

1

MMI

COLLECTION

Méthodes
Mathématiques
de
l'Informatique

SOUS LA DIRECTION DE J. L. LIONS

P. FAURRE

1

NAVIGATION
INERTIELLE
OPTIMALE
ET
FILTRAGE
STATISTIQUE

PIERRE FAURRE

NAVIGATION INERTIELLE OPTIMALE ET
FILTRAGE STATISTIQUE

DUNOD

DUNOD

9501532

ON INERTIELLE OPTIMALE ET
TRAGE STATISTIQUE

P. FAURRE

PARIS



Collection

Méthodes mathématiques
de l'informatique

NAVIGATION INERTIELLE OPTIMALE ET FILTRAGE STATISTIQUE



par P. FAURRE

avec la collaboration de

L. CAMBERLEIN, J. J. CHEVREUL
P, LLORET, C. ME55AN

Préface de J. CARPENTIER

Cet ouvrage traite des systèmes de navigation par inertie et des systèmes hybrides et présente les méthodes récentes de filtrage.. statistique (filtres de Wiener et de Kalman) utilisées pour la synthèse des systèmes de .navigation optimaux.

Il contient un exposé complet et progressif des méthodes de filtrage statistique. les connaissances requises étant du niveau des mathématiques de l'ingénieur et des bases du calcul des probabilités, D'autre part, la présentation des systèmes de navigation par inertie est telle qu'elle peut être abordée soit par des Ingénieurs chargés de la construction et de la synthèse de tels systèmes, soit par des utilisateurs

Voir suite sur le deuxième robot

DUNOD, ÉDITEUR. PARIS



DIVISION

Bibliothèque }
div 15 et 18 }

Mme Devillers

1/12/75

cote 9501582

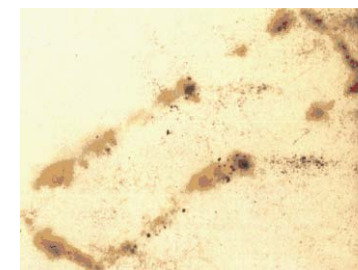
1

SAGEM

SAGEM SA

2 v. n° 2004

Etablissement d'ERAGNY
Recherche Documentaire



navigation inertielle
optimale
et filtrage statistique

MÉTHODES MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE-I

Collection dirigée par J.L. LIONS

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris
Professeur à l'École polytechnique

DANS LA MÊME COLLECTION

1 — P. FAURRE. — *Navigation inertielle optimale et filtrage statistique.*

2 — J. CEA. - *Optimisation: théorie et algorithmes.*

En préparation

A. BENSOUSSAN. - *Filtrage optimal des systèmes linéaires.*

J.P. LAURENT. - *Approximation et optimisation.*

PH. CIARLET, D. FEINGOLD et P.A. RAVIART. - *Méthodes numériques de résolution des systèmes linéaires.*

R. TEMAM. - *Méthodes de décomposition en analyse numérique.*

R. GLOWINSKI, J.L. LIONS et R. TRÉMOLIÈRES. - *Méthodes numériques de résolution des problèmes d'inéquations en Mécanique et en Physique.*

PH. CIARLET et P.A. RAVIART. - *Approximation numérique des solutions des problèmes aux limites elliptiques.*

navigation inertielle optimale et filtrage statistique

P. FAURRE

Ancien élève de l'École polytechnique
Ph.D. de l'Université de Stanford

L. CAMBERLEIN

Ingénieur A. M. et E. S. E.
M.S. de l'Université de Stanford

J. J. CHEVREUL

Ingénieur E. N. S. Aé.
M.S. de l'Université de Laval

P. LLORET

Ingénieur A. M. et E. S. E.

C. MESSAN

Ingénieur A.M. et E.N.S.Aé.

PRÉFACE DE

J. CARPENTIER

Ancien élève de l'École polytechnique
Ingénieur général de l'Armement

DUNOD
PARIS
1971

PRÉFACE

Le développement continu des transports aériens, particulièrement notable au cours des deux dernières décennies, exige une constante amélioration des procédés de navigation et des systèmes de contrôle de la circulation aérienne. Aux problèmes d'écoulement du trafic qui se posent dès à présent avec les avions de vitesse et de capacité peu différentes, s'ajouteront bientôt ceux qui résulteront de la coexistence des avions supersoniques, des avions géants subsoniques et des avions classiques. Les «standards» de séparation en vol devront être révisés pour tenir compte des caractéristiques différentes de ces avions, des soucis de rentabilité et des impératifs de sécurité. De même, les cadences des décollages et des atterrissages devront être optimisées, aussi bien pour éviter ou réduire les temps d'attente qui entraînent une consommation prohibitive de carburant que pour permettre la meilleure utilisation des aéroports et de leurs installations.

Ceci conduit à chercher à améliorer les systèmes de navigation aérienne ainsi, d'ailleurs, que les systèmes de contrôle du trafic aérien et ceux d'atterrissage sans visibilité.

Les divers systèmes de navigation aérienne ont des caractéristiques très différentes suivant leur principe ou suivant leur réalisation.

Parmi les systèmes autonomes, c'est-à-dire indépendants de toute aide extérieure au véhicule, les systèmes de navigation par inertie voient leur emploi s'étendre de plus en plus. Ils permettent de déterminer en même temps que les angles d'azimut, roulis et tangage, les vitesses et les déplacements de l'avion sans être sujets aux variations de l'environnement extérieur (conditions météorologiques ou propagation radioélectrique). Cependant, malgré les progrès considérables accomplis depuis les premiers essais sur avion (vers 1950), les systèmes de navigation par inertie ne peuvent donner, par nature, une précision indépendante de la durée de vol: en particulier la dérive des gyroscopes engendre une erreur de position croissant avec le temps. Aux erreurs instrumentales des gyroscopes et des accéléromètres s'ajoutent les erreurs de réglage du système et les erreurs d'orientation initiale. Ceci conduit à associer aux systèmes de navigation par inertie d'autres systèmes de navigation de principe différent, tels par exemple que les systèmes de localisation radioélectrique.

Une telle association constitue un système hybride de navigation.

Il faut noter que l'idée d'associer des systèmes complémentaires de façon à tirer parti de leurs qualités respectives n'est pas nouvelle; dans le domaine des instruments de bord, le compas gyromagnétique était déjà une association de

© DUNOD, 1971

Toute reproduction, même partielle, de cet ouvrage est interdite. Une copie ou reproduction par quelque procédé que ce soit, photographie, microfilm, bande magnétique, disque ou autre, constitue une contrefaçon passible des peines prévues par la loi du 11 mars 1957 sur la protection des droits d'auteur.

deux appareils déterminant l'azimut avec des caractéristiques différentes: le compas magnétique et le gyroscope directionnel (le compas magnétique donne une indication souvent erronée à court terme du fait de sa sensibilité aux accélérations et aux inclinaisons de l'avion; le gyroscope directionnel, au contraire, donne une indication précise à court terme mais imprécise à long terme, du fait des couples parasites qui le font précessionner).

Cette association de systèmes complémentaires, en vue de réaliser un système hybride dont la précision et la fiabilité soient supérieures à celles des systèmes qui le constituent, doit être optimisée. Ceci conduit à analyser les erreurs propres des systèmes à associer. Il faut distinguer les erreurs systématiques ou déterministes qui peuvent être corrigées, soit par le constructeur, soit par l'utilisateur avant le vol et les erreurs aléatoires ou stochastiques qui constituent des résidus avec lesquels il faut composer.

On doit faire alors appel à des méthodes statistiques qui à partir des lois de probabilité des diverses variables permettent d'estimer au mieux l'une d'elles. Parmi ces méthodes, le filtrage récursif de KALMAN et Bucy constitue une méthode très puissante, bien adaptée à l'optimisation des systèmes hybrides de navigation et, en particulier, des systèmes qui associent à l'information de position fournie d'une façon continue par le système de navigation par inertie, celle généralement obtenue à des intervalles de temps périodiques grâce aux systèmes de localisation radioélectrique. Les systèmes de navigation hybride optimisés par les méthodes récursives du type de celle de KALMAN et Bucy peuvent être aisément réalisés à l'aide de calculateurs numériques dont l'emploi tend à se généraliser à bord des avions.

Il faut noter que ces mêmes méthodes d'optimisation sont utilisables pour le contrôle de la navigation aérienne et pour l'atterrissage sans visibilité: les informations du radar ou celles du système d'atterrissage sans visibilité peuvent être associées aux données du système de navigation de l'avion. De même, dans le domaine maritime, l'association, sur les navires, du système de navigation et du radar anti-collision peut être optimisée avec ces méthodes. Le contrôle du trafic maritime dans certaines voies particulièrement fréquentées par des véhicules de vitesses différentes comme, par exemple, les navires classiques, les véhicules à coussins d'air et les hydroptères pourrait, lui aussi, être effectué avec de telles méthodes d'optimisation.

Dans le domaine spatial, les exigences de précision et de fiabilité conduisent à l'emploi de ces méthodes qui peuvent fournir à chaque instant des informations précises et sûres sur la position et le vecteur-vitesse du véhicule spatial.

En dehors de ce vaste domaine de la navigation, il existe d'autres champs d'application possibles pour ces méthodes d'optimisation. Le contrôle des processus industriels complexes fait appel à de nombreuses mesures qui doivent être confrontées, en temps réel, de façon à assurer la bonne marche de l'installation. Cette confrontation peut tenir compte du caractère aléatoire des erreurs sur les mesures effectuées périodiquement et faire intervenir des méthodes récursives.

C'est pourquoi le présent ouvrage que M. Pierre FAURRE a rédigé en collaboration avec d'éminents spécialistes de la navigation par inertie sera apprécié, non seulement des constructeurs et des utilisateurs dans le domaine aéronautique et dans le domaine maritime, mais aussi des ingénieurs de l'Informatique et de l'Automatique.

En vérité pour rédiger un tel ouvrage nul n'était mieux qualifié que Pierre FAURRE, sorti major de l'École polytechnique, ingénieur au Corps des Mines, directeur-adjoint du Centre d'Automatique de l'École des Mines, directeur de recherche à l'Institut de Recherche d'Informatique et d'Automatique (I. R.I.A.).

Après avoir participé aux travaux du Centre d'Etudes et de Recherches en Automatismes (CERA), centre rattaché à l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique, Pierre FAURRE a suivi les cours du Professeur R. E. KALMAN à l'Université de Stanford et a rédigé, sous sa direction, une thèse sur la représentation markovienne des processus aléatoires, qui lui a valu en 1967 le titre de docteur Ph. D. de l'Université de Stanford. Continuant ensuite ses travaux en France, il est l'auteur de plusieurs publications sur le filtrage de KALMAN qu'il applique à la navigation par inertie à la Société d'Applications Générales d'Électricité et de Mécanique (SAGEM). C'est avec des ingénieurs de cette société qu'il rédige le présent ouvrage qui est ainsi le fruit d'un travail en équipe de spécialistes mettant en commun leurs compétences dans des domaines variés:

M. L. CAMBERLEIN, ingénieur A.M. et E.S.E., Master of Sciences de l'Université de Stanford, ingénieur au Groupe aérospatial,

M. 1.1. CHEVREUL, ingénieur E.N.S.Aé., Master of Sciences de l'Université de Laval, ingénieur à la Division Calculateurs,

M.P. LLÜRET, ingénieur A.M. et E.S.E., ingénieur au Groupe aérospatial,

M. C. MESSAN, ingénieur A.M. et E.N.S.Aé., chef de la Division Senseurs inertiels.

Le résultat de ce travail d'équipe est un ouvrage qui sera particulièrement apprécié pour sa rigueur scientifique et pour sa précision technique. Attendu par les réalisateurs et les utilisateurs des systèmes de navigation, cet ouvrage suscitera également un vif intérêt parmi les spécialistes de l'Informatique et de l'Automatique. Il recevra, n'en doutons pas, sur le plan international, un accueil amplement mérité par la compétence et le dynamisme de ses auteurs.

J. CARPENTIER

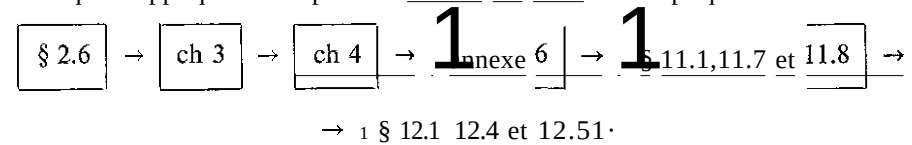
Chef du Service des Recherches
Direction des Recherches et Moyens d'Essais

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage concerne les utilisateurs et les constructeurs de systèmes de navigation par inertie ou de systèmes hybrides, et tous ceux qui sont intéressés par les méthodes récentes de filtrage statistique récursif et leurs applications.

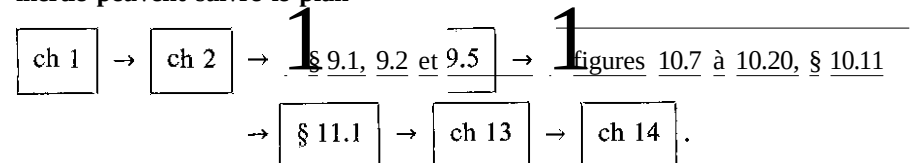
Il est certes recommandé de lire l'ensemble de ce livre si l'on désire s'informer de façon sérieuse sur la navigation inertielle hybride optimale. Néanmoins, les auteurs se sont efforcés d'écrire un texte pour lequel on puisse adopter trois stratégies d'étude partielle et orientée.

D'une part, on peut considérer ce livre comme une introduction aux méthodes de traitement d'information en temps réel (filtrage statistique), les systèmes de navigation optimaux constituant alors un bel exemple d'application. De ce point de vue il devrait intéresser les étudiants et les chercheurs en Mathématiques Appliquées. Le plan de lecture est dans cette optique

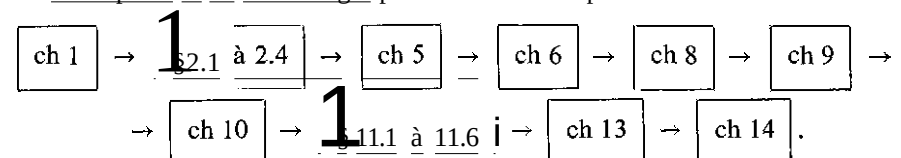


Le sous-système principal d'un navigateur optimal étant constitué par un - ou plusieurs - systèmes à inertie, on a exposé assez en détail la théorie et la technologie correspondantes, de telle sorte que l'on est en présence d'un ouvrage couvrant l'utilisation et la conception de systèmes à inertie, s'adressant tant aux étudiants qu'aux ingénieurs et utilisateurs.

Les lecteurs désirant adopter le point de vue d'utilisateurs de systèmes à inertie peuvent suivre le plan



Les constructeurs ou les lecteurs voulant envisager plus en détail les problèmes de conception et de technologie peuvent utiliser le plan suivant



Les auteurs sont heureux de remercier le Professeur J.L. LIONS d'accueillir leur travail dans sa nouvelle collection, ainsi que l'ingénieur général de l'Armement J. CARPENTIER d'avoir accepté de le préfacer.

Ils remercient de plus les Services de la Délégation Ministérielle à l'Armement et particulièrement le Service Technique Aéronautique - sous le patronage duquel certains des travaux exposés ici ont été réalisés - de les avoir autorisés à publier ces résultats. Ils remercient aussi la SAGEM d'avoir fourni le cadre dans lequel ce travail a pu se développer et d'en avoir rendu possible la publication.

Ils adressent leurs remerciements à M. B. de CREMIERS, Directeur Technique de la SAGEM, dont la grande expérience dans le domaine de l'inertie leur a été précieuse.

Ils remercient vivement tous leurs collègues et amis ayant pris part de près ou de loin à ce travail, et plus particulièrement M. H. BERGER pour sa participation à la rédaction des chapitres 5 et 6, et MM. A. COTE, J. P. FERRANDON et J. RACINE pour avoir participé à la rédaction du chapitre 8. Ils tiennent aussi à citer MM. P. AMBRE, F. GREZ, C. GRÉ, M. VIÉVILLE, qui ont effectué une grande partie des calculs sur ordinateurs ici présentés ainsi que MM. A. BENSOUSSAN, M. DEPEYROT et R. GLOWINSKI qui ont relu une partie du manuscrit et suggéré des améliorations.

L'un des auteurs - P. FAURRE - tient à exprimer sa reconnaissance au professeur B.O. LANGE qui lui a enseigné les éléments de la navigation par inertie à l'Université de Stanford, et toute sa gratitude à son ami - et ancien maître - le professeur R. E. KALMAN dont les travaux sur le filtrage statistique sont à la base des systèmes de navigation hybrides modernes.

Les AUTEURS

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Chapitre 1	Introduction à la navigation par inertie	3
1.1	Navigation sans aide extérieure.. . . .	3
1.2	Rappel des lois de la mécanique et du principe de relativité.	4
1.3	Principe des appareils mesurant <i>Jet $\vec{\omega}$</i>	5
1.4	Navigateur par inertie	8
Chapitre 2	Cas simplifié : navigation le long d'un méridien d'un système à un axe.	10
	<i>Système inertiel pur</i>	
2.1	Description et fonctionnement idéal	10
2.2	Fonctionnement effectif et équations d'erreurs.	11
2.3	Instabilité du calcul de l'altitude.	15
2.4	Alignement initial.	16
	<i>Systèmes hybrides</i>	
2.5	Amortissement des erreurs	17
2.6	Systèmes hybrides optimaux	20

ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES SYSTÈMES ET FILTRAGE STATISTIQUE

Chapitre 3	Systèmes dynamiques linéaires	31
3.1	Systèmes dynamiques	31
3.2	Systèmes différentiels linéaires (description externe).	34
3.3	Systèmes différentiels linéaires (description interne).	36
3.4	Commandabilité des systèmes linéaires différentiels.	41
3.5	Observabilité des systèmes linéaires différentiels..	45
3.6	Stabilité des systèmes linéaires différentiels	49
3.7	Systèmes linéaires aux différences. Résumé.	51
Chapitre 4	Filtrage statistique	54
4.1	Fonctions aléatoires du second ordre.	54
4.2	Transformation linéaire et représentation spectrale de fonctions aléatoires du second ordre	56

4.3	Filtre de Wiener	58
4.4	Représentation markovienne des fonctions aléatoires	63
4.5	Filtre récursif de Kalman-Bucy. Cas d'observations discrètes.	68
4.6	Filtre récursif de Kalman-Bucy. Cas d'observations continues	72
4.7	Filtres récursifs singuliers.	75
Complément 1.	<i>Factorisation des matrices spectrales rationnelles.</i>	81
Complément 2.	<i>Stabilité des filtres de Kalman-Bucy . . .</i>	86
Complément 3.	<i>Sensibilité d'un filtre de Kalman-Bucy .</i>	88
Complément 4.	<i>Simulation numérique d'un filtre récursif .</i>	99

COMPOSANTS

Chapitre 5	Gyroscopes	103
5.1	Principes, équations et fonctions de transfert des gyroscopes	103
5.2	Paliers de toupie et suspension de l'élément sensible. . . .	110
5.3	Étude détaillée d'un gyroscope flottant à un degré de liberté	116
5.4	Commande digitale de gyroscope .	122
5.5	Analyse des erreurs	127
5.6	Description des méthodes de mesure	129
5.7	Performances.	135
Chapitre 6	Accéléromètres.	136
6.1	Principe de fonctionnement.	136
6.2	Différents types d'accéléromètres	137
6.3	Description détaillée d'un accéléromètre pendulaire à un degré de liberté.	141
6.4	Bouclage et codage d'un accéléromètre pendulaire	146
6.5	Erreurs	149
6.6	Méthodes de mesure.	151
6.7	Performances.	155
Chapitre 7	Plates-formes inertielles ..	158
7.1	Généralités.....	158
7.2	La thermique des plates-formes	168
7.3	Asservissement initial en position canonique.	171
7.4	Asservissement des cardans sur les gyroscopes	173
7.5	Cinématique d'une plate-forme asservie: passage de la boucle	181
Chapitre 8	Calculateurs.	188
	<i>Calculateurs universels</i>	
8.1	Calculateurs universels.	188
8.2	Technologie	202

8.3	Fiabilité.. - - - - -	214
8.4	Exemples de calculateurs.	218
	<i>Analyseurs différentiels numériques (DDA)</i>	
8.5	Généralités.	222
8.6	Algorithmes d'intégration pour analyseur différentiel numérique	224
8.7	Représentation de l'information.	226
8.8	Principe de fonctionnement d'un intégrateur de DDA parallèle.	227
8.9	Analyse des erreurs d'intégration.	228
8.10	Utilisation de l'intégrateur DDA.	230
8.11	Organisation générale des analyseurs différentiels numériques	232
8.12	Programmation.	234
8.13	Intégrateur DDA-S .	238
8.14	Exemple d'analyseur différentiel numérique	239

SYSTÈMES DE NAVIGATION

Chapitre 9	Mécanisation d'un système inertiel.	243
9.1	Description des différentes mécanisations avec plate-forme asservie	243
9.2	Équations de mécanisations avec une plate-forme asservie	247
9.3	Trois exemples de mécanisation	248
9.4	Comparaison des mécanisations précédentes.	254
9.5	Paramètres de navigation et de guidage. . . .	255
9.6	Mécanisation d'un système strapdown	260
Complément 1.	<i>Rotation à imposer à un trièdre pour qu'il reste localement tangent à une surface</i>	264
Complément 2.	<i>Ellipsoïde terrestre et tenseur de courbure.</i>	266
Chapitre 10	Erreurs d'un système de navigation par inertie	269
10.1	Introduction	269
	<i>Équations d'erreurs</i>	
10.2	Le trièdre plate-forme et les erreurs des instruments.	270
10.3	Le trièdre calculateur et l'équation en ψ .	272
10.4	Équations des erreurs de position	274
10.5	Interprétation des erreurs.	276
	<i>Intégration des équations d'erreurs</i>	
10.6	Instabilité du calcul de l'altitude et de la vitesse verticale.	277
10.7	Erreurs pour des véhicules de vitesse faible ou constante..	278
10.8	Erreurs dans le cas d'un système amorti.	282
10.9	Solution approchée pour quelques heures de fonctionnement.	285
10.10	Simulation numérique sur ordinateur.	293

<i>Analyse statistique des erreurs</i>	
10.11 Caractère aléatoire des erreurs instrumentales et des erreurs dynamiques d'un système à inertie.	296
10.12 Équation des covariances d'erreur et simulation numérique	298
Chapitre II Alignement initial d'un système à inertie. Approche classique et approche optimale	306
11.1 Principes généraux d'alignement.	306
<i>Point de vue classique</i>	
11.2 Précision maximale d'un alignement autonome et calibration initiale	308
11.3 Équation fondamentale de l'alignement.	310
11.4 Alignement du premier ordre	310
11.5 Alignement usuel du second ordre.	313
11.6 Comparaison des alignements du premier et du second ordre et alignements plus complexes	317
<i>Point de vue optimal</i>	
11.7 Mise sous forme de vecteur d'état du problème d'alignement initial	320
11.8 Alignement initial optimal et sous-optimal.	322
Chapitre 12 Systèmes hybrides. Approche classique et approche optimale.	330
12.1 Introduction aux systèmes hybrides ou aidés.	330
12.2 Synthèse des systèmes hybrides . . .	333
12.3 Systèmes hybrides amortis classiques.	336
12.4 Système hybride optimal	341
12.5 Méthodologie pour la synthèse d'un système optimal	350
Chapitre 13 Système de navigation à inertie. Navigateur SAGEM inertiel (NSI).	353
13.1 Définition du navigateur SAGEM inertiel (NSI)	355
13.2 Organisation fonctionnelle. Signaux d'entrée/sortie.	355
13.3 Unité inertielle (U.L).	357
13.4 Unité de commande et de visualisation (Uey).	363
13.5 Définition des modes de fonctionnement	363
13.6 Alignement.	366
13.7 Navigation.	369
Chapitre 14 La navigation inertielle dans l'aéronautique civile	373
14.1 Introduction	373
14.2 Historique	375
14.3 Le système inertiel ARINC 561	377
14.4 Tendances de la navigation inertielle pour avions commerciaux.	397

ANNEXES

Annexe 1. <i>Notation vectorielle et matricielle</i> . .	403
Annexe 2. <i>Changement de repère.</i> - - - -	406
Annexe 3. <i>Représentations paramétriques d'une rotation</i>	411
Annexe 4. <i>Transformation de Laplace.</i>	416
Annexe 5. <i>Transformation en Z.</i> . . .	422
Annexe 6. <i>Intégrations numériques d'équations différentielles</i>	425
Bibliographie	439
Index - - -	445

INTRODUCTION

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

À LA NAVIGATION PAR INERTIE

P. FAURRE

1.1 Navigation sans aide extérieure

De tous temps, la navigation a consisté en l'art de se diriger vers une destination finale et pour cela à déterminer la position et la vitesse d'un véhicule; mais tous les principes de navigation - navigation par inertie exceptée - consistent à utiliser des phénomènes externes au mobile (point astronomique, mesure de vitesse par rapport au milieu ambiant, vitesse Doppler, position Loran, etc.).

On peut soulever le problème suivant: *est-il possible de naviguer sans aucune aide extérieure?* On voit sans peine l'intérêt considérable qu'il y aurait à le résoudre:

- intérêt militaire: système de navigation impossible à brouiller et d'une discrétion absolue,
- intérêt civil: fiabilité d'une navigation ne dépendant ni d'aides extérieures (Loran, etc.), ni de perturbations extérieures (nuages, orage magnétique, etc.).

Conceptuellement, le problème est résumé par la figure 1-1 où l'on a représenté un expérimentateur ayant loisir de faire toute expérience physique à l'intérieur de sa capsule que l'on suppose être un écran parfait à tous les rayonnements extérieurs. Peut-il alors déterminer quelles sont ses position, vitesse et attitude?

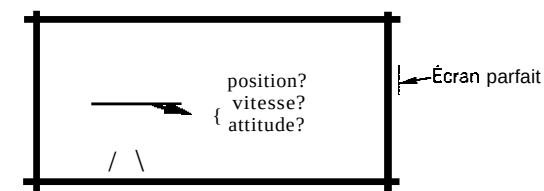


Figure 1-1. Le problème de la navigation par inertie.

1.2 Rappel des lois de la mécanique et du principe de relativité

1.2.1 Rappelons que par rapport à des axes liés au centre de la terre Cet ayant des directions fixes par rapport aux étoiles (axes - ou repère - dits inertiels ou galiléens et représentés dans la suite par li), la loi fondamentale de la mécanique s'écrit:

$$\left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}\right)_i = \ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{f} + \vec{g} \quad (1.1)$$

où

$\vec{r}$ = vecteur position (voir figure 1-2),

$\left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}\right)_i$ ou $\ddot{\vec{r}}$ = dérivée seconde par rapport au repère Ci de la position

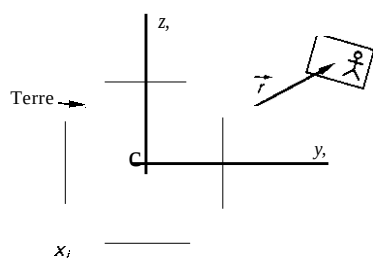


Figure 1-2. Repère inertiel.

$\ddot{\vec{r}}$ = accélération inertielle (ou absolue),

$\vec{F}$ = force totale appliquée,

$\vec{g}$ = force par unité de masse due à l'attraction universelle,

$\vec{J}$ = force spécifique = somme rapportée à l'unité de masse de toutes les forces appliquées autres que $\vec{g}$ (poussée des moteurs, portance, traînée, réaction du sol, etc.).

1.2.2 Donc $\vec{r}$ est le vecteur position, et l'on représente par $\vec{\omega}$ le vecteur rotation instantanée par rapport à l'espace inertielle de la capsule de la figure 1-1.

On peut alors énoncer la vérité physique très profonde suivante:

PRINCIPE DE RELATIVITÉ GÉNÉRALISÉE d'EINSTEIN.

A l'aide d'expériences physiques faites à l'intérieur de sa capsule, l'expérimentateur de la figure 1-1 peut mesurer:

la force spécifique $\vec{J}$,
la rotation inertielle instantanée $\vec{\omega}$ de sa capsule, mais rien d'autre, concernant son mouvement par rapport au reste de l'univers.

1.3 Principe des appareils mesurant $\vec{f}$ et $\vec{\omega}$

1.3.1 ACCÉLÉROMÈTRE

Un appareil permettant de mesurer une ou plusieurs composantes du vecteur $\vec{J}$ s'appelle un accéléromètre (remarquer combien une telle appellation est mal fondée: un accéléromètre ne mesure pas l'accélération, mais la force spécifique, c'est-à-dire la différence entre l'accélération inertielle et l'attraction universelle).

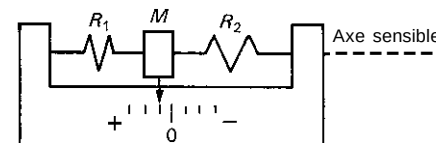


Figure 1-3. Schéma de principe d'un accéléromètre linéaire à un axe.

La figure 1-3 schématise le principe d'un accéléromètre: une masse M mobile suivant un axe appelé axe sensible, est maintenue dans le boîtier de l'accéléromètre par deux ressorts R_1 et R_2 ; et son mouvement possède de plus un amortissement visqueux.

Le déplacement de la masse M dans le boîtier donne une mesure de la composante de $\vec{J}$ suivant l'axe sensible de l'appareil, ce qui est illustré sur les figures 1-4 et 1-5.

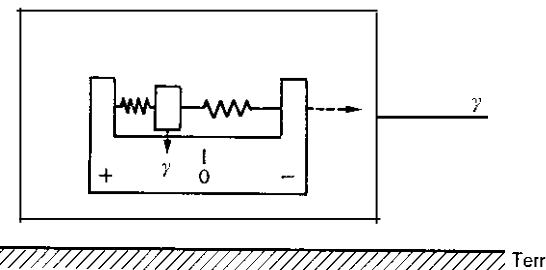


Figure 1-4. Véhicule accélérant dans un plan horizontal. Axe sensible horizontal.

En effet, on peut écrire la loi fondamentale de la mécanique pour l'ensemble composé de la masse mobile et du boîtier:

$$\ddot{\vec{R}} = \vec{J} + \vec{g} \quad (1.2)$$

- pour la masse mobile seule

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{T} + \vec{g}, \quad (1.3)$$

$\vec{T}$ représentant la réaction du boîtier sur la masse mobile.

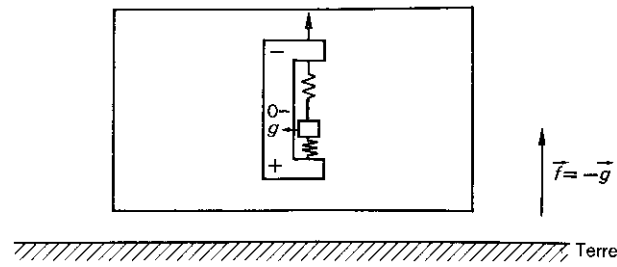


Figure 1-5. Véhicule immobile. Axe sensible vertical ($\vec{f} = -\vec{g}$).

Dans le cadre d'une analyse sommaire où l'on suppose qu'il y a équilibre, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de mouvement relatif entre la masse mobile et le boîtier, on a

$$\vec{R} = \vec{f}, \quad (1.4)$$

ce qui entraîne

$$\vec{T} = \vec{f}. \quad (1.5)$$

Or la composante de $\vec{T}$ suivant l'axe sensible de l'accéléromètre est mesurable par la déformation des ressorts. L'accéléromètre mesure donc bien la composante de $\vec{f}$ sur cet axe sensible.

1.3.2 GYROSCOPE

On pourrait imaginer de repérer le mouvement angulaire par rapport à l'espace inertiel en utilisant un solide parfaitement suspendu autour de son centre d'inertie et ayant une vitesse angulaire initialement nulle. La loi de l'inertie entraîne alors que ce solide garde une orientation inertielle fixe (voir figure 1-6a).

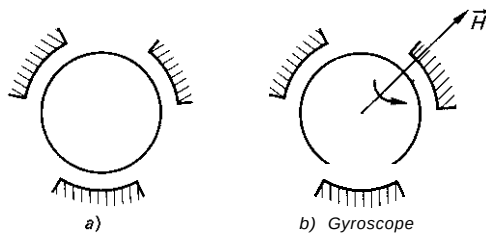


Figure 1-6. Références d'attitude.

Cependant le moindre couple perturbateur entraîne la création d'un mouvement angulaire croissant quadratiquement avec le temps:

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{M}{I} t^2 \quad (1.6)$$

où θ = déplacement angulaire,
 M = couple perturbateur,
 I = moment d'inertie,
 t = temps.

Si l'on suppose par exemple que

$$I = 40 \text{ c.G.S.},$$

le couple

$$M = 10^{-2} \text{ C.G.S.}$$

est alors de l'ordre de grandeur de la limite pouvant être atteinte par la technologie actuellement la plus évoluée. Ces valeurs impliquant un décalage angulaire de 10° au bout de 40 secondes, entraînent qu'une telle référence angulaire est inutilisable.

Par contre si l'on considère un solide animé d'une grande vitesse angulaire autour d'un axe de symétrie (figure 1-6b), ce qui lui confère un moment cinétique $\vec{H}$ important, les lois de la mécanique entraînent les points suivants:

- en l'absence de couple perturbateur, $\vec{H}$ est inertielle fixe,
- en présence d'un couple perturbateur $\vec{M}$, la rotation instantanée $\vec{\omega}$ (orthogonale à $\vec{H}$) obéit à la loi gyroscopique

$$\vec{M} = \vec{\omega} \times \vec{H}, \quad (1.7)$$

où la notation $\times$ désigne le produit vectoriel. Le mouvement angulaire créé par un couple perturbateur croît dans ce cas linéairement avec le temps:

$$\theta = \frac{M}{H} t. \quad (1.8)$$

Avec les valeurs numériques précédentes et

$$H = 10^5 \text{ c.G.S.}$$

le décalage angulaire est d'une minute d'arc au bout d'une heure.

Un tel dispositif permet donc de conserver une direction inertielle fixe. Il porte le nom de *gyroscope*.

1.3.3 PLATE-FORME À INERTIE

Afin de mesurer $\mathbf{J}$ et $\vec{\omega}$, on fixe sur un même bâti 3 accéléromètres à un axe et 2 gyroscopes à deux axes (ou 3 gyroscopes à un axe). Cet ensemble s'appelle plate-forme à inertie (figure 1-7).

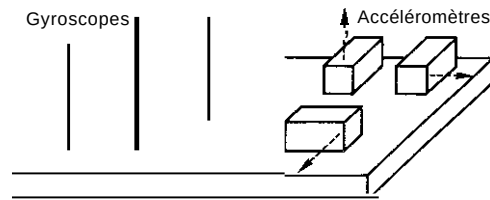


Figure 1-7. Plate-forme à inertie.

On peut imaginer essentiellement deux façons d'utiliser une telle plate-forme:

fixer rigidement la plate-forme au véhicule: on mesure alors $\mathbf{J}$ sur des axes liés au véhicule, et l'orientation de la plate-forme est déterminée à l'aide des deux gyroscopes. Ce fonctionnement s'appelle «strapdown». isoler la plate-forme des mouvements angulaires du véhicule à l'aide de cardans et l'asservir (les gyros étant les instruments détecteurs) à une orientation choisie (par exemple inertielle fixe). C'est le cas usuel.

Ces deux systèmes sont schématisés sur la figure 1-8 : dans un cas la rotation de la plate-forme est commandée (signal d'entrée), dans l'autre elle est mesurée (signal de sortie).

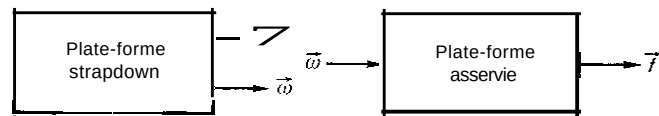


Figure 1-8. Les deux types de plate-forme.

1A Navigateur par inertie

Disposant d'une plate-forme, le navigateur par inertie va intégrer l'équation fondamentale de la mécanique

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{f} + \vec{g} \quad (1.9)$$

où $\mathbf{J}$ est mesuré par les accéléromètres, $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r})$ est calculé en fonction de la

position. L'équation vectorielle (1.9) est interprétée sur les axes de la plate-forme dont la rotation instantanée $\vec{\omega}$ est connue, qu'elle soit mesurée (strapdown) ou commandée (plate-forme asservie).

Il convient évidemment d'initialiser les calculs en indiquant les position, vitesse et orientation de la plate-forme à l'instant initial.

Très schématiquement, un navigateur par inertie est représenté par la figure 1-9.

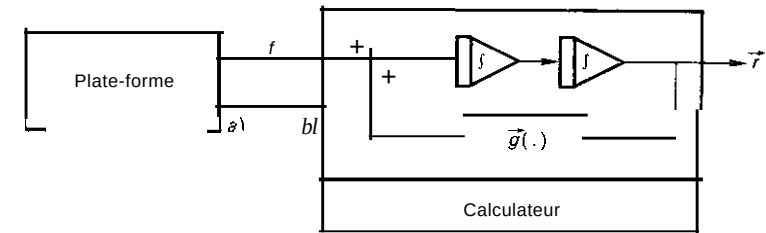


Figure 1-9. Schéma général d'un navigateur par inertie:

- a) cas usuel d'une plate-forme asservie
- b) cas strapdown.

CHAPITRE 2

CAS SIMPLIFIÉ: NAVIGATION LE LONG D'UN MÉRIDIEN D'UN SYSTÈME À UN AXE

P. FAURRE

SYSTÈME INERTIEL PUR

2.1 Description et fonctionnement idéal

On va considérer dans ce chapitre un problème de navigation idéalisé et simplifié, et voir les divers moyens de le résoudre: l'avantage de cette approche est de mettre en évidence de façon simple quelques propriétés valables pour les systèmes de navigation réels envisagés à partir du chapitre 9.

Soit donc un véhicule se déplaçant dans le plan d'un méridien terrestre à altitude constante, la terre étant supposée sphérique et inertielle fixe. Ce véhicule peut être animé de tangage, mais il ne présente ni mouvement de roulis, ni mouvement de lacet.

On considère alors une plate-forme à inertie simplifiée comportant un accéléromètre et un gyro et rendue indépendante des mouvements de tangage du véhicule à l'aide d'un cardan. La figure 2-1a précise les notations dans ce cas. Le véhicule se trouve en P . L'axe x est localement horizontal et l'axe z localement vertical. L'axe x_p est l'axe sensible de l'accéléromètre, l'axe z_p perpendiculaire au plan de la figure est l'axe sensible du gyro. La rotation ω de la plate-forme est commandée par l'intermédiaire du gyro (west donc la rotation des axes $z_p x_p$ par rapport aux axes inertiels $z_i x_i$).

La rotation west choisie de façon que la plate-forme reste localement horizontale. Les avantages de ce choix sont les suivants:

- la plate-forme fournit une référence physique d'attitude, les instruments conservent une orientation constante au cours du temps par rapport à $\vec{g}$ (une partie des erreurs instrumentales dépend en effet de cette orientation),
- le bouclage rendant la plate-forme horizontale peut être maintenu, alors que d'autres parties du système (calculateur, affichage, etc.) sont en panne: avantage de fiabilité pour la référence d'attitude.

