente dont le prolongement coupe Ox en ω , d'abscisse $\frac{l'}{2}$.

La déviation angulaire est $\beta = \widehat{O'\omega M'} = \widehat{OCP'}$. Si l'on suppose l' petit par rapport à R nous avons

$$\beta \simeq \frac{\widehat{OP'}}{R} \simeq \frac{\widehat{Op'}}{R} = \frac{l'}{R} = Bl' \frac{q}{mv}.$$

Sur un écran luminescent normal à Ox et placé à la distance $\omega O' = D$, la déviation magnétique est donnée par

$$\beta \simeq \tan \beta = \frac{Y}{D} = Bl' \frac{q}{mv},$$

par suite

$$Y = Bl'D \frac{q}{mv}.$$

Si nous comparons Y à la déviation électrique Z (22-3) dans les conditions semblables, nous voyons que Y est orthogonal à B alors que

Z est parallèle à E . D'autre part, *alors que Z est inversement proportionnel au carré de la vitesse, Y est inversement proportionnel à la vitesse*; par contre, les deux déviations sont proportionnelles à la charge massique $\frac{q}{m}$ de la particule.

22-5. Mesures des grandeurs caractéristiques de corpuscules électrisés.

Les mesures des déviations électrique et magnétique déterminent les grandeurs caractéristiques d'un type particulier de particules. Dans ce qui suit nous supposons pour simplifier, que le champ électrique et le champ magnétique s'exercent sur la même longueur ($l = l'$) et que l'écran luminescent (ou la plaque photographique) se trouve placé à la distance D du point ω milieu de la distance l .

1° *Mesure de la charge massique $\frac{e}{m_0}$ de l'électron.*

On fait agir simultanément un champ électrique et une induction magnétique parallèles (fig. 194) sur un étroit pinceau monocinétique

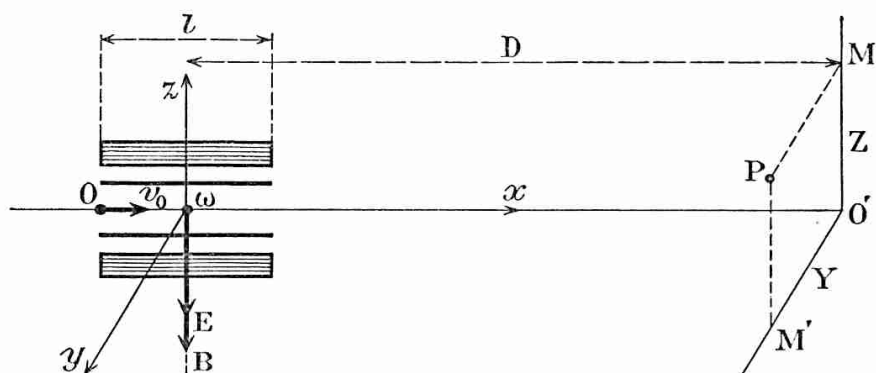


FIG. 194.

d'électrons. Le point d'impact sur l'écran subit les déviations électrique Z et magnétique Y , rectangulaires. On a

$$Z = ElD \frac{1}{v_0^2} \frac{e}{m_0}, \quad Y = BD \frac{1}{v_0} \frac{e}{m_0},$$

par suite

$$v_0 = \frac{E}{B} \frac{Y}{Z}, \quad \frac{e}{m_0} = \frac{1}{lD} \frac{E}{B^2} \frac{Y^2}{Z}.$$

Les valeurs obtenues pour $\frac{e}{m}$ sont concordantes quel que soit le mode d'émission électronique employé (effets thermoélectronique et

photoélectrique, rayonnement cathodique) tant que la vitesse ne dépasse pas des valeurs de l'ordre de $100\,000\text{ km.s}^{-1}$ (au-dessus $\frac{e}{m_0}$ diminue du fait de l'augmentation sensible de la masse). La connaissance de la charge élémentaire, obtenue par différentes méthodes (21-4), permet d'en déduire la masse m_0 de l'électron.

2° Charge massique d'un ion positif. Méthode des paraboles (J. J. Thomson).

Donnons tout d'abord le principe de l'obtention de rayons positifs. Dans un tube de Crookes l'émission d'électrons par la cathode (rayonnement cathodique) provoque l'ionisation de molécules du gaz sous pression réduite qui remplit le tube. Les ions positifs ainsi produits se dirigent vers la cathode, leur vitesse croissant, leurs rencontres avec des molécules entraînent de nouvelles ionisations; cette « ionisation par chocs » se fait surtout au voisinage de la cathode où la chute de potentiel est élevée.

Si la cathode C est percée (fig. 195), les ions positifs, animés de vitesses

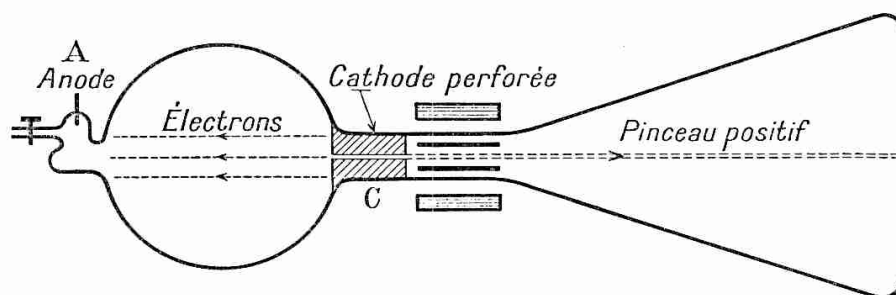


FIG. 194.

relativement grandes, traversent l'ouverture pour se propager au-delà et l'on peut les recevoir sur un écran luminescent ou sur une plaque photographique. Avec un diaphragme convenable on obtient un pinceau de rayons positifs susceptible d'être dévié par un champ électrique et par une induction magnétique.

Les ions positifs portent en général une ou deux charges élémentaires. Leurs masses sont beaucoup plus grandes que celle de l'électron, de sorte que leur vitesse ne dépasse guère quelques milliers de kilomètres par seconde. On leur communique des vitesses plus élevées en leur faisant subir les impulsions rythmées d'un champ électrique dans des accélérateurs comme le cyclotron.

La mesure de $\frac{q}{m}$ (égal à $\frac{e}{m}$ ou à $\frac{2e}{m}$) est plus difficile que dans le cas des électrons parce que les ions qui constituent le pinceau positif n'ont pas tous la même vitesse. La relation qui donne $\frac{q}{m}$ établie précédemment nous montre que les particules d'un même type (même valeur

de $\frac{q}{m}$ mais vitesses différentes) fournissent des points d'impact sur l'écran qui se répartissent sur une parabole d'équation

$$Y^2 = \frac{q}{m} \frac{lDB^2}{E} Z = 2pZ,$$

dont le paramètre,

$$2p = \frac{lDB^2}{E} \frac{q}{m},$$

est proportionnel à la charge massique de ces particules.

On obtient effectivement un arc de parabole par type de particule, et la mesure du paramètre fournit $\frac{q}{m}$. La précision est de l'ordre du centième.

3° Spectrographie de masse.

Reprenant la méthode des paraboles, supposons que les ions positifs soient monoatomiques et ne portent qu'une charge élémentaire, tels H^+ , O^+ , He^+ , Hg^+ . Les ions H^+ et O^+ , par exemple, donnent deux paraboles de paramètres p et p' dont le rapport est égal à celui des masses m et m' des ions, lui-même très sensiblement égal à celui des masses atomiques A et A' ,

$$\frac{p}{p'} = \frac{m}{m'} = \frac{A}{A'} = \frac{1}{16}.$$

La méthode permet ainsi de mesurer des rapports de masses atomiques, donc les masses atomiques des éléments. En fait *la plupart des éléments naturels sont des mélanges d'isotopes* dont les atomes ont des masses différentes. Une parabole étant fournie par chaque isotope, on en obtient deux pour l'hydrogène, qui donne les ions $^1H^+$ (proton) et $^2D^+$ (deuton), et trois pour l'oxygène, qui fournit les ions $^{16}O^+$, $^{17}O^+$ et $^{18}O^+$. Ainsi la méthode des paraboles mesure des *rapports des masses isotopiques*; ce fait a conduit les physiciens à adopter pour base d'une *échelle physique* $^{12}C = 12,000\ 0$, alors que l'*échelle chimique* a choisi $O = 16,000\ 0$ pour l'oxygène naturel, mélange des trois isotopes (la teneur, 0,997 6, en ^{16}O , étant fortement prépondérante).

Les deux échelles, chimique (Ac) et physique (Ap), sont donc un peu différentes, les masses atomiques Ac et Ap sont liées par la relation

$$Ap = 1,000\ 27\ Ac.$$

La méthode de J.J. Thomson, dont la précision est médiocre, a été perfectionnée, grâce aux progrès de l'« Optique électronique », pour devenir la *spectrographie de masse*.

Dans les spectrographes de masse modernes qui dérivent de l'*appareil d'Aston* (fig. 196), le pinceau positif traverse une fente très fine F perpendiculaire au plan de la figure; dans ce plan le point F « émet » dans

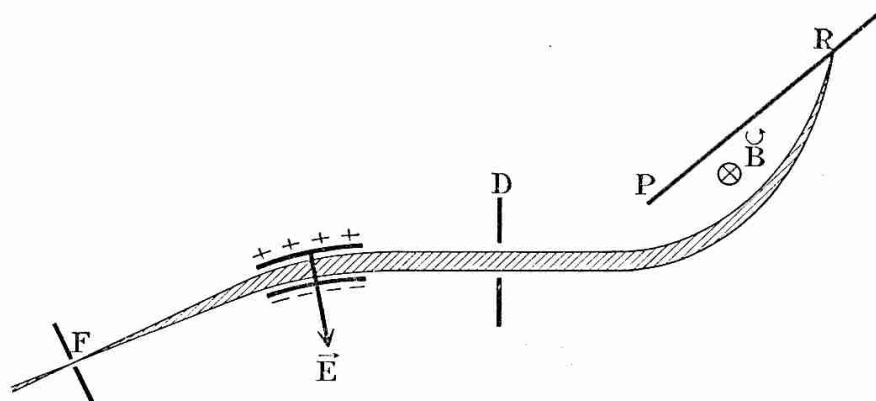


FIG. 196.

des directions voisines des ions positifs de vitesses variables autour d'une valeur moyenne. Le problème est en apparence semblable à celui posé par la spectrographie des radiations lumineuses, il peut même paraître plus facile puisque le pinceau incident est très étroit. En fait, il faut tenir compte qu'une *double focalisation* doit être réalisée, le pinceau n'étant pas monocinétique : *focalisation des directions et focalisation des vitesses*.

Le résultat est obtenu en faisant agir successivement un champ électrique et une induction magnétique rectangulaires en des régions convenables du pinceau. L'« image » de la fente F est alors une raie R très fine dont la position sur la plaque photographique dépend de la masse des particules constituant le pinceau. Si celui-ci comporte différents ions on obtient un spectrogramme formé de raies. L'étude de ce spectrogramme

permet la mesure de rapports de masses isotopiques avec une précision qui atteint 10^{-5} et même 10^{-6} . Des mesures d'opacité des raies déterminent même les proportions d'un mélange et, dans le cas d'un seul élément, les « abondances isotopiques ».