Afin de maintenir la plate-forme horizontale, on doit choisir la loi d'asservissement suivante

$$\omega = \frac{v}{R} \quad (2.1)$$

où v désigne la vitesse du véhicule et R le rayon de courbure de la terre.

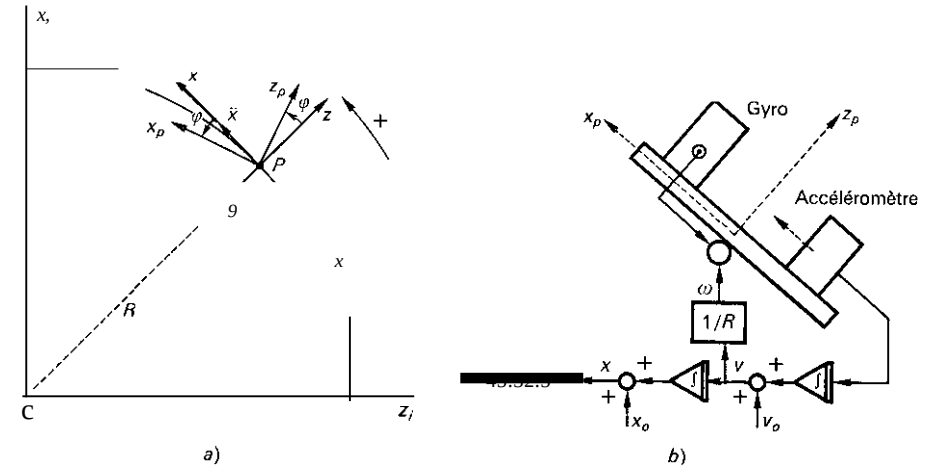


Figure 2-1. Navigation simplifiée à un axe.

L'accéléromètre mesure alors

$$f = \ddot{x} \quad (2.2)$$

et, sous réserve d'avoir été initialisé parfaitement (valeurs exactes de x_0 et v_0 , horizontalité initiale parfaite de la plate-forme), le système représenté sur la figure 2-1b fonctionne parfaitement et fournit la position exacte x du véhicule.

2.2 Fonctionnement effectif et équations d'erreurs

2.2.1 En réalité le fonctionnement idéal décrit au paragraphe précédent ne peut être réalisé pour les raisons suivantes.

a) Erreurs instrumentales

Alors que la composante de la force spécifique sur l'axe sensible de l'accéléromètre est f , le signal de sortie fourni par l'accéléromètre est en fait

$$f_a = (1 + K_a)f + b \quad (2.3)$$

où K_a est le facteur d'échelle et b le biais de l'accéléromètre.

Alors que le signal de commande de la plate-forme est ω_c , celle-ci est animée en fait d'une rotation

$$\omega_p = (1 + K_g)\omega_c + \varepsilon \quad (2.4)$$

où K_g est le facteur d'échelle et ε la dérive du gyroscope.

b) Erreurs d'initialisation

À l'instant initial, les position et vitesse introduites dans le calculateur sont entachées des erreurs Δx_0 et $\Delta \dot{x}_0$, et la plate-forme est décalée d'un angle φ_0 par rapport à la verticale locale.

2.2.2 Les causes qui viennent d'être décrites entraînent que la position indiquée par le calculateur $x_c(t)$ est entachée d'une erreur $\Delta x(t)$ définie par

$$x_c(t) = x(t) + \Delta x(t). \quad (2.5)$$

De même l'axe z_p de la plate-forme est décalé de l'angle $\varphi(t)$ par rapport à la verticale.

La force spécifique étant

$$\mathbf{J} = \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{g}, \quad (2.6)$$

la composante de $\mathbf{J}$ sur l'axe sensible de l'accéléromètre est

$$f = \ddot{x} \cos \varphi - g \sin \varphi \approx \ddot{x} - g\varphi. \quad (2.7)$$

Le fonctionnement effectif du navigateur simplifié est représenté sur la figure 2-2.

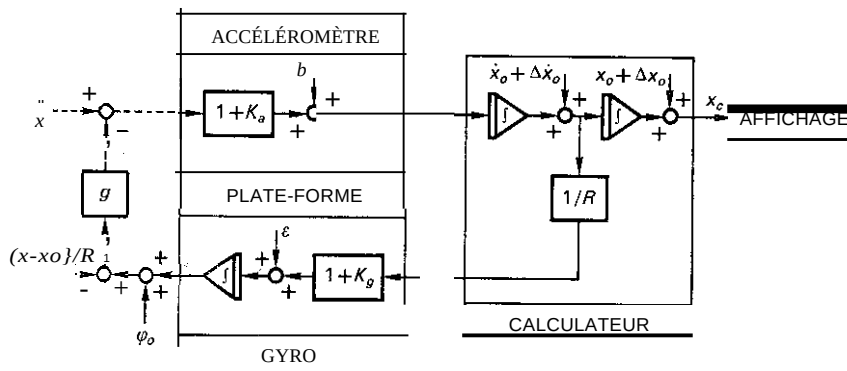


Figure 2-2. Navigation simplifiée à un axe — Diagramme fonctionnel.

----- = grandeurs cinématiques
- - - - = signaux analogiques ou digitaux.

2.2.3 ÉQUATION D'ERREUR

En se référant à la figure 2-2, on peut écrire les équations du système:

$$\ddot{x}_c = b + (1 + K_a)(\ddot{x} - g\varphi) \quad (2.8)$$

$$\dot{\varphi} = (1 + K_g)\frac{\dot{x}_c}{R} + \varepsilon - \frac{\dot{x}}{R}. \quad (2.9)$$

Par simple intégration, l'équation (2.9) entraîne compte tenu des conditions initiales;

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{R} \int_{t_0}^t K_g \dot{x}_c dt - \frac{\Delta x}{R} + \int_{t_0}^t \varepsilon dt. \quad (2.10)$$

En posant

$$\Delta x = x_c - x \quad (2.11)$$

l'équation exacte vérifiée par Δx est

$$\Delta \ddot{x} + \frac{(1 + K_a)g}{R} \Delta x = b - (1 + K_a)g \left(\varphi_0 - \frac{\Delta x_0}{R} \right) + K_a \ddot{x} - (1 + K_a) \frac{g}{R} \int_{t_0}^t K_g \dot{x}_c dt - (1 + K_a)g \int_{t_0}^t \varepsilon dt. \quad (2.12)$$

En développant l'équation (2.12) et en ne retenant que les termes du premier ordre, il vient

$$\Delta \ddot{x} + \omega_s^2 \Delta x = b - g\varphi_0 + \omega_s^2 \Delta x_0 + K_a \ddot{x} - \omega_s^2 \int_{t_0}^t K_g x dt - g \int_{t_0}^t \varepsilon dt, \quad (2.13)$$

en ayant posé

$$\omega_s^2 = gjR. \quad (2.14)$$

Le système de navigation simplifié va donc se comporter quant à ses erreurs comme un oscillateur de période

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} \approx 84 \text{ mn},$$

connue sous le nom de *période de Schuler*.

On aurait pu observer directement ce résultat sur la figure 2-2 : le système a une structure bouclée, la boucle se composant de deux intégrateurs et présentant ainsi un déphasage de 180° .

2.2.4 SOLUTION DE L'ÉQUATION D'ERREUR (2.13)

Si l'on intègre l'équation (2.13), avec les conditions initiales Δx_0 et $\Delta \dot{x}_0$, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta x(t) = & \Delta x_0 + \frac{\Delta \dot{x}_0}{\omega_s} \sin \omega_s t + \left(\frac{b}{g} - \varphi_0 \right) R(1 - \cos \omega_s t) \\ & - Kg v \left(t - \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right) \quad (\text{avec l'hypothèse d'un facteur d'échelle } Kg \text{ constant et une vitesse } v = \dot{x} \text{ constante}) \\ & - R\varepsilon \left(t - \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right) \quad (\text{avec l'hypothèse d'une dérive } \varepsilon \text{ constante}) \\ & + K_a \gamma T \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \quad (\text{avec l'hypothèse d'une accélération initiale } \gamma \text{ constante pendant un intervalle } T \text{ très inférieur à 84 minutes et nulle après}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

On voit que l'on peut séparer les causes d'erreur en deux classes.

Classe 1: erreurs restant bornées avec le temps: $\Delta x_0, \Delta \dot{x}_0, b, \varphi_0$ et Ka'

Classe II : erreurs croissant avec le temps: Kg et ε .

Les erreurs vraiment importantes (classe II) viennent donc des gyroscopes, alors que les erreurs bornées (classe 1) viennent des autres facteurs. La qualité d'un navigateur par inertie apparaît donc comme essentiellement liée à la qualité de ses gyroscopes.

2.2.5 CALCUL NUMÉRIQUE DES ERREURS DANS UN CAS TYPIQUE

Classe 1

1) Erreur de position initiale $\Delta x_0 = 0,1$ nautique ('),

$$\Delta x(t) = \Delta x_0 = 0,1 \text{ nautique.}$$

2) Erreur de vitesse initiale $\Delta \dot{x}_0 = 1$ nœud ('),

$$\Delta \dot{x}(t) = \Delta \dot{x}_0 \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s}$$

$$\text{erreur maximale} = \Delta \dot{x}_0 / \omega_s \approx 0,2 \text{ nautique.}$$

(*) On rappelle que le nautique ou mille marin correspond à une distance de 1852 m (variation de latitude de l'approximativement). Le nœud correspond à une vitesse d'un mille par heure.

3) Biais d'accéléromètre $b = 0,5 \times 10^{-4} g$,

$$\Delta x(t) = \frac{b}{g} R(1 - \cos \omega_s t),$$

$$\text{erreur maximale} = 2Rb/g \approx 0,3 \text{ nautique.}$$

4) Alignement initial $\varphi_0 = 15''$,

$$\Delta x(t) = -\varphi_0 R(1 - \cos \omega_s t),$$

$$\text{erreur maximale} = 2\varphi_0 R \approx 0,5 \text{ nautique.}$$

5) Facteur d'échelle d'accéléromètre $K_a = 10^{-3}$,

supposons $\gamma = 5 \text{ mis}_2$ pendant $T = 30 \text{ s}$, alors

$$\text{erreur maximale} \leq 0,1 \text{ nautique.}$$

Classe II

1) Dérive du gyro $\varepsilon = 0,01^\circ/\text{h}$,

$$\Delta x(t) = R\varepsilon \left(t - \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right),$$

$$R\varepsilon = 0,6 \text{ nautique/heure (= 1,1 km/hl.)}$$

Pour un vol de 5 heures: erreur de 3 nautiques.

Pour un vol de 10 heures: erreur de 6 nautiques.

2) Facteur d'échelle du gyro $Kg = 10^{-3}$,

$$\Delta x(t) = K_g V \left(t - \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right) \approx Kg(x - x_0).$$

Pour un vol de 3000 nautiques: erreur de 3 nautiques.

Pour un vol de 5000 nautiques: erreur de 5 nautiques.

2.3 Instabilité du calcul de l'altitude

Afin de calculer l'altitude, on peut envisager de mettre sur la plate-forme un deuxième accéléromètre d'axe sensible vertical. Il mesure alors

$$f_z = \ddot{h} + g \quad (2.16)$$

où h désigne l'altitude, et l'accélération de la pesanteur g est donnée par

$$g = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 \approx g_0 \left(1 - 2 \frac{h}{R} \right). \quad (2.17)$$

L'altitude h pourrait donc être calculée en intégrant l'équation

$$\ddot{h} - 2 \frac{g}{R} h = f_z - g_0, \quad (2.18)$$

mais cette équation a l'inconvénient majeur d'être instable (terme $\exp(+\sqrt{\frac{2g}{R}}t)$ dans la solution)! Ainsi une erreur initiale d'altitude de

1 m conduirait à une erreur de 150000 m après 2 heures de fonctionnement!

Il est donc impossible d'utiliser des moyens purement inertiels pour déterminer l'altitude lors d'un fonctionnement de quelques heures. Il convient d'utiliser une information extérieure d'altitude (altimètre) afin de former un système hybride à erreurs bornées (chapitre 14).

2.4 Alignement initial

Dans le cas simplifié considéré, l'alignement initial consiste à rendre la plate-forme horizontale. Ceci peut être fait par recopie d'une référence extérieure, ou de façon autonome en utilisant les instruments de la plate-forme.

On a vu que, décalée de φ_0 par rapport à la verticale, la plate-forme oscillait suivant:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t. \quad (2.19)$$

Afin de réaliser un alignement automatique:

on amortit ces oscillations par l'intermédiaire du gain K_d ,
on réduit la période de la boucle avec un gain K_f (voir figure 2-3).

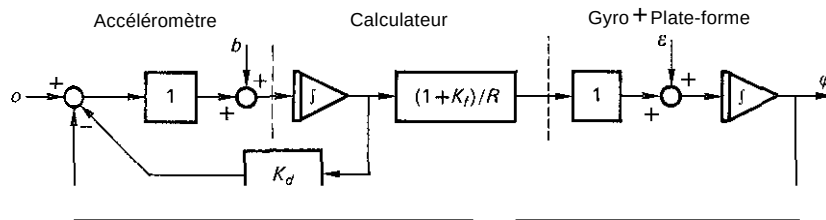


Figure 2-3. Alignement initial.

L'équation vérifiée par φ est alors

$$\ddot{\varphi} + K_d \dot{\varphi} + \frac{g}{R} (1 + K_f) \varphi = \frac{1 + K_f}{R} b + (\dot{\varepsilon} + K_d \varepsilon). \quad (2.20)$$

Les oscillations $\varphi(t)$ de la plate-forme sont alors amorties et

$$\varphi(t) \rightarrow \frac{b}{g} + \frac{\varepsilon K_d}{\frac{g}{R} (1 + K_f)}. \quad (2.21)$$

Le deuxième terme étant toujours négligeable par rapport au premier,

$$\varphi(t) \rightarrow \varphi_0 = \frac{b}{g}. \quad (2.22)$$

Avec $b = 0,5 \times 10^{-4} g$, on a $\varphi_0 = 10''$.

SYSTÈMES HYBRIDES

2.5 Amortissement des erreurs

2.5.1 On a vu que le navigateur inertiel considéré se comporte essentiellement comme un oscillateur (dont la période est la période de Schuler de 84 minutes) : les perturbations aléatoires (variation aléatoire du biais, de la dérive etc.) tendent donc à développer des erreurs importantes en plus des erreurs déjà analysées, ce qui ne se produirait pas si le système était amorti.

La première idée pour améliorer les performances est de faire un amortissement interne (figure 2-4). L'inconvénient est que le système devient *dynamiquement inexact* : même avec des instruments et un alignement parfaits, des erreurs dépendant de la trajectoire vont se développer en cours de fonctionnement.

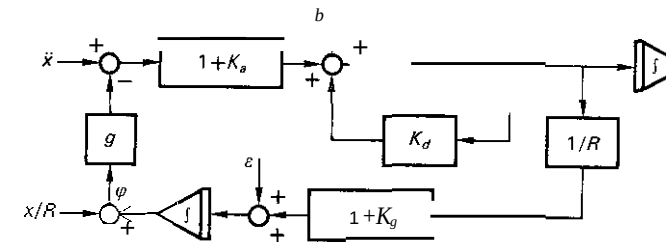


Figure 2-4. Système avec amortissement interne, dynamiquement inexact.

2.5.2 Par contre en utilisant une mesure indépendante v_e de la vitesse v (fournie par un radar Doppler, un Loch, etc.) on peut amortir le système tout en le maintenant dynamiquement exact.

tions extérieures ne sont pas utilisées dans ce schéma pour calibrer ces erreurs instrumentales, contrairement aux couplages optimaux qui vont être envisagés.

2.6. Systèmes hybrides optimaux

2.6.1 L'analyse sommaire des erreurs effectuée jusqu'ici supposait que les erreurs instrumentales (biais, facteur d'échelle, dérive, etc.) étaient constantes. En réalité, ces erreurs évoluent avec le temps de façon aléatoire. Tant pour l'analyse réaliste des erreurs que pour la conception de systèmes hybrides, il convient de prendre en considération ce caractère aléatoire. Lorsque l'on a une connaissance statistique suffisante de ces causes d'erreurs, il devient possible de construire des systèmes hybrides optimaux grâce aux méthodes de filtrage statistique résumées ci-dessous (le chapitre 4 donne un exposé développé de ces techniques mathématiques). On envisagera ensuite le problème des recalages optimaux à l'aide d'informations extérieures de position pour le navigateur simplifié traité dans ce chapitre.

2.6.2 INTRODUCTION AUX MÉTHODES D'UTILISATION OPTIMALE DES INFORMATIONS

2.6.2.1 Les méthodes d'utilisation optimale des informations sont essentiellement des méthodes statistiques: connaissant les lois de probabilités des diverses variables d'un problème, il est possible d'estimer au mieux l'une de ces variables suivant un critère donné.

Ainsi supposons obtenues deux mesures indépendantes, Y_1 et Y_2 d'une même quantité x :

$$y_1 = x + w_1 \quad (2.35)$$

$$y_2 = x + w_2 \quad (2.36)$$

où les erreurs w_1 et w_2 sont deux variables aléatoires indépendantes centrées et de variances σ_1^2 et σ_2^2 (on dit alors que les mesures Y_1 et Y_2 sont entachées d'un bruit blanc w). Alors la meilleure estimée de x à partir de y_1 et y_2 est donnée par

$$\hat{x} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} y_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} y_2. \quad (2.37)$$

Cette estimée est qualifiée de «meilleure», car la variance de l'erreur résiduelle

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad (2.38)$$

est ainsi minimisée.

2.6.2.2 Soit à présent un problème plus complexe d'estimation en temps réel. On obtient aux instants discrets $1, 2, \dots, n, \dots$ les mesures Y_i de la

grandeur x

$$y_i = x + w_i \quad (2.39)$$

entachées du bruit blanc w_i :

$$E\{w_i\} = 0(*) \quad (2.40)$$

$$E\{w_i w_j\} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \sigma^2 & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (2.41)$$

Alors la meilleure estimée de x (au sens de la variance de l'erreur résiduelle minimale), étant donné les mesures $Y_1, \dots, Y_n$, est

$$\hat{x}_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} \quad (2.42)$$

Lorsque l'on obtient une nouvelle mesure Y_{n+1} à l'instant $n+1$, la nouvelle estimée est

$$\frac{Y_1 + \dots + Y_{n+1}}{n+1} \quad (2.43)$$

Les formules (2.42) et (2.43) n'ont aucun caractère **récur**sif. Par contre, si l'on écrit (2.43) sous la forme

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n + \frac{1}{n+1} [y_{n+1} - \hat{x}_n], \quad (2.44)$$

cette nouvelle formule est **récur**sive, c'est-à-dire que

- i) pour le problème qui nous intéresse (estimer x), $\hat{x}_n$ résume parfaitement les mesures passées $Y_1, \dots, Y_n$; en d'autres termes $\hat{x}_n$ étant calculé, il est inutile de conserver la table des mesures passées (ce qui n'est pas vrai dans le cas où l'on utilise une formule non récur
sive du type (2.43);
- ii) lorsqu'une nouvelle mesure Y_{n+1} est obtenue, la nouvelle estimée $\hat{x}_{n+1}$ est formée à partir de $\hat{x}_n$ et de Y_{n+1} ;
- iii) si l'on a déjà calculé $\hat{x}_n$, les calculs à effectuer pour obtenir $\hat{x}_{n+1}$ par une formule récur
sive (2.44) sont bien moins volumineux que par l'expression (2.43) (comparer le nombre d'opérations si $n = 1000$ par exemple).

2.6.2.3 En général, les problèmes d'estimation en temps réels ne consistent pas à estimer une quantité x constante, mais une quantité $X(t)$ variant avec le temps, c'est-à-dire une fonction aléatoire.

On peut montrer que les formules récursives du type précédent se généralisent si (et seulement si) $x(t)$ est un processus markovien ou, de façon équivalente,

(*) $E\{ \dots \}$ désigne l'espérance mathématique.

s'il est l'état d'un système linéaire (en général non stationnaire) excité par un bruit blanc.

Le modèle général est donc le suivant (voir figure 2-6) :

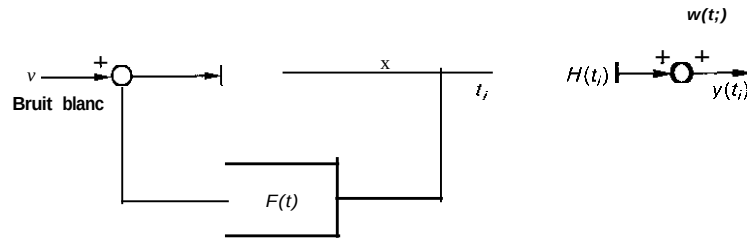


Figure 2-6. Modèle du processus markovien x et des observations discrètes $y(t_i)$

i) Le processus vectoriel markovien $x(t)$ de dimension n est représenté par l'équation différentielle linéaire

$$\dot{x} = F(t)x + v(t) \quad (2.45)$$

où

$F(t)$ = matrice dynamique $n \times n$ en général dépendant du temps

$v(t)$ = bruit blanc continu défini par

$$E\{v(t)\} = 0 \quad (2.46)$$

$$E\{v(t)v'(\tau)\} = Q(t)\delta(t-\tau) \quad (2.47)$$

et par la condition initiale $x(t_0)$ définie par

$$E\{x(t_0)\} = \bar{x}_0 \quad (2.48)$$

$$E\{(x(t_0) - \bar{x}_0)(x(t_0) - \bar{x}_0)'\} = A_0 \quad (2.49)$$

ii) Les observations ou mesures y de dimension p sont

$$y(t_i) = H(t_i)x(t_i) + w(t_i) \quad (2.50)$$

où

$H(t_i)$ = matrice d'observation $p \times n$,

$w(t_i)$ = bruit blanc discret défini par

$$E\{w(t_i)\} = 0 \quad (2.51)$$

$$E\{w(t_i)w'(t_j)\} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ R(t_i) & \text{si } i = j \end{cases} \quad (2.52)$$

(*) Le symbole ' désigne la transposition matricielle. $\delta(t-\tau)$ est l'impulsion de Dirac.

Les formules récursives générant la meilleure estimée $\hat{x}(t)$ de $x(t)$, étant donné les observations passées $y(t_i)$, ..., $y(t_i)$, sont alors

i) initialisation à l'instant t_0 ,

$$\hat{x}(t_0) = \bar{x}_0 \quad (2.53)$$

$$\Sigma(t_0) = A_0 \quad (2.54)$$

ii) entre deux observations $t_i < t < t_{i+1}$,

$$\dot{\hat{x}} = F(t)\hat{x} \quad (2.55)$$

$$\dot{\Sigma} = F(t)\Sigma + \Sigma F'(t) + Q(t) \quad (2.56)$$

iii) à l'instant d'une observation t_i ,

$$\hat{x}(t_i+) = \hat{x}(t_i-) + K(t_i)[y(t_i) - H(t_i)\hat{x}(t_i-)] \quad (2.57)$$

$$K(t_i) = \Sigma(t_i-)H'(t_i)[H(t_i)\Sigma(t_i-)H'(t_i) + R(t_i)]^{-1} \quad (2.58)$$

$$\Sigma(t_i+) = [I - K(t_i)H(t_i)]\Sigma(t_i-) \quad (2.59)$$

où $\hat{x}(t_i-)$ désigne l'estimée de $x(t_i)$ étant donné les observations $y(t_0), \dots, y(t_{i-1})$ et $\hat{x}(t_i+)$ l'estimée, étant donné $y(t_0), \dots, y(t_i)$.

Le calcul de $\Sigma(t)$ est nécessaire afin de pouvoir obtenir le gain K du filtre, c'est-à-dire la pondération à attribuer aux observations.

La matrice $\Sigma(t)$ n'est rien d'autre que la variance de l'erreur résiduelle

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad (2.60)$$

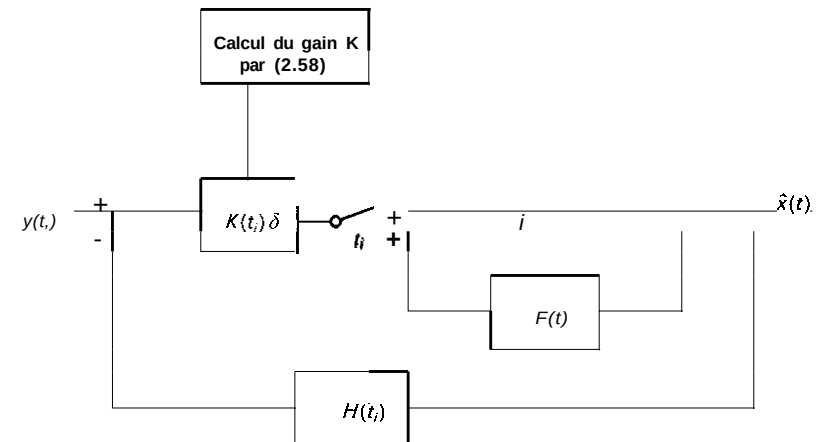


Figure 2-7. Filtre récursif de Kalman.

c'est-à-dire que

$$\Sigma(t) = E\{x(t)x'(t)\}. \quad (2.61)$$

La mécanisation, en général numérique, des équations (2.53) à (2.59) est alors ce qu'on appelle un **filtre de Kalman**. Cette mécanisation est schématisée sur la figure 2-7.

2.6.3 RECALAGE EN POSITION OPTIMAL DU NAVIGATEUR SIMPLIFIÉ

2.6.3.1 On ne retient ici des erreurs instrumentales introduites au paragraphe 2.2 que le biais b de l'accéléromètre supposé constant et la dérive ε du gyro considérée être une fonction aléatoire stationnaire de moyenne nulle et de covariance

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(\tau) &= E\{\varepsilon(t+\tau)\varepsilon(t)\} \\ &= \sigma_\varepsilon^2 e^{-\beta|\tau|}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

De façon équivalente on peut dire que la dérive ε est solution de l'équation différentielle linéaire

$$\dot{\varepsilon} = -\beta\varepsilon + v \quad (2.63)$$

où v est un bruit blanc continu de covariance,

$$E\{v(t)v(\tau)\} = 2\beta\sigma_\varepsilon^2 \delta(t-\tau). \quad (2.64)$$

Définissant alors le vecteur d'état

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \varphi - b/g \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

on peut présenter l'ensemble des équations (2.8), (2.9), (2.63) et (2.64) sous la **forme canonique**

$$\dot{X} = FX + V \quad (2.66)$$

où

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 1/R & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

V = bruit blanc de covariance $Q\delta(t-\tau)$, avec

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\beta\sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

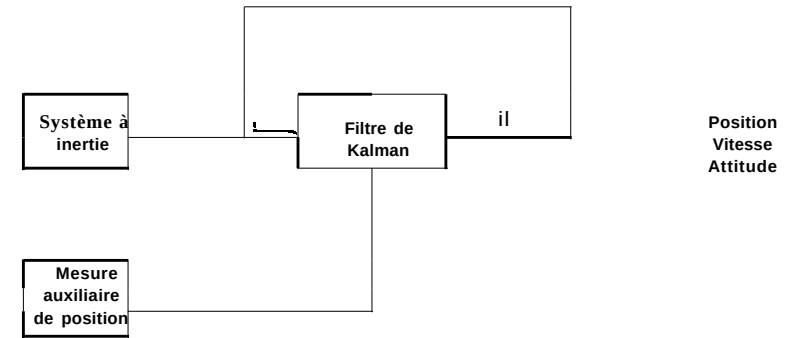


Figure 2-8. *Navigateur intégré optimal.*

On prendra par la suite les valeurs numériques suivantes:

$$\begin{aligned} g &= 9,81 \text{ m/s}^2, \\ R &= 6370000 \text{ m}, \\ \beta &= 1/(10 \text{ heures}) = 0,2777 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}, \\ \sigma_\varepsilon &= 0,01^\circ/h. \end{aligned}$$

Les conditions initiales (à l'instant 0) sont caractérisées par

$$\begin{aligned} E\{(x_c - x)^2\} &= (200 \text{ m})^2, \\ E\{\varepsilon^2\} &= \sigma_\varepsilon^2, \\ E\{(\varphi - b/g)^2\} &= (5'')^2 \end{aligned}$$

Ces termes sont les seuls à ne pas être nuls dans la covariance initiale $A_0 = E\{X(0)X'(0)\}$.

2.6.3.2 Recalage optimal à l'aide de mesures de position

Supposons que le véhicule possède outre la plate-forme à inertie d'autres instruments (Loran, Tacan, ...) donnant aux instants discrets $t_1, t_2, \dots, t_n$ des mesures de position indépendantes de celle du navigateur par inertie.

Alors la comparaison des deux positions indiquées équivaut à l'observation

$$y(t_i) = [1, 0, 0, 0] X(t_i) + W(t_i) \quad (2.69)$$

où le bruit blanc $W(t)$ représente l'erreur des mesures auxiliaires. On suppose

$$E(W(t_i)^2) = (1000\text{m})^2.$$

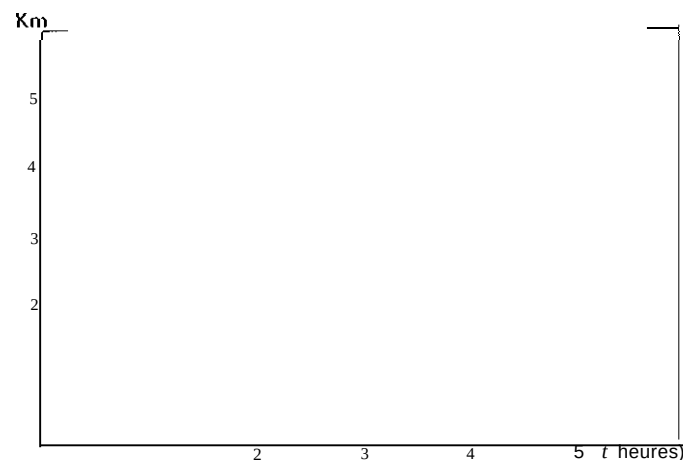


Figure 2-9. Erreur de position sans recalage (écart type).

Il est alors facile d'utiliser de façon optimale toutes les informations. On mécanise le filtre de Kalman donnant la meilleure estimée $\hat{X}$ des erreurs du navigateur par inertie, compte tenu des mesures auxiliaires effectuées. Corrigant alors les indications du navigateur par inertie par les valeurs données par $\hat{X}$, on obtient la meilleure estimée des paramètres de navigation. Ce principe de fonctionnement est schématisé sur la figure 2-8.

En intégrant sur ordinateur par une méthode classique de Runge-Kutta les équations (2.56) et (2.59) donnant la covariance $\Sigma(t)$ des erreurs résiduelles du système optimal, on obtient les résultats représentés sur les figures 2-9 à 2-11.

Lorsque l'on utilise des recalages de position optimaux, l'amélioration des performances du navigateur par inertie est très importante, tant pour la position que pour la vitesse: l'explication apparaît sur la figure 2-12 où l'on voit que la dérive résiduelle du gyro, cause principale d'erreur, est réduite à 50% environ de sa valeur initiale.

Ce cas est caractéristique de nombreux couplages optimaux présentant de «bonnes caractéristiques d'observabilité»: l'amélioration des performances sur un couplage classique vient du fait que certaines des erreurs instrumentales sont calibrées en cours de fonctionnement.

2.6.3.3 Comparaison du recalage optimal avec un recalage simplifié

Une méthode souvent employée consiste à recalculer seulement la position calculée du navigateur par inertie, en la remplaçant par la valeur mesurée. Une telle méthode est évidemment plus simple à mécaniser que le recalage optimal. Les performances de ce recalage simplifié sont portées sur la figure 2-12. Par comparaison entre les figures 2-10 et 2-12, on voit que le système simplifié est deux fois moins bon que le système optimal pour les valeurs numériques considérées.

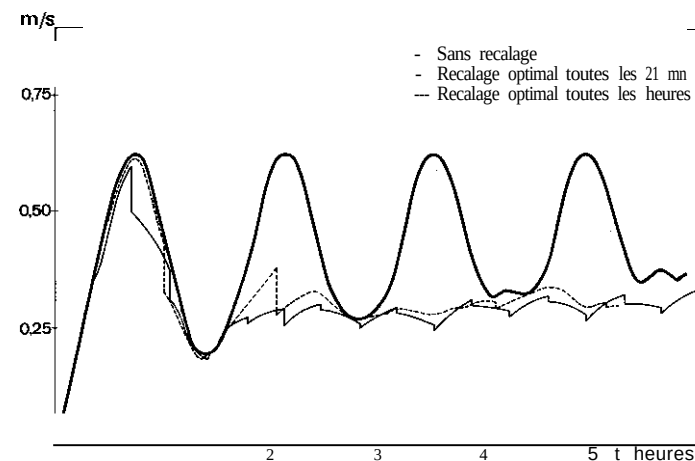


Figure 2-10. Erreur de vitesse (écart type) sans recalage et avec recalage optimal.

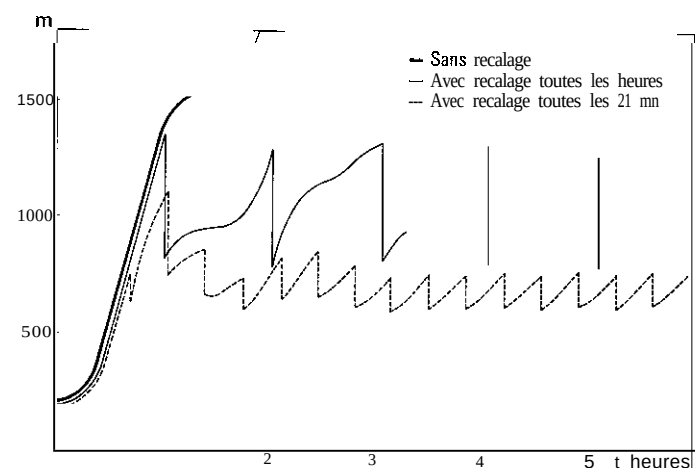


Figure 2-11. Erreur de position (écart type).

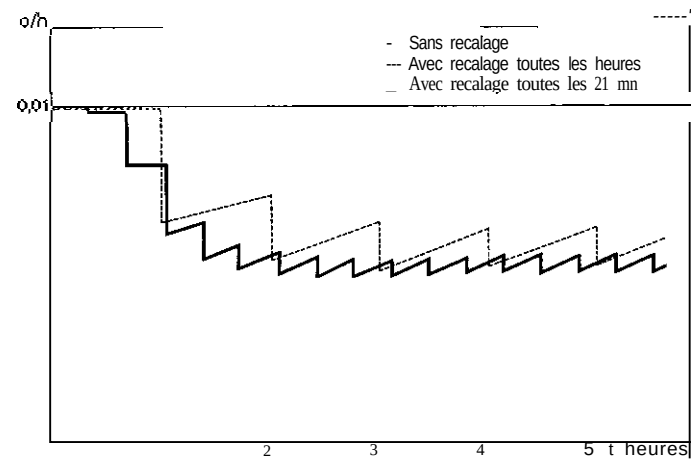


Figure 2-12. Erreur de dérive du gyro (écart type).

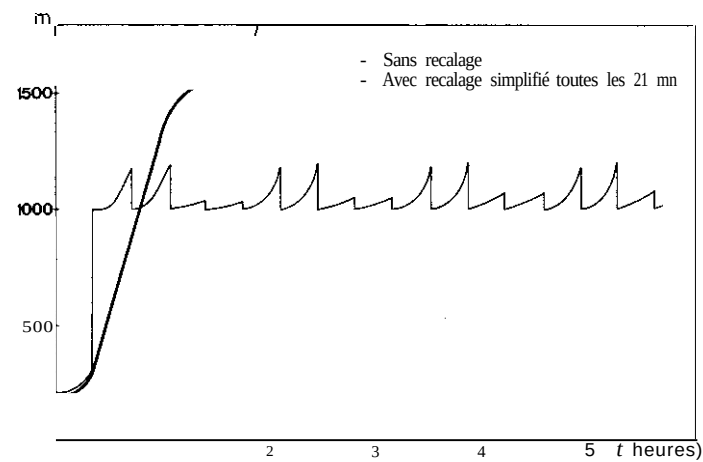


Figure 2-13. Erreur de position (écart type) avec recalage simplifié.

ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES SYSTÈMES ET DE FILTRAGE STATISTIQUE

CHAPITRE 3

SYSTÈMES DYNAMIQUES LINÉAIRES

P. FAURRE

3.1 Systèmes dynamiques

3.1.1 On peut dire intuitivement qu'un *système dynamique* est un ensemble de composants connectés entre eux dans le but de réaliser une tâche déterminée. Cependant même avec des composants simples, le comportement global d'un système peut être fort complexe et nécessiter le recours aux mathématiques pour l'analyser et le prévoir.

On groupe en général les diverses variables servant à décrire un système en

- variables *d'entrée* ou de *commande* (notées u) ainsi nommées car il est possible d'agir directement sur leurs valeurs (dans certaines limites cependant),
- variables de *sortie* ou *d'observation* (désignées par y) qui peuvent correspondre soit à ce qui est produit par le système soit aux mesures que l'on effectue sur son comportement,
- variables *d'état* (désignées par x) qui seront introduites plus loin.

On donne souvent d'un système une représentation schématique appelée *diagramme fonctionnel* (voir figure 3-1).

Le diagramme fonctionnel des systèmes auxquels on s'intéresse dans cet ouvrage est représenté sur la figure 3-2.

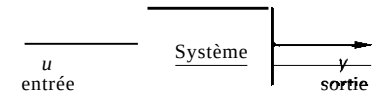


Figure 3-1. Diagramme fonctionnel d'un système.

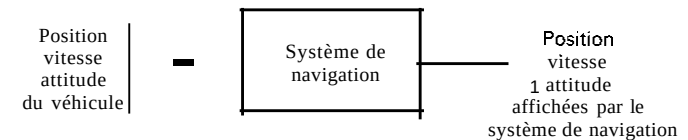


Figure 3-2. Système de navigation.

3.1.2 DESCRIPTION EXTERNE

Du point de vue *externe*, un système dynamique est défini par sa *fonction d'entrée/sortie* j qui fait correspondre à l'entrée $u[t_0, t]$ (*) la sortie $y(t)$ à l'instant t (voir figure 3-3). De façon précise, on écrit

$$y(t) = j(t; u[t_0, t]). \quad (3.1)$$

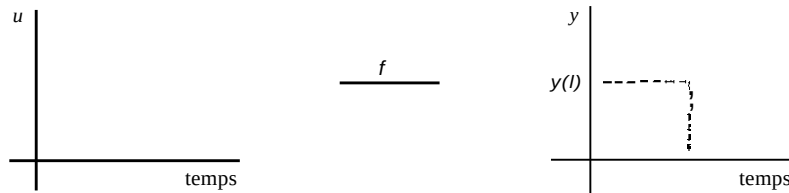


Figure 3-3. Fonction d'entrée/sortie d'un système.

Il est possible de dire aussi que la relation d'entrée/sortie permet de déterminer la sortie du système $y(t)$ lorsque l'on connaît toute l'histoire passée des entrées $u[t_0, t]$.

3.1.3 DESCRIPTION INTERNE

On conçoit aisément les difficultés rencontrées lorsque l'on utilise une description nécessitant de connaître toute l'histoire passée d'un système pour en déterminer l'avenir (imaginer que l'on ait à connaître toute l'histoire des tensions et courants dans un circuit électrique afin d'en déterminer le comportement futur!). Ceci a conduit très tôt dans l'évolution des sciences (mécanique rationnelle en particulier) à l'introduction de la notion d'état.

On appelle *état* d'un système un ensemble de grandeurs qui permettent de résumer le passé en vue de l'étude de l'avenir du système. Par exemple, pour un système physique obéissant aux lois de la mécanique rationnelle, les positions et vitesses des divers éléments qui le constituent forment l'état au sens défini plus haut.

La description du comportement d'un système qui utilise cette notion d'état est dite *description interne*. Elle fait intervenir essentiellement les deux éléments suivants:

- la *fonction de transition* φ qui décrit le changement d'état survenu à la suite de l'entrée $u[t', t']$:

$$x(t') = \varphi(t', t; x(t); u[t', t]) \quad (3.2)$$

(*) Cette notation représente la fonction $u(s)$ sur l'intervalle $[t_0, t]$.

- la *fonction de sortie* η qui indique la sortie donnée par le système lorsqu'il est dans l'état $x(t)$:

$$y(t) = \eta(t, x(t)). \quad (3.3)$$

3.1.4 SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

La plupart des lois de la physique sont exprimées sous forme d'équations différentielles (mécanique, électromagnétisme, etc.). Aussi conçoit-on l'importance des systèmes pour lesquels la fonction de transition φ est définie par l'intermédiaire d'une équation différentielle:

$$\dot{x} = g(x, u(t), t). \quad (3.4)$$

De tels systèmes sont dits *systèmes différentiels*.

3.1.5 SYSTÈMES AUX DIFFÉRENCES

De façon analogue, on appelle *système aux différences* un système dont la fonction de transition est définie par une équation aux différences:

$$x(t_{k+1}) = g(x(t_k), u(t_k), t_k). \quad (3.5)$$

Ceci implique bien entendu que l'échelle des temps correspondante soit discrète ($t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$).

L'importance grandissante de tels systèmes est due à l'utilisation de plus en plus fréquente des calculateurs digitaux pour réaliser des fonctions de calcul et de commande.

3.1.6 SYSTÈMES LINÉAIRES

Dans la suite du chapitre on se restreint à une classe particulièrement importante de systèmes dynamiques: celle des systèmes linéaires.

Un *système linéaire* (description externe) est défini par la propriété de linéarité (*) de la fonction j :

$$j(t; \alpha_1 u_1[t_0, t] + \alpha_2 u_2[t_0, t]) = \alpha_1 j(t; u_1[t_0, t]) + \alpha_2 j(t; u_2[t_0, t]). \quad (3.6)$$

Un *système différentiel/linéaire* (description interne) est défini par le caractère linéaire de son équation différentielle et de sa fonction de sortie:

$$\dot{x} = F(t)x + G(t)u(t) \quad (3.7)$$

$$y(t) = H(t)x(t). \quad (3.8)$$

On définit de même un *système aux différences linéaire*.

(*) Cette propriété s'appelle encore «principe de superposition».

3.2 Systèmes différentiels linéaires (description externe)

3.2.1 REPONSE IMPULSIONNELLE

Si la fonction d'entrée/sortie f d'un système linéaire est définie pour un ensemble de fonctions d'entrée, il est possible de calculer la sortie pour toute combinaison linéaire de ces fonctions: il suffit pour cela d'utiliser la propriété de linéarité (3.6).

Or toute fonction d'entrée scalaire $u(t)$ apparaît comme une combinaison linéaire des fonctions $\delta(t-\tau)$:

$$u(t) = \int \delta(t-\tau) u(\tau) d\tau. \quad (3.9)$$

Ainsi, la fonction d'entrée/sortie d'un système linéaire est parfaitement définie par l'ensemble des sorties $h(t, \tau)$ correspondant aux entrées $\delta(t-\tau)$; ces fonctions sont appelées *réponses impulsionnelles* du système et vérifient les propriétés suivantes

$$i) \quad h(t, \tau) = 0 \quad \text{si } t < \tau, \quad (3.10)$$

cette propriété exprime qu'un effet ne peut précéder une cause pour un système physique (principe de causalité); un système vérifiant (3.10) est dit *causal* ou *réalisable*;

$$ii) \quad h(t, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{si } t \rightarrow \infty \quad (3.11)$$

dans le cas d'un système *stable*;

iii) si le système est *stationnaire* (c'est-à-dire invariant relativement à une translation dans le temps) alors

$$h(t, \tau) = h(t-\tau, 0); \quad (3.12)$$

dans ce cas on écrit $h(t-\tau)$ pour représenter la réponse impulsionnelle.

De façon plus générale, la réponse impulsionnelle d'un système linéaire à m entrées et p sorties est une matrice ($p \times m$) dont le (i,j) -ième terme correspond à la réponse de la i -ième sortie lorsque l'on applique une fonction δ à la j -ième entrée. On utilise encore la notation $h(t, \tau)$ pour représenter cette matrice.

La fonction d'entrée/sortie est alors représentée (dans le cas d'un système causal) par

$$y(t) = \int_{t_0}^t h(t, \tau) u(\tau) d\tau. \quad (3.13)$$

Si le système est stationnaire

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (3.14)$$

$$= \int_0^{+\infty} h(\alpha) u(t-\alpha) d\alpha. \quad (3.15)$$

Si la fonction $u(\cdot)$ est nulle pour les valeurs négatives de t , l'intégrale (3.15) devient

$$y(t) = \int_0^t h(\alpha) u(t-\alpha) d\alpha. \quad (3.16)$$

3.2.2 FONCTION DE TRANSFERT

Supposons que le système considéré soit linéaire stationnaire de réponse impulsionnelle $h(\alpha)$. On appelle alors *fonction (ou matrice) de transfert* de ce système la transformée de Laplace de $h(\alpha)$ (voir l'annexe 4):

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) e^{-s\alpha} d\alpha. \quad (3.17)$$

Si l'on désigne par $U(s)$ et $Y(s)$ les transformées de l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y(t)$, la relation fondamentale (3.13) devient:

$$Y(s) = H(s) U(s). \quad (3.18)$$

Ainsi dans le domaine des transformées de Laplace l'opération effectuée par un système linéaire s'exprime de façon très simple: c'est une multiplication à gauche par la matrice $H(s)$. Il est possible de justifier et d'expliquer cette simplification extrême par le développement qui suit.

3.2.3 FONCTIONS PROPRES D'UNE TRANSFORMATION LINÉAIRE STATIONNAIRE

Soit un système linéaire stationnaire (stable) à une entrée et une sortie, et soit f sa fonction d'entrée/sortie:

$$y(t) = f(t; u(\cdot)). \quad (3.19)$$

Considérons l'entrée

$$u(t) = e^{st}, \quad (3.20)$$

puis l'entrée translatée de la quantité fixée τ

$$u_\tau(t) = u(t+\tau) = e^{s(t+\tau)} = e^{s\tau} u(t). \quad (3.21)$$

D'une part, d'après la linéarité du système

$$f(t; u_\tau(\cdot)) = f(t; e^{s\tau} u(\cdot)) = e^{s\tau} f(t; u(\cdot)). \quad (3.22)$$

D'autre part, d'après la stationnarité du système

$$f(t; u_\tau(\cdot)) = f(t+\tau; u(\cdot)). \quad (3.23)$$

Donc

$$f(t+\tau; u(\cdot)) = e^{s\tau} f(t; u(\cdot)). \quad (3.24)$$

ou encore en posant $t = 0$

$$y(\tau) = e^{s\tau} y(0). \quad (3.25)$$

En résumé, la sortie est identique à l'entrée (*est*) à un facteur multiplicatif près. Si l'on note λ_s ce facteur $y(0)$, alors

$$y(t) = \lambda_s e^{st} \quad (3.26)$$

au cas où l'entrée est

$$u(t) = e^{st}. \quad (3.27)$$

En d'autres termes, la fonction *est* est une *fonction propre* de toute transformation linéaire stationnaire.

La transformation de Laplace revient à représenter toute fonction ($h(t)$, $y(t)$, $u(t)$) comme une combinaison linéaire d'exponentielles. Ces exponentielles étant des fonctions propres de la transformation linéaire considérée, il s'ensuit que

$$Y(s) = \lambda_s U(s) \quad (3.28)$$

ce qui conduit à identifier

$$\lambda_s = H(s). \quad (3.29)$$

Aussi la fonction de transfert $H(s)$ apparaît comme étant la valeur propre du système linéaire considéré correspondant à la fonction propre e^{st} .

3.3 Systèmes différentiels linéaires (description interne)

3.3.1 CAS GÉNÉRAL NON STATIONNAIRE

3.3.1.1 La description interne (aussi nommée *description par vecteur d'état*) d'un système linéaire est donnée par

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t)x + G(t)u(t) \\ y(t) = H(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad (3.30)$$

$$(3.31)$$

Le vecteur x de dimension n est le vecteur d'état du système et les vecteurs u et y de dimensions respectives m et p sont les vecteurs entrées et sorties du système. Par conséquent les matrices F , G et H ont les dimensions $n \times n$, $n \times m$ et $p \times n$.

3.3.1.2 On va établir ci-dessous une formule explicite donnant la solution de (3.30).

(*) Il convient de modifier l'expression (3.31) pour obtenir le modèle linéaire le plus général:

$$y(t) = H(t)x(t) + D_0(t)u(t) + D_1(t)u'(t) + \dots + D_r(t)u^{(r)}(t). \quad (3.31)^*$$

10) *Cas particulier* où $u(t) \equiv 0$

L'équation différentielle (3.30) devient

$$\dot{x} = F(t)x. \quad (3.32)$$

Soit $\varphi_i(t, t_0)$ la solution de (3.32) correspondant à la valeur initiale

$$x(t_0) = e_i \quad (3.33)$$

où e_i désigne le i -ième vecteur de base (tous ses éléments sont nuls à l'exception du i -ième qui vaut 1). Soit $\Phi(t, t_0)$ la matrice carrée suivante

$$\Phi(t, t_0) = [\varphi_1(t, t_0), \varphi_2(t, t_0), \dots, \varphi_n(t, t_0)]. \quad (3.34)$$

Cette matrice, appelée *matrice de transition* associée à $F(t)$, est définie de façon équivalente par:

$$\begin{cases} \Phi(t_0, t_0) = I \\ \frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = F(t) \Phi(t, t_0)' \end{cases} \quad (3.35)$$

$$(3.36)$$

La solution générale de (3.32) correspondant à la condition initiale

$$x(t_0) = \xi \quad (3.37)$$

s'écrit alors:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)\xi. \quad (3.38)$$

On peut démontrer les propriétés suivantes de la matrice de transition:

i) *Régularité de $\Phi(t, t_0)$*

Autrement dit

$$\det \Phi(t, t_0) \neq 0 \quad \text{pour tout } t. \quad (3.39)$$

Cette propriété vient de la relation

$$\frac{d}{dt} \det \{\Phi(t, t_0)\} = (\text{trace } \{F(t)\}) \det \{\Phi(t, t_0)\} (*) \quad (3.40)$$

qui entraîne

$$\det \{\Phi(t, t_0)\} = \exp \left(\int_{t_0}^t \text{trace } \{F(\alpha)\} d\alpha \right). \quad (3.41)$$

On peut ainsi vérifier que quels que soient t et τ

$$\Phi(\tau, t) = \Phi^{-1}(t, \tau). \quad (3.42)$$

(*) La notation $\text{trace } \{F(t)\}$ désigne la somme des éléments diagonaux de $F(t)$, et $\det \{\Phi\}$ représente le déterminant de la matrice Φ .

ii) *Propriété de composition*

Pour toutes valeurs de t, τ et s

$$\Phi(t, s) = \Phi(t, \tau) \Phi(\tau, s). \quad (3.43)$$

Cette propriété découle de l'unicité des solutions de (3.32).

iii) *Dérivabilité par rapport à la seconde variable*

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = - \Phi(t, t_0) F(t_0). \quad (3.44)$$

On démontre cette propriété en dérivant par rapport à t_0 l'identité

$$\Phi(t, t_0) \Phi(t_0, t) = I. \quad (3.45)$$

2°) Cas général où $urt) \neq 0$

Utilisons la méthode dite de «variation des constantes» (1) consistant à chercher la solution de (3.30) sous la forme

$$x(t) = \Phi(t, t_0) \xi(t) \quad (3.46)$$

(«variation du terme constant» ξ dans l'expression de la solution pour le cas où $urt) \equiv 0$).

La nouvelle fonction ξ doit être telle que

$$\frac{d}{dt} [\Phi(t, t_0) \xi(t)] = F(t) \Phi(t, t_0) \xi(t) + G(t) u(t), \quad (3.47)$$

soit

$$F \Phi \xi + \Phi \dot{\xi} = F \Phi \xi + G u,$$

soit

$$\dot{\xi}(t) = \Phi(t_0, t) G(t) u(t),$$

d'où

$$\xi(t) = \xi + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \alpha) G(\alpha) u(\alpha) d\alpha. \quad (3.48)$$

Reportant cette valeur dans l'expression (3.46), il vient

$$x(t) = \Phi(t, t_0) \xi + \int_{t_0}^t \Phi(t, \alpha) G(\alpha) u(\alpha) d\alpha. \quad (3.49)$$

Cette expression donne de façon explicite la valeur de l'état $x(t)$ en fonction:

- i) de l'état initial $x(t_0) = \xi$,
- ii) de l'entrée $u[t_0, t]$.

3°) *Réponse impulsionnelle*

Des deux expressions (3.31)* et (3.49), on déduit aisément la réponse impulsionnelle (qui est une forme de la description externe) du système (3.30), (3.31)* :

$$h(t, \alpha) = H(t) \Phi(t, \alpha) G(\alpha) \delta(t - \alpha) + \dots + (-1)^k D_k(t) \delta^{(k)}(t - \alpha). \quad (3.50)$$

3.3.2 CAS STATIONNAIRE

Dans le cas stationnaire, les matrices $F(t)$, $G(t)$, $H(t)$, $D_0(t)$, ..., $D_k(t)$ des expressions (3.30), (3.31)* sont constantes. Il s'ensuit que la matrice de transition $\Phi(t, \tau)$ ne dépend que de la différence $(t - \tau)$.

On peut voir aisément que la matrice exponentielle

$$e^{F(t-\tau)} = I + F(t-\tau) + \dots + \frac{F^k(t-\tau)^k}{k!} + \dots \quad (3.51)$$

vérifie les deux propriétés caractéristiques de la matrice de transition :

$$e^{F(t-t)} = e^0 = I$$

$$\frac{d}{dt} e^{F(t-\tau)} = F + \dots + \frac{F^k(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} + \dots = F e^{F(t-\tau)}. \quad (3.52)$$

Il découle alors de l'unicité de Φ , que

$$\Phi(t, \tau) = e^{F(t-\tau)}. \quad (3.53)$$

La formule fondamentale s'écrit dans le cas stationnaire

$$x(t) = e^{F(t-t_0)} \xi + \int_{t_0}^t e^{F(t-\alpha)} G(\alpha) u(\alpha) d\alpha. \quad (3.54)$$

La réponse impulsionnelle du système est ainsi

$$h(t-\alpha) = H e^{F(t-\alpha)} G + D_0 \delta(t-\alpha) + \dots + (-1)^k D_k \delta^{(k)}(t-\alpha). \quad (3.55)$$

La fonction de transfert s'obtient en prenant la transformée de Laplace des équations (3.30) et (3.31):

$$sX(s) - \xi = FX(s) + GU(s) \quad (3.56)$$

$$Y(s) = HX(s) + (D_0 + \dots + D_k s^k) U(s), \quad (3.57)$$

d'où

$$Y(s) = H(sI - F)^{-1} \xi + \{H(sI - F)^{-1} G + D_0 + \dots + D_k s^k\} U(s), \quad (3.58)$$

expression analogue à la formule (3.54) dans le domaine fréquentiel.

La fonction de transfert du système est donc

$$H(s) = H(sI - F)^{-1} G + D_0 + \dots + D_k s^k \quad (3.59)$$

3.3.3 CALCUL NUMÉRIQUE DE LA MATRICE DE TRANSITION

Dans tous les cas la matrice Φ peut être calculée en intégrant l'équation différentielle (3.36) à l'aide de l'une des méthodes numériques exposées à l'annexe 6. Alors que dans le cas non stationnaire c'est le seul algorithme envisageable (ou presque), dans le cas stationnaire il y a plusieurs procédés efficaces:

i) Utilisation du développement en série (3.52)

$$e^{Ft} = I + Ft + \dots + F^k \frac{t^k}{k!} + \dots \quad (3.60)$$

Dans le cas de matrices dont on peut exprimer de façon simple la k -ième puissance, cette méthode est très rapide.

Par exemple pour $F = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, on a $F^k = \text{diag}\{\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\}$ et

$$e^{Ft} = \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}.$$

Pour une matrice nilpotente telle que $F^m = 0$, on a

$$e^{Ft} = I + Ft + \dots + F^{m-1} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Ainsi avec

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{on a} \quad e^{Ft} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

li) Diagonalisation de F

Si

$$F = T \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} T^{-1},$$

alors

$$e^{Ft} = T \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\} T^{-1}. \quad (3.61)$$

iii) Transformation de Laplace

On utilise le fait que

$$\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI - F)^{-1}. \quad (3.62)$$

On calcule d'abord $(sI - F)^{-1}$. Ensuite on utilise une table de transformées inverses de Laplace.

Il est possible de calculer $(sI - F)^{-1}$ par la méthode de Faddeev

$$(sI - F)^{-1} = [d \det(sI - F)]^{-1} \{Fos + \dots + F_{n-1}\}$$

avec

$$\begin{aligned} F_0 &= I \\ dI &= \text{trace } F & F_1 &= F - d_1 I \\ d_1 &= (1/2) \text{trace } FF, & F_2 &= FF - d_2 I \\ d_k &= (1/k) \text{trace } FF_{k-1}, & F_k &= FF_{k-1} - d_k I \end{aligned} \quad (3.63)$$

et

$$\det(sI - F) = s^n - d_1 s^{n-1} - \dots - d_n.$$

3.4 Commandabilité des systèmes linéaires différentiels

3.4.1 COMMANDABILITÉ

Soit le système linéaire (non stationnaire)

$$\dot{x} = F(t)x + G(t)u(t). \quad (3.64)$$

On dit que ce système est *commandable à l'instant τ* si quel que soit ξ et quel que soit η , il existe une commande $U(\tau, t]$ transférant le système de l'état ξ en η :

$$\eta = \Phi(t, \tau)\xi + \int_{\tau}^t \Phi(t, \alpha)G(\alpha)u(\alpha)d\alpha. \quad (3.65)$$

Si le système est commandable à tous les instants, on dit qu'il est *complètement commandable*. Un critère de commandabilité est donné par le théorème suivant.

THÉORÈME 3-1

Le système (3.64) est commandable à l'instant τ si et seulement s'il existe un instant $t > \tau$ tel que la matrice $C(t, \tau)$ soit définie positive (*), $C(t, \tau)$ étant donné

— soit par l'intégrale

$$C(t, \tau) = \int_{\tau}^t \Phi(t, \alpha)G(\alpha)G'(\alpha)\Phi'(t, \alpha)d\alpha \quad (3.66)$$

— soit de façon équivalente par:

$$C(t, \tau) = 0$$

$$\frac{d}{dt}C(t, T) = FC + CF' + GG'. \quad (3.67)$$

(*) Rappelons qu'une matrice symétrique A est définie positive si et seulement si la forme quadratique associée $\varphi(x) = x'Ax$ est strictement positive lorsque x n'est pas nul.

Ce théorème peut se démontrer de la façon suivante.

i) Si $C(t, \tau)$ est définie positive, le système est commandable. En effet, on peut voir que l'entrée

$$u(a) = G'(a) \Phi'(t, a) C^{-1}(t, \tau) \{\eta - \Phi(t, \tau) \xi\} \quad (3.68)$$

transfère le système de ξ en η .

ii) Si $C(t, \tau)$ n'est pas définie positive, le système n'est pas commandable.

En effet, il existe alors un vecteur $\eta \neq 0$ tel que

$$\eta' C(t, \tau) \eta = 0, \quad (3.69)$$

c'est-à-dire

$$\int_{\tau}^t \eta' \Phi(t, a) G(a) G'(a) \Phi'(t, a) \eta da = 0 \quad (3.70)$$

d'où

$$\eta' \Phi(t, a) G(a) = 0 \quad \text{pour tout } a \in [\tau, t]. \quad (3.71)$$

Si l'on suppose alors l'existence d'une entrée transférant le système de $\xi = 0$ en η , on a

$$\eta = \int_{\tau}^t \Phi(t, a) G(a) u(a) da. \quad (3.72)$$

Alors

$$\begin{aligned} \|\eta\|^2 &= \eta' \eta = \int_{\tau}^t \eta' \Phi(t, a) G(a) u(a) da \\ &= 0 \quad \text{d'après (3.71),} \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\eta \neq 0$.

Par conséquent, il n'existe pas d'entrée transférant le système de ξ en η , qui de ce fait n'est pas commandable.

3.4.2 CAS STATIONNAIRE

Dans le cas d'un système linéaire stationnaire, le critère de commandabilité complète s'énonce sous la forme suivante.

THÉORÈME 3-2

Un système linéaire stationnaire est complètement commandable si et seulement si

$$\text{rang}[G, FG, \dots, F^{n-1}G] = n, \quad (3.73)$$

où n désigne la dimension du système.

En effet au cours de la démonstration du théorème 3.1, il a été établi que le système est complètement commandable si et seulement si la relation:

$$\eta' \Phi(t, \alpha) G(\alpha) = 0 \quad \text{pour tout } \alpha \in [r, t] \quad \text{entraîne } \eta = 0. \quad (3.74)$$

Dans le cas stationnaire, cette proposition devient:

$$\text{la relation } \eta' e^{Ft} G = 0 \quad \text{pour tout } t \quad \text{entraîne } \eta = 0. \quad (3.75)$$

Mais l'exponentielle e^{Ft} étant donnée par le développement

$$e^{Ft} = I + Ft + \dots + \frac{F^k t^k}{k!} + \dots \quad (3.76)$$

et p_k étant une combinaison linéaire de $J, P, \dots, F^{n-1}$ pour $k \geq n$ (théorème de Cayley-Hamilton), il s'ensuit que la proposition (3.75) équivaut à :

$$\eta' [G, FG, \dots, F^{n-1}G] = 0 \quad \text{entraîne } \eta = 0, \quad (3.77)$$

soit

$$\text{rang}[G, FG, \dots, F^{n-1}G] = n. \quad (3.78)$$

A vrai dire, les mêmes considérations prouvent que l'ensemble des états atteignables à partir de l'état $\xi = 0$ est constitué par l'espace vectoriel X_c engendré par les colonnes de la matrice de commandabilité

$$\mathbb{C} = [G, FG, \dots, F^{n-1}G]. \quad (3.79)$$

Ainsi dans le cas d'un système non complètement commandable, en restreignant les opérateurs F et G à l'espace X_c (de dimension $n_c < n$), on obtient F_c et G_c représentant la partie complètement commandable du système:

$$\dot{x}_c = F_c x_c + G_c u. \quad (3.80)$$

3.4.3 COMMANDE ARBITRAIRE D'UN SYSTÈME COMPLÈTEMENT COMMANDABLE

Soit un système linéaire complètement commandable à une entrée $m = 1$ pour simplifier) :

$$\dot{x} = Fx + gu \quad (3.81)$$

g = matrice colonne $n \times 1$,

F = matrice $n \times n$ de polynôme caractéristique,

$$X(F) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n. \quad (3.82)$$

On pose le problème de commander le système à l'aide d'une contre-réaction (negative feedback) linéaire (voir figure 3-4)

$$u = -c x \quad (3.83)$$

où c = matrice ligne $1 \times n$.

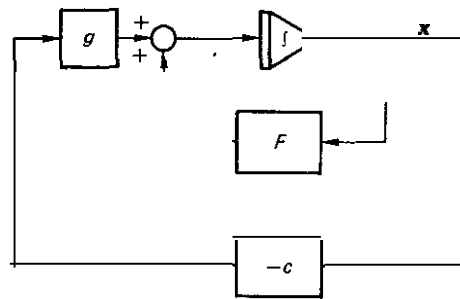


Figure 3-4. Commande d'un système linéaire.

L'équation différentielle du système commandé est

$$\dot{x} = (F - gc)x, \quad (3.84)$$

et la dynamique est caractérisée par les valeurs propres (c'est-à-dire le polynôme caractéristique) de la matrice $F - gc$. Si le système est complètement commandable, cette dynamique peut être rendue arbitraire en choisissant convenablement le gain c de la contre-réaction, ainsi que l'énonce le théorème suivant.

THÉORÈME 3-3

Si (F, g) est complètement commandable, alors quel que soit le polynôme

$$\chi(s) = s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_n, \quad (3.85)$$

on peut choisir c tel que $X(s)$ soit le polynôme caractéristique de la matrice $F - gc$.

En effet (F, g) étant complètement commandable, la suite de vecteurs

$$e_i = F^{n-i}g + \alpha_1 F^{n-i-1}g + \dots + \alpha_{n-i}g \quad (3.86)$$

$$e_1 = F^{n-1}g + \alpha_1 F^{n-2}g + \dots + \alpha_{n-1}g$$

forme une base dans laquelle F et g deviennent

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.87)$$

Si l'on pose à présent

$$c = [c_n, \dots, c_1], \quad (3.88)$$

il est clair que

$$F - gc = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & & 1 \\ -(\alpha_n + c_n) & \dots & -(\alpha_1 + c_1) \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

et par conséquent le polynôme caractéristique de $\tilde{F} = F - gc$ est

$$\chi_{\tilde{F}}(s) = s^n + (\alpha_1 + c_1)s^{n-1} + \dots + (\alpha_n + c_n). \quad (3.90)$$

Il s'ensuit qu'en choisissant

$$c_i = \beta_i - \alpha_i \quad (3.91)$$

on rend le polynôme $\chi_{\tilde{F}}(s)$ identique à $X(s)$.

3.5 Observabilité des systèmes linéaires différentiels

3.5.1 Soit le système linéaire (non stationnaire)

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t)x + C(t)u(t) \\ y(t) = H(t)x(t). \end{cases} \quad (3.92)$$

$$(3.93)$$

On dit que ce système est *observable à l'instant t* s'il existe un instant τ (fini) antérieur à t tel qu'on puisse déduire l'état actuel du système $x(t) = \xi$ de l'observation de l'entrée $u[\tau, t]$ et de la sortie $y[\tau, t]$ sur l'intervalle $[\tau, t]$. En d'autres termes, les relations

$$y(\alpha) + \int_{\alpha}^t H(\alpha) \Phi(\alpha, \beta) C(\beta) u(\beta) d\beta = H(\alpha) \Phi(\alpha, t) x(t), \quad \alpha \in [\tau, t] \quad (3.94)$$

doivent être vérifiées pour une valeur unique de $x(t)$. Si le système est observable à tous les instants, on dit qu'il est *complètement observable*.

Cette notion d'observabilité apparaît aisément comme duale de la notion de commandabilité, et le critère correspondant est donné par le théorème suivant.

THÉORÈME 3-4

Le système (3.92), (3.93) est observable à l'instant t , si et seulement si il existe un instant $\tau < t$ tel que la matrice $OC(t, \tau)$ soit définie positive, $OC(t, \tau)$ étant donnée

- soit par l'intégrale

$$OC(t, \tau) = \int_{\tau}^t \Phi'(t, \alpha) H'(\alpha) H(\alpha) \Phi(\alpha, t) d\alpha \quad (3.95)$$

- soit de façon équivalente par

$$\begin{cases} O(\tau, \tau) = 0 \\ \frac{d}{dt} O(t, \tau) = -F'O - OF + H'H. \end{cases} \quad (3.96)$$

La démonstration est analogue à celle du théorème 3-1; dans le cas d'un système observable on démontre que les relations (3-94) ont une solution unique donnée par (on suppose $u(fj) = 0$ pour simplifier) :

$$x(t) = O^{-1}(t, \tau) \int_{\tau}^t \Phi'(\alpha, t) H'(\alpha) y(\alpha) d\alpha. \quad (3.97)$$

Dans le cas stationnaire on a le résultat suivant.

THÉORÈME 3-5

Un système linéaire stationnaire est complètement observable si et seulement si

$$\text{rang} \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = n. \quad (3.98)$$

Les états observables correspondent à l'espace vectoriel X_0^* dual de l'espace engendré par les lignes de la matrice d'observabilité

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.99)$$

Ainsi dans le cas d'un système non complètement observable, si l'on restreint F et H à l'espace X_0^* , on obtient F_0 et H_0 représentant la partie complètement observable du système considéré:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = F_0 x_0, \\ y = H_0 x_0 \end{cases} \quad (3.100)$$

3.5.2 OBSERVATEUR ARBITRAIRE D'UN SYSTÈME COMPLÈTEMENT OBSERVABLE

Soit un système linéaire complètement observable à une sortie ($p = 1$ pour simplifier) :

$$\dot{x} = Fx + Gu \quad (3.101)$$

$$y = hx \quad (3.102)$$

h = matrice ligne $1 \times n$.

On pose le problème de construire un second système linéaire appelé *observateur* qui soit excité par les signaux disponibles u et y , et dont l'état $\hat{x}$ soit arbitrairement proche de x (donc une bonne estimation de x).

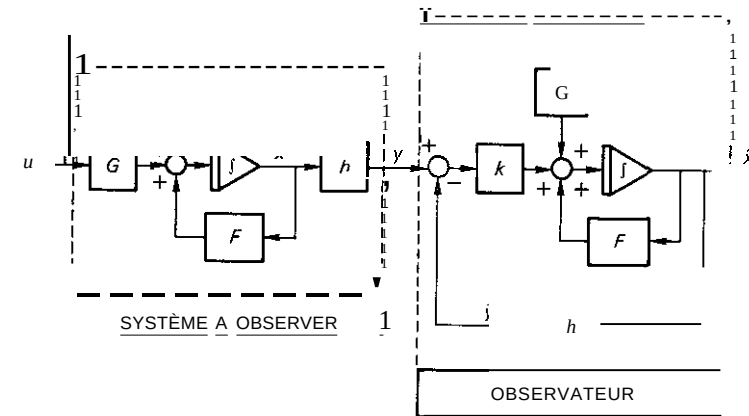


Figure 3-5. Observateur d'un système linéaire.

On considère alors l'observateur dont la structure est représentée sur la figure 3-5 :

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + k(y - \hat{y}) + Gu \quad (3.103)$$

avec

$$\hat{y} = h\hat{x} \quad (3.104)$$

et

$$k = \text{matrice colonne } n \times 1. \quad (3.105)$$

Il s'ensuit aisément que posant

$$x - \hat{x} = \tilde{x}, \quad (3.106)$$

il vient

$$\dot{\tilde{x}} = (F - kh)\tilde{x}. \quad (3.107)$$

L'analogie du théorème 3-3 s'applique, à savoir qu'en choisissant convenablement la matrice colonne k , on peut rendre le polynôme caractéristique de $F - kh$ arbitraire. L'erreur $\tilde{x}$ a donc une dynamique arbitraire.

THÉORÈME 3-6

Si (F, h) est complètement observable, alors quel que soit le polynôme $X(s)$ de degré n , on peut construire un système linéaire qui excité par les signaux u et y donne une estimation $\hat{x}$ de l'état x , l'erreur $\tilde{x} = x - \hat{x}$ ayant une dynamique définie par le polynôme $X(s)$.

Dans le chapitre 4, on montre comment choisir de façon optimale la dynamique de l'observateur en l'ajustant aux caractéristiques statistiques des signaux entrant dans le système. L'observateur porte alors le nom de *filtre statistique optimal*.

3.5.3 COMMANDE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE COMPLÈTEMENT COMMANDABLE ET COMPLÈTEMENT OBSERVABLE

Soit à nouveau le problème de commander un système linéaire stationnaire complètement commandable à une entrée

$$\dot{x} = Fx + gu. \quad (3.108)$$

Mais l'on suppose à présent que l'on ne dispose pas de l'état $x(t)$ du système, mais seulement d'observations scalaires $y(t)$

$$y = hx \quad (3.109)$$

telles que le couple (h, F) soit complètement observable.

Mettant en série l'observateur de la figure 3-5 et la contre-réaction de la figure 3-4, on obtient la structure représentée sur la figure 3-6.

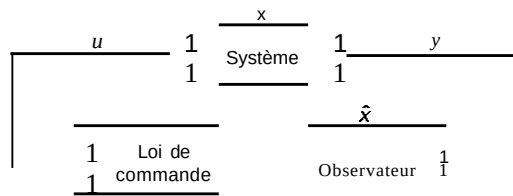


Figure 3-6. Commande d'un système complètement commandable et complètement observable.

Les équations représentant la dynamique de ce système bouclé sont

$$\dot{x} = Fx + gu \quad (3.110)$$

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + k[y - h\hat{x}] + gu \quad (3.111)$$

avec

$$u = -c\hat{x} \quad (3.112)$$

$$y = hx. \quad (3.113)$$

Si l'on pose à nouveau

$$\tilde{x} = x - \hat{x}, \quad (3.114)$$

les équations différentielles (3.110) et (3.111) peuvent s'écrire

$$\dot{\tilde{x}} = (F - gc)\tilde{x} + gcSi \quad (3.115)$$

$$\dot{\hat{x}} = (F - kh)Si. \quad (3.116)$$

Si l'on choisit alors c (resp. k) de façon que $F - gc$ (resp. $F - kh$) ait le polynôme caractéristique $X_1(s)$ (resp. $X_2(s)$), le système bouclé a le polynôme caractéristique

$$X(s) = X_1(s)X_2(s) \quad (3.117)$$

qui est ainsi arbitraire, $X_1(s)$ et $X_2(s)$ pouvant être choisis arbitrairement (théorèmes 3-5 et 3-6).

En fait on adapte $X_2(s)$ aux caractéristiques statistiques des bruits et $X_1(s)$ aux performances que l'on cherche à réaliser.

3.6 Stabilité des systèmes linéaires différentiels

3.6.1 DÉFINITIONS DE LA NOTION DE STABILITÉ

Intuitivement, on dit qu'un système dynamique est stable relativement à une trajectoire lorsque de faibles perturbations entraînent de faibles écarts par rapport à cette trajectoire. Il existe plusieurs définitions mathématiques de cette notion. On dit que le système différentiel

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (3.118)$$

ayant le point d'équilibre 0 ($f(0, t) = 0$) est *stable au sens de Lyapunov*, relativement à ce point d'équilibre, si pour tout $\varepsilon (> 0)$, il existe η tel que

$$\|x(t_0)\| < \eta \text{ entraîne } \|x(t)\| < \varepsilon \text{ pour tout } t > t_0. \quad (3.119)$$

On dit que le même système est *asymptotiquement stable* si en plus de la propriété (3.119), il vérifie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0. \quad (3.120)$$

On dit que le système différentiel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t) \\ y &= h(x, t) \end{aligned} \quad (3.121)$$

ayant le point d'équilibre 0 ($[(0, 0, t) = 0, h(0, t) = 0]$) a la *stabilité E.B.S.B. (entrée bornée-sortie bornée) (*)* si pour tout x_0 , tout ε , il existe η tel que

$$\|u(t)\| < \varepsilon \text{ pour tout } t > t_0 \text{ entraîne } \|y(t)\| < \eta \text{ pour tout } t > t_0. \quad (3.122)$$

3.6.2 CAS DES SYSTÈMES LINÉAIRES STATIONNAIRES

3.6.2.1 Stabilité E.R.S.B. des systèmes linéaires stationnaires (description externe)

Il est facile de voir que la condition nécessaire et suffisante de stabilité E.B.S.B. d'un système linéaire stationnaire de réponse impulsionnelle $h(\tau)$ est

$$\int_0^\infty |h(\tau)| d\tau < \infty, \quad (3.123)$$

En ce qui concerne la fonction de transfert $H(s)$ (supposée rationnelle), la condition (3.123) équivaut à réclamer que tous les pôles de $H(s)$ soient à parties réelles négatives. Le test à appliquer est alors le critère bien connu de Routh pour le dénominateur de $H(s)$.

3.6.2.2 Stabilité asymptotique (description interne)

Soit le système linéaire stationnaire

$$\dot{x} = Fx. \quad (3.124)$$

Sa stabilité asymptotique peut être testée à l'aide du critère de Routh appliqué au polynôme caractéristique de F , ou en utilisant le théorème de Lyapunov.

THÉORÈME 3-7 (Lyapunov)

Si le système (3.124) est asymptotiquement stable, alors pour toute matrice définie positive Q , l'équation

$$F'P + PF = -Q \quad (3.125)$$

a une solution (unique) P définie positive.

Inversement si pour une matrice Q quelconque définie positive, l'équation (3.125) a une solution P définie positive, alors le système (3.124) est asymptotiquement stable.

En effet si (3.125) est vérifiée, on a

$$\frac{d}{dt} (x'Px) = -x'Qx, \quad (3.126)$$

ce qui entraîne la stabilité asymptotique au cas où P et Q sont définies positives.

(*) L'expression anglaise correspondante est « BIBQ » (Bounded Input Bounded Output).

D'autre part si (3.124) est asymptotiquement stable, et si Q est définie positive, l'intégrale

$$V = \int_0^\infty x'(t) Qx(t) dt \quad (3.127)$$

a un sens et est de plus positive. Mais

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\infty -x'(F'P + PF)x dt \\ &= \int_0^\infty \left[-\frac{d}{dt} (x'Px) \right] dt \\ &= x_0' P x_0. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Il s'ensuit donc bien que P est définie positive.

3.7 Systèmes linéaires aux différences

Résumé

3.7.1 Il existe pour les systèmes linéaires aux différences une théorie analogue à celle qui vient d'être développée pour les systèmes différentiels. On donne dans ce paragraphe un résumé des résultats correspondants.

Pour simplifier les notations, l'échelle des temps est supposée être la suite des entiers $\dots, -1, 0, +1, \dots$.

3.7.2 La réponse impulsionnelle d'un système linéaire aux différences est la sortie $h(n, k)$ du système correspondant à l'entrée

$$u(n) = \delta_k = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k. \end{cases} \quad (3.129)$$

La réponse $y(n)$ à une entrée quelconque est alors dans le cas d'un système réalisable

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n, k) u(k). \quad (3.130)$$

Dans le cas d'un système stationnaire

$$h(n, k) = h(n-k) \quad (3.131)$$

et l'expression (3.130) s'écrit

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k) u(k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k) u(n-k). \end{aligned} \quad (3.132)$$

La fonction de transfert du système est la transformée en Z (voir l'annexe 5) de $h(k)$:

$$H(z) = \sum_k h(k) z^{-k}. \quad (3.133)$$

On a la relation fondamentale

$$Y(z) = H(z) V(z) \quad (3.134)$$

où $Y(z)$ et $V(z)$ désignent les transformées en Z de $y(k)$ et $u(k)$.