Dans certains cas on ne se préoccupe que de *séparer les isotopes d'un élément ou de mesurer les abondances isotopiques*. Une focalisation rigoureuse n'est alors pas nécessaire; on utilise le *spectrographe de masse de Dempster* (fig. 197) qui résout le problème en accélérant les ions initialement lents d'un étroit faisceau

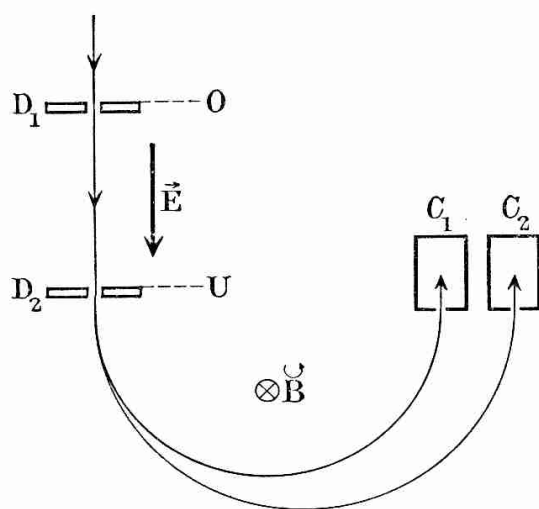


FIG. 197.

cylindrique par une chute de potentiel électrique U entre deux

diaphragmes D_1 et D_2 . A la sortie du champ électrique les ions subissent l'action d'une induction magnétique uniforme B normale au champ électrique; après avoir parcouru une trajectoire semi-circulaire de rayon R , fonction de $\frac{e}{m}$, ils sont reçus dans des collecteurs différents $C_1, C_2, \dots$, ces collecteurs pouvant être des électromètres fournissant des courants ioniques proportionnels aux abondances isotopiques. On a, en négligeant les vitesses initiales par rapport aux vitesses acquises dans le champ électrique,

$$eU = \frac{1}{2} mv^2, \quad R = \frac{mv}{eB} = \frac{\sqrt{2U}}{B} \sqrt{\frac{m}{e}};$$

les rayons des trajectoires sont inversement proportionnels à la racine carrée de la charge massique, donc *proportionnels à la racine carrée de la masse isotopique*.

22-6. Oscilloscope électronique. Récepteur de télévision.

L'*oscilloscope électronique* ou *oscillographe cathodique* (fig. 198) est un tube à vide dans lequel un canon à électrons associé à une émission

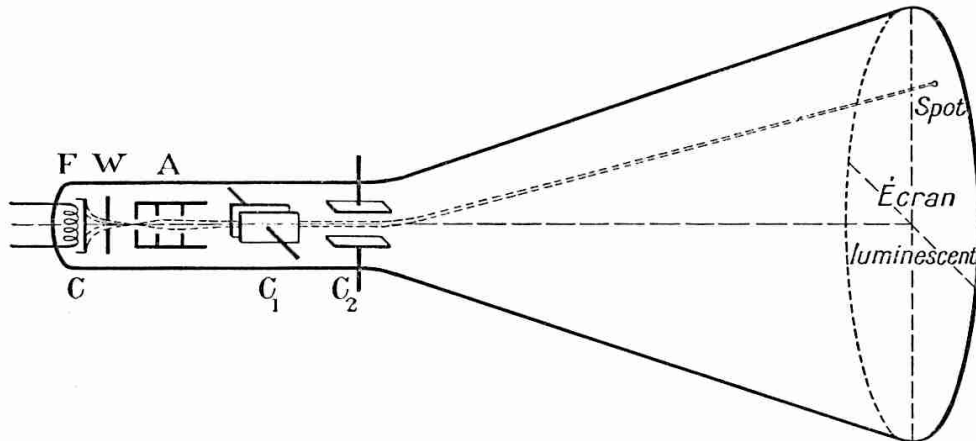


FIG. 198.

thermoélectronique donne un pinceau électronique très délié focalisé sur un écran luminescent; la trace du pinceau sur l'écran, le spot, est une tache lumineuse très petite dont on peut faire varier le diamètre en agissant sur le canon à électrons.

Deux paires de plaques, dites *plaques défectrices*, constituent les armatures de deux condensateurs C_1 et C_2 auxquels on applique les tensions u_1 pour la déviation horizontale, u_2 pour la déviation verticale.

L'oscilloscope sert à étudier des phénomènes rapides. Pour l'usage le plus fréquent on désire que le « balayage » horizontal soit périodique,

de période T_1 , l'aller s'effectuant à vitesse constante du spot, le retour devant se faire en un temps très court, ce qui est possible, l'inertie de l'appareil étant extrêmement faible. Ce résultat est obtenu à l'aide d'une tension u_1 en dents de scie (fig. 199) fournie par une « base de temps ». Si donc u_2 est constamment nul, le spot effectue de rapides

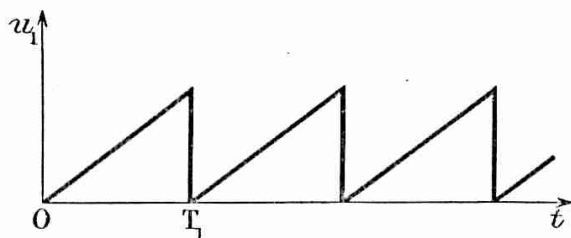


FIG. 199.

allers et retours dans le sens horizontal, la durée d'un aller étant la période T_1 , celle d'un retour, pratiquement nulle. Dans ces conditions on observe sur l'écran un trait lumineux horizontal par suite de la persistance des impressions visuelles.

La tension u_2 qui commande le balayage vertical est proportionnelle à la grandeur g étudiée, elle peut d'ailleurs être cette grandeur même, par exemple la tension entre les armatures d'un condensateur se déchargeant dans une résistance. L'abscisse du spot est donc proportionnelle au temps; en prenant à chaque balayage le début de la période pour origine des temps, son ordonnée est proportionnelle à u_2 , donc à la grandeur g . Deux cas peuvent se présenter :

a) *Le phénomène n'est pas périodique.*

On règle alors la base de temps de façon que la période T_1 soit un peu supérieure à la durée du phénomène. Par suite de la persistance des impressions visuelles, l'observateur voit la courbe $u_2 = f(t)$ dont la vision est fugitive puisque sa durée est celle du phénomène; celui-ci ne doit donc pas être trop rapide, à moins qu'on ne puisse le reproduire périodiquement, auquel cas l'on se trouve placé dans les conditions suivantes.

b) *Le phénomène est périodique.*

On règle la base de temps de sorte que la période T_1 soit égale à celle du phénomène; le spot décrit alors toujours la même courbe pendant le même temps T_1 , celle-ci est stable et l'on peut en principe la maintenir aussi longtemps qu'on le désire. Il est même possible, par l'emploi d'un oscilloscope double, d'obtenir, pour les comparer, deux courbes traduisant deux phénomènes de même période.

Il arrive que le phénomène soit la variation d'une grandeur périodique g_1 en fonction d'une autre grandeur périodique g_2 de même période : on s'arrange dans ce cas pour que u_1 soit proportionnel à g_1 , u_2 à g_2 . Le spot décrit dans ces conditions la courbe stable de g_2 en fonction de g_1 .

La gamme des phénomènes que l'oscilloscope électronique permet d'étudier est extrêmement variée : tensions et courants périodiques ou non, timbre des sons, vibrations élastiques (courbes de Lissajous),

cycle d'hystérésis, ... La principale difficulté est le plus souvent de traduire une grandeur par une tension et de le faire fidèlement. Il est parfois plus commode de disposer d'un courant comme traduction du phénomène; les deux paires de plaques déflectrices sont alors remplacées par deux couples de bobines d'axes rectangulaires, les balayages sont alors magnétiques. On peut également utiliser simultanément les deux méthodes : déviation électrique par une paire de plaques pour le balayage horizontal et déviation magnétique par une paire de bobines pour le balayage vertical, les axes des bobines et des plaques étant parallèles. Les oscilloscopes sont en général munis des deux dispositifs, ce qui rend leur emploi très souple.

Un *appareil récepteur de télévision* a pour organe essentiel un oscilloscope. Pendant la durée T_2 de ce qu'on peut appeler la projection d'une image (pour la R.T.F., $T_2 = \frac{1}{25}$ s), le spot explore l'écran de la façon suivante :

a) La tension u_1 en dents de scie, commande un mouvement horizontal à vitesse constante du bord gauche au bord droit de l'écran en $T_1 = \frac{1}{20 \cdot 475}$ s, suivi d'un retour quasi instantané à gauche. Le spot a décrit une ligne et le phénomène se répète sans cesse.

b) La tension u_2 , en dents de scie également, commande un mouvement uniforme de haut en bas de l'écran en $T_2 = \frac{1}{25}$ s avec retour quasi instantané en haut.

Ainsi, pendant la durée T_2 de la projection d'une image, le spot décrit $\frac{20 \cdot 475}{25} = 819$ lignes en couvrant tout l'écran.

25 images sont projetées par seconde. Le phénomène est donc assez différent de la projection cinématographique où des images complètes sont projetées d'une façon discontinue, cependant, la persistance des impressions lumineuses jouant, l'effet produit est le même.

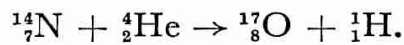
Si la brillance du spot, proportionnelle à la densité électronique du pinceau explorateur était constante, la brillance de l'écran serait uniforme. Une électrode de contrôle, commandée par l'intensité des ondes reçues, modifie la richesse du pinceau en électrons et par suite la brillance du spot au cours de son déplacement, ainsi se trouve restituée la succession des images transmises.

22-7. Accélérateurs de particules électrisées.

Pour réaliser une transmutation d'élément il faut que des corpuscules positifs, protons, deutons ou hélions, puissent atteindre les noyaux;

on doit pour cela *utiliser un arrosage très dense en projectiles rapides de façon à accroître la probabilité des rencontres efficaces.*

On a d'abord mis en œuvre les rayons α des corps radioactifs, formés d'hélium dont la vitesse est de l'ordre de $25\,000\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Par ce procédé, Rutherford réussit en 1919 à obtenir l'isotope 17 de l'oxygène ainsi que de l'hydrogène à partir de l'azote, réalisant la réaction nucléaire



Les répulsions exercées par les noyaux sur les ions positifs étant d'autant plus grandes que la charge des noyaux est plus élevée, il a fallu, pour réaliser des transmutations d'éléments de numéro atomique élevé, augmenter à la fois la densité de bombardement et l'énergie cinétique des projectiles.

Une induction magnétique n'agissant que sur la forme des trajectoires des particules, il est nécessaire, pour accélérer celles-ci, de les soumettre à l'action d'un champ électrique : c'est là le rôle des accélérateurs de particules. Les difficultés qui résultent de l'isolement électrique limitent assez vite l'accroissement de la tension employée, aussi les projectiles sont-ils accélérés en plusieurs fois par des différences de potentiel relativement modérées.

Donnons *le principe d'un accélérateur linéaire*. Le faisceau d'ions positifs à accélérer franchit successivement des électrodes en forme d'anneaux, chacune étant soumise à une tension alternative en opposition avec la précédente. Une particule, repoussée par l'anneau qu'elle vient de franchir, est attirée par l'anneau suivant, la durée du parcours entre deux électrodes étant égale à une demi-période de la tension excitatrice. La vitesse des corpuscules croissant, la distance entre deux anneaux devient de plus en plus grande; un calcul facile montre qu'une telle série d'impulsions réparties le long d'une trajectoire rectiligne donne à l'appareil un encombrement qui atteint aisément plusieurs dizaines de mètres.

Le cyclotron est beaucoup moins encombrant; les trajectoires sont enroulées par l'action d'une induction magnétique produite par un puissant électroaimant. Le principe de l'appareil est donné sous la forme d'un problème proposé à un concours (Ex. 43).

Exercices.

Exercice 43. — La charge du proton H^+ est $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ coulomb; sa masse au repos est égale à $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, on la désignera par m et, sauf indication contraire, on la considérera comme indépendante de la vitesse du proton.

1° Un proton ayant acquis l'énergie cinétique W dans un champ électrique E , on le soustrait à l'action de ce champ et on le soumet à celle d'une induction magnétique $\vec{B}$ uniforme, normale à la vitesse $\vec{v}$ du proton. On demande de définir la trajectoire circulaire du proton et de déterminer le temps mis par le proton pour décrire le demi-cercle; ce temps dépend-il de l'énergie cinétique du proton?

Application numérique : $W = 10^6$ eV (électronvolt), $B = 0,80$ tesla.

2° Soit O le point où le proton pénètre dans l'induction magnétique B. On suppose qu'il est alors animé d'une très faible vitesse normale à B. Il se meut (fig. 200) à l'intérieur d'une boîte cylindrique plate horizontale, conductrice, partagée en deux demi-cylindres plats. Il est injecté au centre de cette boîte, dans une direction horizontale; l'induction B, uniforme et verticale, baigne toute l'étendue de la boîte.

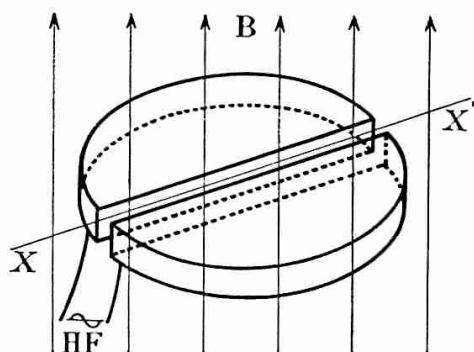


FIG. 200.

La projection horizontale de chaque demi-cylindre à la forme de la lettre D, d'où le nom de « Dee » qui lui est donné; les bords rectilignes des « Dees » sont parallèles à une direction XX' et très légèrement écartés l'un de l'autre.

Chaque fois que le proton, décrivant une trajectoire circulaire, passe d'un Dee à l'autre, il subit une accélération de durée

très brève (une impulsion) grâce à une différence de potentiel sinusoïdale que l'on établit entre les Dees et qui crée entre leurs bords parallèles un champ électrique uniforme horizontal perpendiculaire à XX'. Ce champ existe entre les deux Dees mais il est nul à l'intérieur de chacun d'eux.

Quelle doit être la période de la différence de potentiel sinusoïdale pour que le proton reçoive une impulsion à chacun de ses passages entre les Dees? On prendra $B = 0,80$ tesla.

3° La différence de potentiel sinusoïdale est obtenue à l'aide d'un oscillateur haute fréquence. Établir la relation qui doit exister entre la longueur d'onde λ du circuit oscillant et la valeur de l'induction B lorsque la condition ci-dessus — dite de résonance — est réalisée, savoir : une impulsion à chacun de ses passages entre les Dees. Calculer λ à l'aide des données précédentes.

4° La différence de potentiel sinusoïdale atteint sa valeur maximale $U = 35\,000$ volts lorsque le proton traverse l'intervalle entre les Dees. D'autre part, la condition de résonance est réalisée maintenant lorsque la fréquence du circuit oscillant est de 12 mégahertz, l'induction ayant changé de valeur. Quelle est, dans ces conditions, l'énergie cinétique du proton lorsqu'il se déplace sur un cercle de rayon égal à 15 cm? Calculer combien de demi-cercles il a décrits après sa première accélération par le champ électrique entre les Dees pour atteindre cette énergie. On rappelle qu'il a été injecté avec une vitesse négligeable.

5° Donner l'expression littérale de la différence des rayons de deux demi-cercles consécutifs numérotés n et $n + 1$, sachant que le premier demi-cercle décrit après la première accélération porte le numéro 1.

Représenter graphiquement la variation du rayon des demi-cercles consécutifs en fonction de n depuis $n = 1$ jusqu'à $n = 9$. La différence entre deux rayons consécutifs est-elle constante?

6° L'énergie cinétique du proton ne peut croître indéfiniment du fait que la masse m' du proton augmente avec sa vitesse suivant la loi

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

où $c = 3 \cdot 10^8$ m.s⁻¹ est la célérité de la lumière dans le vide. Que découle-t-il de ce fait?

1° L'énergie cinétique acquise par le proton est $W = \frac{1}{2}mv^2$, sa vitesse est donc

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}}.$$

L'induction B étant uniforme et normale à la vitesse initiale $\vec{v}$ du proton, sa trajectoire est circulaire, de rayon

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{\sqrt{2mW}}{eB}.$$

L'application numérique donne $R = 0,180 \text{ m} = 18 \text{ cm}$.

Le temps τ mis par le proton pour décrire le demi-cercle est

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{eB},$$

il ne dépend donc pas de W (ni de v). L'application numérique donne $\tau = 4,1 \cdot 10^{-8} \text{ s}$.

2° Pour que le proton reçoive une impulsion à chacun de ses passages entre les Dees, il faut que la durée τ de son séjour dans un Dee soit égale à la demi-période de la différence de potentiel sinusoïdale. La période T de celle-ci doit donc être égale à celle du proton sur sa trajectoire, c'est-à-dire

$$T = 2\tau = 8,2 \cdot 10^{-8} \text{ s}.$$

Sa fréquence est $\nu = \frac{1}{T} = 1,22 \cdot 10^7 \text{ hertz} = 12,2 \text{ MHz}$.

3° La longueur d'onde du circuit oscillant est donnée par

$$\lambda = cT = \frac{2\pi mc}{eB} = \frac{19,68}{B} = 24,6 \text{ m}.$$

4° Nous avons d'après les relations précédemment établies

$$R = \frac{\sqrt{2mW}}{eB}; \quad eB = 2\pi m\nu;$$

par suite

$$W = 2\pi^2 m \nu^2 R^2.$$

L'application numérique donne, pour $R = 0,15 \text{ m}$ et $\nu = 12 \cdot 10^6 \text{ hertz}$,

$$W = 1,07 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 0,67 \text{ MeV}.$$

A chaque passage du proton dans l'intervalle entre les Dees, son énergie cinétique augmente de

$$\Delta W = eU = 35 \text{ keV} = 56 \cdot 10^{-16} \text{ J}.$$

Comme cela se produit à chaque demi-tour, le nombre de demi-tours nécessaire pour atteindre cette énergie est

$$n = \frac{W}{\Delta W} = \frac{670}{35} \simeq 19.$$

5° Soit W_n l'énergie cinétique du proton sur le n^{e} demi-cercle de rayon R_n ; nous avons

$$W_n = 2\pi^2 m \nu^2 R_n^2 = n\Delta W = neU,$$

d'où

$$R_n = \frac{1}{\pi\nu} \sqrt{\frac{eU}{2m}} \sqrt{n} = R_1 \sqrt{n},$$

R_1 étant le rayon du premier demi-cercle décrit; le calcul donne $R_1 = 3,45 \text{ cm}$.

Nous avons par suite

$$\Delta R = R_{n+1} - R_n = \frac{1}{\pi v} \sqrt{\frac{eU}{2m}} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = R_1 (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$$

et comme

$$\frac{d(\Delta R)}{dn} = \frac{1}{2} R_1 \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) < 0,$$

la différence de deux rayons consécutifs décroît.

Nous avons représenté les variations de R (fig. 201 et 202) :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R \text{ cm}$	3,45	4,88	5,97	6,90	7,71	8,45	9,13	9,76	10,4

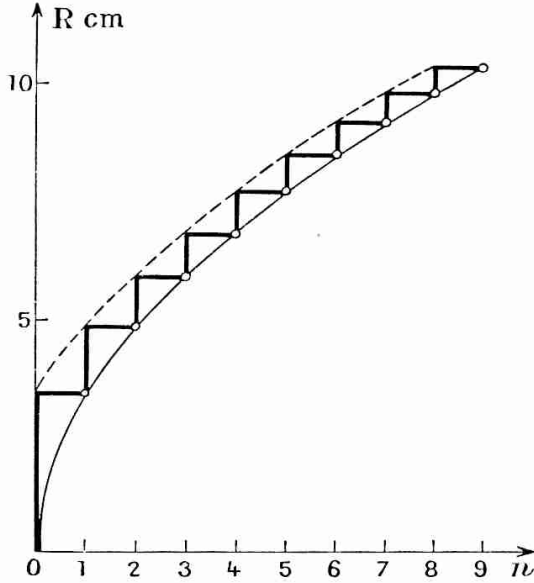


FIG. 201.

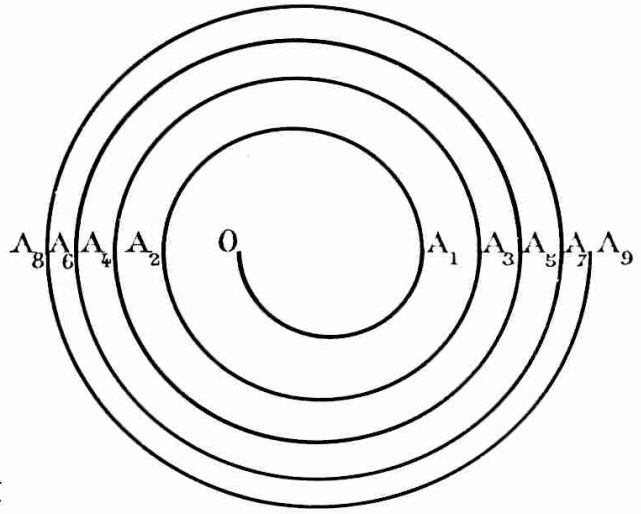


FIG. 202.

Remarquons que pour des valeurs élevées de n on a

$$\frac{\Delta R}{R_1} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \simeq \frac{1}{2\sqrt{n}};$$

ΔR tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

6° Si, à chaque demi-tour, le proton continuait à recevoir l'énergie $\Delta W = eU$, son énergie cinétique serait, après n demi-tours,

$$W_n = neU = \frac{1}{2} m' v^2 = \frac{mv^2}{2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

v , fonction croissante de n , tendrait vers c quand n (et W_n) tendrait vers l'infini.

En fait, la variation de m entraîne celle de la durée d'un demi-tour

$$\tau = \frac{\pi m}{eB} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

τ , égal à la demi-période de la différence de potentiel pour les faibles valeurs de v pour lesquelles

$$\frac{1}{2v} = \frac{\pi m}{eB},$$

croît avec v ; par suite l'énergie reçue à chaque demi-tour diminue progressivement pour s'annuler lorsque τ devient égal à la fraction $\frac{3}{2}$ de la période de la différence de potentiel. v tend donc vers une valeur limite définie par

$$\frac{\pi m}{eB} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{2v} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{3}{2v},$$

d'où

$$\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{1}{3}; \quad \frac{V}{c} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0,943; \quad V = 283\,000 \text{ km.s}^{-1}.$$

Exercice 44. — Les plateaux A_1A_2 et B_1B_2 de déviation verticale d'un oscilloscope cathodique comportent deux plaques planes et parallèles. La distance des plaques est a (fig. 203).

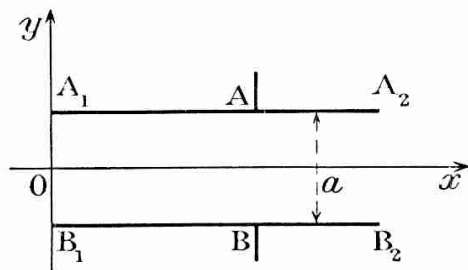


FIG. 203.

On supposera que le champ électrique est uniforme dans toute la région représentée par le rectangle $A_1A_2B_2B_1$ et qu'il est nul à l'extérieur de cette région.

La différence de potentiel entre les plateaux est sinusoïdale (période T) :

$$U_A - U_B = h \cos \omega t.$$

Un électron [masse : m ; charge : (e^-)], arrive en O à l'instant t_0 avec une vitesse v ayant la direction et le sens de Ox .

1° Établir les équations paramétriques $x = f(t)$ et $y = g(t)$ de la trajectoire de l'électron en fonction du paramètre t .

2° En utilisant les variables réduites

$$X = \frac{\omega}{v} x, \quad Y = \frac{am\omega^2}{he} y,$$

établir la formule donnant Y en fonction de X et de ωt_0 , puis construire les courbes correspondantes (courbes représentant, après affinités, les formes des trajectoires des électrons) pour $t_0 = 0$ et pour $t_0 = \frac{T}{4}$. On pourra procéder par additions d'ordonnées. On représentera ces courbes sur le même graphique, au moins jusqu'à $X = 4\pi$, en prenant pour échelle 1 cm pour unité.

On indiquera ensuite l'allure générale des courbes correspondant aux valeurs $\frac{T}{2}$ et $\frac{3T}{4}$ de t_0 , mais pour ces deux dernières courbes, la précision du tracé ne sera pas exigée.

3° Lorsqu'un électron sort du système de déviation verticale (plan A_2B_2) il a une ordonnée y_s . L'écran fluorescent, perpendiculaire à Ox , est à la distance L du plan A_2B_2 . La longueur des plaques est $A_1A_2 = B_1B_2 = b$.

En admettant que y_s soit assez petit pour être sans influence sur l'ordonnée y_i du point d'impact de l'électron sur l'écran fluorescent, calculer y_i en fonction de t_0 . Montrer que cette condition est en accord avec les trajectoires tracées au 2°.