3.7.3 La description interne d'un système linéaire aux différences est

$$x(k+1) = F(k) x(k) + G(k) u(k) \quad (3.135)$$

$$\begin{cases} y(k) = H(k) x(k) \end{cases} \quad (3.136)$$

Définissant alors la matrice de transition Φ par

$$\Phi(k, k) = I \quad (3.137)$$

$$\begin{cases} \Phi(n+1, k) = F(n) \Phi(n, k) \end{cases} \text{ pour } n \geq k, \quad (3.138)$$

il vient

$$x(n) = \Phi(n, k) x(k) + \sum_{j=k}^{n-1} \Phi(n, j+1) G(j) u(j). \quad (3.139)$$

Dans le cas stationnaire

$$\Phi(n, k) = F^{n-k}. \quad (3.140)$$

La réponse impulsionnelle du système (3.135), (3.136)* est clairement

$$h(n, k) = H(n) \Phi(n, k+1) G(k) + D(k) \delta_{nk} \quad (3.141)$$

et dans le cas stationnaire la fonction de transfert est

$$H(z) = D + H(zI - F)^{-1} G. \quad (3.142)$$

(*) Une formule plus générale est

$$y(k) = H(k) x(k) + D(k) u(k). \quad (3.136)'$$

3.7.4 Les notions de commandabilité complète et d'observabilité complète sont définies de la même façon qu'aux paragraphes 3.4 et 3.5. Dans le cas **stationnaire où l'on a les équations**

$$X(k+1) = FX(k) + Gu(k) \quad (3.143)$$

$$\begin{cases} y(k) = Hx(k), \end{cases} \quad (3.144)$$

le critère de commandabilité complète est

$$\text{rang}[G, FG, \dots, F^{n-1}G] = n \quad (3.145)$$

et celui d'observabilité complète

$$\text{rang} \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ H^{n-1}F \\ H \end{bmatrix} = n. \quad (3.146)$$

3.7.5 Enfin les notions de stabilité se transposent de la façon suivante dans le cas stationnaire.

Le système (3.143) a la stabilité E.B.S.B. si et seulement si

$$\sum_0^{\infty} \|h(k)\| < \infty. \quad (3.147)$$

Ceci équivaut à réclamer que tous les pôles de la fonction de transfert $H(z)$ soient à l'intérieur du cercle unité ($|z| = 1$) du plan complexe de la variable z .

Le théorème de Lyapunov s'énonce comme suit.

THÉORÈME 3-8

Si le système (3.143) est asymptotiquement stable, alors pour toute matrice définie positive Q , l'équation

$$P - F'PF = Q \quad (3.148)$$

a une solution (unique) P définie positive.

Inversement si pour une matrice Q quelconque définie positive, l'équation (3.148) a une solution définie positive, alors le système (3.143) est asymptotiquement stable.

La démonstration peut se faire en remarquant que

$$x'_{n+1} P x_{n+1} - x'_n P x_n = -x'_n Q x_n. \quad (3.149)$$

CHAPITRE 4

FILTRAGE STATISTIQUE

P. FAURRE

4.1 Fonctions aléatoires du second ordre

4.1.1 LOI DE PROBABILITÉ D'UNE FONCTION ALÉATOIRE

Une fonction aléatoire vectorielle peut être considérée comme l'enregistrement au cours du temps de paramètres relatifs à une expérience aléatoire, c'est-à-dire une expérience dont les résultats (compte tenu de la finesse de l'analyse effectuée) ne peuvent être prévus à l'avance de façon déterministe: on caractérise alors de façon précise la vraisemblance des résultats possibles par une mesure appelée *probabilité* et notée $P\{\cdot\}$ par la suite.

Ainsi une fonction aléatoire est représentée par l'ensemble de ses *fonctions de répartition*:

$$F(y'' \dots, y''; t'' \dots, t_n) = P\{y(t_1) < y, \text{ et } \dots \text{ et } y(t_n) < y_n\} \quad (*) \quad (4.1)$$

ou, si ces dernières sont dérivables, par ses *densités de probabilité*:

$$p''(y'' \dots, y_n; t'' \dots, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial y_1 \dots \partial y_n} F(y'' \dots, y_n; t'' \dots, t_n) \quad (4.2)$$

encore définies par

$$P_n(y_1' \dots, y_n; t_1, \dots, t_n) dy_1 \dots dy_n = P\{y_1 \leq y_1(t_1) < y_1 + dy_1, \text{ et } \dots \text{ et } y_n \leq y_n(t_n) < y_n + dy_n\}. \quad (4.3)$$

4.1.2 REPRÉSENTATION EXTERNE

Pour de nombreuses applications on se contente d'une représentation simplifiée composée des moments des deux premiers ordres (que l'on suppose exister)

(*) La notation $a < b$, où a et b sont des vecteurs de dimension k , représente k inégalités simultanées entre les composantes:

$$a_1 < b_1 \text{ et } a_2 < b_2 \dots \text{ et } a_k < b_k.$$

de la fonction aléatoire étudiée $y(t)$:

$$m, Ct) = E\{y(t)\} \quad (4.4)$$

$$A_{yy}(t'' \dots t_2) = E\{(y(t_1) - m, (t_1)) (y(t_2) - m, (t_2))'\}. \quad (4.5)$$

L'ensemble des deux fonctions $m, Ct)$ (*moyenne*) et $A_{yy}(t_1, t_2)$ (*covariance*) s'appelle la *représentation externe* (au deuxième ordre) de la fonction aléatoire $y(t)$.

Il faut noter le critère permettant de tester si un ensemble de deux fonctions $\{m, (I), A_{yy}(t'' \dots t_2)\}$ peut être considéré comme la représentation externe d'une fonction aléatoire: il faut et il suffit pour cela que la fonction $A_{yy}(t'' \dots t_2)$ soit de **type non négatif, c'est-à-dire que pour toute valeur de k , pour toutes valeurs de $t_1, t_2, \dots, t_k$, la matrice**

$$\begin{bmatrix} A_{yy}(t'' \dots t_1) & A_{yy}(t'' \dots t_2) & \dots & A_{yy}(t_1, t_k) \\ A_{yy}(t_2, t_1) & A_{yy}(t_2, t_2) & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{yy}(t_k, t_1) & \dots & \dots & A_{yy}(t_k, t_k) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

soit **symétrique non négative définie**.

4.1.3 FONCTIONS GAUSSIENNES

Une fonction aléatoire est dite gaussienne si toutes ses densités de probabilité P_n sont gaussiennes. Dans ce cas la **représentation externe est suffisante pour déterminer l'ensemble des lois P_n**

On rappelle ci-dessous un résultat fondamental pour l'estimation de vecteurs aléatoires gaussiens.

THÉORÈME 4.1

Si $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ désigne un vecteur aléatoire gaussien, Les vecteurs x_1 et x_2 formant une partition de x et les moyennes et covariances étant

$$E\{x_i\} = m_i, \quad E\{x_i x_j'\} = A_{ij},$$

alors la **moyenne conditionnelle de x_1 si x_2 , qui est la meilleure estimation de x_1 étant donné x_2** est

$$\hat{x}_1 = E\{x_1 | x_2\} = m_1 + A_{12} A_{22}^{-1} (x_2 - m_2).$$

De plus si l'on définit l'erreur d'estimation comme étant

$$\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1$$

la **covariance Σ de $\tilde{x}_1$ est**

$$\Sigma = E\{\tilde{x}_1 \tilde{x}_1'\} = A_{11} - A_{12}' A_{22}^{-1} A_{12}.$$

4.1.4 FILTRAGE STATISTIQUE

On appelle *filtre statistique* optimal un système dynamique (ou un algorithme de calcul) qui fournit la meilleure estimée $\hat{z}(t)$ d'une grandeur $z(t)$ en fonction d'une part d'observations $y(t)$ et d'autre part d'une connaissance des lois statistiques des signaux $y(t)$ et $z(t)$ (figure 4-1).



Figure 4-1. Filtrage statistique.

Dans ce chapitre, on présente les deux méthodes permettant de déterminer un filtre optimal:

- la méthode de factorisation de Wiener partant d'une représentation externe des signaux aléatoires,
- la méthode récursive de Kalman-Bucy partant d'une représentation interne des signaux aléatoires.

4.2 Transformation linéaire et représentation spectrale de fonctions aléatoires du second ordre

4.2.1 TRANSFORMATION LINÉAIRE

Soit une fonction aléatoire $u(t)$ de représentation externe $(m''(t), A_{uu}(t_1, t_2))$ que l'on soumet à une transformation linéaire (voir l'expression (3.31))

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t, \alpha) u(\alpha) d\alpha. \quad (4.7)$$

Alors $y(t)$ est une fonction aléatoire dont la représentation externe est donnée par:

$$m_y(t) = E\{y(t)\} = \int_{-\infty}^t h(t, \alpha) m_u(\alpha) d\alpha \quad (4.8)$$

$$A_{yy}(t_1, t_2) = E\{(y(t_1) - m_y(t_1))(y(t_2) - m_y(t_2))'\}$$

$$= \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h(t_1, \alpha) A_{uu}(\alpha, \beta) h'(t_2, \beta) d\alpha d\beta. \quad (4.9)$$

Ainsi il est possible de calculer la représentation externe $(m_y(t), A_{yy}(t_1, t_2))$ de $y(t)$ à partir de la seule connaissance de la représentation externe de l'entrée $u(t)$ et de la réponse impulsionnelle $h(t_1, t_2)$.

De façon plus générale, on est conduit à définir la *covariance croisée* entre deux signaux $Y_1(t)$ et $Y_2(t)$ par

$$A_{y_1 y_2}(t_1, t_2) = E\{(y_1(t_1) - m_{y_1}(t_1))(y_2(t_2) - m_{y_2}(t_2))'\}. \quad (4.10)$$

Si $Y_1(t_1)$ et $y_2(t_2)$ résultent de transformations linéaires sur $u_1(t)$ et $u_2(t)$ respectivement

$$y_1(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} h_1(t_1, \alpha) u_1(\alpha) d\alpha \quad (4.11)$$

$$y_2(t_2) = \int_{-\infty}^{t_2} h_2(t_2, \beta) u_2(\beta) d\beta, \quad (4.12)$$

on a

$$A_{y_1 y_2}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} h_1(t_1, \alpha) A_{u_1 u_2}(\alpha, \beta) h_2'(t_2, \beta) d\alpha d\beta. \quad (4.13)$$

4.2.2 CAS STATIONNAIRE ET REPRÉSENTATION SPECTRALE

Une fonction aléatoire est dite *stationnaire* au cas où ses caractéristiques statistiques sont invariantes par translation temporelle:

$$m_y(t) = m_y = \text{constante} \quad (4.14)$$

$$A_{yy}(t_1, t_2) = A_{yy}(t_1 - t_2) = A_{yy}(\tau) \quad (4.15)$$

avec

$$\tau = t_1 - t_2. \quad (4.16)$$

On définit alors le *spectre* $S_{yy}(s)$ de la fonction aléatoire stationnaire $y(t)$ comme étant la transformée de Laplace de la covariance $A_{yy}(\tau)$:

$$S_{yy}(s) = \mathcal{L}\{A_{yy}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} A_{yy}(\tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad (4.17)$$

la bande de convergence de l'intégrale contenant l'axe imaginaire $s = j\omega$. L'ensemble $(m'' S_{yy}(s))$ porte le nom de *représentation spectrale* de la fonction aléatoire stationnaire $y(t)$ (représentation équivalente à la représentation externe).

Le critère permettant de reconnaître si une fonction $S_{yy}(s)$ peut être considérée comme un spectre est le suivant: la matrice $S_{yy}(s)$ est un spectre si et

seulement si (*)

$$S_{yy}(s) = S_{y(-s)} \quad (4.18)$$

$$S_{yy}(\omega) \text{ est non négative définie pour tout } \omega \text{ réel.} \quad (4.19)$$

Une transformation linéaire stationnaire de $u_j(t)$ en $y_i(t)$ est représentée par

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \int_{-\infty}^t h_i(t-\alpha) u_i(\alpha) d\alpha \\ &= \int_0^{\infty} h_i(\beta) u_i(t-\beta) d\beta. \end{aligned} \quad (4.20)$$

La relation fondamentale (4.13) devient pour un ensemble de deux fonctions aléatoires $y_1(t)$ et $y_2(t)$ conjointement stationnaires

$$A_{y_1 y_2}(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_1(\alpha) A_{u_1 u_2}(t-\alpha+\beta) h_2'(\beta) d\alpha d\beta. \quad (4.21)$$

Si l'on prend les transformées de Laplace des deux membres de l'expression (4.21) et que l'on note $H_1(s)$ et $H_2(s)$ les transformées de h_1 et de h_2' on obtient

$$S_{y_1 y_2}(s) = H_1(s) S_{u_1 u_2}(s) H_2'(-s). \quad (4.22)$$

Cette relation est l'outil de calcul fondamental des méthodes de filtrage et d'optimisation stochastiques utilisant la représentation spectrale.

4.3 Filtre de Wiener

4.3.1 ÉQUATION INTÉGRALE DE WIENER-HOPF

On pose le problème de trouver la réponse impulsionnelle $h(t, t_0)$ du filtre

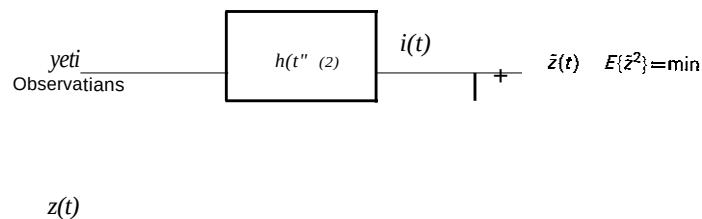


Figure 4-2. Filtre linéaire optimal.

(*) On suppose implicitement que $S_{yy}(s)$ est réelle, c'est-à-dire transformée de Laplace d'une fonction à valeurs réelles:

$$S_{yy}(\bar{s}) = \overline{S_{yy}(s)}. \quad (4.18)^*$$

linéaire optimal qui donne la meilleure estimée $\hat{z}(t)$ de $z(t)$ à partir d'observations $y(t)$. Ce problème est schématisé sur la figure 4-2.

Connaissant la description externe conjointe de $y(t)$ et $z(t)$:

$$m_y = 0 \text{ (pour simplifier les notations)} \quad (4.23)$$

$$m_z = 0 \text{ (pour simplifier les notations)} \quad (4.24)$$

$$A_{yy}(t, t_0) = E\{y(t) y'(t_0)\} \quad (4.25)$$

$$A_{yz}(t_1, t_0) = E\{y(t_1) z'(t_0)\} \quad (4.26)$$

$$A_{zz}(t_1, t_0) = E\{z(t_1) z'(t_0)\}, \quad (4.27)$$

on veut donc déterminer $h(t, t_0)$ de façon que $E\{i(t)\}'$ soit minimal, $\tilde{z}(t)$ désignant l'erreur d'estimation du filtre:

$$\tilde{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t) \quad (4.28)$$

avec

$$\hat{z}(t) = \int_{t_0}^t h(t, \alpha) y(\alpha) d\alpha. \quad (4.29)$$

Utilisant la formule (4.13), on obtient

$$\begin{aligned} E\{i(t)\}' &= A_{zz}(t, t_0) - \int_{t_0}^t h(t, \alpha) A_{yz}(\alpha, t_0) d\alpha \\ &\quad - \int_{t_0}^t A_{zy}(t, \alpha) h'(\alpha, t_0) d\alpha + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h(t, \alpha) A_{yy}(\alpha, \beta) h'(\beta, t_0) d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Un simple raisonnement variationnel (*) montre alors que la fonction $h^*(t, \alpha)$ donne le minimum de $E\{i(t)\}'$ si et seulement si

$$A_{zy}(t, \beta) - \int_{t_0}^t h^*(t, \alpha) A_{yy}(\alpha, \beta) d\alpha = 0 \text{ pour tout } \beta \in [t_0, t], \quad (4.31)$$

ou encore

$$A_{zy}(t, \beta) = 0 \text{ pour tout } \beta \in [t_0, t]. \quad (4.32)$$

L'équation (4.32) porte le nom de «principe» d'orthogonalité: en effet (4.32) exprime que l'erreur d'estimation $\tilde{z}(t)$ est orthogonale (entendre par là non corrélée) à toutes les observations utilisées ($y(\alpha)$, $\alpha \in [t_0, t]$) pour calculer l'estimée $\hat{z}(t)$.

Les équations (4.31) et (4.32) deviennent dans le cas stationnaire

$$A_{zy}(t) - \int_{-\infty}^t h(t-\alpha) A_{yy}(\alpha) d\alpha = 0 \text{ pour tout } t \geq 0 \quad (4.33)$$

(*) h^* réalise le minimum de (4.30) si et seulement si le second membre de (4.30) où l'on pose $h(t, \alpha) = h^*(t, \alpha) + \lambda g(\alpha)$ a une dérivée nulle en λ pour $\lambda = 0$, $g(\alpha)$ étant quelconque.

ou encore

$$A_y(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0, \quad (4.34)$$

et portent le nom d'*équation de Wiener-Hopf*. Ainsi dans le cas stationnaire, le problème du filtrage revient à résoudre cette équation intégrale.

4.3.2 RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE WIENER-HOPF

Dans ce paragraphe, on introduit d'abord deux résultats nécessaires pour exposer la méthode de résolution de Wiener.

4.3.2.1 Factorisation forte des spectres

Tout spectre $S_{yy}(s)$ - c'est-à-dire toute matrice $S_{yy}(s)$ satisfaisant les relations (4.18), (4.18)* et (4.19) - peut être factorisé sous la forme

$$S_{yy}(s) = S_{yy}^+(s) S_{yy}^-(s), \quad (4.35)$$

les facteurs S_{yy}^+ et S_{yy}^- étant des matrices carrées vérifiant les conditions suivantes:

$$i) \quad S_{yy}^-(s) = [S_{yy}^+(-s)]', \quad (4.36)$$

ii) le facteur $S_{yy}(s)$ est stable, réalisable et à phase minimale, les deux dernières conditions signifiant que

$$\mathcal{L}^{-1}[S_{yy}^+(s)] = 0 \quad (\text{transformée inverse prise le long de l'axe imaginaire}) \quad \text{si } t < 0 \quad (4.37)$$

et

$$\det S_{yy}^+(s) \neq 0 \quad \text{si } \operatorname{Re} s > 0. \quad (4.38)$$

Il s'ensuit que $[S_{yy}^+(s)]^{-1}$ est une matrice de transfert réalisable et stable. Une telle factorisation de $S_{yy}^+(s)$ existe toujours si $S_{yy}(s)$ est un spectre et porte le nom de *factorisation forte* (*) (voir le complément 1 de ce chapitre pour un algorithme de calcul lorsque $S_{yy}^+(s)$ est rationnel).

4.3.2.2 Partie réalisable d'une transformée

On introduit la notation $\{A(s)\}_+$ pour représenter la transformée de Laplace de la partie réalisable de $A(s)$. Si l'on pose

$$a(t) = \mathcal{L}^{-1}\{A(s)\} \quad (4.39)$$

et

$$a_+(1) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \{a(t)\} & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

(*) La factorisation est dite faible si le facteur $S_{yy}(s)$ est réalisable, stable sans être à phase minimale et éventuellement rectangle (la condition (4.38) n'est pas exigée).

on définit alors

$$\{A(s)\}_+ = \mathcal{L}\{a_+(t)\}. \quad (4.41)$$

De même on note

$$\{A(s)\}_- = \mathcal{L}\{a_-(t)\} \quad (4.42)$$

avec

$$a_-(1) = \begin{cases} a(t) & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

On appelle fonction *réalisable* une fonction nulle pour les valeurs négatives de t ($a = a_+$ et $A = \{A\}_+$) et fonction *antiréalisable* une fonction nulle pour les valeurs positives de t ($a = a_-$ et $A = \{A\}_-$). Le résultat utile pour la suite est le suivant.

LEMME 4.1

L'égalité

$$\{A\}_+ = \{B\}_+ \quad (4.44)$$

entraîne

$$\{AD\}_+ = \{BD\}_+ \quad (4.45)$$

pour toute fonction D antiréalisable ($D = \{D\}_-$).

En effet $d(t)$ étant nulle pour les valeurs positives de t , on peut voir que l'égalité

$$a_+(t) = b_+(t) \quad (4.46)$$

entraîne l'égalité

$$a-d(t) = b*d(t) \quad (4.47)$$

pour les valeurs positives de t .

4.3.2.3 Résolution de l'équation de Wiener-Hopf

Si l'on reprend l'équation de Wiener-Hopf (4.34), on peut l'écrire

$$\{S_y\}_+ = 0. \quad (4.48)$$

Mais par définition

$$\tilde{z} = z - Hy. \quad (4.49)$$

Donc (4.48) s'écrit

$$\{S_y - HS_{yy}\}_+ = 0 \quad (4.50)$$

soit

$$\{S_y\}_+ = \{HS_{yy}^+ S_{yy}^-\}_+. \quad (4.51)$$

Utilisant le lemme 4-1 et multipliant par la matrice antiréalisable $[S_{yy}^-]^{-1}$, il vient

$$\{S_{zy}[S_{yy}^-]^{-1}\}_+ = \{HS_{yy}^+\}_+ \quad (4.52)$$

Finalement remarquant que HS_{yy}^+ est réalisable car produit de deux facteurs réalisables, on obtient

$$HS_{yy}^+ = \{S_{zy}[S_{yy}^-]^{-1}\}_+ \quad (4.53)$$

soit

$$H = \{S_{zy}[S_{yy}^-]^{-1}\}_+ [S_{yy}^+]^{-1} \quad (4.54)$$

Cette formule donne explicitement la matrice de transfert du filtre optimal. Elle n'est utilisable pratiquement que dans le cas où les spectres S_{zy} et S_{yy} sont des matrices rationnelles. Dans ce cas, en effet, on peut utiliser l'algorithme présenté dans le complément 1 de ce chapitre pour factoriser S_{yy} : si l'on utilise alors un développement autour des différents pôles de l'expression entre parenthèses dans (4.54) en ne conservant que ceux à partie réelle négative, on obtient la partie réalisable de cette expression (opération $\{\}_+$).

4.3.2.4 Exemple scalaire simple

Considérons le problème (figure 4-3) d'extraire en temps réel un signal scalaire z de spectre

$$S_{zz}(s) = \frac{1}{1-s^2}$$

d'un signal disponible bruité y

$$y = z + n,$$

n étant un bruit blanc c'est-à-dire une fonction aléatoire de spectre

$$S_{nn}(s) = k^2.$$

On suppose de plus que n et z ne sont pas corrélés

$$S_{zn}(s) = 0.$$

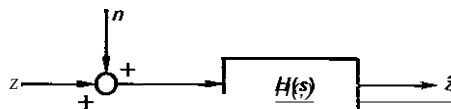


Figure 4-3. Exemple.

La fonction de transfert du filtre est d'après la formule (4.54)

$$H(s) = \frac{\{S_{yz}(s)\}}{\{S_{yy}^-(s)\}_+ + S_{yy}^+(s)}.$$

On calcule

$$S_{yy}(s) = k^2 + \frac{1}{1-s^2} = k^2 \frac{b^2 - s^2}{1-s^2}$$

avec

$$b = 1 + \frac{1}{k^2}.$$

La factorisation forte de $S_{yy}(s)$ donne

$$S_{yy}^+(s) = k \frac{b+s}{1+s} \quad S_{yy}^-(s) = k \frac{b-s}{1-s}$$

D'autre part

$$S_{zy}(s) = S_{yy}(s) = \frac{1}{1-s^2},$$

donc

$$\frac{\{S_{yz}(s)\}}{\{S_{yy}^-(s)\}_+} = \left\{ \frac{1}{k(1+s)(b-s)} \right\}_+ = \frac{1}{k(b+1)(1+s)}$$

d'où

$$H(s) = \frac{1}{k^2(b+1)(b+s)}$$

$$H(s) = \frac{1}{k^2} \frac{1}{s + \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}}$$

4.4 Représentation markovienne des fonctions aléatoires

4.4.1 BRUIT BLANC

On appelle *bruit blanc* une fonction aléatoire $v(t)$ gaussienne à moyenne nulle dont la covariance est à un facteur non négatif défini près une fonction de Dirac:

$$A_{vv}(t, \tau) = E\{v(t)v'(\tau)\} = Q(t)\delta(t-\tau) \quad (4.55)$$

avec

$$Q(t) \geq 0. \quad (4.56)$$

Dans le cas d'un bruit blanc stationnaire ($Q(t) = Q \geq 0$), le spectre est donc une constante non négative définie

$$S_{vv}(s) = \mathcal{L}\{A_{vv}\} = Q \geq 0. \quad (4.57)$$

A vrai dire la définition précise du bruit blanc est plus complexe, mais pour tous les calculs de covariance qui seront effectués la relation (4.55) est suffisante.

Ainsi les vecteurs aléatoires

$$x = \int_{s_1}^t \Phi(\alpha) v(\alpha) d\alpha \quad (4.58)$$

et

$$y = \int_{s_2}^{t_1} \Phi(\beta) v(\beta) d\beta \quad (4.59)$$

ont leurs moments des deux premiers ordres donnés par

$$E\{x\} = E\{y\} = 0 \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} E\{xx'\} &= E\left\{\int_{s_1}^{t_1} \int_{s_1}^{t_1} \Phi(\alpha) v(\alpha) v'(\beta) \Phi'(\beta) d\alpha d\beta\right\} \\ &= \int_{s_1}^{t_1} \int_{s_1}^{t_1} \Phi(\alpha) E\{v(\alpha) v'(\beta)\} \Phi'(\beta) d\alpha d\beta \\ &= \int_{s_1}^{t_1} \int_{s_1}^{t_1} \Phi(\alpha) Q(\alpha) \Phi'(\beta) \delta(\alpha - \beta) d\alpha d\beta \\ &= \int_{s_1}^{t_1} \Phi(\alpha) Q(\alpha) \Phi'(\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (4.61)$$

et de même

$$E\{yy'\} = \int_{s_2}^{t_2} \Phi(\alpha) Q(\alpha) \Phi'(\alpha) d\alpha \quad (4.62)$$

$$E\{xy'\} = \int_{\tau}^{\sigma} \Phi(\alpha) Q(\alpha) \Phi'(\alpha) d\alpha \quad (4.63)$$

où

$$(\tau, \sigma) = (s_1, t_1) \cap (s_2, t_2). \quad (4.64)$$

4.4.2 SYSTÈME DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE EXCITÉ PAR UN BRUIT BLANC

Soit un système linéaire excité par le bruit blanc $V(t)$ de covariance donnée par l'expression (4.55) :

$$\dot{x} = F(t)x + v(t). \quad (4.65)$$

La condition initiale est spécifiée comme étant un vecteur aléatoire gaussien $x(t_0)$ indépendant de $v(t)$:

$$E\{x(t_0)\} = \bar{x}_0 \quad (4.66)$$

$$E\{(x(t_0) - \bar{x}_0)(x(t_0) - \bar{x}_0)'\} = P_0 \quad (4.67)$$

Alors on posera par définition que $x(t)$ est la fonction aléatoire gaussienne donnée par l'expression (voir l'expression analogue (3.49)) :

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \alpha) v(\alpha) d\alpha. \quad (4.68)$$

Appliquant les résultats du paragraphe 4.4.1, on trouve que la moyenne et la covariance de $x(t)$ sont les suivantes:

$$m_x(t) = \Phi(t, t_0) \bar{x}_0 \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} A_{xx}(t_1, t_2) &= \Phi(t_1, t_0) A_0 \Phi'(t_2, t_0) \\ &+ \int_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} \Phi(t_1 - \alpha) Q(\alpha) \Phi'(t_2 - \alpha) d\alpha. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Si l'on pose

$$A_x(t) = E\{(x(t) - m_x(t))(x(t) - m_x(t))'\} = A_{xx}(t, t), \quad (4.71)$$

on voit aisément que $m_x(t)$ et $A_x(t)$ sont encore définis par

$$\begin{cases} m_x(t_0) = \bar{x}_0 \\ \frac{d}{dt} m_x = F(t) m_x \end{cases} \quad (4.72)$$

$$\begin{cases} A_x(t_0) = A_0 \\ \frac{d}{dt} A_x = F(t) A_x + A_x F'(t) + Q(t). \end{cases} \quad (4.73)$$

4.4.3 FONCTION ALÉATOIRE MARKOVienne

4.4.3.1 On dit qu'une fonction aléatoire $x(t)$ est markovienne si les lois conditionnelles $\mathcal{L}\{x(t) | x(t_1), \dots, x(t_n)\}$ et $\mathcal{L}\{x(t) | x(t_n)\}$ sont identiques quels que soient les instants $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$. On démontre que dans le cas des fonctions aléatoires gaussiennes à moyenne nulle la condition prend la forme suivante :

LEMME 4.2

La fonction aléatoire gaussienne $x(t)$ à moyenne nulle est markovienne si et seulement si

$$\Phi(\alpha, \gamma) = \Phi(\alpha, P) \Phi(\beta, \gamma) \quad (4.74)$$

pour tous instants α, β, γ , où la matrice Φ est définie à partir de la covariance du processus par l'expression

$$\Phi(t_1, t_2) = A_{xx}(t_1, t_2) A_{xx}^{-1}(t_2, t_2). \quad (4.75)$$

Autrement dit la matrice Φ doit être une matrice de transition.

Il est facile de voir que l'état $x(t)$ d'un système linéaire excité par un bruit blanc est une fonction aléatoire markovienne. En effet à partir de la covariance définie par l'expression (4.70), la relation (4.75) conduit à la matrice de transition de $F(t)$. Inversement on peut montrer en s'aidant du lemme 4.2 que toute fonction aléatoire markovienne peut être considérée comme l'état d'un système linéaire excité par un bruit blanc. Ces deux notions seront donc considérées comme équivalentes par la suite.

La description de la fonction aléatoire markovienne $x(t)$ à l'aide du système linéaire (4.65) ou plus précisément l'ensemble des matrices $\{F(t), Q(t), A_0\}$ porte le nom de **représentation interne** de cette fonction aléatoire.

4.4.3.2 Cas stationnaire

On voit que dans le cas stationnaire la covariance de la fonction aléatoire markovienne $x(t)$ est

$$A_{xx}(\tau) = E\{X(t+\tau)X'(t)\} = \begin{cases} e^{F\tau}P & \text{si } \tau \geq 0 \\ Pe^{-F'\tau} & \text{si } \tau \leq 0 \end{cases} \quad (4.76)$$

où $P = A_0$ est défini

— soit par l'intégrale

$$P = \int_0^\infty e^{Ft} Q e^{F't} dt \quad (4.77)$$

soit comme solution de l'équation

$$FP + PF' = -Q. \quad (4.78)$$

4.4.3.3 Exemple

La fonction aléatoire stationnaire scalaire de covariance

$$A_{xx}(T) = \sigma^2 e^{-\alpha|T|}$$

est markovienne car les conditions du lemme 4.2 sont vérifiées. De plus le système linéaire qui la génère est

$$\dot{x} = -\alpha x + v$$

où v est un bruit blanc de covariance

$$E\{v(t+\tau)v(t)\} = q\delta(\tau)$$

avec (équation (4.78))

$$q = 2\alpha\sigma^2.$$

4.4.4 REPRÉSENTATION MARKOVIENNE D'UNE FONCTION ALÉATOIRE

4.4.4.1 On considère la classe de fonctions aléatoires $y(t)$ pouvant être représentées comme sortie d'un système linéaire excité par un bruit blanc, c'est-à-dire par le modèle suivant:

$$\dot{x} = F(t)x + v(t) \quad (4.79)$$

$$E\{v(t)v'(\tau)\} = Q(t)\delta(t-\tau) \quad (4.80)$$

$$E\{x(t_0)x'(t_0)\} = A_0 \quad (4.81)$$

$$y(t) = H(t)x(t). \quad (4.82)$$

On dit alors que $y(t)$ admet une *représentation markovienne* à l'aide de la fonction $x(t)$, ou encore que sa *représentation interne* est donnée par l'ensemble $\{H(t), F(t), Q(t), A_0\}$.

4.4.4.2 Dans le cas stationnaire une fonction aléatoire de cette classe admet une covariance de la forme

$$A_{yy}(\tau) = \begin{cases} He^{F\tau}PH' & \text{si } \tau \geq 0 \\ HPe^{-F'\tau}H' & \text{si } \tau \leq 0. \end{cases} \quad (4.83)$$

Le spectre de $y(t)$ est alors

$$S_{yy}(s) = \mathcal{L}\{A_{yy}(t)\} = H(sI - F)^{-1}PH' + HP(-sI - F')^{-1}H'. \quad (4.84)$$

Compte tenu de la relation (4.78), on peut écrire (4.84) sous la forme

$$\begin{aligned} S_{yy}(s) &= H(sI - F)^{-1} [P(-sI - F') + (sI - F)P] (-sI - F')^{-1}H' \\ &= H(sI - F)^{-1} [-PF' - FP] (-sI - F')^{-1}H' \\ &= H(sI - F)^{-1} Q (-sI - F')^{-1}H'. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Ce résultat est en accord avec la relation déjà obtenue (4.22) lorsqu'on l'applique au système linéaire considéré de fonction de transfert $H(sI - F)^{-1}$ excité par le bruit blanc $v(t)$ de spectre Q .

Ainsi la fonction aléatoire stationnaire $y(t)$ à représentation markovienne a un spectre rationnel. Inversement si une fonction aléatoire stationnaire $y(t)$ a un spectre rationnel, on peut montrer qu'il est possible d'écrire ce spectre

sous la forme

$$S_{yy}(s) = H(sI - F)^{-1} G + G'(-sI - F')^{-1} H' \quad (4.86)$$

car, d'une part il vérifie la propriété (4.18), d'autre part il est rationnel. Le caractère non négatif de $S_{yy}(s)$ (exprimé par (4.19)) entraîne alors l'existence de deux matrices non négatives définies P et Q telles que

$$PH' = G \quad (4.87)$$

$$FP + PF' = -Q. \quad (4.88)$$

Ce dernier résultat non évident porte le nom de *lemme de Yakubovich-Popov-Kalman*. Le système linéaire $\{H, F\}$ excité par un bruit blanc $v(t)$ de covariance $Q\delta(t)$ est alors une représentation markovienne de $y(t)$. Ainsi la classe des fonctions aléatoires stationnaires à représentation markovienne est identique à la classe des fonctions aléatoires à spectres rationnels.

4.5 Filtre récursif de Kalman-Bucy

Cas d'observations discrètes

4.5.1 Soit un problème de filtrage statistique (voir paragraphe 4.1.3) où l'on cherche à estimer $z(t)$ à partir de $y(t)$. La description des lois statistiques des fonctions aléatoires $y(t)$ et $z(t)$ est supposée donnée sous la forme de la représentation markovienne suivante:

i) processus markovien $x(t)$ décrit par

$$\dot{x} = F(t)x + v(t) \quad (4.89)$$

$$E\{v(t)v'(\tau)\} = Q(t)\delta(t-\tau) \quad (4.90)$$

$$E\{x(t_0)\} = \bar{x}_0 \quad (4.91)$$

$$E\{(x(t_0) - x_0)(x(t_0) - x_0)'\} = A_0 \quad (4.92)$$

ii) observations $y(t_i)$ fournies à une suite d'instants discrets $t_1, t_2, \dots$

$$y(t_i) = H(t_i)x(t_i) + w(t_i) \quad (4.93)$$

$$E\{w(t_i)\} = 0 \quad (4.94)$$

$$E\{w(t_i)w'(t_j)\} = R(t_i)\delta_{ij} \quad (4.95)$$

iii) signal à estimer $z(t)$

$$z(t) = J(t)x(t). \quad (4.96)$$

Le problème du filtrage est alors de calculer à chaque instant t , $t_i \leq t < t_{i+1}$, la meilleure estimée

$$\hat{z}(t) = E\{z(t)|y(t_i), \dots, y(t_i)\}. \quad (4.97)$$

4.5.2 Le caractère markovien de la représentation utilisée va permettre de calculer par un algorithme récursif la meilleure estimée de $x(t)$:

$$\hat{x}(t) = E\{x(t)|y(t_i), \dots, y(t_i)\}. \quad (4.98)$$

Il découle alors de (4.96) que la meilleure estimée $z(t)$ est donnée par

$$z(t) = J(t)\hat{x}(t). \quad (4.99)$$

Les différentes étapes de l'algorithme connu sous le nom de *filtre de Kalman-Bucy* sont exposées ci-dessous. Il va apparaître nécessaire de calculer la covariance $\Sigma(t)$ de l'erreur $\tilde{x}(t)$ effectuée, grandeurs définies par

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (4.100)$$

$$\Sigma(t) = E\{x(t)x'(t)\}. \quad (4.101)$$

i) Initialisation $t = t_0$

Avant toute observation

$$\hat{x}(t_0) = E\{x(t_0)\} = \bar{x}_0 \quad (4.102)$$

$$\Sigma(t_0) = A_0. \quad (4.103)$$

ii) Entre deux observations $t_{i-1} < t < t_i$

Soient deux instants t et t' de l'intervalle (t_{i-1}, t_i) tels que

$$t_{i-1} < t < t' < t_i.$$

Il est clair que les ensembles d'observations pour calculer $\hat{x}(t)$ et $\hat{x}(t')$ sont identiques. Donc si l'on prend l'espérance conditionnelle des deux membres de la relation liant $x(t')$ et $x(t)$ (voir (4.68))

$$x(t') = \Phi(t', t)x(t) + \int_t^{t'} \Phi(t', \alpha)v(\alpha)d\alpha, \quad (4.104)$$

il vient

$$\hat{x}(t') = \Phi(t', t)\hat{x}(t). \quad (4.105)$$

Considérant que Φ est la matrice de transition attachée à F , on peut exprimer la relation (4.105) sous forme de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = F(t)\hat{x}. \quad (4.106)$$

D'autre part, retranchant (4.104) de (4.79), il vient

$$\frac{d}{dt}\tilde{x} = F(t)\tilde{x} + v(t). \quad (4.107)$$

La covariance $\Sigma(t)$ de l'erreur $\tilde{x}(t)$ vérifie donc (voir (4.73))

$$\dot{\Sigma} = F(t)\Sigma + \Sigma F'(t) + Q(t). \quad (4.108)$$

iii) A l'instant d'une observation $t = t_i$

On est conduit à introduire

- d'une part l'estimée et la covariance obtenues par l'algorithme précédent (ii) qui ne tient pas compte de l'observation $y(t_i)$:

$$x(t, -) = E\{x(t) | y(t_i), \dots, Y(I, -)\} \quad (4.109)$$

$$\Sigma(t_i -) = E\{x(t, -) x'(t, -)\}, \quad (4.110)$$

— d'autre part l'estimée et la covariance obtenues par l'algorithme précédent compte tenu de $y(t_i)$, grandeurs qui serviront de valeurs initiales pour l'application de l'algorithme précédent (ii) sur le segment ultérieur $(1, 1, +)$:

$$X(I, +) = E\{x(I) | y(t_i), \dots, y(t_i)\} \quad (4.111)$$

$$\Sigma(t_i +) = E\{X(I, +) x'(t, +)\}. \quad (4.112)$$

On peut écrire

$$x(t, +) = E\{x(I) | y(t_i), \dots, y(I, -), \eta(t_i)\} \quad (4.113)$$

où l'on définit

$$\eta(t_i) = y(t_i) - H(t_i) \hat{x}(t_i -) = H(t_i) \tilde{x}(t_i -) + w(t_i), \quad (4.114)$$

les deux ensembles $\{y(t_i), \dots, Y(t_i)\}$ et $\{y(t_i), \dots, y(t_i -), \eta(t_i)\}$ étant équivalents car l'on peut déduire l'un de l'autre. Si l'on remarque que les vecteurs aléatoires $\eta(t_i)$ d'une part et $\{y(t_i), \dots, y(t_i - l)\}$ d'autre part sont indépendants et que l'on applique une propriété classique des moyennes conditionnelles, on obtient

$$\hat{x}(t_i +) = E\{x(t_i) | y(t_i), \dots, y(t_i - l)\} + E\{x(t_i) | \eta(t_i)\} \quad (4.115)$$

soit

$$x(t, +) = \hat{x}(t_i -) + E\{x(t_i) | \eta(t_i)\}. \quad (4.116)$$

On utilise alors le théorème 4.1 pour calculer le dernier terme de l'expression (4.116). Pour cela, on calcule d'abord

$$\Sigma_{12} = E\{x(t_i) \eta'(t_i)\} = \Sigma(t_i -) H'(t_i) \quad (4.117)$$

$$\Sigma_{22} = E\{\eta(t_i) \eta'(t_i)\} = H(t_i) \Sigma(t_i -) H'(t_i) + R(t_i). \quad (4.118)$$

Il vient alors

$$x(t, +) = \hat{x}(t_i -) + K(t_i) [y(t_i) - H(t_i) \hat{x}(t_i -)] \quad (4.119)$$

avec

$$K(t_i) = \Sigma(t_i -) H'(t_i) [H(t_i) \Sigma(t_i -) H'(t_i) + R(t_i)]^{-1}. \quad (4.120)$$

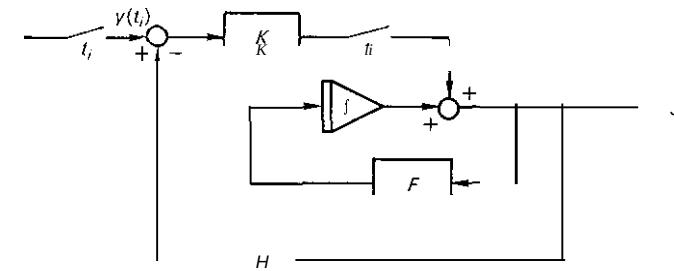
La covariance $\Sigma(t_i +)$ est donnée par

$$\Sigma(t_i +) = [1 - K(t_i) H(t_i)] \Sigma(t_i -) [1 - K(t_i) H(t_i)]' + K(t_i) R(t_i) K'(t_i), \quad (4.121)$$

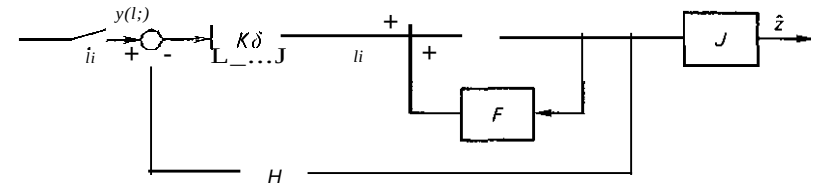
soit en notation simplifiée

$$\Sigma_+ = \Sigma_- - \Sigma_- H' [H \Sigma_- H' + R]^{-1} H \Sigma_- \quad (4.122)$$

L'ensemble des équations (4.99), (4.102), (4.103), (4.106), (4.108), (4.117), (4.119) et (4.122) constituent le filtre de Kalman-Bucy du problème d'estimation considéré. La figure 4-4 donne deux diagrammes fonctionnels équivalents du filtre.



a) Première forme du filtre



b) Deuxième forme du filtre utilisant une fonction δ

Figure 4-4. Filtre de Kalman-Bucy. Observations discrètes.