4° y_i est une fonction sinusoïdale du temps. En désignant par $Y_{i,m}$ sa valeur maximale, étudier en fonction de ω le rapport

$$r = \frac{Y_{i,m}}{h}$$

et construire la courbe.

1° La trajectoire de l'électron est dans le plan xOy . La composante suivant Ox de la force électrique qui lui est appliquée est nulle; par suite

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad \frac{dx}{dt} = v; \quad (1) \quad x = v(t - t_0).$$

La force électrique est parallèle à Oy et égale à

$$f = m \frac{d^2y}{dt^2} = -e \frac{U_A - U_B}{a} = -\frac{eh \cos \omega t}{a};$$

par suite, en tenant compte des conditions initiales,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{he}{am} \cos \omega t; & \frac{dy}{dt} &= \frac{he}{am\omega} (\sin \omega t_0 - \sin \omega t); \\ y &= \frac{he}{am\omega^2} [\cos \omega t + \omega(t - t_0) \sin \omega t_0 - \cos \omega t_0]. \end{aligned}$$

2° En utilisant les variables réduites X et Y proposées, nous avons (fig. 204)

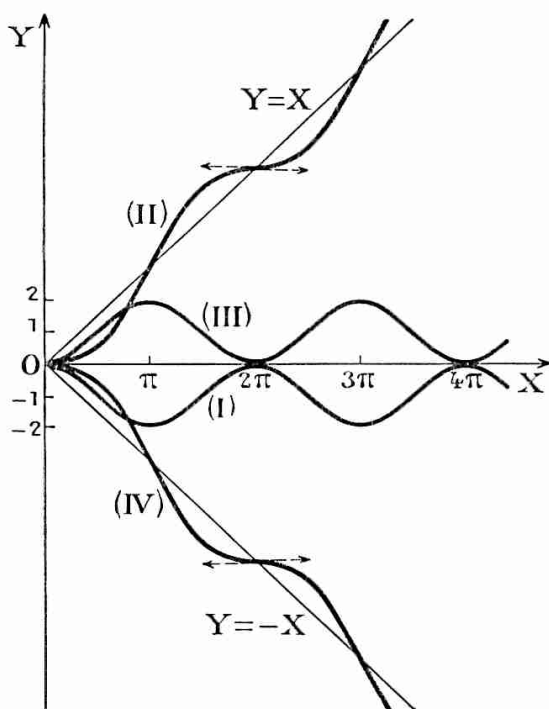


FIG. 204.

$$\begin{aligned} X &= \omega(t - t_0), \\ Y &= \cos \omega t + \omega(t - t_0) \sin \omega t_0 - \cos \omega t_0, \end{aligned}$$

et la formule représentant, après affinités, les formes des trajectoires des électrons :

$$Y = \cos (X + \omega t_0) + X \sin \omega t_0 - \cos \omega t_0.$$

Pour $t_0 = 0$, $\omega t_0 = 0$,

$$(I) \quad Y_1 = \cos X - 1.$$

Pour $t_0 = \frac{T}{4}$, $\omega t_0 = \frac{\pi}{2}$,

$$(II) \quad Y_2 = X - \sin X.$$

Pour $t_0 = \frac{T}{2}$, $\omega t_0 = \pi$,

$$(III) \quad Y_3 = 1 - \cos X = -Y_1.$$

Pour $t_0 = \frac{3T}{4}$, $\omega t_0 = \frac{3\pi}{2}$,

$$(IV) \quad Y_4 = \sin X - X = -Y_2.$$

3° y , étant petit on peut confondre la pente de la courbe avec

$$\frac{y'}{x'} = \frac{1}{L} y_i, \quad \text{d'où} \quad y_i = L \frac{y'}{x'},$$

y' et x' étant calculés pour $x = b$:

$$x = v(t - t_0) = b; \quad \text{d'où} \quad t = \frac{b}{v} + t_0, \quad \text{et} \quad x' = v,$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{eh}{ma\omega} (\sin \omega t - \sin \omega t_0) = -\frac{eh}{ma\omega} \left[\sin \omega \left(\frac{b}{v} + t_0 \right) - \sin \omega t_0 \right];$$

d'où

$$y_i = -\frac{Leh}{ma\omega v} (\sin \omega t - \sin \omega t_0) = -\frac{Leh}{ma\omega v} \left[\sin \omega \left(\frac{b}{v} + t_0 \right) - \sin \omega t_0 \right].$$

Pour $t_0 = 0$, $y_i = -\frac{Leh}{ma\omega v} \sin \omega \frac{b}{v}$.

Pour $t_0 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega}$, $y_i = -\frac{Leh}{ma\omega v} \left[\cos \omega \frac{b}{v} - 1 \right]$.

Pour $t_0 = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$, $y_i = \frac{Leh}{ma\omega v} \sin \omega \frac{b}{v}$.

Pour $t_0 = \frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2\omega}$, $y_i = \frac{Leh}{ma\omega v} \left(\cos \omega \frac{b}{v} - 1 \right)$.

Ces résultats sont en accord avec les trajectoires du 2^o.

4^o $y_i = -\frac{Leh}{ma\omega v} (\sin \omega t - \sin \omega t_0)$ est maximal pour $\sin \omega t = -1$, donc pour

$$t = \frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{2\omega}, \text{ d'où } Y_{im} = \frac{Leh}{ma\omega v} (1 + \sin \omega t_0), \text{ et } r = \frac{Le}{ma\omega v} (1 + \sin \omega t_0).$$

Pour $t_0 = 0$, $r = \frac{Le}{ma\omega v} \frac{1}{\omega}$, la courbe représentative est une hyperbole équilatère (fig. 205).

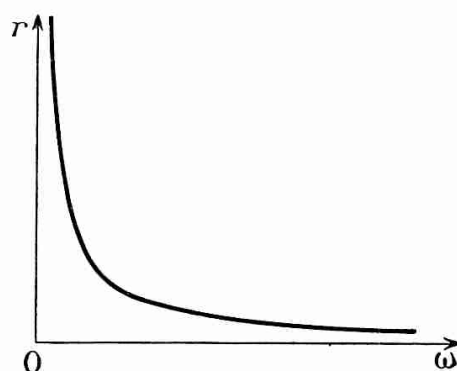


FIG. 205.

ω	0	$\nearrow$	∞
r'	$-\infty$	$\nearrow$	0
r	$+\infty$	$\searrow$	0

Exercice 45. — On charge une capacité $C = 0,1 \mu\text{F}$ au moyen d'une source de tension continue P de force électromotrice $E = 200$ volts, le commutateur K étant en position 1 (fig. 206). A l'instant $t = 0$, cette capacité est séparée de P et reliée à un circuit comprenant une résistance $R = 100 \Omega$ et une inductance $L = 0,1$ henry de résistance négligeable, le commutateur K étant en position 2.

1^o Calculer, en fonction du temps, les différences de potentiel u_1 aux bornes de la capacité C , u_2 aux bornes de la résistance R , u_3 aux bornes de l'inductance L .

2^o Un oscillateur cathodique est muni de deux couples de plaques déflectrices P_1, P_2 et P'_1, P'_2 qui ont le même centre de symétrie, les mêmes dimensions et le même écartement.

Le premier couple, P_1, P_2 , produit une déviation horizontale d'un pinceau électronique le long de $x'Ox$ sur l'écran fluorescent, le second, P'_1, P'_2 , produit une déviation

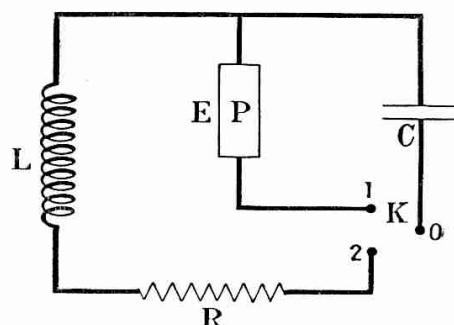


FIG. 206.

verticale le long de $y'Oy$. Une différence de potentiel $u = 33,3$ volts entre les plaques d'un même couple donne une déviation de 1 cm sur l'écran fluorescent.

La différence de potentiel u_1 est appliquée directement aux plaques de déviation horizontale tandis que la différence de potentiel u_2 est appliquée aux plaques de déviation verticale après avoir été au préalable amplifiée dans un rapport égal à 10.

Déterminer les équations paramétriques de la courbe décrite par le spot. Construire cette courbe en vraie grandeur.

Au bout de combien de temps le spot sera-t-il à 1 mm de sa position de repos?

3° Même question si u_1 et u_3 sont appliquées respectivement, sans amplification, aux plaques de déviation horizontale (u_1) et verticale (u_3).

1° La loi d'Ohm appliquée à l'instant t s'exprime par

$$u_1 = u_2 + u_3 = Ri + L \frac{di}{dt},$$

avec

$$i = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{du_1}{dt}; \quad \frac{di}{dt} = -C \frac{d^2u_1}{dt^2};$$

par suite

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_1}{dt} + \frac{1}{CL} u_1 = 0,$$

ou encore, en posant

$$\omega_0^2 = \frac{1}{CL} = 10^8 \text{ s}^{-2}; \quad \lambda = \frac{R}{2L} = 500 \text{ s}^{-1},$$

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} + 2\lambda \frac{du_1}{dt} + \omega_0^2 u_1 = 0.$$

Le discriminant de l'équation caractéristique est négatif et l'on a

$$\sqrt{-\Delta} = 2 \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \simeq 2\omega_0 = 2 \cdot 10^4.$$

u_1 varie donc suivant une loi sinusoïdale amortie et l'on a, en tenant compte de la condition initiale $u_1 = E = 200$ volts,

$$(1) \quad u_1 = Ee^{-\lambda t} \cos \omega t = 200 e^{-500t} \cos 10^4 t,$$

$$(2) \quad u_2 = Ri = -CR \frac{du_1}{dt} = e^{-500t} (\cos 10^4 t + 20 \sin 10^4 t),$$

$$(3) \quad u_3 = L \frac{di}{dt} = \frac{L}{R} \frac{du_2}{dt} = 200 e^{-500t} (\cos 10^4 t - 0,1 \sin 10^4 t).$$

2° Une différence de potentiel de 200 volts entraîne une déviation du spot de 6 cm; d'après les équations (1), (2) et (3) les déviations x , y_2 et y_3 du spot correspondant à u_1 , u_2 et u_3 (en tenant compte de l'amplification de u_2) sont :

$$x = 6 e^{-500t} \cos 10^4 t,$$

$$y_2 = 0,3 e^{-500t} (\cos 10^4 t + 20 \sin 10^4 t),$$

$$y_3 = e^{-500t} (\cos 10^4 t - 0,1 \sin 10^4 t).$$

Posons $\theta = \omega t = 10^4 t$, et par suite $\lambda t = 500t = \frac{\theta}{20}$; les équations précédentes deviennent

$$(1)' \quad x = 6 e^{-\frac{\theta}{20}} \cos \theta,$$

$$(2)' \quad y_2 = 0,3 e^{-\frac{\theta}{20}} (\cos \theta + 20 \sin \theta) = \frac{x}{20} (1 + 20 \operatorname{tg} \theta),$$

$$(3)' \quad y_3 = 6 e^{-\frac{\theta}{20}} (\cos \theta - 0,1 \sin \theta) = x(1 - 0,1 \operatorname{tg} \theta).$$

La première courbe à étudier est définie par les équations paramétriques (1)' et (2)'. Remarquons tout d'abord que pour les valeurs de θ nettement différentes de $k\pi$, $\cos \theta$ peut être négligé par rapport à $20 \sin \theta$ de sorte que la courbe se confond alors pratiquement (compte tenu du fait que le spot a une certaine étendue) avec la courbe d'équations paramétriques

$$x = 6e^{-\frac{\theta}{20}} \cos \theta, \quad y_2 = 6e^{-\frac{\theta}{20}} \sin \theta,$$

qui est la spirale logarithmique $\rho = 6e^{-\frac{\theta}{20}}$ en coordonnées polaires.

D'autre part, pour $\theta = k\pi$, y est petit par rapport à x , lequel est égal à $\pm 6e^{-\frac{\theta}{20}} = \pm 6e^{-\frac{k\pi}{20}}$, les points correspondants étant situés sur la droite $y = \frac{x}{20}$.

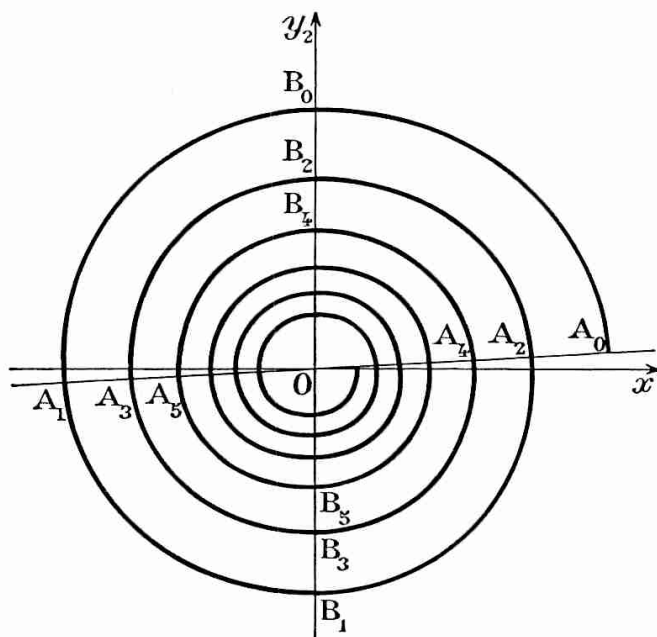


FIG. 207.

Ces remarques nous fixent déjà l'allure de la courbe, peu différente d'une spirale logarithmique (fig. 207).

Pour la préciser il nous suffira de placer des points $A_0, A_1, \dots, A_k$ définis par $\theta = k\pi$ (sur la droite $y = \frac{x}{20}$) et des points $B_0, B_1, \dots, B_k$ (sur l'axe Oy) correspondant à $\theta = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$, en remarquant que lorsque θ augmente de $\frac{\pi}{2}$, x et y sont multipliés par le facteur $p = e^{-\frac{\pi}{40}} = 0,925$. Nous obtenons ainsi

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2} \dots$
x	6	0	-5,1	0	4,38	0	-3,72	0	3,2	0
y_2	0,3	5,55	-0,26	-4,74	0,22	4,05	-0,19	-3,46	0,16	2,96

La distance du spot à son point de repos O est $\rho \simeq 6 e^{-\frac{\theta}{20}}$, le temps $t = \frac{\theta}{\omega}$ au bout duquel elle est égale à 1 mm est défini par $e^{-\frac{\omega t}{20}} = \frac{1}{60}$, donc par

$$t = \frac{46}{\omega} \log_{10} 60 = 46 \times 1,8 \cdot 10^{-4} \simeq 8,2 \cdot 10^{-3} \text{ s.}$$

3° La deuxième courbe demandée est définie par les équations paramétriques (1)' et (3)'.

Pour $\theta = k\pi$, nous avons $y_3 = x = \pm 6e^{-\frac{k\pi}{20}}$, les points correspondants $A_0, A_1, \dots$ sont sur la première bissectrice.

Pour $\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, nous avons

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y_3 = \pm 0,6e^{-\frac{(2k+1)\pi}{40}};$$

les points correspondants $B_0, B_1, \dots$, situés sur $x'Ox$, sont rapprochés du point de

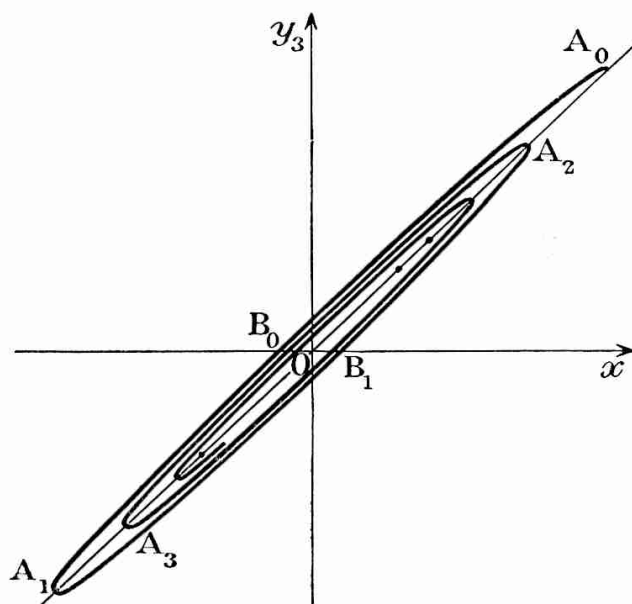


FIG. 208.

repos O de sorte que très vite le mouvement du spot est une oscillation amortie le long de la première bissectrice. Les valeurs suivantes nous ont permis de construire la courbe (fig. 208).

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
x	6	0	-5,1	0	4,38	0	-3,72	0	3,2
y_3	6	-0,55	-5,1	0,47	4,38	-0,41	-3,72	0,34	3,2

Exercice 46. — Quatre solénoïdes identiques sont disposés comme l'indique la figure 209. B_1 et B'_1 ont Ox pour axe, B_2 et B'_2 ont Oy pour axe (Ox est perpendiculaire à Oy). Les faces voisines de B_1 et B'_1 , d'une part, de B_2 et B'_2 d'autre part, sont à la distance $2R$, R étant le rayon commun des quatre bobines. Les solénoïdes sont assez longs pour que leur deuxième face puisse être considérée comme très éloignée. On prend pour sens positif du courant :

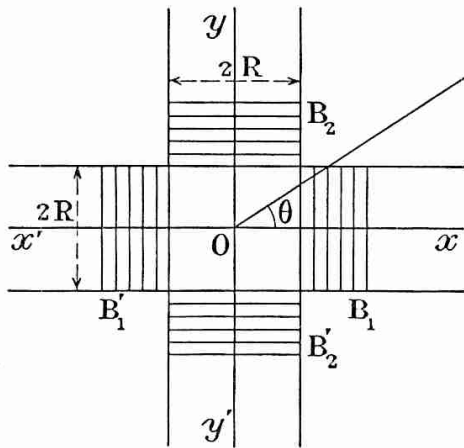


FIG. 209.

— dans B_1 et B'_1 , celui qui produit une induction magnétique dirigée suivant Ox ,
— dans B_2 et B'_2 , celui qui produit une induction magnétique dirigée suivant Oy .

1° B_1 et B'_1 sont traversés par un courant $i_1 = I_1 \cos 2\pi ft$, B_2 et B'_2 par un courant $i_2 = I_2 \sin 2\pi ft$, la fréquence des courants étant $f = 50$ hertz.

Calculer à chaque instant l'intensité et la direction de l'induction $\vec{B}$ en O . Quel

est le lieu de l'extrémité du vecteur $\vec{B}$?

Application numérique : Nombre de spires par unité de longueur $n = 1\,000 \text{ m}^{-1}$; $I_1 = I_2 = 10 \text{ A}$.

2° On dispose en O :

Une bobine b_1 d'axe Ox comprenant 1 000 spires de rayon moyen 2 cm, une bobine b_2 de même surface équivalente que b_1 mais dont l'axe forme un angle θ avec l'axe de b_1 .

Calculer les forces électromotrices instantanées aux bornes de b_1 et b_2 lorsque B_1 , B'_1 , B_2 , B'_2 sont excités comme l'indique la question précédente (on supposera que I_1 et I_2 peuvent être différents; on admettra que, dans l'étendue de b_1 et b_2 , l'induction au voisinage de O peut être considérée, à un instant donné, comme uniforme et égale à sa valeur en O).

3° La différence de potentiel aux bornes de b_1 est appliquée aux plaques de déviation horizontale d'un oscillographe cathodique et la différence de potentiel aux bornes de b_2 aux plaques de déviation verticale du même oscillographe. Une différence de potentiel $u = 33$ volts entre les plaques d'un même couple donne une déviation de 1 cm sur l'écran fluorescent.

a) Tracer, en vraie grandeur, la courbe qu'on observe sur l'écran de l'oscillographe lorsque $I_1 = I_2 = 10 \text{ A}$, pour les valeurs de θ définies par $\theta = k \frac{\pi}{4}$, k prenant toutes

les valeurs entières de zéro à 7. On supposera que les différences de potentiel aux bornes de b_1 et b_2 ont été amplifiées dans un rapport 60 avant d'être appliquées aux plaques de déviation.

b) Par un dispositif convenable, on provoque, pendant un intervalle de temps très petit devant la période $T = \frac{1}{f}$, l'augmentation du diamètre du spot, de manière à marquer à l'instant correspondant la position du spot sur la courbe qu'il décrit. Cet étalement est provoqué périodiquement avec une fréquence f' .

Décrire le phénomène observé sur l'écran lorsque f' est peu différent de f ou d'un multiple entier de f . On supposera toujours $I_1 = I_2$.

Application numérique : $f = 50 \text{ s}^{-1}$ et successivement $f' = 49 \text{ s}^{-1}$, $f' = 51 \text{ s}^{-1}$, $f' = 199 \text{ s}^{-1}$ et $f' = 201 \text{ s}^{-1}$.

1° L'induction magnétique résultante produite par les deux solénoïdes B_1, B'_1 , dirigée suivant $x'Ox$, est

$$B_x = \mu_0 n \left(1 - \cos \frac{\pi}{4} \right) I_1 \cos 2\pi ft = \mu_0 n \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) I_1 \cos 2\pi ft = B_1 \cos 2\pi ft;$$

celle produite suivant $y'Oy$ par B_2, B'_2 est

$$B_y = \mu_0 n \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) I_2 \sin 2\pi ft = B_2 \sin 2\pi ft.$$

$x = B_x$ et $y = B_y$ sont les coordonnées de l'extrémité du vecteur induction résultant, $\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y$. Les équations précédentes sont les équations paramétriques de l'ellipse

$$\frac{x^2}{B_1^2} + \frac{y^2}{B_2^2} = 1,$$

dont les axes de symétrie sont xOx' et yOy' et dont les demi-axes sont B_1 et B_2 .

Le module de $\vec{B}$ est

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{B_1^2 \cos^2 2\pi ft + B_2^2 \sin^2 2\pi ft},$$

sa direction à l'instant t est définie par l'angle $\alpha = (\vec{Ox}, \vec{B})$ tel que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_y}{B_x} = \frac{y}{x} = \frac{B_2}{B_1} \operatorname{tg} 2\pi ft.$$

Application numérique. — Dans le cas particulier où $I_1 = I_2 = I = 10 \text{ A}$, nous avons

$$B_1 = B_2 = B = \mu_0 n \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) I = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^3 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) 10 = 3,68 \cdot 10^{-3} \text{ T}.$$

L'extrémité du vecteur B décrit un cercle d'équation $x^2 + y^2 = B^2$, sa direction à l'instant t est définie par $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 2\pi ft$, donc par $\alpha = 2\pi ft$. Le vecteur B est alors un vecteur de module constant tournant avec une vitesse angulaire constante.