4.5.3 REMARQUES

1°) Le calcul de la matrice de covariance $\Sigma(t)$ est nécessaire, car c'est à partir de $\Sigma(t)$ que l'on peut calculer le gain $K(t_i)$ du filtre, c'est-à-dire la pondération à apporter aux nouvelles observations $y(t_i)$.

2°) Ce type d'algorithme est dit *récurif* car lorsque l'on a calculé à un instant t , $\hat{x}(t)$ et $\Sigma(t)$, il est inutile de conserver les valeurs des observations passées $y(t_i)$, $t_i < t$.

3°) Les formules précédentes ne sont valides que si la matrice $H \Sigma_- H' + R$ est inversible à tous les instants t_i . Ceci est vérifié en particulier si le problème

de filtrage posé est *régulier*, c'est-à-dire que pour tout instant d'observation t la matrice $R(t)$ est positive définie. Autrement le problème est dit *singulier* (voir paragraphe 4.7).

4.6 Filtre récursif de Kalman-Bucy Cas d'observations continues

4.6.1 Le problème est identique à celui que l'on a posé au paragraphe 4.5.1, sauf en ce qui concerne le point ii) car les observations $y(t)$ sont supposées **données en permanence**

$$y(t) = H(t)x(t) + w(t) \quad (4.123)$$

où $w(t)$ est un bruit blanc continu de covariance

$$E\{w(t)w'(r)\} = R(t)\delta(t-r) \quad (4.124)$$

et la covariance croisée entre les deux bruits blancs $v(t)$ et $w(t)$ est donnée par

$$E\{v(t)w'(r)\} = S(t)\delta(t-r). \quad (4.125)$$

On suppose aussi que le problème est *régulier*, c'est-à-dire que la matrice $R(t)$ est **positive définie**.

4.6.2 Le filtrage va consister ici aussi à calculer

$$\hat{x}(t) = E\{x(t) | y(\alpha), t_0 \leq \alpha < t\} \quad (4.126)$$

et

$$\Sigma(t) = E\{x(t)\tilde{x}'(t)\} \quad (4.127)$$

avec

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t). \quad (4.128)$$

On remarque d'abord que l'initialisation du filtre est la même que dans le cas discret (équations (4.102) et (4.103)).

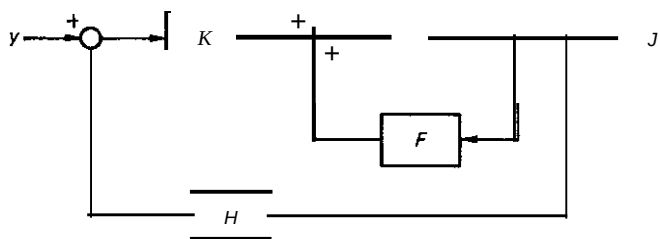


Figure 4-5. Filtre de Kalman-Bucy. Observations continues.

On admettra par analogie avec le cas discret (voir figure 4-4-b) que la **structure du filtre optimal est celle représentée sur la figure 4-5, ou encore que son équation est**

$$\frac{d}{dt} \hat{x} = F(t)x + K(t)[y(t) - H(t)x]. \quad (4.129)$$

La démonstration de ce résultat qui nécessite un passage à la limite délicat, ou l'introduction de mathématiques avancées n'est pas reproduite ici.

Admettant cette structure, on va calculer la valeur optimale à donner au gain $K(t)$ du filtre, c'est-à-dire la valeur conduisant au minimum de la covariance d'erreur $\Sigma(t)$. Retranchant l'équation (4.129) de (4.89), on voit que l'erreur $\tilde{x}(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} \tilde{x} = (F - KH)x + v - Kw. \quad (4.130)$$

Le bruit blanc excitant ce système linéaire a la covariance

$$E\{(v - Kw)(v - Kw)'\} = (Q + KRK' + SK' + KS')\delta \quad (4.131)$$

et par conséquent, la covariance $E(t)$ de $\tilde{x}(t)$ est donnée par (voir (4.73))

$$\frac{d}{dt} \Sigma = (F - KH)\Sigma + \Sigma(F - KH)' + Q + KRK' + SK' + KS'. \quad (4.132)$$

Remarquant que le second membre de cette équation est quadratique en K , on peut l'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Sigma = & F\Sigma + \Sigma F' - (\Sigma H' + S)R^{-1}(H\Sigma + S') + Q \\ & + [K - (\Sigma H' + S)R^{-1}]R[K' - R^{-1}(H\Sigma + S')]. \end{aligned} \quad (4.133)$$

Il semble raisonnable de penser que la valeur minimale de $\Sigma(t)$ est obtenue en minimisant le second membre de (4.133) : c'est ce qui est vérifié ci-après. On pose

$$K_* = (\Sigma_* H' + S)R^{-1} \quad (4.134)$$

avec

$$\frac{d}{dt} \Sigma_* = F\Sigma_* + \Sigma_* F' - (\Sigma_* H' + S)R^{-1}(H\Sigma_* + S') + Q \quad (4.135)$$

$$I.(t_0) = A_0 \quad (4.136)$$

et l'on considère la différence

$$\Delta = \Sigma - \Sigma_* \quad (4.137)$$

qui est nulle à l'instant initial t_0 . Posant

$$F_1 = F - \left(\frac{\Sigma + \Sigma^*}{2} H' + S \right) R^{-1} H, \quad (4.138)$$

on peut vérifier que

$$\frac{d}{dt} \Delta = F_1 \Delta + \Delta F_1' + [K - (\Sigma H' + S) R^{-1}] R [K' - R^{-1} (H \Sigma + S')]. \quad (4.139)$$

Il découle clairement de cette dernière équation que la matrice $\Delta(t)$ est non négative définie, et n'est identiquement nulle que si

$$K = (\Sigma H' + S) R^{-1}. \quad (4.140)$$

En d'autres termes, on vient de démontrer que la matrice K^* est le gain optimal du filtre.

En résumé, l'algorithme de filtrage optimal consiste en l'ensemble d'équations

$$\frac{d}{dt} \hat{x} = F \hat{x} + K [y - H \hat{x}] \quad (4.141)$$

$$K = (\Sigma H' + S) R^{-1} \quad (4.142)$$

$$\frac{d}{dt} \Sigma = F \Sigma + \Sigma F' - (\Sigma H' + S) R^{-1} (H \Sigma + S') + Q. \quad (4.143)$$

Cet ensemble d'équations constitue le filtre de Kalman-Bucy du problème considéré. On peut remarquer que l'équation différentielle donnant la covariance est du second degré en Σ : c'est donc une équation de Riccati.

Les mêmes remarques que dans le cas discret s'appliquent:

- l'algorithme est récursif,
- le calcul de la covariance est nécessaire car il permet de déterminer le gain K du filtre.

4.6.3 EXEMPLE SIMPLE

Soit à nouveau l'exemple simple 4.3.2.4 dont la représentation markovienne est la suivante:

$$\dot{x} = -x + v$$

$$E\{vv'\} = \delta$$

$$E\{xC(t) x'(C(t))\} = \frac{1}{2}$$

$$y = x + w$$

$$E\{ww'\} = k^2 \delta.$$

Le filtre optimal consiste alors en les deux équations différentielles

$$\frac{d}{dt} \hat{x} = -\hat{x} + \frac{\Sigma}{k^2} [y - \hat{x}]$$

$$\frac{d\Sigma}{dt} = -2\Sigma - \frac{\Sigma^2}{k^2} + 1$$

avec les conditions initiales

$$\hat{x}(t_0) = 0$$

$$\Sigma(t_0) = \frac{1}{2}.$$

Si le filtre fonctionne depuis l'instant $t_0 = -\infty$, il a atteint un état stationnaire caractérisé par Σ_∞ solution de

$$-2\Sigma_\infty - \frac{\Sigma_\infty^2}{k^2} + 1 = 0$$

soit

$$\Sigma_\infty = k^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} - 1 \right).$$

Le filtre est alors le système linéaire stationnaire d'équation différentielle

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = -\hat{x} + \frac{\Sigma_\infty}{k^2} (y - \hat{x})$$

et de fonction de transfert

$$H(s) = \frac{-\frac{\Sigma_\infty}{k^2} + 1}{s + \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}}$$

La méthode de Kalman-Bucy a bien conduit (heureusement!) au même résultat que la méthode de Wiener (voir paragraphe 4.3.2.4).

4.7 Filtres récursifs singuliers

4.7.1 Jusqu'à présent, on a toujours supposé que la matrice de covariance $R(t)$ du bruit blanc sur les observations était définie positive: le problème de filtrage était alors qualifié de régulier. Dans ce paragraphe on va envisager le cas *singulier* où la matrice $R(t)$ est singulière ($\det R(t) = 0$). Il est possible d'utiliser encore les formules obtenues dans le cas discret régulier en employant

l'opération de pseudo-inverse à la place de l'inverse n'existant pas nécessairement dans le terme $(R + H' \Sigma_- H)^{-1}$. Dans le cas continu par contre, la seule méthode consiste à transformer le problème pour le ramener à un problème régulier ainsi qu'il est indiqué ci-après.

4.7.2 FILTRE SINGULIER

Afin d'alléger les notations, on supposera le problème singulier mis sous la forme suivante à laquelle on peut toujours le ramener par changements de bases sur x et sur y :

— modèle markovien

$$\dot{x}_1 = F_{11} x_1 + F_{12} x_2 + v_t \quad (4.144)$$

$$\dot{x}_2 = F_{21} x_1 + F_{22} x_2 + v_2 \quad (4.145)$$

avec

$$E \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} [v; v_2'] \right\} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_1' \\ Q_1' & Q_2 \end{bmatrix} \delta \quad (4.146)$$

- modèle des observations

$$y_1 = x_1 \quad (4.147)$$

$$y_2 = Hx + w \quad (4.148)$$

$$E\{ww'\} = R\delta, \text{ avec } R > 0 \quad (4.149)$$

$$E\{v_i w'\} = S_i \delta \quad (4.150)$$

$$E\{v, w'\} = S_2 \delta. \quad (4.151)$$

Le filtrage consiste en fait à calculer l'estimée $\hat{x}_2$ de x_2 car la partie x_1 du vecteur d'état est déjà observée sans erreur.

D'un autre côté, il est clair que l'information contenue dans $\{YI(\alpha), 0 \leq \alpha < t\}$ est identique à l'information contenue dans

$$\{YI(ta), YI(a) - F_1 I_1 y_1(\alpha), t_0 \leq \alpha < t\}$$

car on peut déduire chaque ensemble de l'autre. Mais d'après l'équation (4.144),

$$y_3 = \dot{y}_1 - F_{11} y_1 = F_{12} x_2 + v_1 \quad (4.152)$$

peut être interprété comme une «observation sur x_2 ». Donc si l'on pose

$$x = x_2, \quad \mathcal{F} = F_{22}, \quad \mathcal{V} = v_2, \quad y = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{bmatrix} H \\ F_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{W} = \begin{bmatrix} w \\ v_1 \end{bmatrix}, \quad (4.153)$$

on a le modèle

$$\dot{x} = \mathcal{F}x + \mathcal{V} + F_{21}(t) y_1(t) \quad (4.154)$$

$$y = \mathcal{H}x + \mathcal{W}, \quad (4.155)$$

$\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ étant des bruits blancs de covariance

$$E\{\mathcal{V}\mathcal{V}'\} = Q_2 \delta = \mathcal{Q} \delta \quad (4.156)$$

$$E\{\mathcal{W}\mathcal{W}'\} = \begin{bmatrix} R & S_1' \\ S_1 & Q_1 \end{bmatrix} \delta = \mathcal{R} \delta \quad (4.157)$$

$$E\{\mathcal{V}\mathcal{W}'\} = [S_2 \quad Q_{21}] \delta = \mathcal{S} \delta. \quad (4.158)$$

Le problème est ainsi ramené à un problème de filtrage standard de dimension inférieure (dimension $(x) < \text{dimension}(x)$), mis à part le terme connu $F' I(t) Y I(t)$ qui excite l'équation (4.154) et qu'il faut faire apparaître de même dans l'équation différentielle du filtre donnant $\hat{x}$, et mise à part l'initialisation qui doit être faite en tenant compte de l'information $Y I(ta)$. Si le modèle obtenu est encore singulier ($\mathcal{R}$ matrice singulière), on applique de nouveau le processus de réduction indiqué. On arrive ainsi en un nombre fini d'étapes à obtenir un problème régulier que l'on résout à l'aide des équations développées au paragraphe 4.6.

4.7.3 FILTRE AVEC BRUIT CORRELÉ SUR LES OBSERVATIONS

On suppose le modèle suivant:

- modèle markovien de l'état

$$\dot{x} = Fx + v \quad (4.159)$$

- modèle des observations

$$Y = Hx + \eta \quad (4.160)$$

où la fonction aléatoire $\eta(t)$ qui est le bruit sur les observations admet elle-même la représentation markovienne suivante

$$\dot{\xi} = A\xi + \mu \quad (4.161)$$

$$\eta = C\xi + v. \quad (4.162)$$

Les bruits blancs v , u et v intervenant dans ce modèle ont la covariance suivante

$$E \left\{ \begin{bmatrix} v \\ \mu \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v' & \mu' & v' \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q & Q_{12} & S_1' \\ Q_{12}' & Q & S_2' \\ S_1 & S_2 & R \end{bmatrix} \delta. \quad (4.163)$$

On voit que l'on peut se ramener à une forme standard de problème de filtrage en posant

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{bmatrix} v \\ \mu \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{bmatrix} H & C \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}. \quad (4.164)$$

En effet le problème s'écrit alors

$$\dot{\mathcal{X}} = \mathcal{F}\mathcal{X} + \mathcal{V} \quad (4.165)$$

$$\mathcal{Y} = \mathcal{H}\mathcal{X} + v \quad (4.166)$$

avec

$$E\{\mathcal{V}\mathcal{V}'\} = \mathcal{Q}\delta \quad (4.167)$$

$$E\{vv'\} = R\delta \quad (4.168)$$

$$E\{\mathcal{V}v'\} = \mathcal{S}\delta. \quad (4.169)$$

Suivant que ce problème standard est régulier ou singulier on lui applique les méthodes des paragraphes 4.6 ou 4.7.2.

4.7.4 FILTRE AVEC BRUIT MARKOVIAN SUR LES OBSERVATIONS

On envisage ici à titre d'exemple un cas particulier du paragraphe précédent, le bruit η sur les observations étant supposé markovien. Cela permettra de développer complètement les équations correspondantes et d'illustrer les **considérations des deux paragraphes précédents. On écrit à nouveau le modèle**

$$\dot{x} = Fx + v \quad (4.170)$$

$$\dot{\xi} = A\xi + v \quad (4.171)$$

$$y = Hx + \xi \quad (4.172)$$

avec les conditions initiales

$$E\{x(t_0)\} = 0 \quad (4.173)$$

$$E\{x(t_0) x'(t_0)\} = A_0 \quad (4.174)$$

$$E\{\xi(t_0)\} = 0 \quad (4.175)$$

$$E\{\xi(t_0) \xi'(t_0)\} = \Theta_0 \quad (4.176)$$

et les bruits blancs v et v de covariances

$$E \left\{ \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v' & v' \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_2 \end{bmatrix} \delta. \quad (4.177)$$

En introduisant le vecteur d'état $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}$, on a un problème singulier car il n'y a pas de bruit blanc sur les observations. On remplace donc l'ensemble d'observation $\{y(\alpha), t_0 \leq \alpha < t\}$ par l'ensemble équivalent $\{y(t_0), \xi(\alpha), t_0 \leq \alpha < t\}$ avec

$$\begin{aligned} \xi(\alpha) &= \dot{y} - Ay \\ &= \mathcal{H}x + Hv + v \end{aligned} \quad (4.178)$$

où l'on a posé

$$\mathcal{H} = H + HF - AH. \quad (4.179)$$

Le bruit blanc $Hu + v$ a la covariance $R\delta$ avec

$$R = HQ_{11}H' + Q_{22} + HQ_{12} + Q_{21}H', \quad (4.180)$$

et l'on supposera que R est positive définie. Le filtrage consiste alors en l'algorithme composé des différentes étapes suivantes.

i) Initialisation à l'instant $t = t_0$

On pose

$$\hat{x}(t_0 -) = 0 \quad (4.181)$$

$$\Sigma(t_0 -) = 0. \quad (4.182)$$

Tenant compte de l'observation $y(t_0)$, on obtient à l'aide du théorème 4-1 :

$$x(t_0 +) = A_0 H' (H A_0 H' + e)^{-1} y(t_0) \quad (4.183)$$

$$\Sigma(t_0 +) = A_0 - A_0 H' (H A_0 H' + e)^{-1} H A_0. \quad (4.184)$$

ii) Équations du filtre

L'estimée $\hat{x}$ est générée par

$$\frac{d}{dt} \hat{x} = F\hat{x} + K[\zeta(t) - \mathcal{H}\hat{x}] \quad (4.185)$$

$$K = (\Sigma \mathcal{H}' + Q_{12} + Q_{11} H') R^{-1} \quad (4.186)$$

$$\frac{d}{dt} \Sigma = F\Sigma + \Sigma F' - (\Sigma \mathcal{H}' + Q_{12} + Q_{11} H') R^{-1} (\mathcal{H}\Sigma + Q_{21} + H Q_{11}) + Q_{11} \quad (4.187)$$

L'inconvénient de la forme (4.185) de l'algorithme de filtrage est de faire apparaître explicitement la dérivée $\dot{\hat{x}}$ des observations par l'intermédiaire du terme $\dot{\zeta}(t)$, car il est difficile de dériver un signal. Il est possible d'écrire cette équation sous une forme équivalente ne présentant pas cet inconvénient

$$\frac{d}{dt}(\hat{x} - Ky) = F\hat{x} - K\dot{y} - KAy - K\mathcal{H}\hat{x}. \quad (4.188)$$

On a représenté sur la figure 4-6 un diagramme fonctionnel du filtre sous cette dernière forme.

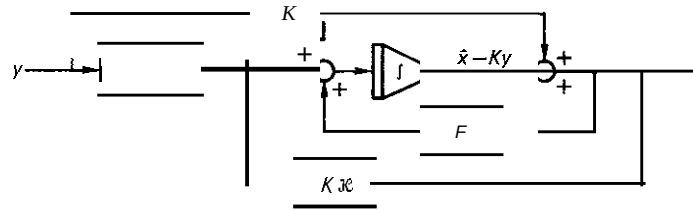


Figure 4-6. Filtre récursif dans le cas de bruit markovien sur les observations.

COMPLÉMENT 1 AU CHAPITRE 4

FACTORISATION DES MATRICES SPECTRALES RATIONNELLES

4C1.1 Le problème de la factorisation forte

Considérons une matrice carrée $n \times n$, $S(s)$ telle que

$$S(s) = S^*(s) \quad (4.189)$$

$$S(s) = S^*(-s)$$

$$S(j\omega) \geq 0 \quad \text{pour tout } \omega \text{ réel.} \quad (4.190)$$

Il existe alors une factorisation forte de S

$$S(s) = S_+(s)S_+^*(-s) \quad (4.191)$$

où $S_+(s)$ est une matrice carrée $n \times n$ stable (les pôles de $S_+(s)$ sont à partie réelle négative) et à phase minimale:

$$\det S_+(s) \neq 0 \quad \text{pour } \operatorname{Re} s > 0. \quad (4.192)$$

On peut encore écrire (4.191) sous la forme

$$\Phi_+(s) S(s) \Phi_+^*(-s) = I \quad (4.193)$$

où Φ_+ est stable et à phase minimale ($\Phi_+ = S_+^{-1}$).

Dans le cas scalaire ($n = 1$) et rationnel, cette factorisation consiste à calculer les zéros du numérateur et du dénominateur de $S(s)$ et à regrouper dans $S_+(s)$ ceux qui sont à partie réelle négative.

Dans le cas vectoriel ($n > 1$) et rationnel, le problème est bien plus complexe. On va calculer Φ_+ par réductions successives de $S(s)$ jusqu'à une matrice constante Q non négative définie d'après la condition (4.190):

$$S(s) = S(s) \quad (4.194)$$

$$T_1(s) S(s) T_1^*(-s) = S_1(s) \quad (4.195)$$

$$T_m(s) S_{m-1}(s) T_m^*(-s) = Q = LL'. \quad (4.196)$$

Alors

$$S_+(s) = T_1^{-1}(s) \dots T_m^{-1}(s) L \quad (4.197)$$

dans la mesure où chaque facteur élémentaire $T_i(s)$ aura été choisi stable et à phase minimale. On va conduire cette réduction en deux étapes:

- réduction à une matrice polynomiale $S(s)$ à déterminant constant,
- factorisation de la matrice polynomiale $S(s)$ à déterminant constant.

On aura ainsi décrit une méthode de calcul de $S(s)$ tout en démontrant l'existence d'une factorisation forte.

4C1.2 Réduction à une matrice à déterminant constant

On utilise pour cela deux types de facteurs élémentaires:

i) $D_i(\alpha(s))$ définie comme une matrice diagonale dont tous les éléments sont l'unité sauf le i -ième qui est une fonction rationnelle stable à phase minimale $\alpha(s)$. Clairement

$$D_i^{-1}(\alpha(s)) = D_i(\alpha^{-1}(s)). \quad (4.198)$$

ii) $L_j(\alpha_1(s), \dots, \alpha_{j-1}(s), \alpha_{j+1}(s), \dots, \alpha_n(s))$ définie comme la matrice identité augmentée d'une matrice dont tous les éléments sont nuls excepté la j -ième ligne qui est $(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, 0, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n)$, les $\alpha_j(s)$ étant des fonctions rationnelles stables. Clairement

$$L_j^{-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n) = L_j(-\alpha_1, \dots, -\alpha_{j-1}, -\alpha_{j+1}, \dots, -\alpha_n). \quad (4.199)$$

A titre d'illustration, dans le cas $n = 4$ on a

$$D_3(\alpha(s)) = \begin{vmatrix} & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{vmatrix}$$

$$L_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) = \begin{vmatrix} & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Les étapes de la réduction sont les suivantes:

1° Réduction des pôles de $S(s)$

On réduit les pôles $1/(s+a)$ et $1/(-s+a)$ du (i, i) -ième terme de $S(s)$ en utilisant le facteur élémentaire $T_i(s) = D_i(s+a)$. Après réduction de tous les

pôles, on obtient une matrice polynomiale $Sk(s)$ à déterminant en général non constant:

$$\det Sk(s) = \Pi(s+b)(-s+b). \quad (4.200)$$

2° Réduction des zéros de $\det Sk(s)$

Comme $\det Sk(s)$ a pour zéro $-b$, il s'ensuit qu'il existe au moins une ligne P_j de la matrice $Sk(-b)$ qui est combinaison linéaire des autres lignes P_m :

$$P_j + \sum_{m \neq j} \alpha_m P_m = 0. \quad (4.201)$$

En utilisant le facteur élémentaire

$$L_j\left(\frac{\alpha_1}{s+b}, \dots, \frac{\alpha_n}{s+b}\right) D_j\left(\frac{1}{s+b}\right)$$

la matrice résultante Su_1 est toujours polynomiale mais son déterminant n'a plus les zéros $+b$ et $-b$. Après un nombre fini de telles réductions, on obtient une matrice polynomiale $S_1(s)$ à déterminant constant.

4C1.3 Factorisation d'une matrice à déterminant constant

Dans ce cas on utilise des facteurs du type L_j où les fonctions α_i sont des puissances de s ($\alpha_i = s^{k_i}$). La matrice $S_1(s)$ ayant un déterminant constant, cela entraîne que la matrice $S_1(s)|_{s \rightarrow \infty}$ obtenue en ne gardant que le terme de plus haute puissance en s dans chaque élément de la matrice est singulière. Il s'ensuit que p , désignant l'une des lignes de $S_1(s)|_{s \rightarrow \infty}$ contenant la plus haute puissance de s , on peut écrire

$$p_i + \sum_{m \neq i} \alpha_m p_m = 0 \quad (4.202)$$

où les α_m sont des puissances non négatives de s . En utilisant le facteur élémentaire $T_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ on fait donc disparaître ce terme de plus haute puissance. Après un nombre fini de réductions, on obtient une matrice S_m constante et non négative définie d'après l'hypothèse (4.190). Il est donc facile de la factoriser.

4C1.4 Exemple

Considérons

$$S(s) = \begin{vmatrix} \frac{-2s^2+5}{(s+1)(-5+1)(5+2)(-5+2)} & \frac{2s+3}{(5+1)(5+2)(-5+3)} \\ \frac{-2s+3}{(-5+1)(-5+2)(s+3)} & \frac{2}{(-s+3)(5+3)} \end{vmatrix}$$

Première étape: réduction des pôles de $8(s)$

On obtient aisément

$$\begin{aligned} 8_1(s) &= D_1(s+3) D_1(s+1)(s+2) 8(s) D_1(-s+1)(s+2) D_1(-s+3) \\ &= \begin{bmatrix} -2S'+5 & 2S+3 \\ -2s+3 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\det S_1(s) = 1.$$

Deuxième étape: réduction des zéros de $\det S_1(s)$

Cette étape est inutile dans le cas présent ($\det 8_1(s) = 1$).

Troisième étape: factorisation de $8_2(s)$

On a

$$S_2(s)|_{s \sim \infty} = \begin{bmatrix} -2S' & 2s \\ -2s & 2 \end{bmatrix}.$$

Si l'on désigne par P_1 et P_2 la première et la deuxième ligne, on voit que

$$P_1 - sP_2 = 0.$$

On réduit donc avec le facteur élémentaire

$$T_3 = L_1(-s) = \begin{bmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d'où

$$8_2 = T_3(s) 8_1, T_3'(-s) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est enfin factorisée en (remarquer que cette factorisation n'est pas unique) :

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 3/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 3/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Conclusion

Le facteur fort cherché est donc

$$8_+(s) = DI \left(\begin{bmatrix} 1 \\ (s+1)(s+2) \end{bmatrix} \right) D, \begin{bmatrix} 1 \\ s+3 \end{bmatrix} LI(s) \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{(3s+5)/\sqrt{5}}{(s+1)(s+2)} & \frac{s/\sqrt{5}}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{3/\sqrt{5}}{s+3} & \frac{1/\sqrt{5}}{s+3} \end{vmatrix}$$

et l'on vérifie bien que

$$8(s) = S_+(s) S_+'(-s).$$

COMPLÉMENT 2 AU CHAPITRE 4

STABILITÉ DES FILTRES DE KALMAN-BUCY

4C2.1 Problème de stabilité relatif à un filtre de Kalman-Bucy

Ainsi qu'il a été vu un filtre de Kalman-Bucy (régulier) se compose des deux équations différentielles

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = (F - \Sigma H' R^{-1} H) \hat{x} + \Sigma H' R^{-1} I y \quad (4.203)$$

$$\frac{d\Sigma}{dt} = F\Sigma + \Sigma F' - \Sigma H' R^{-1} H \Sigma + Q. \quad (4.204)$$

Un problème fondamental pour toute application pratique est alors celui de la stabilité de ces deux équations. En effet s'il n'y a pas stabilité, il faut s'attendre à de mauvaises performances du filtre caractéristiques d'un problème mal posé ou insoluble de façon satisfaisante, ainsi qu'à des dégradations par rapport aux performances optimales dues aux ennuis numériques associés à des équations différentielles instables.

4C2.2 Stabilité de l'équation en $\hat{x}$

On va démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 4.2

Si $\Sigma(t)$ est positive définie et bornée pour tout t supérieur à t_0 ($\alpha I < \Sigma(t) < \beta I$, α et β étant des constantes positives), la matrice $F_\Sigma(t) = F - \Sigma H' R^{-1} H$ est stable. Si de plus le couple (F, H) est complètement observable, alors $F_\Sigma(t)$ est asymptotiquement stable.

En effet soit la fonction

$$V(x, t) = x' \Sigma^{-1}(t) x. \quad (4.205)$$

C'est une fonction positive (au sens de Lyapunov), car

$$P'II < \Sigma^{-1}(t) < \alpha^{-1} I. \quad (4.206)$$

D'autre part, en évaluant la dérivée de $V(x, t)$ prise le long d'une trajectoire

du système F_Σ , on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x, t) &= x' \left(\frac{d}{dt} \Sigma^{-1} + F_\Sigma' \Sigma^{-1} + \Sigma^{-1} F_\Sigma \right) x \\ &\quad - x' (H' R^{-1} I H + \Sigma^{-1} Q \Sigma^{-1}) x \\ &\leq -x' (H' R^{-1} I H) x. \end{aligned} \quad (4.207)$$

Cette dérivée est donc une fonction non positive, et la première partie du théorème (stabilité) découle du théorème de Lyapunov.

Si de plus (F, H) et par conséquent (F_Σ, H) sont complètement observables, il apparaît que la seule trajectoire du système F_Σ le long de laquelle $(d/dt) V(x, t)$ peut être nulle se réduit à $x = 0$. On en déduit ainsi la stabilité asymptotique.

4C2.3 Stabilité de l'équation de Riccati

Le résultat s'énonce comme suit.

THÉORÈME 4.3

Si F_{Σ_1} et F_{Σ_2} sont stables (resp. asymptotiquement stables), la différence $\Delta = \Sigma_2 - \Sigma_1$ est bornée (resp. tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini).

Il suffit en effet de remarquer qu'avec

$$\dot{\Sigma}_1 = F\Sigma_1 + \Sigma_1 F' - \Sigma_1 H' R^{-1} H \Sigma_1 + Q \quad (4.208)$$

$$\dot{\Sigma}_2 = F\Sigma_2 + \Sigma_2 F' - \Sigma_2 H' R^{-1} H \Sigma_2 + Q, \quad (4.209)$$

on a

$$\dot{\Delta} = F_{\Sigma_1} \Delta + \Delta F_{\Sigma_2}'. \quad (4.210)$$

Ainsi

$$\Delta(t) = \Psi_1(t, t_0) \Delta(t_0) \Psi_2'(t, t_0) \quad (4.211)$$

où Ψ_1 et Ψ_2 sont les matrices de transition de F_{Σ_1} et F_{Σ_2} , d'où le résultat du théorème 4.3.

4C2.4 Conditions de stabilité du filtre

Il ressort des deux résultats précédents que le filtre est stable si la matrice $\Sigma(t)$ reste bornée :

$$\alpha I < \Sigma(t) < \beta I \quad (\alpha, \beta > 0). \quad (4.212)$$

Dans tout cas particulier où l'on peut affirmer a priori que $\Sigma(t)$ reste bornée au sens précédent, on doit s'attendre à un fonctionnement satisfaisant du filtre. Si par contre on prévoit que $\Sigma(t)$ ne reste pas bornée (certaines variables vont être estimées trop bien ou trop mal) il convient d'être très prudent dans la réalisation pratique du filtre et de se livrer à une étude préalable de sensibilité (complément 3) et à une simulation (complément 4) du filtre.

COMPLÉMENT 3 AU CHAPITRE 4

SENSIBILITÉ D'UN FILTRE DE KALMAN-BUCY

4C3.1 Introduction

4C3.1.1 Afin d'étudier la sensibilité d'un filtre de Kalman-Bucy, on est conduit à introduire deux modèles stochastiques.

i) Le modèle vrai ou exact (4.213) à (4.217) représente les grandeurs à estimer et le signal observé y . Ce modèle peut être connu ou non:

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + v \\ y = Hx + w \end{cases} \quad (4.123)$$

$$\quad (4.214)$$

avec

$$E\{x_0 x_0'\} = A_0 \quad (4.215)$$

$$E\{vv'\} = Q\delta \quad (4.216)$$

$$E\{ww'\} = \begin{cases} R\delta & (\text{cas d'observations continues}) \\ R\delta_{ij} & (\text{cas d'observations discrètes}). \end{cases} \quad (4.217)$$

li) Le modèle utilisé (4.218) à (4.222) sert à définir l'algorithme de filtrage du signal. Ce modèle diffère de i) soit par suite de notre ignorance, soit par suite d'une simplification ou d'une modification voulue:

$$\begin{cases} \dot{x}_u : F_u x_u + v_u \\ y_u = H_u x_u + w_u \end{cases} \quad (4.218)$$

$$\quad (4.219)$$

avec

$$E\{x_{0u} x_{0u}'\} = A_{0u} \quad (4.220)$$

$$E\{v_u v_u'\} = Q_u \delta \quad (4.221)$$

$$E\{w_u w_u'\} = \begin{cases} R_u \delta & (\text{cas d'observations continues}) \\ R_u \delta_{ij} & (\text{cas d'observations discrètes}). \end{cases} \quad (4.222)$$

4C3.1.2 Le filtre consiste alors en les algorithmes suivants.

1°) Dans le cas continu, on intègre l'équation différentielle

$$\dot{\hat{x}}_f = F_f \hat{x}_f + K_f [y - H_f \hat{x}_f] \quad (4.223)$$

avec un algorithme ($\mathcal{A}_c$) permettant de générer les matrices F_f , H_f et le gain K_f du filtre.

Par exemple le filtre peut être choisi comme étant adapté de façon optimale au modèle u ; l'algorithme ($\mathcal{A}_c$) est alors

$$\mathcal{A}_c : F_f = F_u P H' = H_u \quad (4.224)$$

$$K_f = \Sigma_u H_u' R_u^{-1} \quad (4.225)$$

avec

$$\begin{cases} \Sigma_u(t_0) = A_{0u} \\ \dot{\Sigma}_u = F_u \Sigma_u + \Sigma_u F_u' - \Sigma_u H_u' R_u^{-1} H_u \Sigma_u + Q_u. \end{cases} \quad (4.226)$$

$$\quad (4.227)$$

2°) Dans le cas discret, on utilise les équations suivantes:

i) entre deux observations

$$\hat{x}_f = F_f \hat{x}_f \quad (4.228)$$

ii) à l'instant d'une observation

$$\hat{x}_{f+} = x_{f-} + K_f [y - H_f x_{f-}] \quad (4.229)$$

avec un algorithme ($\mathcal{A}_d$) permettant de générer F_f , H_f et K_f . Si, par exemple, le filtre est choisi comme le filtre optimal adapté au modèle u , alors l'algorithme ($\mathcal{A}_d$) est défini de la façon suivante

$$\mathcal{A}_d : F_f = F_u, \quad H_f = H_u$$

$$\Sigma_u(t_0) = A_{0u} \quad (4.230)$$

entre deux observations

$$\dot{\Sigma}_u = F_u \Sigma_u + \Sigma_u F_u' + Q_u, \quad (4.231)$$

à l'instant d'une observation

$$\Sigma_{u+} = \Sigma_{u-} - \Sigma_{u-} H' [H \Sigma_{u-} H' + R_u]^{-1} H \Sigma_{u-} \quad (4.232)$$

et

$$K_f = \Sigma_{u-} H' [H \Sigma_{u-} H' + R_u]^{-1}. \quad (4.233)$$

On peut imaginer aussi bien d'autres algorithmes sous-optimaux vis-à-vis du modèle u .