2° Le flux d'induction à travers b_1 à l'instant t est

$$\varphi_1 = B_x NS = B_1 NS \cos 2\pi ft;$$

la force électromotrice induite dans b_1 est

$$e_1 = -\frac{d\varphi_1}{dt} = 2\pi f B_1 NS \sin 2\pi ft = E_1 \sin 2\pi ft.$$

Le flux d'induction dans b_2 est

$$\varphi_2 = NS(B_x \cos \theta + B_y \sin \theta) = NS(B_1 \cos \theta \cos 2\pi ft + B_2 \sin \theta \sin 2\pi ft),$$

et la force électromotrice induite dans b_2 est

$$e_2 = -\frac{d\varphi_2}{dt} = 2\pi f NS(B_1 \cos \theta \sin 2\pi ft - B_2 \sin \theta \cos 2\pi ft).$$

Dans le cas particulier où $I_1 = I_2 = I$, l'on a

$$B_1 = B_2 = B \text{ et } E_1 = E_2 = 2\pi f NSB;$$

par suite

$$e_1 = E \sin 2\pi ft,$$

$$e_2 = E (\cos \theta \sin 2\pi ft - \sin \theta \cos 2\pi ft) = E \sin (2\pi ft - \theta).$$

3° a) Pour $I_1 = I_2 = 10 \text{ A}$, l'on a $E = 2\pi f N S B = 1,45 \text{ volt}$,

$$e_1 = 1,45 \sin 2\pi ft; \quad e_2 = 1,45 \sin (2\pi ft - \theta).$$

Par suite de l'amplification dans le rapport 60, une différence de potentiel de 1,45 volt provoque, aussi bien en ordonnée qu'en abscisse, une déviation

$$A = \frac{1,45 \times 60}{33} = 2,64 \text{ cm.}$$

Les coordonnées du spot sur l'écran sont donc

$$x = A \sin 2\pi ft; \quad y = A \sin (2\pi ft - \theta);$$

ce sont les équations paramétriques de l'ellipse (fig. 210)

$$x^2 - 2xy \cos \theta + y^2 = A^2 \sin^2 \theta,$$

inscrite dans le carré d'axes Ox, Oy , de côté $2A = 5,28 \text{ cm.}$

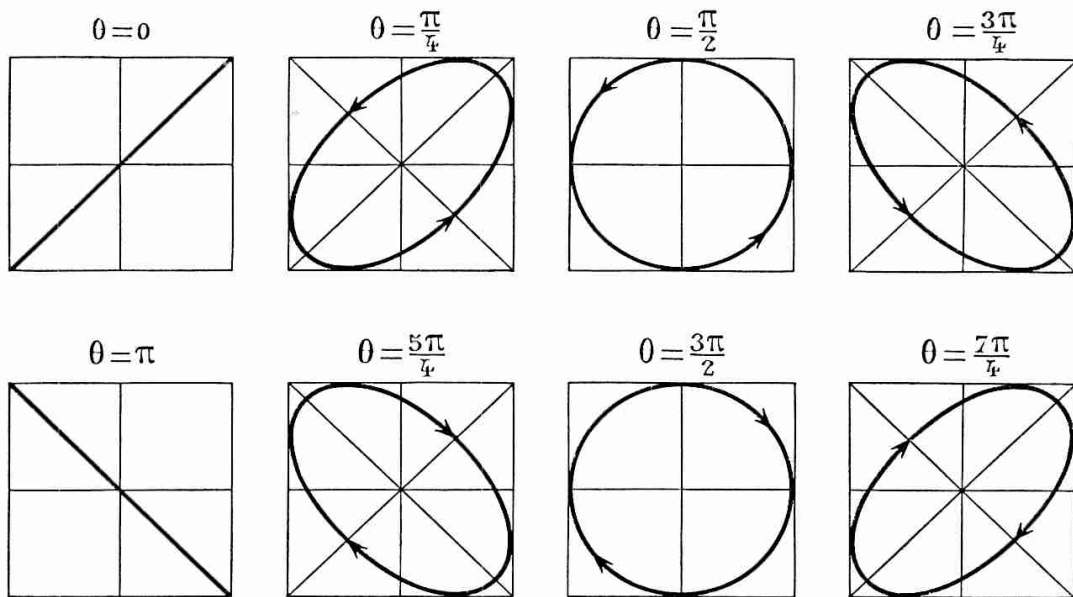


FIG. 210.

Pour $\theta = 0$, on a $x = y$. Le spot oscille le long de la première diagonale du carré le long de la première bissectrice.

Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, la trajectoire est l'ellipse $x^2 - \sqrt{2}xy + y^2 = \frac{1}{2}A^2$, décrite dans le sens gauche; elle admet la première diagonale comme grand axe de symétrie.

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, la trajectoire est le cercle $x^2 + y^2 = A^2$, de rayon A , décrit dans le sens gauche.

Pour $\theta = \frac{3\pi}{4}$, la trajectoire est l'ellipse $x^2 + \sqrt{2}xy + y^2 = \frac{1}{2}A^2$, décrite dans le sens gauche; elle admet la seconde diagonale comme grand axe de symétrie.

Pour $\theta = \pi$, on a $x = -y$. Le spot oscille le long de la seconde diagonale du carré.

Pour $\theta = \frac{5\pi}{4}$, la trajectoire est l'ellipse $x^2 + \sqrt{2}xy + y^2 = \frac{1}{2}A^2$, décrite dans le sens droit.

Pour $\theta = \frac{3\pi}{2}$, la trajectoire est le cercle $x^2 + y^2 = A^2$, décrit dans le sens droit.

Pour $\theta = \frac{7\pi}{4}$, la trajectoire est l'ellipse $x^2 - \sqrt{2}xy + y^2 = \frac{1}{2}A^2$, décrite dans le sens droit.

Pour $\theta = 2\pi$, le spot oscille de nouveau le long de la première diagonale.

Remarquons que le sens de parcours se déduit des équations paramétriques.

b) Pour faciliter le langage, nous désignerons le spot par s et le spot étalé par S . s apparaissant d'une façon continue et la fréquence f étant suffisamment grande, la courbe décrite est lumineuse dans son ensemble par suite de la persistance des impressions visuelles. Comme par hypothèse $I_1 = I_2$, le rayon vecteur Os tourne avec la vitesse angulaire constante $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$; nous

pouvons définir un point par un angle horaire, ce qui nous permet de représenter un cercle sans nuire à la généralité des résultats.

Le spot S n'apparaît sur la courbe qu'à intervalles de temps réguliers, égaux à $T' = \frac{1}{f'}$. Posons, k étant un nombre entier, ΔT et Δf étant respectivement petits par rapport à T' et f' :

$$kT' = T + k\Delta T, \quad \text{ou} \quad T' = \frac{T}{k} + \Delta T; \quad f' = kf + \Delta f.$$

Nous supposons $\Delta T > 0$ ($\Delta f < 0$), autrement dit $T' > \frac{T}{k}$. La figure est faite pour $k = 4$.

Prenons pour origine des temps l'instant où S apparaît en S_1 ; pendant la durée kT' il est marqué k fois en $S_1, S_2, \dots, S_k$, aux époques $0, T', \dots, (k-1)T'$, deux apparitions successives étant séparées par l'intervalle de temps T' . Entre deux marquages (en S_p et S_{p+1}) le spot s a tourné de

$$\widehat{S_p O S_{p+1}} = \omega T' = \frac{\omega T}{k} + \omega \Delta T = \frac{2\pi}{k} + \alpha,$$

avec

$$\alpha = \omega \Delta T = 2\pi f \left(T' - \frac{T}{k} \right) = 2\pi f \left(\frac{1}{f'} - \frac{1}{kf} \right) = \frac{2\pi}{f'} \left(f - \frac{f'}{k} \right).$$

Portons notre attention sur un spot déterminé S_p ; pendant la durée kT' qui sépare deux marquages, les deux impressions sont séparées par l'angle

$$k\omega T' = 2\pi + k\alpha,$$

par suite

$$\widehat{S_p O S_p'} = k\alpha = \frac{2\pi}{f'} (kf - f') = -2\pi \frac{\Delta f}{f'}.$$

Cette rotation s'est effectuée pendant la durée kT' , par suite la vitesse angulaire de S_p est

$$\frac{k\alpha}{kT'} = \alpha f' = 2\pi \left(f - \frac{f'}{k} \right) = -2\pi \frac{\Delta f}{k},$$

et sa fréquence de rotation

$$\nu = -\frac{\Delta f}{k}.$$

Cette fréquence de rotation est la même pour tous les spots (fig. 211). Dans

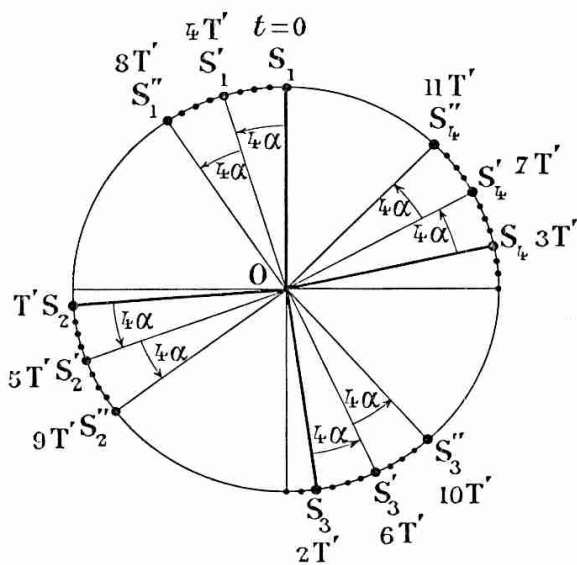


FIG. 211.

l'hypothèse où $\Delta f < 0$ ($\Delta T > 0$) ils tournent dans le même sens que s , en sens contraire si $\Delta f > 0$. Par suite de la persistance des impressions visuelles les apparitions des k spots, intermittentes, paraîtront continues, chaque spot semblera tourner avec la fréquence ν . Nous avons bien trouvé l'angle $S_p OS_{p+1}$ de deux spots S consécutifs égal à $\frac{2\pi}{k} + \alpha$

mais, comme leurs apparitions sont séparées par l'intervalle de temps Δt , correspondant à l'angle α , les positions des k spots à un instant donné sont décalées angulairement de $\frac{2\pi}{k}$.

Pour $f' = 49$ ($k = 1$, $\Delta f = -1$), un seul spot S tourne

dans le sens de s en effectuant 1 tour par seconde; pour $f' = 51$, il tourne en sens inverse de s avec la même vitesse.

Pour $f' = 199$ ($k = 4$, $\Delta f = -1$), 4 spots, S_1, S_2, S_3, S_4 , décalés de 90° l'un par rapport à l'autre, effectuent un quart de tour par seconde dans le sens de s ; pour $f' = 201$, ils tournent en sens inverse avec la même vitesse.

CHAPITRE XXIII (*)

MOMENT MAGNÉTIQUE D'UN ATOME. SPIN. EXPÉRIENCE DE STERN ET GERLACH

23-1. État quantique d'un électron d'un atome.

Un ensemble de *quatre nombres quantiques* n, l, m, s définit l'état quantique d'un électron appartenant à un atome.

Une grandeur est quantifiée quand elle n'est pas susceptible de variation continue. La théorie de Bohr a d'abord permis d'interpréter les séries spectrales de l'atome d'hydrogène par la quantification de l'énergie de niveau, elle a ainsi introduit le premier nombre quantique n , ou *nombre quantique fondamental*, susceptible de prendre des valeurs entières positives. Cette première quantification exprime que l'énergie d'un atome ne peut varier que par des *transitions*, une transition étant le passage de l'atome d'un niveau d'énergie (état stationnaire) à un autre; elle fait intervenir *le quantum d'énergie* $h\nu$, h étant *la constante de Planck*, ν une fréquence.

L'absorption ou l'émission d'une radiation monochromatique correspond à une transition. Le niveau d'énergie le plus bas ou *niveau fondamental* est celui de la plus grande stabilité; l'atome est dans *l'état fondamental* si tous les électrons sont à leur niveau fondamental.

La complexité des spectres atomiques et notamment la structure fine des raies spectrales a imposé de nouvelles quantifications; à chaque quantification correspond un nombre quantique.

23-2. Moments cinétique et magnétique orbitaux. Les nombres quantiques l et m .

Le moment cinétique orbital $\vec{G}_l$ correspond au mouvement de l'électron sur son orbite; c'est le moment du vecteur quantité de mouvement

(*) Programme de Mathématiques Spéciales B.

$\vec{p}_l = m_e \vec{v}$ par rapport au noyau de l'atome. On a, avec des notations évidentes,

$$\vec{G}_l = \vec{p}_l \wedge \vec{r}.$$

Dans le modèle simple où l'électron est dans un champ de forces centrales, sa *vitesse aréolaire* est νS , ν étant la fréquence du mouvement orbital et S la surface de l'orbite; l'expression du moment cinétique est

$$\vec{G}_l = 2m_e \nu \vec{S},$$

le vecteur $\vec{S}$ ayant le sens de la normale positive à S , sens défini à partir de celui du mouvement de l'électron par la convention de rotation.

e étant en valeur absolue la charge de l'électron, le mouvement équivaut à un courant d'intensité $-\nu e$, dont le moment magnétique est

$$\vec{\mathcal{M}}_l = -\nu e \vec{S} = -\frac{e}{2m_e} \vec{G}_l.$$

$\vec{\mathcal{M}}_l$ est le *moment magnétique orbital* de l'électron; il est de sens contraire, de $\vec{G}_l$.

Les quantifications suivantes sont relatives à des moments cinétiques; elles font intervenir la *constante de Planck rationalisée*

$$\hbar = \frac{h}{2\pi},$$

grandeur homogène à un moment cinétique.

1° Quantification du module du moment cinétique orbital.

Elle exprime que le module G_l ne peut être que nul ou un multiple entier de $\hbar$:

$$G_l = l \frac{h}{2\pi};$$

l est le *nombre quantique orbital* (ou *azimutal*), qui ne peut prendre que les valeurs 0, 1, ..., $n-1$. A chaque valeur de n correspondent donc plusieurs états de mouvement possibles pour l'électron.

La quantification du module du moment cinétique orbital entraîne celle du moment magnétique orbital, qui ne peut prendre que les valeurs

$$\mathcal{M}_l = l \frac{e}{2m_e} \frac{h}{2\pi}.$$

Pour $l = 0$, qui définit un état s (à ne pas confondre avec le spin), les moments G_l et $\mathcal{M}_l$ sont nuls.

Le moment magnétique

$$\mu_B = \frac{e}{m_e} \frac{h}{2\pi}$$

est appelé *le magnéton de Bohr*. En définitive la quantification de $\mathcal{M}_l$ s'exprime par

$$\mathcal{M}_l = l\mu_B.$$

2° Quantification spatiale du moment cinétique orbital.

Cette quantification concerne la projection G_z de $\vec{G}_l$ sur un axe $z'z$ physiquement privilégié, par exemple sur la direction d'une induction magnétique extérieure $\vec{B}$.

Le moment cinétique orbital ne peut prendre que des orientations déterminées par les valeurs de G_z :

$$G_z = m \frac{h}{2\pi},$$

m étant *le nombre quantique magnétique*; il peut prendre les valeurs

$$-l, -l + 1, \dots, -1, 0, +1, \dots, l - 1, l.$$

La quantification de la direction de $\vec{G}_l$ entraîne celle de la direction du moment magnétique orbital :

$$\mathcal{M}_z = \frac{e}{2m_e} G_z = m\mu_B.$$

23-3. Moments cinétique et magnétique de spin.

L'interprétation de la structure des spectres atomiques et plus particulièrement celle de l'existence de doublets (comme le doublet jaune D_1D_2 du sodium) a conduit à émettre l'hypothèse que l'électron d'un atome possède, outre ses trois degrés de liberté de translation, un degré de liberté de rotation sur lui-même, phénomène qu'on appelle *le spin*.

De cette rotation résulte un moment cinétique de spin dont le module et la direction sont quantifiés. Le module ne peut avoir que la valeur

$$G_s = \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}.$$

En l'absence de tout champ magnétique on ne peut connaître la direction du moment de spin, mais l'action d'une induction magnétique extérieure crée une direction privilégiée $z'z$ avec laquelle le moment de spin est nécessairement parallèle ou antiparallèle, par suite

$$G_z = \pm \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi} = s \frac{h}{2\pi}.$$

s est *le nombre quantique de spin*, il ne peut prendre que les valeurs $\pm \frac{1}{2}$.

L'existence du moment cinétique de spin entraîne celle d'un moment magnétique de spin de l'électron dont l'expression est

$$\mathbb{M}_s = \frac{e}{m_e} G_s = \frac{e}{m_e} \frac{h}{4\pi} = \mu_B; \quad \mathbb{M}_z = \pm \mu_B.$$

Remarquons que le rapport $\frac{\mathbb{M}}{G}$, rapport gyromagnétique, est deux fois plus grand pour le spin que pour le mouvement orbital.

Considérons deux électrons de mêmes nombres quantiques n, l, m ; pour un atome dans l'état fondamental, d'après le principe d'exclusion de Pauli, leurs spins sont nécessairement antiparallèles; pour l'un $s = +\frac{1}{2}$, pour l'autre $s = -\frac{1}{2}$; leur ensemble constitue une case. Des considérations précédentes résulte que le moment magnétique de spin résultant de deux électrons d'une case est nul.

23-4. Moment magnétique d'un atome dans l'état fondamental.

Dans un atome les moments orbitaux et de spin se composent pour donner des résultantes, les moments totaux.

Une simplification résulte du fait que les moments totaux d'une sous-couche complète, caractérisée par les nombres quantiques n et l , sont nuls. En effet, tous les électrons de la sous-couche étant appariés dans les cases complètes, les moments de spin sont nuls. Pour les moments orbitaux il suffit de remarquer que si $l = 0$ (état s), ces moments sont nuls, aux électrons caractérisés par les nombres quantiques $m = +1, \dots, +l$, correspondent des électrons $m = -1, \dots, -l$, dont les moments orbitaux sont égaux et opposés aux précédents; les moments orbitaux totaux sont donc bien nuls.

Nous n'avons donc à considérer que les moments relatifs aux électrons des sous-couches incomplètes qui sont les plus superficielles. Pour une telle sous-couche les projections des moments cinétiques orbitaux sur la direction d'une induction magnétique extérieure sont $m \frac{h}{2\pi}$, celles des moments de spin, $\pm \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$; les projections des moments magnétiques orbitaux sont $m\mu_B$, celles des moments magnétiques de spin, $\pm \mu_B$. En résumé :

La projection du moment magnétique d'un atome sur une induction magnétique extérieure est nulle ou égale à un nombre entier de magnéttons de Bohr.

Les atomes dont le moment magnétique n'est pas nul sont parama-

gnétiques. Considérons par exemple les atomes alcalins et les atomes H, Cu, Ag, Au, qui, indépendamment de sous-couches complètes, ne comportent qu'un seul électron dans l'état s ($l = 0$). Le moment magnétique orbital de cet électron est nul, son moment magnétique, et par suite celui de l'atome, se réduit au moment de spin c'est-à-dire à un magnéton de Bohr.

Les atomes dépourvus de moment magnétique dans l'état fondamental sont diamagnétiques. C'est le cas des atomes des métaux alcalino-terreux, des atomes Zn, Cd, Hg, formés de sous-couches électroniques complètes, la plus superficielle ne comportant que deux électrons appariés dans l'état s .

23-5. Expérience de Stern et Gerlach.

Cette expérience a permis de vérifier d'une façon directe que

Les atomes pourvus d'un moment magnétique dans l'état fondamental ne sont susceptibles de prendre qu'un nombre fini d'orientations privilégiées par rapport à une induction magnétique extérieure.

L'appareil (fig. 212) est un tube dans lequel on a fait un vide très poussé. En O une petite masse d'argent est portée à une température suffisante pour que sa vaporisation fournisse des atomes dans l'état fondamental, atomes animés d'une vitesse de l'ordre de quelques centaines de mètres par seconde, vitesse résultant de l'agitation thermique. Un mince jet atomique rectiligne est délimité dans la direction Oz par deux diaphragmes D et D'; il imprime sa trace en A sur une plaque photographique P en l'absence de champ magnétique.

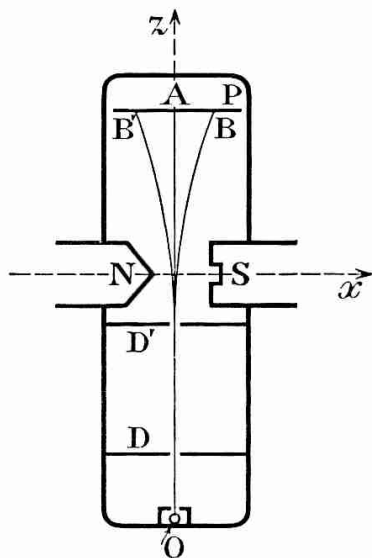


FIG. 212.

Sur le trajet du pinceau on établit entre les pièces polaires d'un électro-aimant une induction magnétique intense $\vec{B}$ de direction NS, cette induction est très *inhomogène* en ce sens qu'elle possède un gradient $\frac{\partial B_x}{\partial x}$ très élevé

dans cette même direction.

Un atome de moment magnétique $\mathcal{M}$ est soumis à une force dont la composante dans la direction x est

$$F_x = \mathcal{M}_x \frac{\partial B_x}{\partial x} = \mathcal{M} \cos \theta \frac{\partial B_x}{\partial x},$$

θ étant l'angle que fait le moment magnétique avec l'induction. Le jet atomique est donc dévié dans la direction x .

Si le moment magnétique pouvait prendre n'importe quelle orientation par rapport à l'induction, $\mathcal{M}_x = \mathcal{M} \cos \theta$ varierait d'une façon continue et l'on observerait sur la plaque une tache élargie de part et d'autre de A. Or l'expérience fournit deux taches distinctes B, B', symétriques par rapport à la tache initiale A.

Il faut en conclure que l'atome d'argent est pourvu d'un moment magnétique qui ne peut prendre que deux orientations déterminées par rapport à l'induction. De plus les mesures du gradient de B et de la déviation du pinceau atomique permettent le calcul de $\mathcal{M} \cos \theta$, que l'on trouve égal au magnéton de Bohr à la précision des mesures. Les deux seules orientations possibles correspondent à $\cos \theta = \pm 1$: elles sont donc parallèles à l'induction.

L'expérience de Stern et Gerlach a été répétée avec les métaux alcalins, le cuivre et l'or; elle a donné le même résultat qu'avec l'argent : $\mathcal{M} = \mu_B$. Il est ainsi vérifié que tous ces atomes, pourvus d'un unique électron dans l'état *s*, ont un moment magnétique réduit au moment de spin de cet électron.

Par contre, avec les métaux alcalino-terreux, le zinc, le cadmium et le mercure dont les atomes possèdent deux électrons de valence appariés dans l'état *s*, on n'a observé aucune déviation du jet atomique, ces atomes sont bien dépourvus de moment magnétique. Des expériences semblables, réalisées avec d'autres éléments, ont conduit à des résultats en parfait accord avec les structures atomiques basées sur des données spectroscopiques.

TABLE DES MATIÈRES

ÉLECTROMAGNÉTISME. CIRCUITS ÉLECTRIQUES ET AIMANTS DANS LE VIDE

Pages.

CHAPITRE PREMIER. — Les vecteurs fondamentaux $\vec{M}$ et $\vec{B}$ de l'élec- tromagnétisme.

1-1.	Les deux corps d'épreuve : magnétomètre et boucle de courant ..	7
1-2.	Axe magnétique d'un magnétomètre et d'une boucle de courant .	8
1-3.	Champ magnétique. Ligne de champ. Exploration du champ ..	10
1-4.	Induction magnétique. Vecteur induction magnétique $\vec{B}$	11
1-5.	Vecteur moment magnétique d'un magnétomètre ou d'une boucle de courant	12
1-6.	Formule fondamentale. Équivalence boucle de courant et magnétomètre	13
1-7.	Induction magnétique produite par un ampérien. Le champ magnétique est en $1/r^3$	15
1-8.	Vecteurs polaires et vecteurs axiaux. Axialité des vecteurs $\vec{M}$ et $\vec{B}$.	17
1-9.	Actions entre courants. Plan d'étude	21

CHAPITRE II. — Postulat fondamental. La formule d'Ampère.

2-1.	La formule d'Ampère	23
2-2.	Remarques sur la formule d'Ampère	24
2-3.	Dichotomie de la formule d'Ampère	25
2-4.	Champ magnétique d'un courant rectiligne indéfini	26
2-5.	Actions entre deux courants rectilignes indéfinis parallèles	28
2-6.	Définition légale de l'ampère. Unités S.I. d'induction magné- tique	29
2-7.	Le système d'unités S.I. (rationalisé)	30

CHAPITRE III. — Formule de Biot et Savart. Détermination du vecteur induction.