4C3.1.3 Le problème que l'on doit poser est alors de calculer les performances effectives du filtrage effectué. En effet, lorsque les modèles i) et ii) sont identiques et que l'algorithme optimal est utilisé, la matrice de covariance Σ_u caractérise parfaitement les performances du filtre. Par contre, lorsque i) diffère de ii) ou lorsque des algorithmes non optimaux sont utilisés, il convient d'évaluer la

matrice de covariance

$$\Sigma = E\{(x - \hat{x}_f)(x - \hat{x}_f)'\} \quad (4.234)$$

qui caractérise alors l'erreur de filtrage et qui est *différente* de Σ_u .

4C3.2 Méthode générale pour étudier les performances d'un filtre

4C3.2.1 Cas continu

Regroupant les équations (4.213) et (4.223), il vient

$$\mathbf{J}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (4.235)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_f = (\mathbf{F}\mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{J}\mathbf{H}\mathbf{j})\mathbf{x}_f + \mathbf{K}\mathbf{J}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{j}\mathbf{U}' \\ (\mathcal{A}_c) \end{cases} \quad (4.236)$$

qui est un système différentiel stochastique linéaire (voir paragraphe (4.4.2)). La covariance

$$\pi = E\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}' & \hat{\mathbf{x}}_f' \end{bmatrix}\right\} \quad (4.237)$$

est donc obtenue par intégration de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{\pi} = \mathcal{F}\pi + \pi\mathcal{F}' + \mathcal{Q} \\ (\mathcal{A}_c) \end{cases} \quad (4.238)$$

avec

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_f\mathbf{H} & \mathbf{F}_f - \mathbf{K}_f\mathbf{H}_f \end{bmatrix} \quad (4.239)$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_f\mathbf{R}\mathbf{K}_f' \end{bmatrix} \quad (4.240)$$

et la condition initiale

$$n\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.241)$$

La matrice $n(t)$ permet alors de déterminer les variances des erreurs d'estimation. Par exemple si $\hat{x}_f$ est l'estimation de x_1 où

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (4.242)$$

la covariance de l'erreur est

$$\Sigma = E\{[\mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{x}}_f][\mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{x}}_f]'\} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \pi \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (4.243)$$

4C3.2.2 Cas discret

Regroupant les équations (4.213), (4.228) et (4.229), il vient:

- entre deux observations

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{v} \end{cases} \quad (4.244)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_f = \mathbf{F}_f\hat{x}_f \\ (\mathcal{A}_d) \end{cases} \quad (4.245)$$

- à l'instant d'une observation

$$\begin{cases} \mathbf{x}_+ = \mathbf{x}_- \end{cases} \quad (4.246)$$

$$\begin{cases} \hat{x}_{f+} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_f\mathbf{H}_f)\hat{x}_{f-} + \mathbf{K}_f\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{K}_f\mathbf{w} \\ (\mathcal{A}_d). \end{cases} \quad (4.247)$$

La covariance π définie par (4.237) est alors obtenue à partir de la condition initiale

$$n\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.248)$$

par les équations suivantes:

- entre deux observations

$$\begin{cases} \dot{\pi} = \mathcal{F}\pi + \pi\mathcal{F}' + \mathcal{Q} \\ (\mathcal{A}_d) \end{cases} \quad (4.249)$$

avec

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_f \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.250)$$

à l'instant d'une observation

$$\begin{cases} \pi_+ = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_f\mathbf{H} & \mathbf{I} - \mathbf{K}_f\mathbf{H} \end{bmatrix} \pi_- \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{K}_f\mathbf{H} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_f\mathbf{R}\mathbf{K}_f' \end{bmatrix} \\ (\mathcal{A}_d) \end{cases} \quad (4.251)$$

On peut alors déduire de $\pi(t)$ les performances du filtre comme dans le cas continu.

4C3.3 Méthodes simplifiées donnant les performances d'un filtre dans certains cas particuliers

4C3.3.1 Dans certains cas particuliers où (i) l'algorithme ($\mathcal{A}$) est l'algorithme optimal adapté au modèle utilisé, (ii) les modèles vrais et utilisés ne diffèrent que par certains termes, il est possible de calculer la dégradation de performance sans passer par l'intermédiaire de la matrice globale π : on peut économiser ainsi un gros volume de calculs. Dans ce paragraphe, on présente quelques-unes de ces méthodes particulières.

4C3.3.2 Effets d'erreurs dans la covariance initiale et dans la covariance des bruits blancs

Supposons que le modèle utilisé ne diffère du modèle vrai que par les termes suivants:

$$A_{0u} = A_0 + \delta A_0 \quad (4.252)$$

$$Q_u = Q + \delta Q \quad (4.253)$$

$$R'' = R + \delta R. \quad (4.254)$$

i) Cas continu

Dans ce cas le gain du filtre K_f est donné par l'expression

$$K_f = \Sigma_u H' R_u^{-1} \quad (4.255)$$

où $\Sigma_u(t)$ provient de l'intégration de l'équation (4.227) à partir de la condition initiale (4.226), ce que l'on peut écrire aussi sous la forme:

$$\begin{cases} \Sigma_u(t_0) = A_0 \\ \dot{\Sigma}_u = (F - K_f H) \Sigma_u + \Sigma_u (F - K_f H)' + K_f R_u K_f' + Q_u. \end{cases} \quad (4.256)$$

$$\dot{\Sigma}_u = (F - K_f H) \Sigma_u + \Sigma_u (F - K_f H)' + K_f R_u K_f' + Q_u. \quad (4.257)$$

Le filtre consiste alors à intégrer l'équation

$$\dot{\hat{x}}_f = F \hat{x}_f + K_f [y - H \hat{x}_f]. \quad (4.258)$$

L'erreur de filtrage

$$\tilde{x} = x - \hat{x}_f \quad (4.259)$$

vérifie donc

$$\dot{\tilde{x}} = (F - K_f H) \tilde{x} - K_f w + v, \quad (4.260)$$

et la covariance de l'erreur vraie est donnée par

$$\begin{cases} \Sigma(t_0) = A_0 \\ \dot{\Sigma} = (F - K_f H) \Sigma + \Sigma (F - K_f H)' + K_f R K_f' + Q. \end{cases} \quad (4.261)$$

$$\dot{\Sigma} = (F - K_f H) \Sigma + \Sigma (F - K_f H)' + K_f R K_f' + Q. \quad (4.262)$$

On en déduit que la différence

$$\delta \Sigma = \Sigma_u - \Sigma \quad (4.263)$$

vérifie

$$\begin{cases} \delta \Sigma(t_0) = \delta A_0 \\ \dot{\delta \Sigma} = (F - K_f H) \delta \Sigma + \delta \Sigma (F - K_f H)' + K_f \delta R K_f' + \delta Q. \end{cases} \quad (4.264)$$

$$\dot{\delta \Sigma} = (F - K_f H) \delta \Sigma + \delta \Sigma (F - K_f H)' + K_f \delta R K_f' + \delta Q. \quad (4.265)$$

On voit donc que l'équation (4.265) entraîne que

$$\delta A_0 \geq 0, \delta R \geq 0 \text{ et } \delta Q \geq 0 \text{ impliquent } \delta \Sigma(t) \geq 0 \quad \forall t. \quad (4.266)$$

En d'autres termes, si l'on utilise un modèle plus bruité et une covariance initiale plus grande que la réalité, le filtre aura des performances supérieures aux performances prévues ($\Sigma \leq \Sigma_u$).

Les équations (4.257) et (4.265) avec les conditions initiales (4.256) et (4.264) forment un système différentiel complet résolvant le problème sans passer par l'intermédiaire de la matrice π .

ii) Cas discret

On peut voir comme en i) que:

à l'instant d'une observation

$$\Sigma_+ = (I - K_f H) \Sigma_- (I - K_f H)' + K_f R K_f' \quad (4.267)$$

- entre deux observations

$$\dot{\Sigma} = F \Sigma + \Sigma F' + Q. \quad (4.268)$$

Il s'ensuit que l'on obtient $\delta \Sigma(t)$ à partir de la condition initiale

$$\delta \Sigma(t_0) = \delta A_0 \quad (4.269)$$

en utilisant les équations suivantes:

à l'instant d'une observation'

$$\delta \Sigma_+ = (I - K_f H) \delta \Sigma_- (I - K_f H)' + K_f \delta R K_f' \quad (4.270)$$

- entre deux observations

$$\dot{\delta \Sigma} = F \delta \Sigma + \delta \Sigma F' + \delta Q. \quad (4.271)$$

Ces équations jointes à celles donnant Σ_- forment un système complet dispensant d'avoir recours à la matrice π . La même remarque que dans le cas continu s'applique:

$$\delta A_0 \geq 0, \delta R \geq 0 \text{ et } \delta Q \geq 0 \text{ impliquent } \delta \Sigma(t) \geq 0 \quad \forall t. \quad (4.272)$$

4C3.3.3 Effets de termes constants non mécanisés dans l'équation dynamique

Supposons que le modèle exact soit:

$$\dot{x} = Fx + Ga + v \quad (4.273)$$

$$y = Hx + w \quad (4.274)$$

$$E\{vv'\} = Q\delta \quad (4.275)$$

$$E\{ww'\} = \begin{cases} R\delta & (\text{cas d'observations continues}) \\ R\delta_{ij} & (\text{cas d'observations discrètes}) \end{cases} \quad (4.276)$$

$$E\{x_0 x_0'\} = A_0 \quad (4.277)$$

$$E\{aa'\} = A_a \quad (4.278)$$

$$E\{ax_0'\} = E\{av\} = 0 \quad (4.279)$$

où a représente un paramètre aléatoire constant au cours du temps. Le modèle utilisé ne fait pas intervenir le terme Ga mais à part cela est identique au modèle exact. On pose

$$x = x_u + x_a \quad (4.280)$$

où par conséquent

$$\dot{x}_a = Fx_a + G_a \quad (4.281)$$

avec la condition initiale

$$x_a(t_0) = 0. \quad (4.282)$$

Si l'on écrit l'observation y sous la forme

$$y = Hx_u + Hx_a + w, \quad (4.283)$$

on peut considérer que l'estimation $\hat{x}_f$ fournie par le filtre se décompose ainsi:

$$\hat{x}_f = \hat{x}_u + \hat{x}_a \quad (4.284)$$

où $\hat{x}_u$ provient de l'entrée $Hx'' + w$ et $\hat{x}_a$ de l'entrée Hx_a (principe de superposition pour le système linéaire qu'est le filtre). L'erreur d'estimation peut alors s'écrire

$$\tilde{x} = x - \hat{x}_f = \tilde{x}_u + \tilde{x}_a \quad (4.285)$$

avec

$$\tilde{x}_u = x_u - \hat{x}_u \quad (4.286)$$

$$\tilde{x}_a = x_a - \hat{x}_a. \quad (4.287)$$

On va présenter une méthode de calcul de la matrice de sensibilité relative au paramètre a , définie par l'expression

$$S_a(t) = \frac{\partial \tilde{x}_a(t)}{\partial a}. \quad (4.288)$$

i) *Cas discret*

Dans ce cas $\hat{x}(t)$ vérifie à partir d'une condition initiale nulle les équations suivantes;

- entre deux observations

$$\dot{\hat{x}}_a = F\hat{x}_a \quad (4.289)$$

- à l'instant d'une observation

$$\hat{x}_{a+} = \hat{x}_{a-} + KHx_a - KH\hat{x}_{a-}. \quad (4.290)$$

Comparant les équations (4.280), (4.288) et (4.289), on voit que $\tilde{x}_a(t)$ est générée à partir d'une condition initiale nulle par les équations:

- entre deux observations

$$\dot{\tilde{x}}_a = F\tilde{x}_a + G_a \quad (4.291)$$

à l'instant d'une observation

$$\tilde{x}_{a+} = (I - KH)\tilde{x}_{a-}. \quad (4.292)$$

La matrice de sensibilité S_a peut alors être calculée à partir de la condition initiale

$$S_a(t_0) = 0 \quad (4.293)$$

par les équations :

- entre deux observations

$$\dot{S}_a = FS_a + G \quad (4.294)$$

à l'instant d'une observation

$$S_{a+} = (I - KH)S_{a-}. \quad (4.295)$$

ii) *Cas continu*

Dans ce cas il vient aisément:

$$\hat{x}_a(t_0) = 0 \quad (4.296)$$

$$\dot{\hat{x}}_a = (F - KH)\hat{x}_a + KHx_a \quad (4.297)$$

d'où

$$\dot{\tilde{x}}_a = (F - KH)\tilde{x}_a + Ga. \quad (4.298)$$

La matrice de sensibilité vérifie donc

$$\begin{cases} S_a(t_0) = 0 \\ \dot{S}_a = (F - KH)S_a + G. \end{cases} \quad (4.299)$$

$$(4.300)$$

Dans tous les cas, si a est statistiquement indépendant de x_0 , v et w , alors

en utilisant la relation

$$\tilde{x} = \tilde{x}_u + \tilde{x}_a, \quad (4.301)$$

on obtient

$$\Sigma = \Sigma_u + S_a A_a S_a'. \quad (4.302)$$

Donc si l'on néglige le biais constant a dans le modèle utilisé pour réaliser le filtre, les performances seront dégradées par rapport à la covariance de filtre Σ_u de la quantité (non négative) $S_a A_a S_a'$.

4C3.3.4 Effets de termes constants non mécanisés dans le modèle d'observation

Supposon, que

$$y = Hx + Bb + w \quad (4.303)$$

où b représente un paramètre aléatoire constant, alors que l'on utilise le modèle

$$y_u = Hx + w, \quad (4.304)$$

autrement dit

$$y = y_u + Bb. \quad (4.305)$$

Alors on peut écrire

$$\hat{x} = \hat{x}_u + \hat{x}_b \quad (4.306)$$

où $\hat{x}_u$ est la partie de l'estimée provenant de l'excitation $\tilde{y}_u$ et $\hat{x}_b$ provient de l'excitation du filtre par le terme Bb .

i) Dans le cas discret, $\hat{x}_b$ est généré à partir d'une condition initiale nulle par l'équation

- entre les observations

$$\hat{x}_b = F\hat{x}_b \quad (4.307)$$

- à l'instant d'une observation

$$\hat{x}_{b+} = \hat{x}_{b-} - KH\hat{x}_{b-} + KBb. \quad (4.308)$$

ii) Dans le cas continu, $\hat{x}_b$ est généré par l'équation

$$\dot{\hat{x}}_b = (F - KH)\hat{x}_b + KBb. \quad (4.309)$$

L'erreur d'estimation est

$$\tilde{x} = \tilde{x}_u - \hat{x}_b \quad (4.310)$$

et la matrice de sensibilité

$$S_b = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial b} \quad (4.311)$$

est donc obtenue à partir de la condition initiale

$$S_b(t_0) = 0 \quad (4.312)$$

par intégration des équations suivantes

i) dans le cas discret

— entre deux observations

$$\dot{S}_b = FS_b \quad (4.313)$$

à l'instant d'une observation

$$S_{b+} = (I - KH)S_{b-} - KB \quad (4.314)$$

ii) dans le cas continu

$$\dot{S}_b = (F - KH)S_b - KB. \quad (4.315)$$

Dans tous les cas on a

$$\Sigma = \Sigma_u + S_b A_b S_b'. \quad (4.316)$$

Ici encore, négliger le biais b dans le modèle des observations conduit à des performances dégradées par rapport à la covariance du filtre Σ_u .

4C3.4 Technique de l'epsilon

Afin de rendre le filtre moins sensible aux variations du modèle, on peut utiliser l'algorithme présenté dans ce paragraphe et connu sous le nom de *technique de l'epsilon*. L'idée conduisant à cet algorithme est la suivante:

— si l'on a une confiance totale dans le modèle statistique utilisé, on calcule l'estimée optimale (4.119)

$$\hat{x}_+ = \hat{x}_- + \Sigma_- H' (H \Sigma_- H' + R)^{-1} (y - H \hat{x}_-), \quad (4.317)$$

— par contre, si l'on a une méfiance totale envers le modèle, on est conduit à n'utiliser que l'observation présente y pour estimer x , ce qui donne l'estimée

$$\hat{x}_* = \hat{x}_- + XH' (HXH')^{-1} (y - HL) \quad (4.318)$$

où X est une matrice diagonale de cadrage, le i -ième terme diagonal de X fournissant l'ordre de grandeur de la variable x_i élevée au carré.

En pratique on a un degré de confiance $1 - \varepsilon$ envers le modèle ce qui conduit à utiliser l'estimée

$$\hat{x}_+ = \hat{x}_- + K(y - H \hat{x}_-) \quad (4.319)$$

avec

$$K = (1 - \varepsilon) \Sigma_- H' (H \Sigma_- H' + R)^{-1} + \varepsilon XH' (HXH')^{-1}. \quad (4.320)$$

La formule de mise à jour correspondante de la covariance est alors

$$\Sigma_+ = (J - KH)I_- (I - KH)' + KRK'. \quad (4.321)$$

Dans le cas d'observations scalaires, on peut donner une autre forme à ces formules récursives. Posant

$$\Sigma_- H' = p \quad (\text{vecteur de dimension } n) \quad (4.322)$$

$$XH' = q \quad (\text{vecteur de dimension } n) \quad (4.323)$$

$$H\Sigma_- H' + R = P \quad (\text{scalaire}) \quad (4.324)$$

$$H X H' = \mu \quad (\text{scalaire}), \quad (4.325)$$

il vient

$$\hat{x}_+ = \hat{x}_- + (\mu^{-1} q + \varepsilon(p^{-1} p - \mu^{-1} q)) (y - H\hat{x}_-) \quad (4.326)$$

$$\Sigma_+ = \Sigma_- [p - l p] (p - l p l' - \varepsilon^2 (\mu^{-1} q - p - l p l')). \quad (4.327)$$

On peut remarquer que pour ε nul on retrouve bien la forme optimale des formules de filtrage.

COMPLÉMENT 4 AU CHAPITRE 4

SIMULATION NUMÉRIQUE D'UN FILTRE RÉCURSIF

4C4.I Discrétisation d'une équation différentielle stochastique

Soit l'équation différentielle stochastique linéaire

$$\dot{x} = F(t)x + v(t) \quad (4.328)$$

$$E\{v(t)v'(r)\} = Q(t)\delta(t-r) \quad (4.329)$$

$$E\{x(t_0)x'(t_0)\} = A_0. \quad (4.330)$$

On cherche à approcher cette équation différentielle par le modèle discret

$$x(t_i + \Delta t) = F_d(t_i)x(t_i) + v_d(t_i) \quad (4.331)$$

$$E\{v_d(t_i)v_d'(t_j)\} = Q_d(t_i)\delta_{ij} \quad (4.332)$$

$$E\{x(t_0)x'(t_0)\} = A_0. \quad (4.333)$$

Il découle aisément de l'équation (4.68) que l'on doit poser

$$\begin{aligned} F_d(t_i) &= \Phi(t_{i+1}, t_i) \\ &= I + F(t_i)\Delta t + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (4.334)$$

$$v_d(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \alpha) v(\alpha) d\alpha \quad (4.335)$$

$$\begin{aligned} Q_d(t_i) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \alpha) Q(\alpha) \Phi'(t_{i+1}, \alpha) d\alpha \\ &= Q(t_i)\Delta t + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (4.336)$$

avec

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i. \quad (4.337)$$

Ces relations permettent de simuler une équation différentielle sur ordinateur. A l'aide d'un générateur de bruit blanc, on génère un bruit blanc discret $V_d(t_i)$ de covariance $Q(t_i)\Delta t\delta_{ij}$. L'équation aux différences (4.331) donne alors un échantillon de la fonction aléatoire $X_d(t_i)$ qui approxime la fonction aléatoire $x(t)$ aux points t_i .

On retiendra de ce paragraphe que pour simuler l'équation différentielle stochastique (4.328) par une méthode numérique à un pas, il convient d'utiliser un bruit blanc discret de covariance $Q(t)\Delta t$.

4C4.2 Filtre discret et filtre continu équivalents

L'équation donnant la covariance d'erreur d'un filtre récursif continu est

$$\dot{\Sigma} = F\Sigma + \Sigma F' - \Sigma H' R^{-1} H \Sigma + Q. \quad (4.338)$$

Dans le cas d'un filtre discret, la covariance est obtenue à l'aide des relations:

- entre deux observations

$$\dot{\Sigma} = F\Sigma + \Sigma F' + Q \quad (4.339)$$

à l'instant d'une observation

$$\Sigma_+ = \Sigma_- - \Sigma_- H' (R_d + H \Sigma_- H')^{-1} H \Sigma_-. \quad (4.340)$$

Suivant les cas, on peut désirer pour une simulation intégrer une forme ou l'autre des équations. On voit que les deux formes génèrent la même covariance (au premier ordre) si la relation suivante est vérifiée

$$R_d(t_i) = \frac{R(t_i)}{\Delta t}. \quad (4.341)$$

En effet, on tire aisément des relations (4.339) à (4.341)

$$\frac{\Sigma(t_{i+1}) - \Sigma(t_i)}{\Delta t} = F\Sigma_- + \Sigma_- F' - \Sigma_- H' R^{-1} H \Sigma_- + Q + O(\Delta t). \quad (4.342)$$

On retiendra donc que si l'on remplace un filtre discret par un filtre continu ou inversement lors de la simulation, il faut utiliser la relation (4.341).

COMPOSANTS

CHAPITRE 5

GYROSCOPES

C. MESSAN

5.1 Principes, équations et fonction de transfert des gyroscopes

On a déjà vu au paragraphe 1.3.2 l'intérêt d'utiliser un corps en rotation rapide autour d'un axe de révolution comme référence d'attitude: l'axe de rotation reste fixe par rapport à l'espace inertiel tout en étant relativement insensible aux couples perturbateurs. On va voir plus en détail dans ce chapitre les aspects théoriques et technologiques du capteur ainsi réalisé appelé *gyroscope*.

5.1.1 COUPLE GYROSCOPIQUE

On considère donc un corps de révolution appelé *toupie* (rotor d'un moteur électrique) maintenu en rotation rapide et constante $\vec{\Omega}$ par rapport à un boîtier (contenant le stator du moteur); cet ensemble sera appelé par la suite *élément sensible* [sJ].

Désignant par $\vec{\omega}$ la rotation par rapport à l'espace inertiel de cet élément sensible, le moment cinétique total peut s'écrire sous la forme

$$\vec{I}\vec{\omega} + I_R \vec{\Omega} \quad (5.1)$$

où I_R désigne le moment d'inertie de la toupie autour de son axe de rotation, et $\vec{I}$ le tenseur d'inertie de l'ensemble boîtier et toupie solidifiés. L'équation d'Euler du mouvement de l'élément sensible est alors

$$\frac{d}{dt}(\vec{I}\vec{\omega} + I_R \vec{\Omega})_i = \vec{M}_i, \quad (5.2)$$

$\vec{M}$ désignant la résultante des couples extérieurs appliqués. Compte tenu de l'hypothèse que la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ est maintenue constante, on a

$$\frac{d}{dt}(I_R \vec{\Omega}) = \vec{\omega} \times I_R \vec{\Omega}, \quad (5.3)$$

et l'équation (5.2) prend la forme

$$\frac{d}{dt}(\vec{I}\vec{\omega})_i = \vec{M}_i - \vec{\omega} \times I_R \vec{\Omega}. \quad (5.4)$$

Tout se passe donc comme si

- le rotor et le boîtier pouvaient être considérés comme solidifiés,
- le couple supplémentaire $-\vec{\omega} \times I R \vec{\Omega}$ appelé *couple gyroscopique* était appliqué à l'élément sensible.

Cette interprétation de l'équation d'Euler est très utile pour saisir de façon intuitive les phénomènes gyroscopiques: toute vitesse angulaire $\vec{\omega}$ produit un couple gyroscopique qui entraîne un mouvement conforme alors à notre expérience du mouvement des corps solides.

5.1.2 ÉQUATIONS DU GYROSCOPE, PRECESSION ET NUTATION

Supposons à présent que l'élément sensible [s] soit suspendu par l'intermédiaire d'un cadre (voir figure 5-1), l'orientation de l'axe de toupie z_s étant définie par les angles α et β . L'élément sensible est supposé de plus avoir comme axes principaux d'inertie les axes x_s, y_s et z_s ; son tenseur d'inertie est donc dans ces axes

$$\begin{bmatrix} A_s & 0 & 0 \\ 0 & B_s & 0 \\ 0 & 0 & C_s \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

On suppose aussi que le cadre a ses axes principaux d'inertie confondus avec x_c, y_c et z_c . Son tenseur d'inertie dans ces axes est donc

$$I_c \begin{bmatrix} A_c & 0 & 0 \\ 0 & B_c & 0 \\ 0 & 0 & C_c \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Si j'on définit alors le moment cinétique de la toupie comme étant

$$H = I R Q \quad (5.7)$$

on peut écrire l'équation d'Euler correspondant au mouvement de j'ensemble, projetée sur les axes x_s et y_s

$$A_s [\ddot{\alpha} \cos \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta] + A_c \ddot{\alpha} \cos \beta + H \dot{\beta} = M, \quad (5.8)$$

$$B_s \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} \cos \beta = M, \quad (5.9)$$

où M_I et M_Z sont les composantes sur x_s et y_s du couple extérieur total M appliqué à l'élément sensible et au cadre.

On voit que pour un couple appliqué

$$M_1 = 0 \quad (5.10)$$

$$M_2 = M = \text{constante}, \quad (5.11)$$

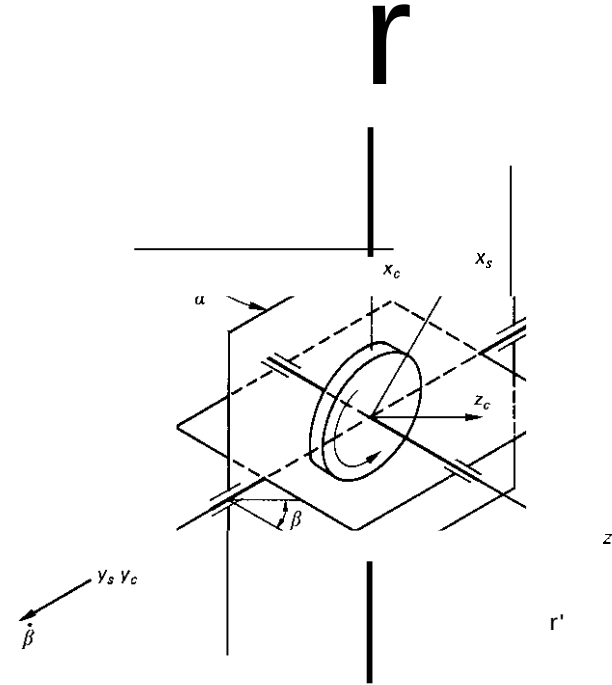


Figure 5.1. Gyroscope.

le mouvement caractérisé par

$$f_3 = 0 \quad (5.12)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{M}{H} \quad (5.13)$$

est solution des équations (5.8) et (5.9). Ce mouvement qui est donc une rotation à vitesse constante autour de l'axe x_c porte le nom de *précession* du gyroscope. L'effet «intégrateur» du gyroscope apparaît ici clairement: un couple constant conduit à une vitesse de rotation constante, et non comme on aurait pu s'y attendre de prime abord à une accélération angulaire constante.

Si à présent on linéarise les équations (5.8) et (5.9) sous l'hypothèse de faibles mouvements par rapport au mouvement nominal de précession précédent, on obtient

$$A \ddot{\alpha} + H \dot{\beta} = M, \quad (5.14)$$

$$\{-H \dot{\alpha} + B \ddot{\beta} = M, \quad (5.15)$$

où l'on a posé

$$A = A_c + A_s. \quad (5.16)$$

L'équation caractéristique de ce système de deux équations différentielles linéaires à coefficients constants est

$$\Delta(s) = s^2(ABs^2 + H^2) = 0. \quad (5.17)$$

Il Ya donc outre l'effet intégrateur précédent (racines $s = 0$) des termes périodiques qui peuvent apparaître dans le mouvement du gyroscope, la pulsation correspondante étant

$$\omega_n = \frac{H}{\sqrt{AB}}. \quad (5.18)$$

Ces mouvements périodiques portent le nom de *nutation* du gyroscope. Prenant d'ailleurs les transformées de Laplace des équations (5.14) et (5.15), on trouve aisément les solutions

$$\alpha(s) = \frac{Mj(s)}{A(s' + \omega_n^2)} - \frac{HM_1(s)}{ABs(s^2 + \omega_n^2)} \quad (5.19)$$

$$\beta(s) = \frac{HMj(s)}{ABs(s^2 + \omega_n^2)} - \frac{M_1(s)}{B(s^2 + \omega_n^2)} \quad (5.20)$$

qui permettent d'analyser les mouvements pour divers couples appliqués M_1 et M_2 .

5.1.3 GYROSCOPE À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ

5.1.3.1 Gyroscope intégrateur

Un gyroscope intégrateur à un degré de liberté se compose d'un élément sensible mobile autour d'un seul axe appelé axe de sortie; il est muni d'un détecteur angulaire (β) et d'un moteur couple (M) générateur d'un couple de commande M (figure 5-2). Le liquide de flottaison situé entre le flotteur (élément sensible) et le carter réalise un amortissement visqueux du mouvement du flotteur. Le couple d'amortissement correspondant a pour valeur $-b\dot{\beta}$. La densité du liquide de flottaison est choisie de façon à équilibrer le poids du flotteur, ceci afin de diminuer au maximum les couples de frottement au niveau des paliers de suspension de ce flotteur.

L'équation dynamique est (voir équation 5.15)

$$B\ddot{\beta} + b\dot{\beta} - H\dot{\alpha} = M. \quad (5.21)$$

Prenant les transformées de Laplace des deux membres de cette équation, il vient:

$$(Bs^2 + bs) \beta(s) = Hs \alpha(s) + M(s) \quad (5.22)$$

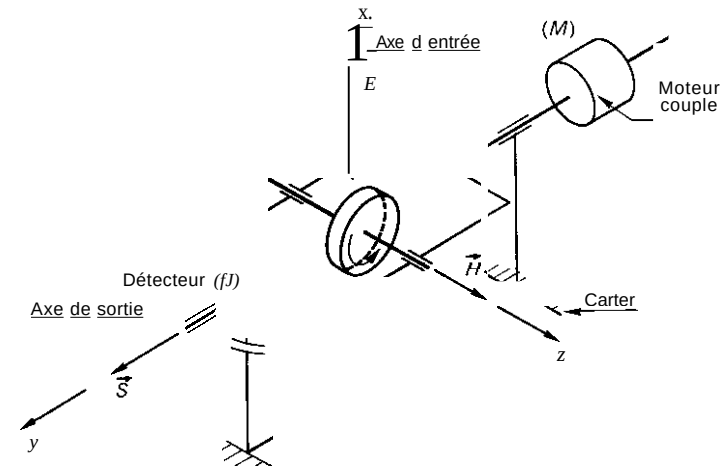


Figure 5-2. Gyroscope intégrateur à un degré de liberté.

d'où

$$\beta(s) = \frac{G}{1 + Ts} \alpha(s) + \frac{M(s)Jb}{s(1 + Ts)} \quad (5.23)$$

où $G = \frac{H}{b}$ est le *gain mécanique* du gyro,

$T = \frac{B}{b}$ est la *constante de temps* du gyro.

Le tableau 5-1 donne un ensemble de valeurs typiques pour un gyro intégrateur à un degré de liberté.

TABLEAU 5-1

Paramètres typiques d'un gyro intégrateur à un degré de liberté

$$\begin{aligned} IR &= 125 \text{ c.G.S.} \\ \Omega &= 24000 \text{ tr/mn} \\ H &= IRQ \approx 3.10' \text{ C.G.S.} \\ B &= 125 \text{ c.G.S.} \\ G &= \frac{H}{b} = 5 \\ T &= \frac{B}{b} = 2ms \end{aligned}$$

En l'absence de couple de commande $M(s) = 0$ le gyroscope à un degré de liberté transforme donc la rotation inertielle α autour de l'axe d'entrée $\vec{E}$ en la rotation $\{J\}$ de l'élément sensible autour de l'axe de sortie $\vec{S}$ avec un retard dû à la constante de temps T (voir la figure S-3 où l'on a représenté la réponse $\{J(t)\}$ à un échelon angulaire α_0 sur l'axe d'entrée).

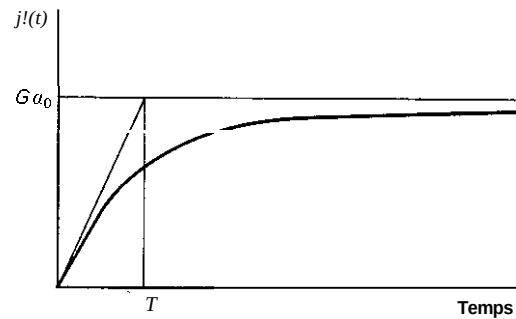


Figure 5-3. Réponse d'un gyra intégrateur à un échelon angulaire.

Une image assez répandue consiste à dire qu'un gyroscope à un degré de liberté est un «engrenage inertiel de gain G », idée schématisée sur la figure S-4, approximation valable à la constante de temps T près.

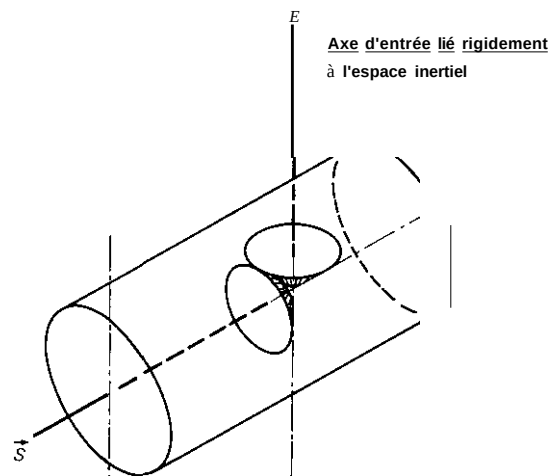


Figure 5-4. Gyroscope interprété comme « engrenage inertiel ».

S.1.3.2 Gyromètre

Un gyromètre est un appareil destiné à mesurer les vitesses angulaires autour de son axe d'entrée.

Il comporte, comme un gyro intégrateur, un élément sensible mobile autour d'un axe de sortie, avec en plus un dispositif générant un couple de rappel proportionnel à l'écart angulaire:

$$M = -k\beta. \quad (S.24)$$

Sa fonction de transfert est donc (voir équation S.21)

$$\{J(s) = \frac{H}{Bs^2 + bs + k} \dot{\alpha}(s). \quad (S.25)$$

L'appareil peut donc servir à mesurer la vitesse de rotation $\dot{\alpha}$, la réponse étant caractérisée par la fonction de transfert (S.25).

5.1.4 GYROSCOPE À DEUX DEGRÉS DE LIBERTÉ

Comme dans un gyroscope à un degré de liberté, l'élément sensible contient un rotor qui tourne à vitesse constante Ω autour de son axe de révolution.

Dans ce cas, cependant l'élément sensible a deux degrés de liberté par rapport au carter du gyroscope: ceci est réalisé par l'intermédiaire d'un cadre (figure

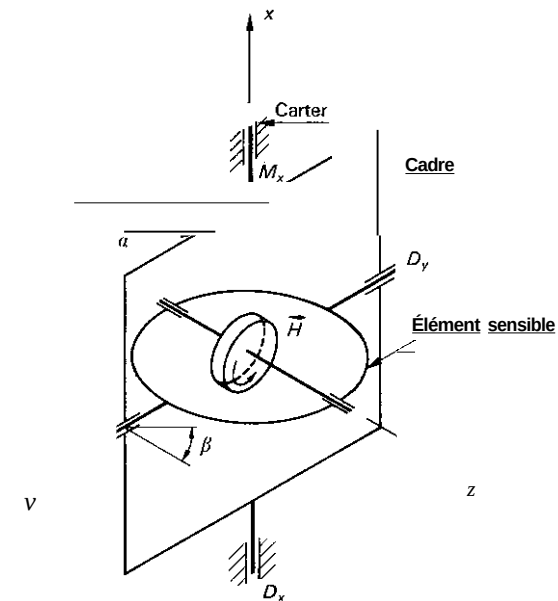


Figure 5-5. Gyroscope à deux degrés de liberté.

S-S). La position de $\vec{H}$ par rapport au carter est définie par les deux angles α et β qui sont mesurés respectivement par les détecteurs angulaires D_x et D_y . Deux moteurs couples M_x et M_y permettent d'autre part d'exercer un couple de précession sur l'élément sensible.

On peut considérer deux fonctions essentielles pour un gyro à deux degrés de liberté.

i) *Fonction de détection de mouvement angulaire sur x et y*

Une rotation du carter d'axe quelconque a des composantes sur les axes x , y et z . Le mouvement autour de l'axe x est détecté par le détecteur d'angle D_x . Le mouvement autour de l'axe y est détecté par le détecteur d'angle D_y . Enfin le mouvement autour de l'axe z ($\vec{H}$) n'est pas détecté. Cette fonction vient de l'immobilité par rapport à l'espace inertiel du vecteur $\vec{H}$ en l'absence de couple.

ii) *Fonction de précession*

Un couple M_x appliqué par l'intermédiaire du moteur couple d'axe x sur le cadre crée une vitesse de précession ω_y autour de l'axe y telle que le couple gyroscopique ainsi créé s'oppose au couple appliqué (voir équation (S.14)) :

$$M_x = H\omega_y. \quad (S.26)$$

De même un couple M_y appliqué par l'intermédiaire du moteur couple d'axe y sur l'élément sensible crée une vitesse de précession ω_x autour de l'axe x telle que le couple gyroscopique correspondant s'oppose au couple appliqué (voir équation (S.15)) :

$$M_y = -H\omega_x. \quad (S.27)$$

Il s'ensuit que l'on peut donner au vecteur $\vec{H}$ une rotation instantanée $\vec{\omega}$ arbitraire par commande simultanée des deux moteurs couples M_x et M_y .

Dans le type usuel de gyroscope à deux degrés de liberté les angles de liberté autour des axes x et y sont très réduits (ordre du degré); de plus les trois axes $\vec{H}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ sont trirectangulaires et doivent le demeurer quels que soient les couples appliqués. Il est donc nécessaire de lier le mouvement du carter à celui du vecteur $\vec{H}$ par un asservissement de position. Ceci est réalisé en montant le gyroscope sur une plate-forme asservie ainsi que cela sera exposé au chapitre 7.

5.2 Paliers de toupie et suspension de l'élément sensible

5.2.1 PALIERS DE TOUPIE

On distingue généralement deux types de paliers supportant la toupie : les paliers hydrodynamiques et les paliers à roulement à billes.

i) *Paliers hydrodynamiques*

Le mouvement de rotation du rotor de toupie est assuré par un moteur électrique synchrone triphasé. La liaison sans contact solide entre le rotor et le

stator est réalisée dans ce cas par un film à couche gazeuse. On distingue les paliers de forme cylindrique (figure S-6), sphérique (figure S-7) et aussi les paliers coniques. Les trois solutions sont utilisées par les différents constructeurs.

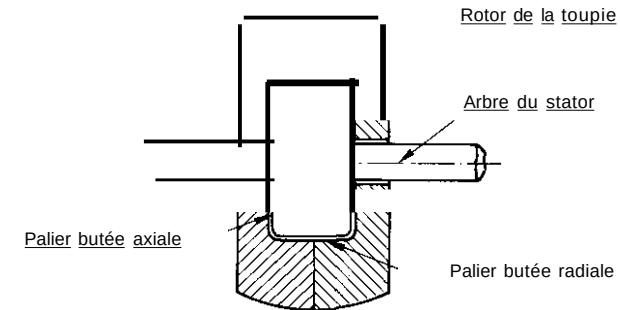


Figure 5-6. Palier cylindrique.

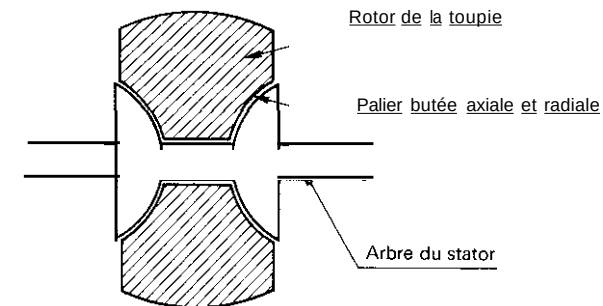


Figure 5-7. Palier sphérique.

A l'arrêt le rotor repose sur le stator. Au démarrage, sous l'action du couple moteur le rotor se met en rotation. Il entraîne par viscosité des molécules gazeuses dans les rainures aménagées sur le stator. Dès que le rotor a atteint une vitesse angulaire de quelques tours par seconde, il décolle sous l'effet de la pression hydrodynamique et atteint un régime dynamique stable.

L'ordre de grandeur du jeu entre stator et rotor nécessaire pour assurer la suspension est de quelques microns. Les raideurs axiales et radiales doivent être identiques et suffisamment élevées pour que les fréquences propres d'oscillations de toupies soient égales ou supérieures à 2000 Hz.

ii) Paliers à roulements à billes

Ce dispositif adopté depuis de nombreuses années s'est sans cesse amélioré. Il met en œuvre un système de billes roulant entre deux cages lubrifiées. Les principaux facteurs dont dépend la qualité d'un tel palier sont :

- la vitesse de rotation,
- le moment cinétique de la toupie, l'équilibrage dynamique,
- la précontrainte des roulements,
- la température de fonctionnement,
- les erreurs de formes du chemin de roulement et des billes,
- la qualité du lubrifiant.

Lorsque l'ensemble de ces facteurs est optimisé, on peut atteindre des durées de fonctionnement sans détérioration supérieures à 10000 heures.

5.2.2 PRINCIPES DE SUSPENSION DE L'ÉLÉMENT SENSIBLE

On rappelle que l'élément sensible est l'ensemble constitué de la toupie en rotation et de l'enveloppe métallique indéformable la contenant. L'élément sensible comprend un axe de symétrie appelé axe de sortie $\vec{S}$, et dans un plan normal, l'axe d'entrée $\vec{E}$ et l'axe du moment cinétique $\vec{I}$ (voir figure 5-2). Ces trois axes réalisent un trièdre trirectangle. Le couple gyroscopique s'exerce entre l'élément sensible et le boîtier autour de l'axe de sortie ou axe de précession.

La liaison entre l'élément sensible et le carter extérieur est réalisée par un palier permettant la rotation. Les principales réalisations technologiques sont exposées ci-après.

i) Liaison par pivot sur pierre

Elle est réalisée par des pivots en acier extra dur à faible coefficient de frottement supportés par des pierres — rubis ou saphirs —. Le jeu mécanique entre pivot et pierre est de quelques microns.

Les frottements entre pierre et pivot entraînent un couple autour de l'axe de sortie se traduisant finalement par une dérive. Le centrage magnétique exposé ci-après se propose d'annuler ces frottements.

ii) Liaison par centrage magnétique

Examinons d'abord le fonctionnement d'un circuit magnétique constitué par deux armatures bobinées et une pièce en matériau magnétique dans l'entrefer (figure 5-8). La pièce mobile est soumise à des forces créées par le champ magnétique des bobines, et la résultante des forces est telle que cette pièce mobile ne peut être en équilibre stable qu'au contact de l'une ou de l'autre armature en passant par une position d'équilibre instable intermédiaire.

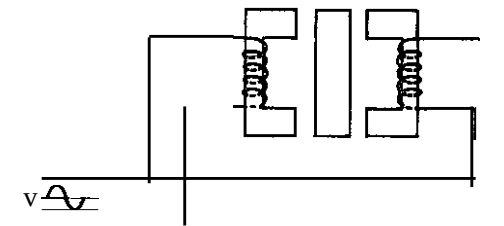


Figure 5-8. Circuit magnétique à position d'équilibre instable.

Pour que la pièce mobile ait une position intermédiaire stable, il faut que les forces magnétiques varient de façon telle qu'une diminution d'entrefer entraîne une diminution de la force d'attraction. Il est donc nécessaire de réaliser un asservissement de position. Deux procédés peuvent être utilisés :

- le centrage magnétique actif dans lequel l'asservissement est réalisé à partir d'une détection de position par action sur les tensions d'excitation de bobines, de manière à créer des forces de rappel;
- le centrage magnétique passif dans lequel l'asservissement de position est réalisé en utilisant les propriétés d'un circuit résonnant série ainsi qu'il est exposé ci-après.

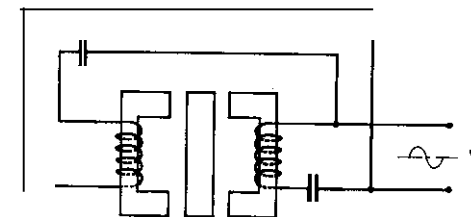


Figure 5-9. Centrage magnétique à résonance.

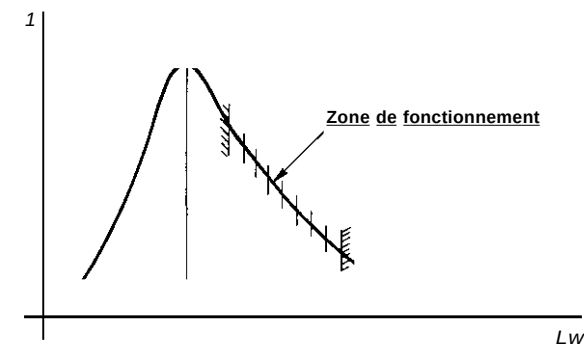


Figure 5-10. Zone de fonctionnement.

Le schéma en est représenté sur la figure 5-9. Le circuit est tel que s'il est alimenté sous une tension alternative V , le courant I circulant dans les bobines correspond à la caractéristique de la figure 5-10.

Dans la zone de fonctionnement une augmentation de self entraîne une diminution de courant: la force d'attraction de la pièce mobile proportionnelle au courant diminue donc lorsque la pièce mobile s'approche d'une des armatures. Il s'établit donc une position d'équilibre stable.

Afin d'obtenir un centrage omnidirectionnel, les deux éléments de centrage sont composés d'un rotor et d'un stator coniques. Le rotor est constitué par un bloc de ferrite et le stator d'un circuit magnétique en anhyster.

Autour de la position d'équilibre stable, il existe un domaine étroit de stabilité en dehors duquel le rotor va en butée sur le stator. Il est donc nécessaire de prévoir des butées mécaniques pour interdire cette zone instable au rotor lorsque le dispositif est mis sous tension.

Dynamiquement le dispositif se comporte comme un système amorti par la présence du liquide de flottaison, mais il existe également un niveau d'excitation au-delà duquel apparaissent des vibrations entretenues qui risquent d'endommager l'appareil.

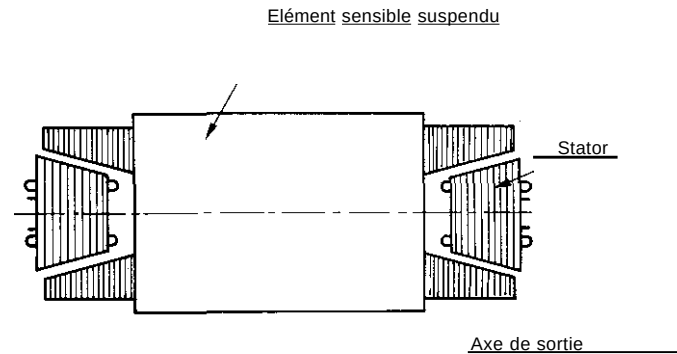


Figure 5-11. Schéma technique.

Les caractéristiques de fonctionnement d'un exemple de réalisation (voir figure 5-11) sont les suivantes:

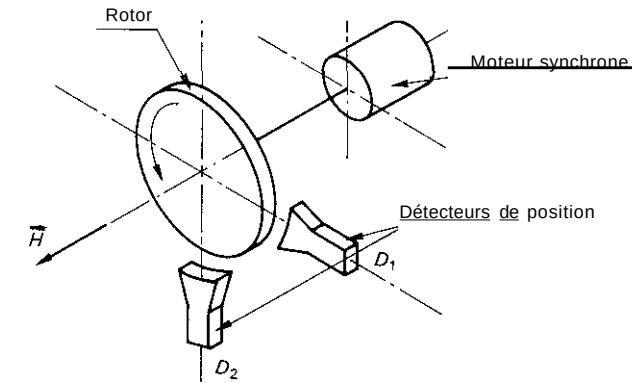
tension d'alimentation	10 volts
fréquence d'alimentation	1 kHz à 5 kHz
entrefer	0,1 mm
raideur de l'asservissement	10000 dyn/ μ m.

iii) *Suspension mécanique de l'élément sensible réduit au rotor de la toupie*

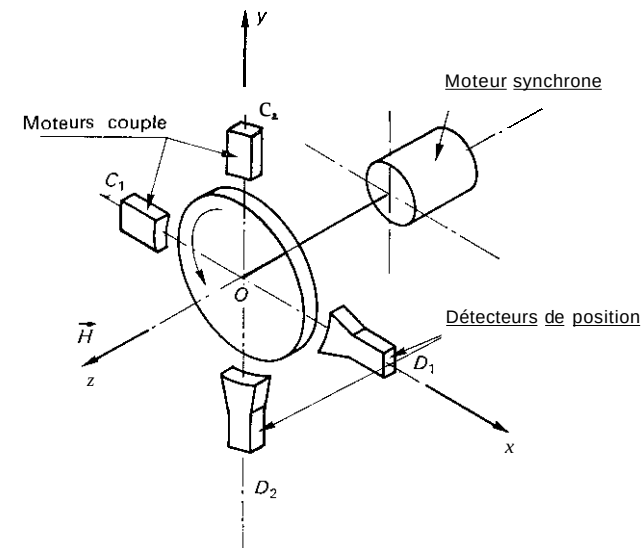
On a vu précédemment que dans un gyroscope à un degré de liberté la toupie

était montée dans un cylindre fermé mobile autour de l'axe de sortie: le moteur d'entraînement du rotor fait ainsi partie de l'élément sensible.

On peut imaginer un tout autre dispositif où le moteur d'entraînement est lié au boîtier: le rotor est alors entraîné par un arbre présentant une souplesse parfaite suivant tout axe perpendiculaire (figure 5-12 a). L'élément sensible



(a)



(h)

Figure 5-12. Gyroscope à suspension mécanique parfaite.

est réduit dans ce cas au rotor seul. Ce dispositif réalise ainsi un gyroscope à deux degrés de liberté. Le déplacement relatif du rotor par rapport au carter est détecté suivant deux directions orthogonales par des détecteurs de position D_1 et D_2 (figure 5-12 a).

De plus si l'on dispose deux moteurs couples dans le plan nominal du rotor en face des détecteurs, on peut soumettre le rotor à des couples de précession autour des axes Ox et Oy (figure 5-12 b).

La difficulté réside bien sûr dans la réalisation du joint mécanique entre le rotor de toupie et le rotor du moteur synchrone. Celui-ci peut être réalisé de deux façons:

- par une charnière aussi parfaite que possible,
- par un dispositif dynamiquement accordé constitué par un cadre intermédiaire et deux barres de torsion. A condition de réaliser « l'accord » dynamique du dispositif en satisfaisant la relation qui lie les raideurs des barres de torsion k , les moments d'inertie du cadre (a , a , c) et la vitesse angulaire de rotation Q du rotor

$$k = (a - c/2)Q^2, \quad (5.28)$$

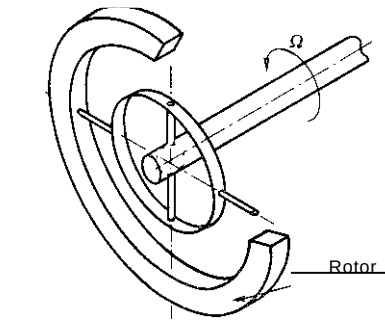


Figure 5-13. Suspension par accord dynamique

la raideur du joint est nulle autour des axes normaux à l'axe de rotation du moteur (voir figure 5-13).

Les avantages de cette conception résident dans le faible nombre de pièces constituant le gyroscope, dans l'absence de liquide de flottaison entraînant une large gamme de température de fonctionnement.

5.3 Étude détaillée d'un gyroscope flottant à nn degré de liberté

On va décrire en détail dans ce paragraphe un gyro flottant à un degré de liberté (gyro SAGEM 16000 D-figure 5-14) en étudiant ses divers sous-ensembles (voir figure 5-15).

La toupie (figure 5-16).

La toupie est constituée par un moteur à hystérésis, synchrone, triphasé, entraînant un volant d'inertie extérieur au moteur.

Les paliers sont constitués par deux roulements à billes de haute précision à contact oblique montés en opposition et sous une précontrainte ajustée pour obtenir des raideurs axiales et radiales identiques (condition à réaliser pour éviter des dérives d'aniso-élasticité).



Figure 5-14. Gyro SAGEM 16000 D.

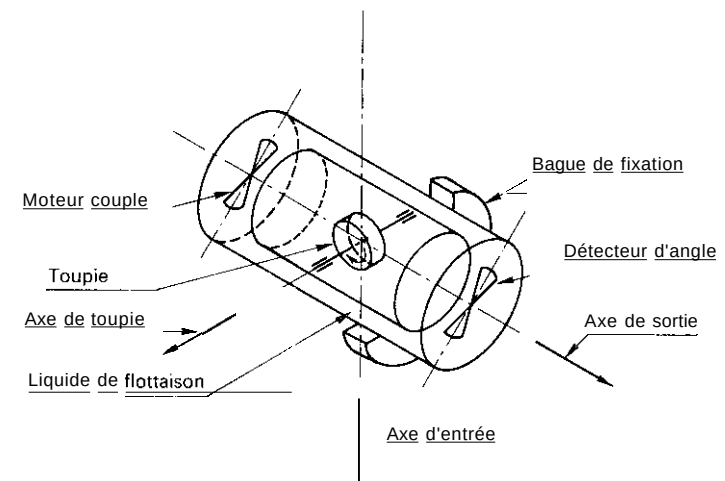


Figure 5-15. Schéma du gyroscope.

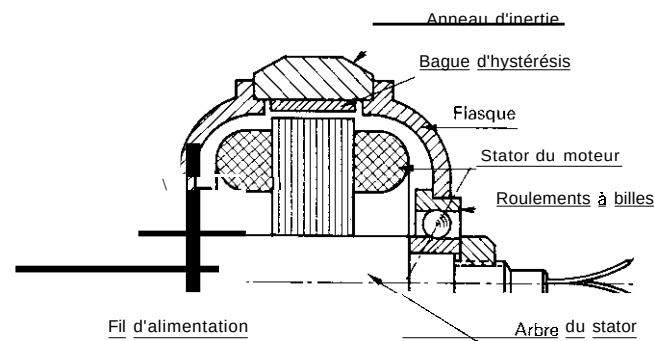


Figure 5-16. Toupie.

Le flotteur (figures 5-17 à 5-23)

Le flotteur est composé de deux corps cylindriques creux assemblés par le plan médian, contenant l'axe de rotation de la toupie. A chaque extrémité du flotteur est monté un pivot en acier extra dur de faible diamètre. Deux bagues situées aux deux extrémités permettent un réglage de l'équilibrage du flotteur. Le flotteur est rempli d'hélium sous pression réduite. Ce gaz permet un meilleur échange thermique que l'air, et présente également un couple hydrodynamique plus faible.

Le flotteur porte à une extrémité le dispositif de détection d'angle et à l'autre extrémité le moteur couple.

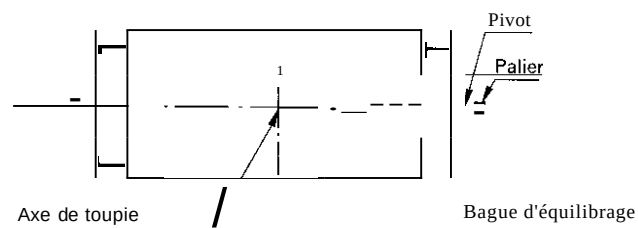


Figure 5-17. Flotteur.

Le détecteur

Le détecteur est formé par un transformateur différentiel constitué de deux bobines d'excitation série créant des champs égaux et opposés traversant la bobine de détection; la tension induite est donc proportionnelle au déplacement et la phase est caractéristique du sens de rotation.

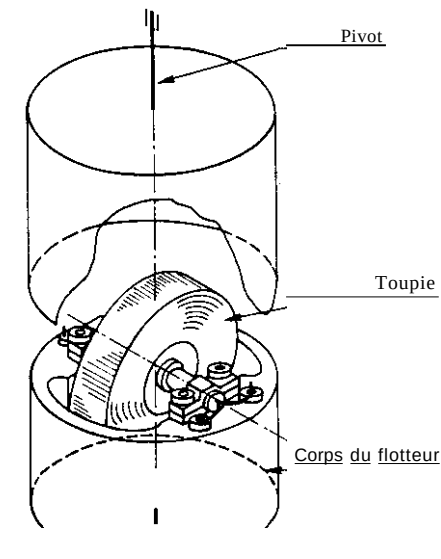


Figure 5-18. Vue de la toupie en flotteur.

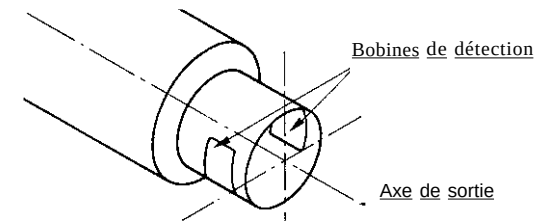


Figure 5-19. Dispositif de détection.

Le moteur couple

Le moteur couple est à aimant permanent. Les bobines sont situées comme celles du détecteur sur l'élément sensible ou flotteur. Les aimants permanents sont fixés au boîtier en regard de la bobine de commande. La bobine parcourue par un courant i soumise à un champ magnétique H est le siège d'une force tangentielle proportionnelle à l'intensité du courant.

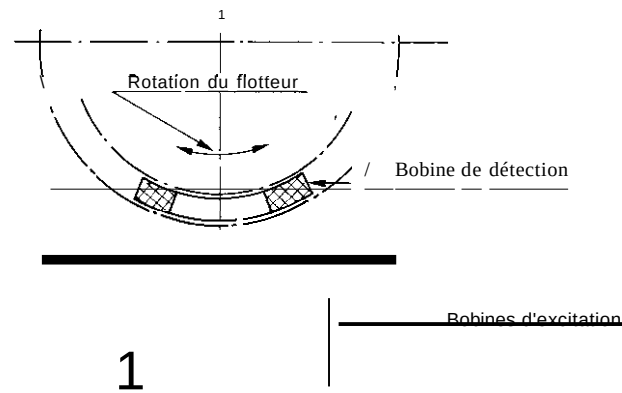


Figure 5-20. Détecteur inductif

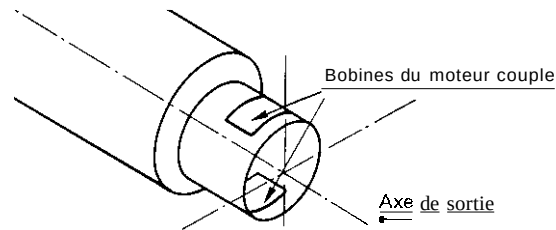


Figure 5-21. Moteur couple.

Le boîtier chauffant

Le boîtier chauffant de forme cylindrique sert d'enveloppe au flotteur, il est étanche et rempli d'un liquide de densité élevée ($d = 1,90$) et dont la viscosité est utilisée pour assurer l'amortissement des mouvements du flotteur.

Enroulés autour du boîtier, deux enroulements assurent l'un le chauffage rapide (200 watt), l'autre le chauffage d'entretien (50 watt). Un enroulement de détection de température situé sur le boîtier permet de connaître avec une grande précision ($0,01^\circ\text{C}$) sa température. Ce détecteur de température est utilisé en pont dans un ampli de chauffage qui assure la régulation de la température. L'amplificateur de chauffage est situé à l'extérieur du gyroscope.

Circulation du flux magnétique

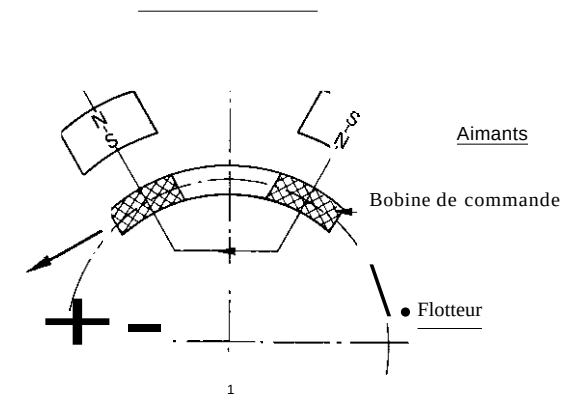


Figure 5-21 Moteur couple

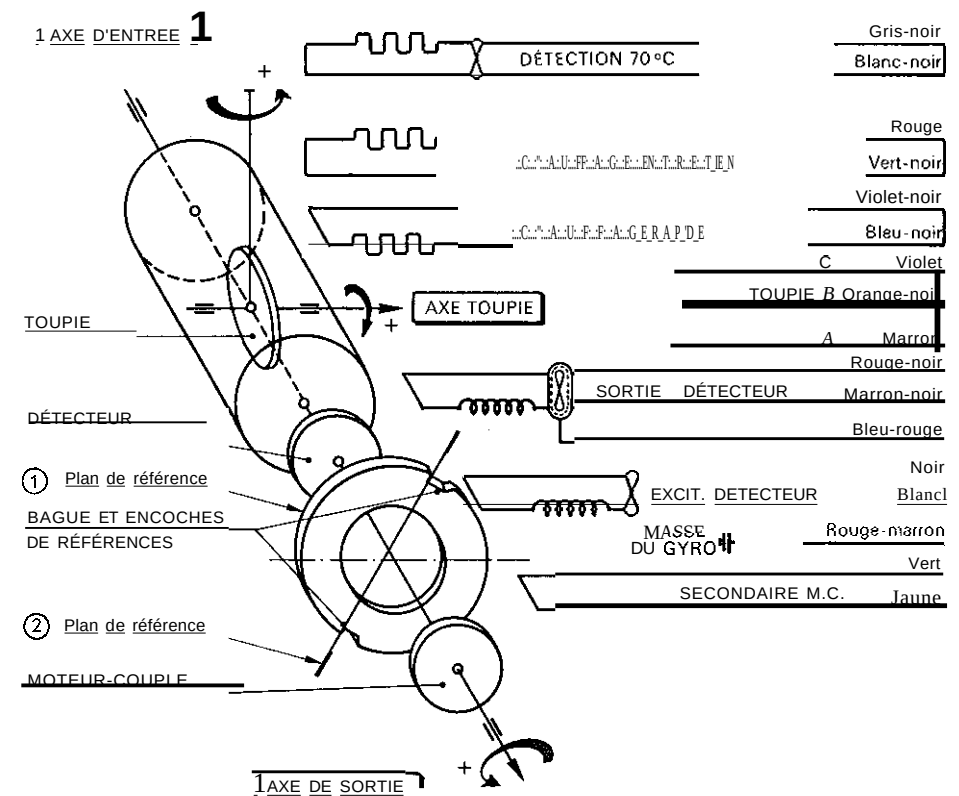


Figure 5-23. Plan de câblage et représentation schématique.

Sous-ensemble divers

Un compensateur de dilatation thermique réalisé par un *soufflet* ferme le boîtier chauffant à une de ses extrémités.

Des *conducteurs flexibles* permettant les alimentations du moteur de toupie, du détecteur d'angle et du moteur couple, sont soudés entre le flotteur et le boîtier.

Une *enveloppe extérieure* réalisée en tôle de matériau magnétique assure le blindage contre les champs magnétiques extérieurs.

Une *prise* incorporée au capot supérieur permet les liaisons électriques.

Les liaisons fonctionnelles sont explicitées par le schéma de la figure 5-23.

Enfin les caractéristiques fonctionnelles sont reproduites dans le tableau 5-2.

TABLEAU 5-2

Caractéristiques fonctionnelles du gyro type 16000 D

Dimensions

- diamètre: 50 mm
- longueur: 70 mm

Poids: 385 g

Moteur de toupie: alimentation 26 volts 3 ϕ 400 Hz, puissance dissipée 3 W

Détecteur d'angle: tension d'excitation 6 volts 15000 Hz

Moteur couple: facteur d'échelle 50°/b.mA

Chauffage rapide: 130 W

Chauffage d'entretien: 50 W

Température de fonctionnement: 70°C

Moment cinétique toupie: $H = 3.10^5 \text{ g cm}^2/\text{s}$

Gain électrique: $G_e = 0,40 \text{ V/}^\circ$

Gain mécanique: $G = 5$

Temps de réponse: $t = 2,5 \text{ ms}$

5.4 Commande digitale de gyroscopes (*)

La commande digitale du gyroscope consiste à envoyer dans son moteur couple un courant continu connu i pendant un temps connu T . Le gyroscope intègre la vitesse angulaire correspondant au couple ki (en appelant k la constante de couple du moteur couple) pendant le temps T .

(*) Paragraphe rédigé par H. BERGER.

Il tourne donc d'un angle

$$\theta = \int_0^T ki \, dt. \quad (5.29)$$

Le problème revient à déterminer d'une façon précise i et T , en supposant que k reste parfaitement constant.

On peut remarquer que, puisque l'on travaille à courant constant, la linéarité du moteur couple, c'est-à-dire la proportionnalité du couple résultant au courant fourni, peut être quelconque et qu'il en est de même pour la symétrie du moteur couple, puisqu'il suffit de choisir les courants i_1 dans un sens et i_2 dans l'autre sens de manière à compenser une dissymétrie éventuelle. Cela est très intéressant car un moteur couple n'est jamais parfaitement linéaire ni parfaitement symétrique mais il est évident qu'on ne s'amuse jamais à concevoir un moteur couple qui soit, par principe, non linéaire et dissymétrique sous prétexte qu'on a l'intention de le commander en digital. On peut au contraire dire que s'il était possible de fabriquer un moteur couple dont le couple varierait très peu avec le courant, le rôle de l'électronique s'en trouverait simplifié.

Dans la réalité, la constante de couple k doit être vraiment constante et le problème revient à savoir envoyer pendant un temps donné un courant donné dans un circuit qui a une impédance complexe (il est résistif, selfique et capacitif).

On peut distinguer deux variantes dans l'envoi de ces impulsions de courant:

a) Comme indiqué sur la figure 5-24, une impulsion est fournie dans le sens convenable au moment où le gyroscope doit tourner de l'angle θ , et seulement à ce moment-là. On remarque un temps mort τ entre deux impulsions successives, nous y reviendrons plus loin.

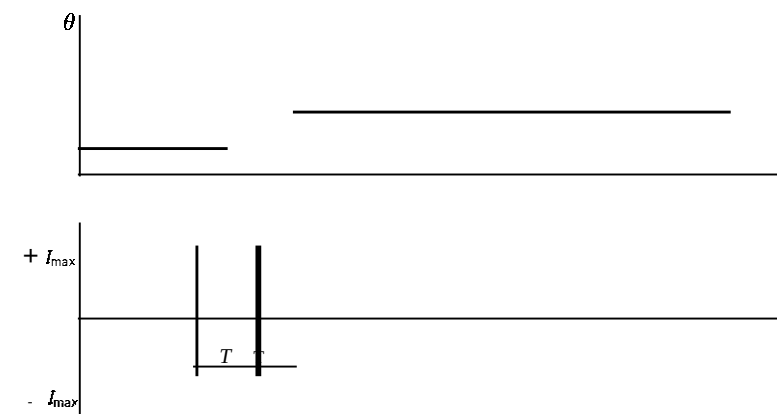


Figure 5-24. Commande à énergie proportionnelle.

h) Comme indiqué sur la figure 5-25, alternativement, une impulsion positive puis une impulsion négative sont envoyées en permanence, ce qui donne un couple moyen nul, et lorsque le gyroscope doit tourner de l'angle θ on change la polarité d'une impulsion. L'impulsion positive qui aurait été fournie à un moment donné est transformée en impulsion négative ou vice versa.

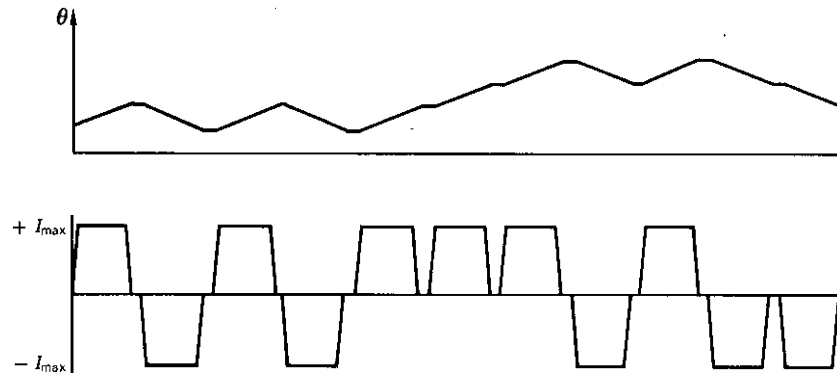


Figure 5-25. Commande à énergie constante avec retour à zéro.

La variante *b* est appelée « à énergie dissipée constante » et présente l'avantage de ne pas changer le régime thermique du gyroscope lorsque le taux de précession varie.

Quelle que soit la commande utilisée (variante *a* ou variante *h*) le couple maximum obtenu est

$$kI_{\max} \frac{T}{T + \tau}.$$

Le moteur couple a une impédance électrique complexe et il est du plus grand intérêt que sa résistance, sa self et sa capacité soient aussi semblables à elles-mêmes que possible.

L'incrément d'angle dont tourne le gyroscope pour une impulsion est couramment défini à 10^{-4} près. Il est donc nécessaire que le régime transitoire d'établissement et de coupure du courant ait une stabilité meilleure que 10^{-4} s'il dure un temps à peine inférieur à la durée T de l'impulsion, ou meilleure que 10^{-3} s'il dure un temps de l'ordre de $T/10$.

En pratique le régime transitoire dure 15 à 20 microsecondes, et T dure 250 microsecondes à 1 milliseconde. Le gyroscope étant maintenu dans une ambiance très stable, une stabilité meilleure que 10^{-3} du régime transitoire est obtenue.

Le problème de la commande par impulsion étant le même qu'il s'agisse du moteur couple d'un gyroscope intégrateur ou de celui d'un accéléromètre,

problème que nous examinerons au paragraphe 6.4.2, il est intéressant de faire ici une remarque supplémentaire en ce qui concerne les variantes *a* et *b* des figures 5-24 et 5-25 ci-dessus.

On remarque qu'il existe entre deux impulsions consécutives un temps mort τ , petit mais non négligeable. Ceci est indispensable dans la variante *a* pour que deux impulsions consécutives représentent bien deux fois l'énergie d'une seule impulsion.

Si τ était nul, un transitoire d'établissement de courant et un transitoire de coupure de courant seraient supprimés et on aurait $2 \times 1 \neq 2$.

La création de ce temps mort τ entre deux impulsions complique un peu la logique de commande des interrupteurs de commande et nécessite des circuits supplémentaires. Dans la variante *b* de la figure 5-25, nous avons représenté également un temps mort τ entre deux impulsions consécutives, mais seulement par analogie avec la variante *a* de la figure 5-24.

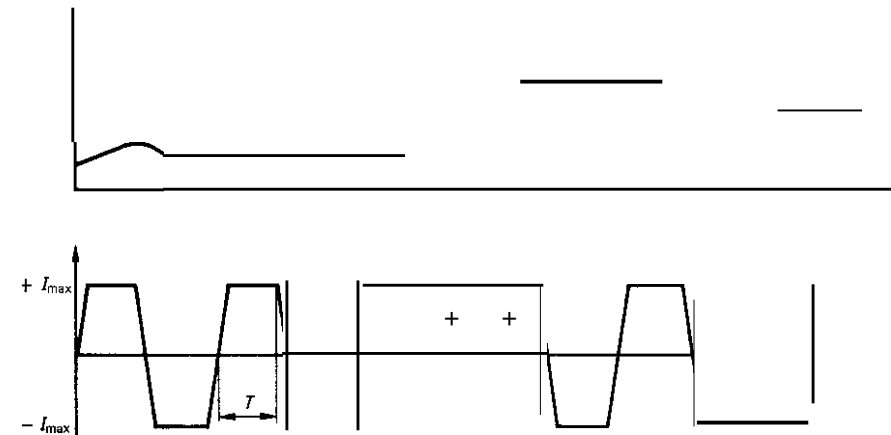


Figure 5-26. Commande à énergie constante sans retour à zéro.

En effet, comme on peut le constater sur la figure 5-26, l'impulsion effective qui fait tourner le corps flottant du gyroscope, ou le pendule de l'accéléromètre dans le cas du paragraphe 6.4.2, est une impulsion de largeur T sans régimes transitoires. Ceux-ci sont automatiquement compensés par ceux des impulsions de signe opposé. Soit I l'énergie correspondant à $I_{\max} \times T$ et ε la perte d'énergie résultant de l'écart entre le régime d'établissement du courant et celui de la coupure du courant, on a successivement sur la figure, en fonction du temps t :

$$+(I - \varepsilon) - (I - \varepsilon) + (I - \varepsilon) - (I - \varepsilon) + (3I - \varepsilon) - (I - \varepsilon) + (I - \varepsilon) - (2I - \varepsilon) + \text{etc.}$$

Dans $+2I, \dots, -1$, les ε ont disparu, à condition bien entendu qu'ils soient constamment égaux.

La variante b présente donc non seulement l'avantage de travailler à énergie dissipée constante mais encore celui de ne pas nécessiter de temps mort τ entre deux impulsions. Il en résulte une logique de commande plus simple, et avantage supplémentaire intéressant lorsque le taux de précession maximum doit être aussi élevé que possible, un couple maximum de $kI_{\max}$ au lieu de $KI_{\max} \times T/T + \tau$.

Bien entendu, c'est la variante b qui est la plus généralement adoptée.

Comment fabrique-t-on ces impulsions?

Lorsque $I_{\max}$ est de l'ordre de quelques milliampères, soit parce que k est élevé, soit parce que le taux de précession maximum nécessaire est faible, on a souvent intérêt à utiliser le schéma très simple de la figure 5-27 ci-dessous.

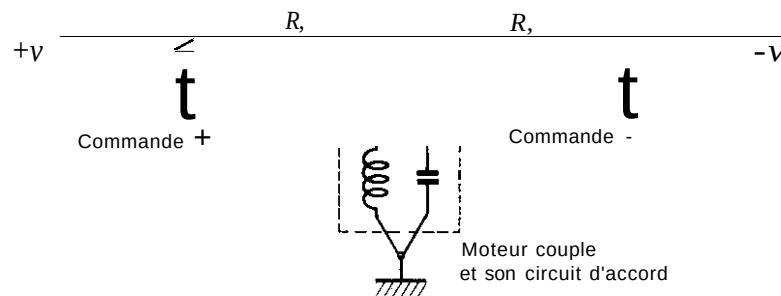


Figure 5-27. Exemple de générateur d'impulsions de courant faible.

$+V$ et $-V$ sont deux sources de tension stabilisées généralement à 2 ou 3.10^{-5} , de l'ordre de 10 volts, les interrupteurs sont constitués chacun par un seul transistor (parfois thermostaté), les résistances R_i et R_z sont choisies parmi des résistances de très haute stabilité et ayant un coefficient de température de quelques p.p.m,

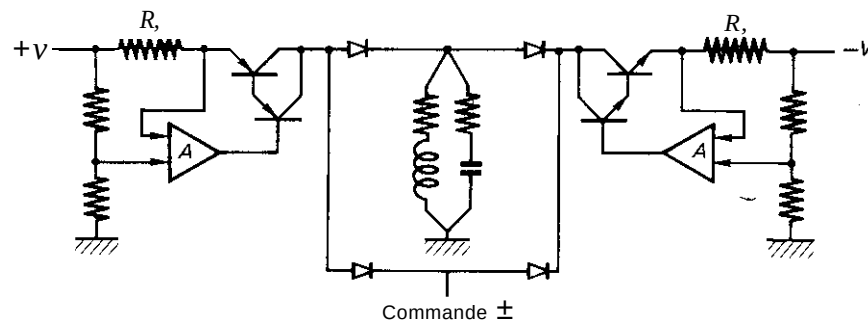


Figure 5-28. Exemple de générateur d'impulsions de courant fort.

Lorsqu'il faut envoyer dans le moteur couple un courant de l'ordre de 100 à 200 milli-ampères, le transistor-interrupteur de la figure 5-27 a un R qui varie au cours d'une impulsion et par conséquent, des précisions de 10^{-4} au cours de celle-ci sont impossibles à atteindre.

On préfère alors le schéma de la figure 5-28 ci-avant: ce sont ici les diodes qui servent d'interrupteur, les courants dans R_i et R_z sont constants et traversent soit le moteur couple, soit la source de commande. A représente deux amplificateurs opérationnels.

5.5 Analyse des erreurs

On peut considérer plusieurs sources d'erreur: les unes d'origine géométrique (erreurs de positionnement des axes), les autres provenant de couples parasites entraînant, comme il a été vu, une dérive du gyroscope.