3-1.	Loi de Biot et Savart. Conditions d'application	32
3-2.	Définition provisoire de l'unité S.I. d'induction magnétique : le tesla (T)	34
	<i>Exercices</i>	34

3-3.	Champ magnétique d'une bobine circulaire plate	35
	<i>Exercices</i>	38
3-4.	Champ magnétique d'un solénoïde	43
	<i>Exercices</i>	47
 CHAPITRE IV. — Potentiel-vecteur $\vec{A}$ du vecteur induction $\vec{B}$. Conservation du flux d'induction.		
4-1.	Rotationnel $\vec{B}$ et potentiel-vecteur $\vec{A}$	51
4-2.	Rappel de la condition de conservation du flux d'induction ...	52
4-3.	Le vecteur induction dérive d'un potentiel-vecteur	53
4-4.	Unité S.I. de flux d'induction : le weber (Wb)	54
4-5.	Conservation du flux d'induction magnétique. Relation de milieu	55
 CHAPITRE V. — Circulation du vecteur induction. Théorème d'Ampère.		
5-1.	Lemme préliminaire. Gradient d'angle solide	57
5-2.	Circulation élémentaire du vecteur induction magnétique	60
5-3.	Le théorème d'Ampère pour des courants linéaires dans le vide ..	61
5-4.	Conséquences et application du théorème d'Ampère	64
 CHAPITRE VI. — Potentiel scalaire du vecteur induction.		
6-1.	Potentiel d'induction magnétique dans un domaine vide qui n'est sillonné par aucun courant	67
6-2.	Potentiel discontinu et potentiel multiforme	68
6-3.	Potentiel d'induction magnétique et configuration du champ magnétique	70
6-4.	Généralisation de la notion de potentiel d'induction magnétique. Les difficultés	70
6-5.	Application du potentiel au calcul de l'induction. Les méthodes de calcul de B	72
6-6.	Champ magnétique d'un ampérien	73
 CHAPITRE VII. — Loi de Laplace. Forces appliquées à un circuit dans un champ magnétique.		
7-1.	Loi de Laplace	75
7-2.	Remarques sur la loi de Laplace	76
7-3.	Étude expérimentale	77
7-4.	La balance électromagnétique de Cotton	78
7-5.	Circuit dans une induction uniforme. Couples magnétiques....	79
	<i>Exercice</i>	84
7-6.	Solénoïde dans une induction uniforme	86
	<i>Exercices</i>	87
 CHAPITRE VIII. — Travail des forces électromagnétiques. Loi de Maxwell. Inductance propre d'un circuit.		
8-1.	Travail élémentaire de la force électromagnétique appliquée à un élément de circuit	93
8-2.	Étude d'un cas particulier	95

8-3.	Premier énoncé de la loi de Maxwell.....	96
8-4.	Deuxième énoncé de la loi de Maxwell	97
8-5.	Expression analytique de la loi de Maxwell. Calcul des forces et des couples électromagnétiques	98
8-6.	Cas particulier important : l'induction est uniforme	99
8-7.	Règle du flux maximal.....	101
8-8.	Circuit linéaire déformable. Inductance propre d'un circuit ...	103
	<i>Exercice</i>	104

CHAPITRE IX. — Les aimants permanents dans le vide. Mesures magnétiques.

	<i>Les actions exercées et subies par les aimants permanents</i>	106
9-1.	Aimantation temporaire et aimantation permanente.....	106
9-2.	Aimants et courants. Conception ampérienne des aimants	107
9-3.	Caractères du champ magnétique d'un aimant dans le vide ...	109
9-4.	Champ magnétique des aimants. Action d'un champ magnétique uniforme sur un aimant droit	110
9-5.	Actions entre aimants, entre aimants et courants	113
	<i>Champ magnétique terrestre. Mesures magnétiques</i>	113
9-6.	Généralités	113
9-7.	Champ magnétique terrestre	114
9-8.	Magnétomètre. Mesures relatives d'inductions	116
9-9.	Méthode statique. Mesure de $\mathcal{M}/B$	117
9-10.	Applications de la méthode statique	118
9-11.	Méthode dynamique ou méthode des oscillations. Mesure de $\mathcal{M}B$	119
9-12.	Mesures magnétiques absolues	122
	<i>Exercices</i>	122

LES MILIEUX AIMANTÉS

CHAPITRE X. — Les vecteurs aimantation et excitation magnétique. Relation fondamentale des milieux magnétiques.

10-1.	Vecteur aimantation en un point d'un milieu aimanté	131
10-2.	Conception ampérienne d'un milieu aimanté	132
10-3.	Induction magnétique à l'intérieur d'un milieu aimanté. Conser- vation du flux d'induction magnétique	133
10-4.	Excitation magnétique $\vec{H}$. Relation fondamentale du magné- tisme	134
10-5.	Conservation de la circulation du vecteur excitation magnétique.	135
10-6.	Le théorème d'Ampère en général. Équation de Maxwell- Ampère.....	136
10-7.	Non-conservation du flux d'excitation magnétique	137
10-8.	Aimantation uniforme. Aimant solénoïdal	138
10-9.	Aimant torique sans et avec entrefer	140

CHAPITRE XI. — Aimantation induite.

11-1.	Classification des substances au point de vue magnétique. Définitions	143
-------	--	-----

11-2.	Remarques au sujet de la rationalisation.....	144
	<i>Diamagnétisme et paramagnétisme.....</i>	146
11-3.	Corps diamagnétiques	146
11-4.	Corps paramagnétiques	147
11-5.	Théorie sommaire du diamagnétisme et du paramagnétisme ..	147
	<i>Ferromagnétisme</i>	149
11-6.	Généralités	149
11-7.	Aimantation d'un barreau cylindrique. Excitation démagnétisante	149
11-8.	Principe d'une étude expérimentale du ferromagnétisme	151
11-9.	Caractéristiques de première aimantation	152
11-10.	Hystérésis. Cycle d'hystérésis. Énergie d'aimantation	154
11-11.	Matériaux ferromagnétiques. Alliages magnétiques	156
11-12.	Circuits magnétiques	160

PHÉNOMÈNES D'INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET D'AUTO-INDUCTION

CHAPITRE XII. — Phénomènes d'induction électromagnétique.

12-1.	Expériences. Lois qualitatives	165
12-2.	Force électromotrice d'induction. Formule fondamentale	168
12-3.	Restrictions dans l'application de la formule fondamentale	170
12-4.	Induction dans un circuit se déplaçant dans une induction magnétique invariable	171
12-5.	Force électromotrice d'induction élémentaire dans un élément conducteur mobile placé dans une induction magnétique invariable	174
12-6.	Force électromotrice élémentaire et force électromotrice totale .	176
12-7.	Courants de Foucault.....	177
12-8.	Quantité d'électricité induite dans un circuit	179
	<i>Exercices.....</i>	180

CHAPITRE XIII. — Auto-induction. Inductance mutuelle. Régimes variables.

13-1.	Le phénomène d'auto-induction. Expérience	186
13-2.	Formule fondamentale. Nouvelles définitions d'unités S.I.	187
13-3.	Calcul et mesure d'une inductance. Inductance d'une portion de circuit	189
13-4.	Inductance mutuelle de deux circuits linéaires rigides	191
13-5.	Établissement d'un régime permanent dans un circuit	195
13-6.	Rupture du courant dans un circuit inductif	196
13-7.	Énergie électromagnétique	198
13-8.	Localisation de l'énergie électromagnétique. Relation de Maxwell	199
13-9.	Décharge d'un condensateur dans un circuit inductif	201
	<i>Exercices.....</i>	205

UNITÉS ET MESURES ÉLECTRIQUES

CHAPITRE XIV. — Les systèmes d'unités électriques.

14-1.	Généralités sur les systèmes d'unités	213
14-2.	Le problème des unités en électricité	215
14-3.	Rationalisation d'un système d'unités	218
14-4.	Le système international (S.I.)	220
14-5.	Les systèmes C.G.S. électrostatique et électromagnétique	221
	<i>Exercice</i>	225

CHAPITRE XV. — Électrodynamomètres.

15-1.	Principe d'un électrodynamomètre. Mesures absolues d'intensité.	226
15-2.	Électrodynamomètre-balance	226
15-3.	Balances électrodynamiques. Étalons d'intensité	228
15-4.	Wattmètres électrodynamiques	229
	<i>Exercice</i>	230

CHAPITRE XVI. — Galvanomètre à cadre mobile.

16-1.	Généralités	234
16-2.	Description et principe du galvanomètre à cadre mobile	234
16-3.	Sensibilité du galvanomètre	237
16-4.	Mouvement de l'équipage mobile du galvanomètre. Amortissement	240
16-5.	Ampèremètres et voltmètres à cadre mobile	245
16-6.	Classe d'un appareil de mesure	248
16-7.	Galvanomètre balistique	249
16-8.	Fluxmètre	253
	<i>Exercice</i>	256

COURANTS ALTERNATIFS

CHAPITRE XVII. — Définitions et généralités sur les courants alternatifs.

17-1.	Définitions	259
17-2.	Théorème de Fourier	261
17-3.	Principe de la production d'un courant sinusoïdal. Conditions d'application des lois générales	262
17-4.	Effet thermique. Intensité efficace	263
17-5.	Effet électrolytique	267
17-6.	Phénomènes électromagnétiques en courant alternatif	269
	<i>Exercices</i>	274

CHAPITRE XVIII. — Loi d'Ohm en courant alternatif.

	<i>Position du problème. Méthodes de calcul</i>	279
18-1.	Application de la loi d'Ohm. Le régime sinusoïdal	279
18-2.	Méthode trigonométrique. Impédance Z	282
18-3.	Méthode de la représentation vectorielle de Fresnel	283
18-4.	Méthode de la représentation complexe. Impédance complexe ..	287
	<i>Exercice</i>	292

18-5.	Étude des cas particuliers importants	293
	<i>Exercice</i>	295
18-6.	Circuit R, L, C en série. Résonance. Étude expérimentale	299
	<i>Exercice</i>	303
18-7.	Appareils en dérivation	306
	<i>Exercice</i>	309
	<i>Exercices</i>	313

CHAPITRE XIX. — Puissance en courant alternatif.

19-1.	Puissance instantanée et puissance moyenne	318
19-2.	Étude de différents cas	319
19-3.	Puissances active et réactive. Courants watté et déwatté	321
19-4.	Puissance complexe. Théorème de Boucherot	322
19-5.	Facteur de puissance	324
	<i>Exercices</i>	326

ÉLECTRICITÉ CORPUSCULAIRE

Généralités	335
-------------------	-----

CHAPITRE XX. — Équivalence d'une charge en mouvement et d'un élément de courant. La charge élémentaire. Expérience de Millikan.

20-1.	Courant de convection électronique dans un conducteur métallique. Équivalence $\vec{ev} = \vec{Idl}$	337
20-2.	Expérience de Rowland	339
20-3.	La charge élémentaire. Expérience de Millikan	342

CHAPITRE XXI. — Électrolyse. Conduction ionique.

21-1.	Électrolytes. Théorie ionique	347
21-2.	Mécanisme de la conduction ionique	348
21-3.	Décharge d'un ion complexe	350
21-4.	Lois de l'électrolyse. Le faraday et la charge élémentaire	351
21-5.	Actions secondaires. Applications de l'électrolyse	353
21-6.	Conductivité des solutions d'électrolytes	357

CHAPITRE XXII. — Action d'un champ électrique et d'un champ magnétique sur des particules électrisées.

22-1.	Les particules électrisées	365
22-2.	Énergie cinétique d'une particule électrisée soumise à une différence de potentiel accélératrice. Variation relativiste de la masse	366
22-3.	Action d'un champ électrique sur une particule électrisée	371
22-4.	Action d'une induction magnétique sur une particule électrisée en mouvement	375
22-5.	Mesures des grandeurs caractéristiques de corpuscules électrisés ..	380
22-6.	Oscilloscope électronique. Récepteur de télévision	384
22-7.	Accélérateurs de particules électrisées	386
	<i>Exercices</i>	387

CHAPITRE XXIII. — Moment magnétique d'un atome. Spin. Expérience de Stern et Gerlach.

23-1.	État quantique d'un électron d'un atome	402
23-2.	Moments cinétique et magnétique orbitaux. Les nombres quantiques l et m	402
23-3.	Moments cinétique et magnétique de spin	404
23-4.	Moment magnétique d'un atome dans l'état fondamental	405
23-5.	Expérience de Stern et Gerlach	406