Sans chercher à être exhaustif, on donne ci-après une liste d'erreurs importantes pour les gyros utilisés en navigation.

i) L'erreur mécanique de positionnement de l'axe d'entrée par rapport à un repère mécanique situé dans le plan de pose normal à l'axe de sortie est définie comme un angle θ ,

ii) L'erreur mécanique de l'axe d'entrée par rapport au plan de pose est définie comme un angle α .

iii) Dérive due aux couples de balourd (figure 5-29)

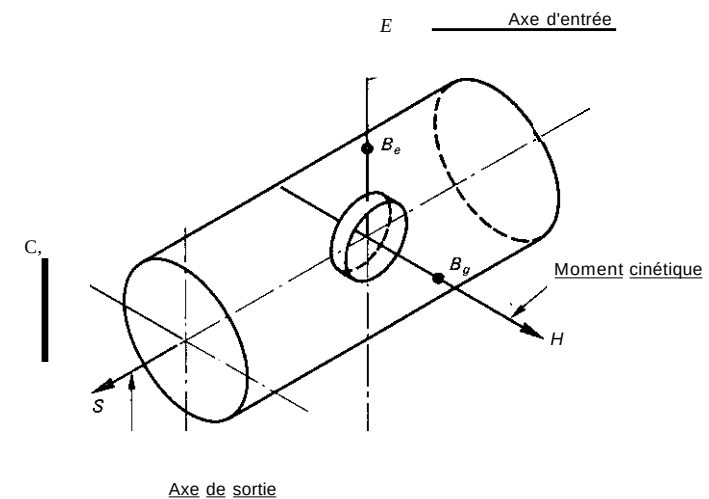


Figure 5-29. Balourd et couple fixe,

Malgré un réglage fin de l'équilibrage du flotteur placé dans le liquide d'équilibrage, le centre de gravité ainsi que le centre de poussée peuvent ne pas être situés rigoureusement sur l'axe de précession et dans ce cas la résultante du couple autour de l'axe de sortie est fonction de la force spécifique appliquée. On peut définir le vecteur balourd $\vec{B}$ tel que la dérive entraînée par la force spécifique soit la composante de $(\vec{B} \times \mathbf{j})$ sur l'axe de sortie.

iv) Dérive due aux couples fixes

Par opposition au couple de balourd, on peut considérer le couple parasite indépendant de l'accélération appliquée. Ce couple est d'origine mécanique et électromagnétique : les conducteurs souples alimentant les trois phases du moteur synchrone, la bobine de détection d'angle et la bobine de commande du moteur couple contribuent pour une part importante dans la valeur du couple fixe qui entraîne une dérive constante.

v) Dérive due aux variations de température

A la température de flottaison, le flotteur est en équilibre. Si la température augmente, la densité du fluide diminue; il s'ensuit une variation du couple balourd (donc une modification de la dérive correspondante), ainsi que des courants de convection pendant le transitoire thermique qui entraînent des couples parasites.

vi) Dérive d'aniso-élasticité

Bien que les plate-formes sur lesquelles sont montés les gyroscopes soient équipées de dispositifs amortisseurs de vibration, le niveau résiduel peut suffire à provoquer une dérive appelée dérive d'aniso-élasticité.

Si la toupie montée dans le flotteur présente une élasticité axiale différente de l'élasticité radiale, il s'ensuit que, sous l'effet d'une vibration linéaire sinusoïdale, l'axe de déplacement du centre d'inertie n'est pas confondu avec l'axe de

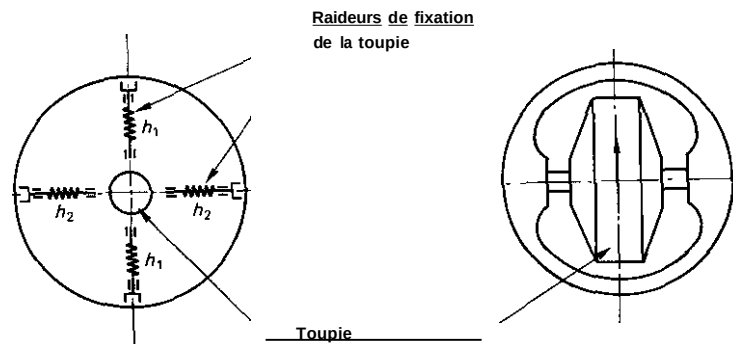


Figure 5-30. Aniso-élasticité d'une toupie.

sollicitation des vibrations, d'où un couple autour de l'axe de sortie entraînant une dérive.

Un montage correct de toupie doit conduire à une iso-élasticité presque parfaite. La dérive résiduelle est dite dérive d'aniso-élasticité (voir figure 5-30).

vii) Dérive aléatoire

On appelle *dérive aléatoire* en cours de fonctionnement normal toute dérive qui n'est pas une dérive de couple fixe, de balourd, ou d'aniso-élasticité. Cette dérive résiduelle est due à toute une série de paramètres incontrôlables à l'intérieur du gyro et traduit la limite des performances que l'on peut atteindre avec la technologie utilisée. Néanmoins lorsque les caractéristiques statistiques de cette dérive sont suffisamment stables, on peut tirer parti de cette régularité en utilisant des méthodes de filtrage statistique (voir chapitre 12). Il est donc important de caractériser cette dérive par sa fonction de corrélation qui est souvent représentée par l'approximation

$$\varphi_\varepsilon(\tau) = E\{\varepsilon(t)\varepsilon(t+\tau)\} = \sigma^2 e^{-|\tau|/\tau}, \quad (5.30)$$

σ étant l'écart-type de cette dérive et Tle temps de corrélation, ou par un cheminement aléatoire (mouvement brownien) caractérisé par l'équation différentielle

$$\dot{\varepsilon} = v \quad (5.31)$$

v étant un bruit blanc de variance $q\delta(t-\tau)$, expression dans laquelle q caractérise alors cette dérive aléatoire.

viii) Dérive de jour à jour

Lorsqu'après un arrêt de quelques heures ou jours on remet en route un gyro, le balourd et le couple fixe ne reprennent pas exactement la même valeur, le gyro ne reprenant pas rigoureusement le même état d'équilibre. La variation de dérive correspondante est appelée dérive de jour à jour, et est considérée comme une variable aléatoire caractérisée par son écart-type.

5.6 Description des méthodes de mesures

Les principales caractéristiques à mesurer sont:

- la composante du balourd sur l'axe de rotation de la toupie, appelée B_g ;
- la composante du balourd sur l'axe d'entrée, appelée B_e ;
- le couple autour de l'axe de sortie indépendant de l'accélération, appelé Cf ;
- la dérive aléatoire à court terme;
- la variation de dérive d'un jour à l'autre.

i) Mesure du balourd et couple fixe

Deux méthodes d'essais sont utilisées pour la mesure du balourd et du couple fixe.

La première méthode fait appel à une table asservie que l'on oriente dans l'espace suivant 6 positions (voir figure 5-31) et sur laquelle est fixé le gyroscope à contrôler. Celui-ci est donc monté sur le plateau de la table asservie, son axe d'entrée parallèle à l'axe de rotation de la table, le signal de sortie du détecteur est amplifié avant d'attaquer le moteur d'asservissement de la table. On asservit donc la table à suivre le mouvement de l'axe de toupie, le gyroscope est placé dans le champ de pesanteur et soumis à la rotation de la terre qui constitue une excellente référence de vitesse (figure 5-32).

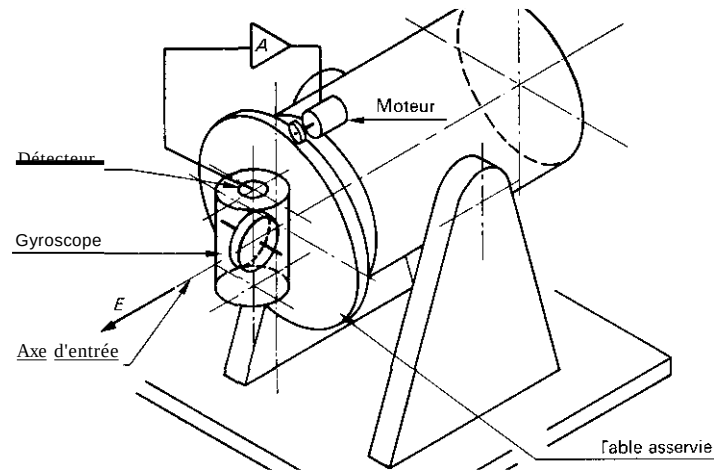


Figure 5-31. Table asservie.

Dans chaque position on écrit l'égalité des couples autour de l'axe de sortie du gyro ce qui conduit aux équations suivantes:

$$\text{en position 1} \quad D_1 = C_{f1,2} + H\Omega \sin L - B_g \quad (5.32)$$

$$\text{en position 2} \quad D_2 = C_{f1,2} - H\Omega \sin L + B_g \quad (5.33)$$

$$\text{en position 3} \quad D_3 = C_{f3} - H\Omega \cos L \quad (5.34)$$

$$\text{en position 4} \quad D_4 = C_{f1} + H\Omega \cos L \quad (5.35)$$

$$\text{en position 5} \quad D_5 = C_{f5,6} - H\Omega \cos L - B_e \quad (5.36)$$

$$\text{en position 6} \quad D_6 = C_{f5,6} - H\Omega \cos L + B_e \quad (5.37)$$

où

D_i vitesse de rotation de la table asservie par rapport à la terre,
 C_f couple fixe,
 B_e composante du balourd sur l'axe d'entrée,
 B_g composante du balourd sur l'axe de la toupie.

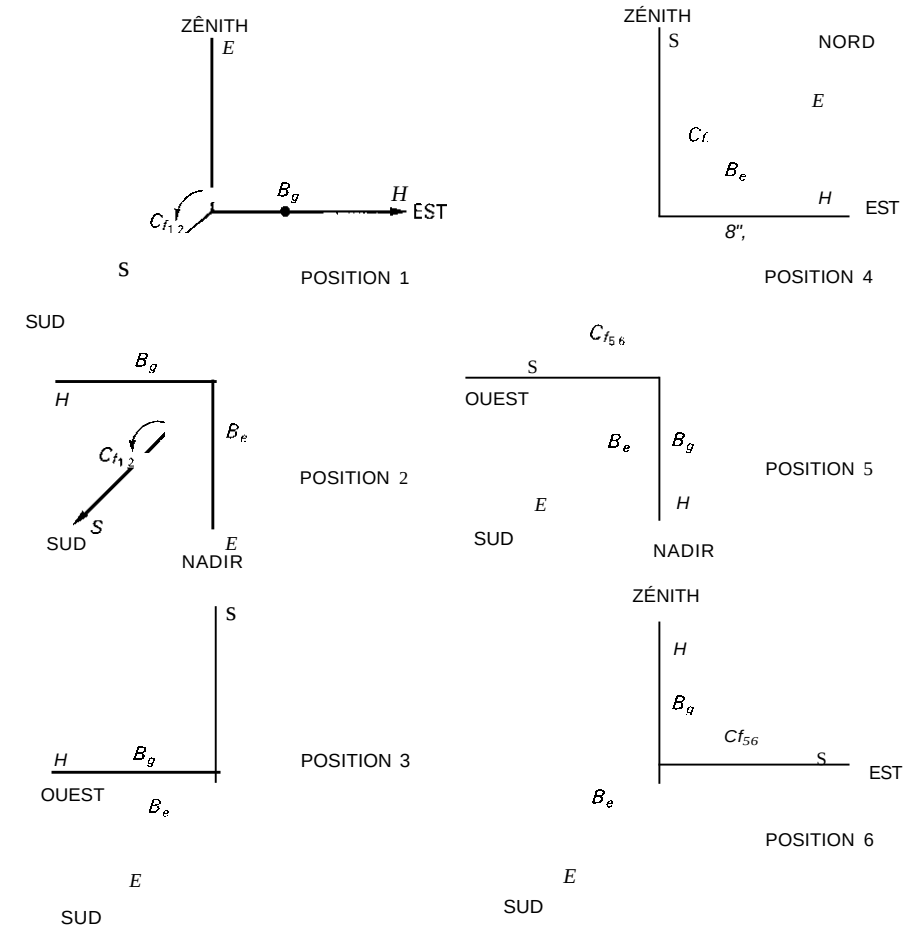


Figure 5-32. Positions cardinales.

De l'ensemble de ces 6 équations on déduit:

$$C_{f1,2} = \frac{D_1 + D_2}{2} \quad (5.38)$$

$$B_g = HQ \sin L + \frac{D_1 - D_2}{2} \quad (5.39)$$

$$C_{f3} = D_1 + HQ \cos L \quad (5.40)$$

$$C_{r1} = D_4 - H\Omega \cos L \quad (5.41)$$

$$C_{fs,6} = \frac{D_5 + D_6}{2} + HQ \cos L \quad (5.42)$$

$$B_e = \frac{D_6 - D_1}{2} \quad (5.43)$$

La deuxième méthode fait appel à une table commandée à vitesse constante, le gyroscope est bouclé en gyromètre, c'est-à-dire que le signal de sortie du détecteur est amplifié, démodulé puis attaque le moteur couple du gyroscope. La mesure du courant envoyé dans le moteur couple fournit la valeur du couple autour de l'axe de sortie. Le gyroscope est placé sur le plateau, son axe de sortie parallèle à l'axe de rotation de celui-ci. L'axe de rotation du plateau est orienté dans le plan méridien et parallèle à l'axe de rotation de la terre (figure 5-33).

La dérive du gyroscope est modulée par le couple de balourd dû au champ de pesanteur. L'amplitude de la valeur moyenne représente le couple fixe, l'amplitude par rapport à la valeur moyenne de la sinusoïde représente le balourd et la position du zéro des l'enregistrement représente la position du balourd par rapport à l'axe d'entrée (voir figure 5-34).

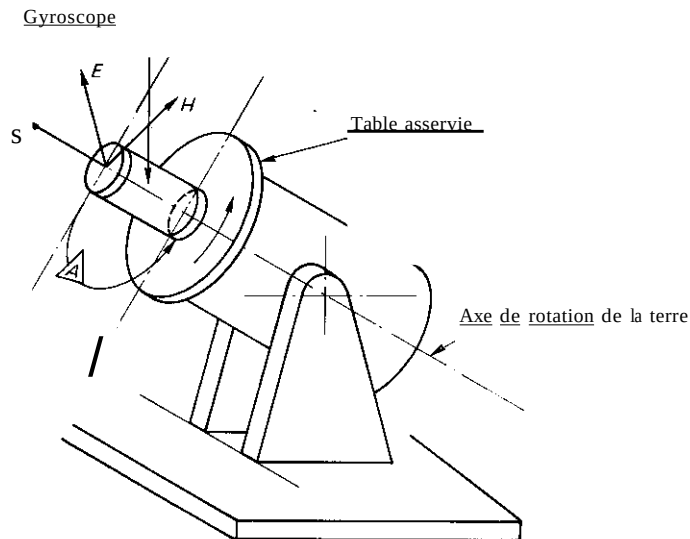


Figure 5-33. Essais en table équatoriale.

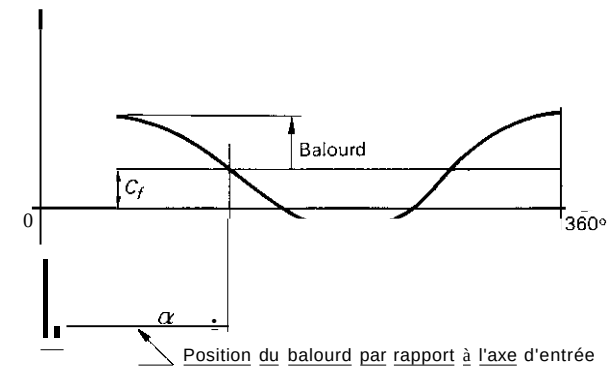


Figure 5-34. Enregistrement d'un essai en table équatoriale.

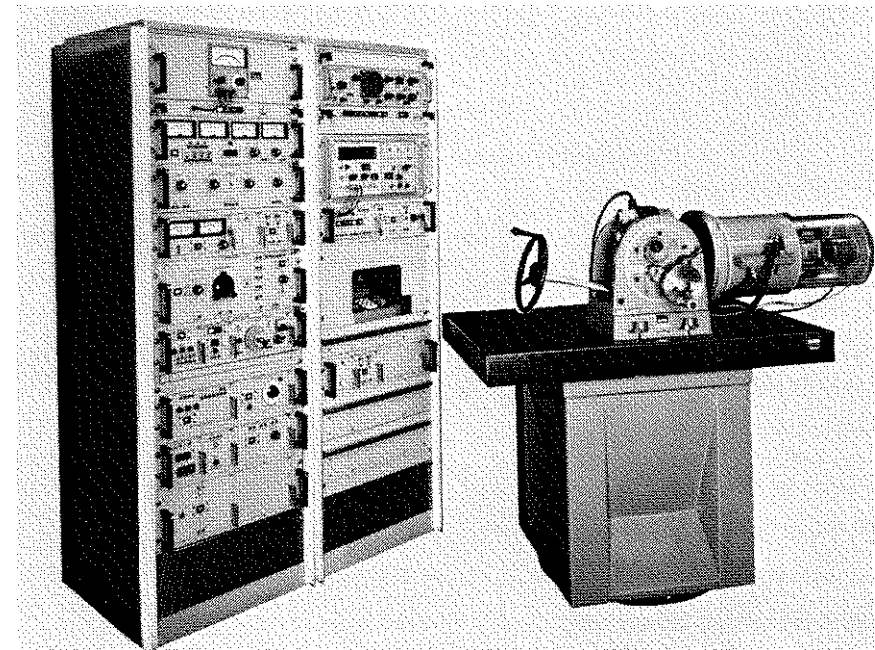


Figure 5-35. Équipement d'essais de gyroscopes flottants.

ii) Mesure de la dérive aléatoire

Le gyroscope est placé sur une table asservie successivement dans les «6 positions classiques».

On effectue généralement de 5 à 10 mesures successivement dans chaque position, au cours de chaque mesure on compte le temps mis par la table pour tourner d'un angle α constant.

On en déduit une série de mesure T_i .

Il vient en posant

ω_m = vitesse moyenne de la table sur n mesures

$$\omega_m = \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} \quad (5.44)$$

et posant

D = valeur quadratique moyenne des ω_i

$$D = \alpha \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_i} \right)^2}{n-1}} \quad (5.45)$$

TABLEAU 5-3

Performances typiques de gyros

	Gyro type navigation inertielle pure	Gyro type navigation hybride
Erreur de calage de l'axe d'entrée dans le plan de pose	$ \beta \leq 30''$	$ \beta < 2'$
Erreur de calage de l'axe d'entrée par rapport au plan de pose de la bague de référence	$ \alpha < 1'30''$	$ \alpha < 30'$
Raideur de couple élastique	$< 0,5^\circ/\text{h}/^\circ$	$< 5^\circ/\text{h}/^\circ$
Couple fixe	$< 0,5^\circ/\text{h}$	$< 1^\circ/\text{h}$
Balourd suivant chaque axe	$< 0,50/\text{h}/\text{g}$	$< 2^\circ/\text{h}/\text{g}$
Dérive aléatoire (1σ) en gyro de verticale	$0,01^\circ/\text{h}$	$0,05^\circ/\text{h}$
en gym d'azimut	$0,02^\circ/\text{h}$	$0,10^\circ/\text{h}$
Variation de dérive de jour à jour à 1σ en gyro de verticale	$0,050/\text{h}$	$0,10^\circ/\text{h}$
en gyro d'azimut	$0,030^\circ/\text{h}$	$0,15^\circ/\text{h}$

5.7 Performances

Les qualités souhaitables d'un gyro et les paramètres critiques dépendent de l'application faite, et il est difficile d'énoncer des généralités. Cependant pour fixer les idées nous donnons dans le tableau 5-3 les performances qui peuvent être considérées comme typiques pour un gyro moyen servant en navigation inertielle pure, et pour un gyro simplifié et meilleur marché servant en navigation hybride.

CHAPITRE 6

ACCÉLÉROMÈTRES

C. MESSAN

6.1 Principes de fonctionnement

Considérons l'appareil idéal et schématique représenté sur la figure 6-1. Une masse test P est mobile à l'intérieur d'un boîtier rigide. Différents capteurs permettent de mesurer le déplacement $\vec{\delta}$ de cette masse et différents moteurs permettent d'exercer sur cette masse une force spécifique $\vec{F}$ (voir figure 6-1).

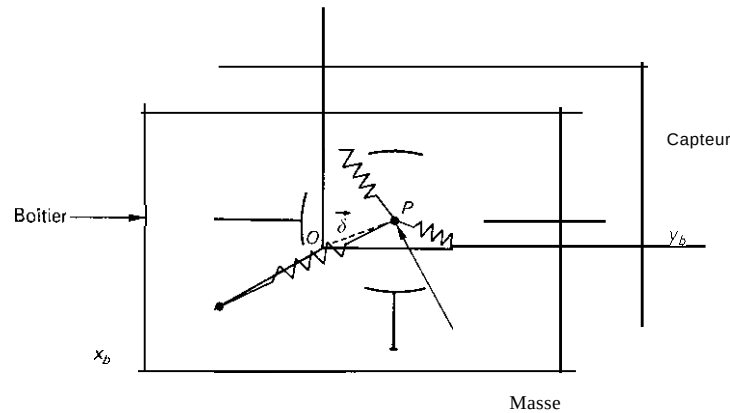


Figure 6-1. Schéma d'accéléromètre.

On désigne par $[b]$ un repère lié au boîtier et ayant pour origine la position nominale 0 de la masse. On rappelle que la force spécifique du point 0 est définie par:

$$\left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}\right)_i = \vec{f} + \vec{g} \quad (6.1)$$

où $\vec{r}$ est le vecteur position du boîtier et $\vec{g}$ la gravité au centre du boîtier.

Si l'on écrit alors la loi fondamentale de la mécanique pour le mouvement de la masse test P , on obtient

$$m \ddot{\vec{\delta}} = \vec{F} - \vec{f}, \quad (6.2)$$

ou encore

$$\ddot{\vec{\delta}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\delta}} + \vec{\omega} \times \vec{\delta} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\delta}) = \vec{F} - \vec{f} \quad (6.3)$$

où $\vec{\omega}$ désigne le vecteur rotation instantanée de $[b]$ par rapport à l'espace inertiel.

Supposons alors qu'un asservissement soit réalisé, c'est-à-dire que par construction, on fasse dépendre la force $\vec{F}$ de la position, par exemple

$$\vec{F} = -K_1 \dot{\vec{\delta}} - K_2 \vec{\delta}, \quad (6.4)$$

ou plus généralement

$$\vec{F} = -K(s) \cdot \vec{\delta}, \quad (6.5)$$

$K(s)$ étant une matrice de transfert telle que l'asservissement réalisé soit stable. Si l'asservissement est suffisamment raide pour que l'on ait

$$(6.6)$$

on voit que

$$\vec{F} = \vec{f}. \quad (6.7)$$

On peut ainsi mesurer la force spécifique $\vec{f}$ en considérant la force $\vec{F}$ générée par le moteur de l'accéléromètre. Les caractéristiques dynamiques de la mesure effectuée sont parfaitement définies par les équations (6.3) et (6.5).

La disposition, la nature du moteur et du capteur varient d'un type d'accéléromètre à un autre. On énumère dans le paragraphe suivant une liste non exhaustive de réalisations effectives du schéma théorique qui vient d'être exposé.

6.2 Différents types d'accéléromètres

6.2.1 ACCÉLÉROMÈTRES DU TYPE PENDULAIRE

Imaginons une masse P de centre d'inertie G suspendue par un bras de longueur L à une articulation fixée sur un boîtier (voir figure 6-2).

Un moteur couple agit sur la masse P en générant une force $\vec{F}$ proportionnelle à l'écart de position du pendule par rapport à une position nominale. Le moteur couple est du type à aimant permanent et la mesure de $\vec{F}$ se résume à la mesure du courant de commande circulant

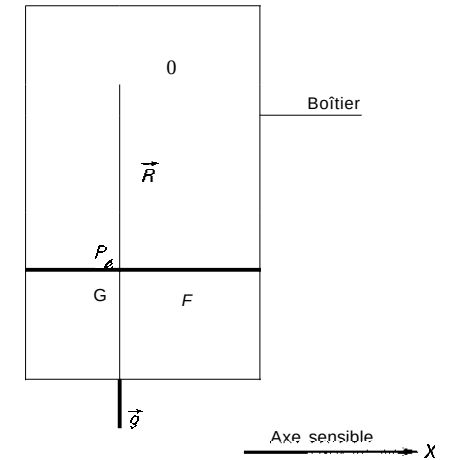


Figure 6-2. Accéléromètre pendulaire.

dans la bobine fixée à la tête du pendule. Il vient donc

$$f = F = ki, \quad (6.8)$$

k étant le facteur de proportionnalité entre la force exercée par le moteur couple et le courant de commande qui s'exprime en dyne/milliampère ou encore en « g » par milliampère si l'on tient compte de la masse du pendule.

6.2.2 ACCÉLÉROMÈTRE GYROSCOPIQUE PENDULAIRE

Le principe de l'appareil repose sur l'équilibre réalisé à l'aide d'un asservissement entre le couple de balourd d'un gyroscope balourdé à un degré de liberté et le couple gyroscopique (figure 6-3). On a vu que l'équation simplifiée du gyroscope à un degré de liberté s'écrivait (équation (5.21))

$$B\ddot{\beta} + b\dot{\beta} - H\dot{\alpha} = M. \quad (6.9)$$

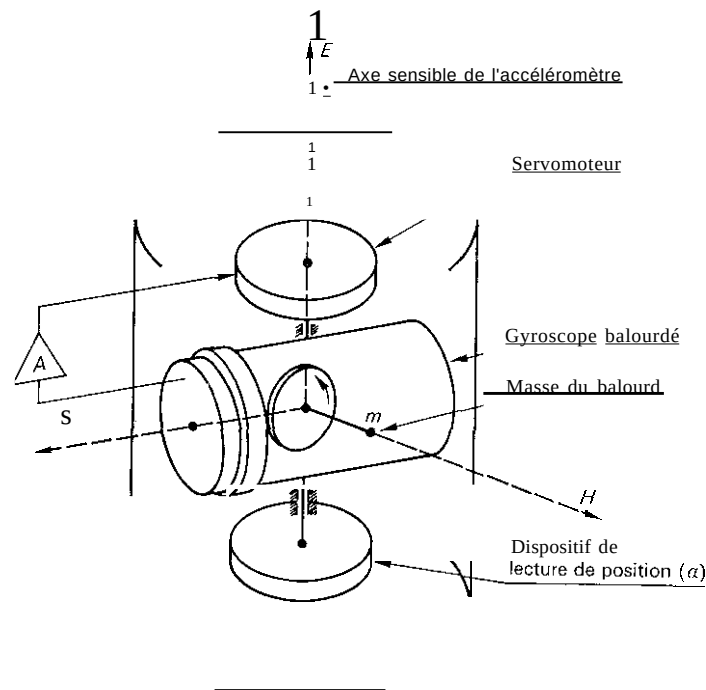


Figure 6-3. Accéléromètre gyroscopique pendulaire.

Ici le couple M est le couple exercé autour de l'axe de sortie du gyroscope par la force spécifique J agissant sur la masse m située sur l'axe de la toupie du gyroscope. Il est donné par l'expression:

$$M = md\dot{\alpha}, \quad (6.10)$$

d étant la distance du centre de gravité de la masse m à l'axe de sortie du gyroscope. L'équation (6.9) devient donc

$$B\ddot{\beta} + b\dot{\beta} - H\dot{\alpha} = md\dot{\alpha}. \quad (6.11)$$

La somme des couples autour de l'axe de sortie s'exerçant sur l'élément sensible du gyroscope est nulle si l'on réalise un bouclage entre le signal détecteur d'angle du gyroscope et un servo-moteur monté sur l'axe d'entrée de celui-ci de façon à maintenir l'angle β pratiquement nul. En régime permanent, il vient:

$$\alpha = \frac{md}{H} \int_0^t f(s) ds. \quad (6.12)$$

Après correction de l'effet de la gravité, l'angle α représente ainsi la vitesse suivant l'axe sensible x . L'accéléromètre ainsi réalisé est un accéléromètre intégrateur de grande précision (utilisé surtout dans les systèmes de guidage de fusées).

6.2.3 ACCÉLÉROMÈTRE À QUARTZ

L'accéléromètre comporte deux cristaux de quartz (figure 6-4) soumis à une contrainte engendrée par l'action mécanique de deux masses sensibles à la force spécifique à mesurer.

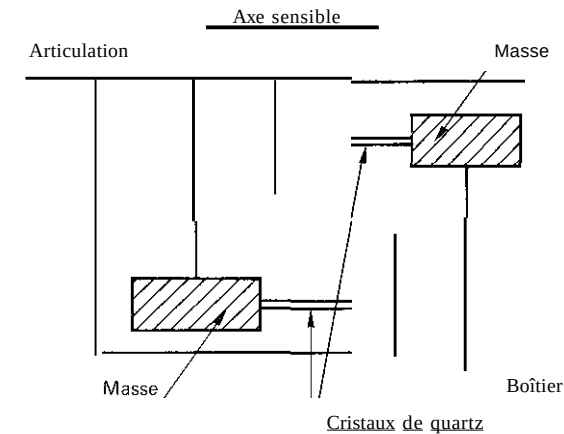


Figure 6-4. Accéléromètre à quartz.

Les masses sont disposées de manière à soumettre l'un des quartz à une compression quand l'autre est soumis à une traction; il en résulte que les fréquences propres d'oscillation des quartz sont modifiées et que leur différence est proportionnelle à la force spécifique à mesurer.

La mesure de la force spécifique est une fréquence et son intégrale est obtenue par comptage d'impulsions, chaque impulsion représentant un incrément de vitesse (après déduction de l'effet de la pesanteur).

Les caractéristiques typiques principales d'un tel accéléromètre sont:

Domaine de mesure	$\pm 200 \text{ g}$
Précision relative	10^{-3}
Dimensions	$0 = 40 \text{ mm}$
	$1 = 50 \text{ mm}$
→ Masse	$m = 120 \text{ g}$

6.2.4 ACCÉLÉROMÈTRE À CORDES VIBRANTES

La masse sensible m est maintenue par deux cordes $C1$ et $C2$ dont les fréquences de vibrations V_1 et v_2 dépendent de leur tension $T1$ et T_2 (figure 6-5).

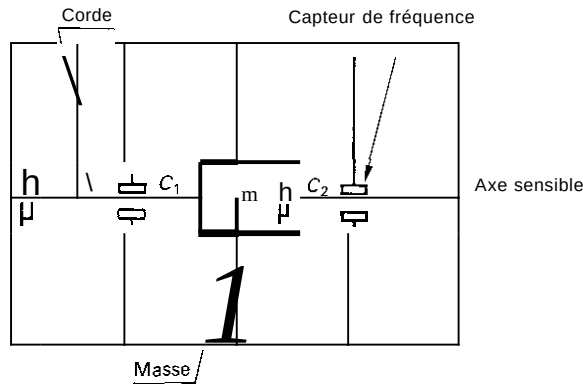


Figure 6-5. Accéléromètre à cordes vibrantes.

On a

$$v_1^2 = kT_1 \tag{6.13}$$

$$v_2^2 = kT_2 \tag{6.14}$$

D'autre part la différence $T1 - T_2$ est proportionnelle à la composante de la force spécifique le long de l'axe.

$$T_1 - T_2 = ml. \tag{6.15}$$

Il s'ensuit que

$$v_1 - v_2 = \frac{km}{v_1 + v_2} f. \tag{6.16}$$

Si l'on maintient $(v_1 + v_2)$ constant par asservissement, on a ainsi réalisé un appareil linéaire, la fréquence $v_1 - v_2$ étant proportionnelle à la force spécifique.

6.3 Description détaillée d'un accéléromètre peudulaire à un degré de liberté

6.3.1 PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT

Considérons un pendule réalisé par l'ensemble de deux bobines liées à un support fixé à une tige rigide mobile autour d'un axe OO' (figure 6-6).

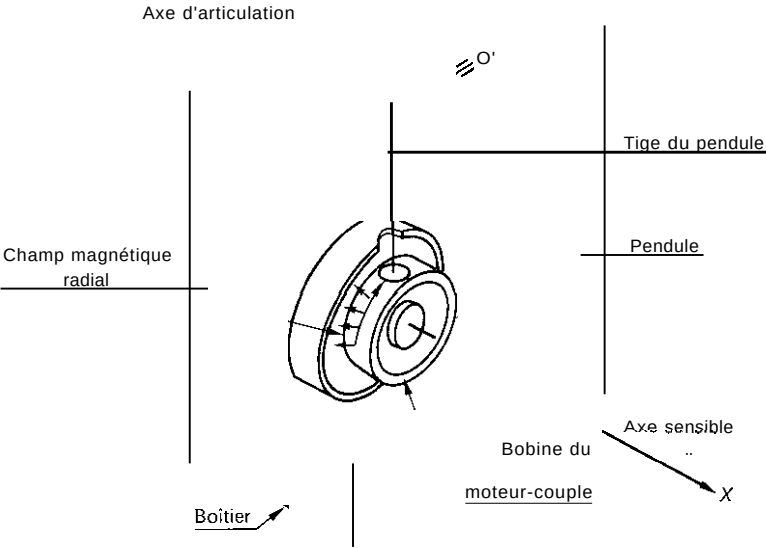


Figure 6-6. Accéléromètre pendulaire.

Sous l'effet d'une force spécifique dirigée suivant l'axe x le pendule tend à s'écarter de sa position d'équilibre. Un détecteur de position, réalisé par couplage inductif entre deux bobines, l'une sur la tête de pendule, l'autre sur le boîtier, fournit une tension d'amplitude proportionnelle à l'écart par rapport à une position de référence appelée zéro électrique.

La tension d'erreur est amplifiée, démodulée et envoyée dans un moteur couple. Celui-ci est réalisé par une bobine située sur la tête du pendule et

placée dans le champ magnétique radial créé par un aimant permanent lié au boîtier.

Sous l'effet d'une force spécifique le pendule prend une position d'équilibre. Le couple autour de l'axe de fixation du pendule dû à la force spécifique appliquée au centre de gravité du pendule, s'oppose au couple généré par le moteur couple; le mouvement est amorti par la présence d'un liquide visqueux à l'intérieur du boîtier.

L'équation de l'accéléromètre en boucle ouverte et en l'absence de force spécifique est:

$$B\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} = ki \quad (6.17)$$

où B est le moment d'inertie du pendule autour de l'axe d'articulation OO' , b est le coefficient de frottement visqueux, α est l'angle de déflexion du pendule par rapport au zéro électrique, k la constante de couple du moteur et i le courant dans le bobinage du moteur couple.

Prenons la transformée de Laplace de (6.17). Il vient:

$$\frac{k}{s(Bs + b)} \quad (6.18)$$

Si l'on désigne par λ le facteur d'échelle du détecteur ($J = u/\alpha$) en volt/radian et par τ la constante de temps

$$\tau = \frac{B}{b},$$

on peut écrire

$$\frac{u}{i} = \frac{K_v}{s(1 + \tau s)} \quad (6.19)$$

avec

$$K_v = \frac{\lambda k}{b} \quad (6.20)$$

Si l'on suppose à présent l'accéléromètre soumis à une force spécifique de composante lx sur son axe sensible, et bouclé par un amplificateur de gain G en mV/mV , on peut représenter le capteur ainsi réalisé par le diagramme fonctionnel de la figure 6-7. La fonction de transfert est

$$\frac{i}{Jx} = S \frac{\frac{GK_v}{s(1 + \tau s)}}{1 + \frac{GK_v}{s(1 + \tau s)}} \quad (6.21)$$

avec

$$S = \frac{ml}{k} \quad (6.22)$$

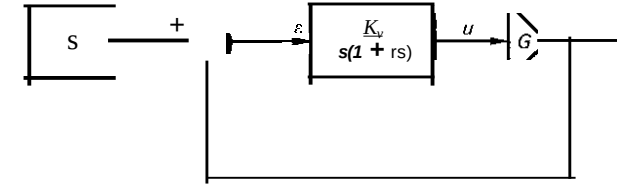


Figure 6-7. Diagramme fonctionnel de l'accéléromètre bouclé.

On reconnaît une fonction de transfert du second ordre:

$$\frac{S}{1 + 2\zeta\omega^{-1}s + \omega^{-2}s^2} \quad (6.23)$$

La raideur R de l'asservissement est caractérisée par la valeur du rapport f_x/α à la fréquence 0, soit :

$$R = \frac{f_x}{\alpha} = \frac{JG}{S} \quad (6.24)$$

6.3.2 DESCRIPTION TECHNOLOGIQUE

Le pendule est composé (voir figure 6-8) :

— d'une tige rigide à l'extrémité de laquelle sont fixées deux bobines, l'une appartenant au moteur couple, l'autre au détecteur de position du pendule;

- d'un support mobile fixé à l'autre extrémité du pendule;
- de deux charnières réalisant la liaison entre le support mobile et le boîtier.

Le moteur couple est du type à courant continu et son schéma est donné sur la figure 6-9.

Le détecteur est du type à couplage inductif (voir figure 6-10).

Le boîtier (voir figure 6-11) permet de matérialiser l'axe d'entrée normal au plan de pose réalisé par quatre surfaces planes. Il est rempli d'un liquide à base de silicone réalisant un amortissement visqueux, de coefficient réduit voisin de 0,7. Un soufflet expansible fixé à une extrémité du boîtier permet de compenser la variation de volume du liquide engendrée par la variation de température consécutive à la mise en œuvre de l'appareil.

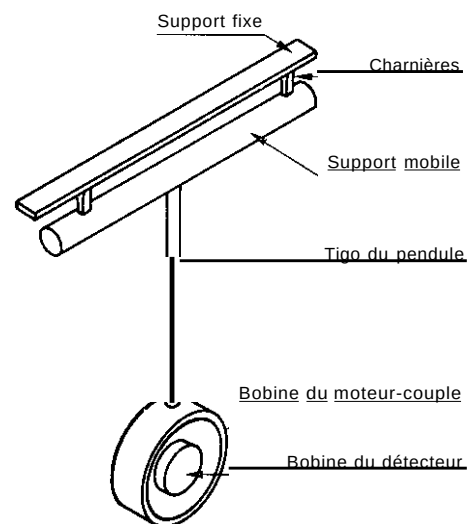


Figure 6-8. Pendule.

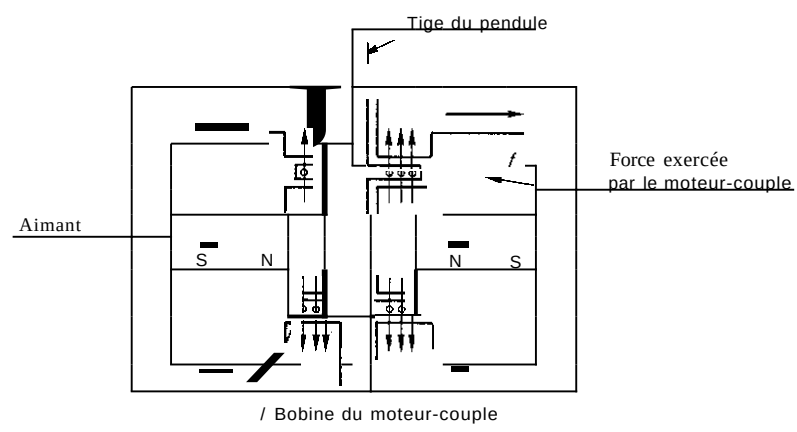


Figure 6-9. Moteur-couple.

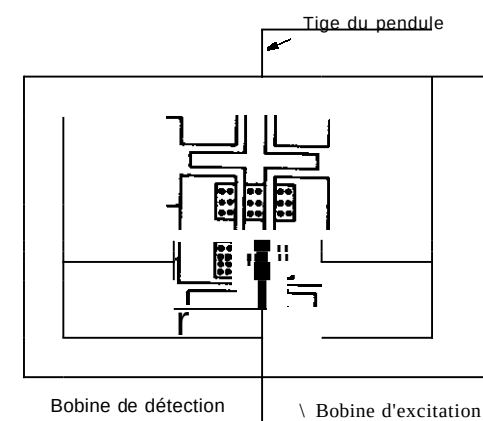


Figure 6-10. Détecteur inductif

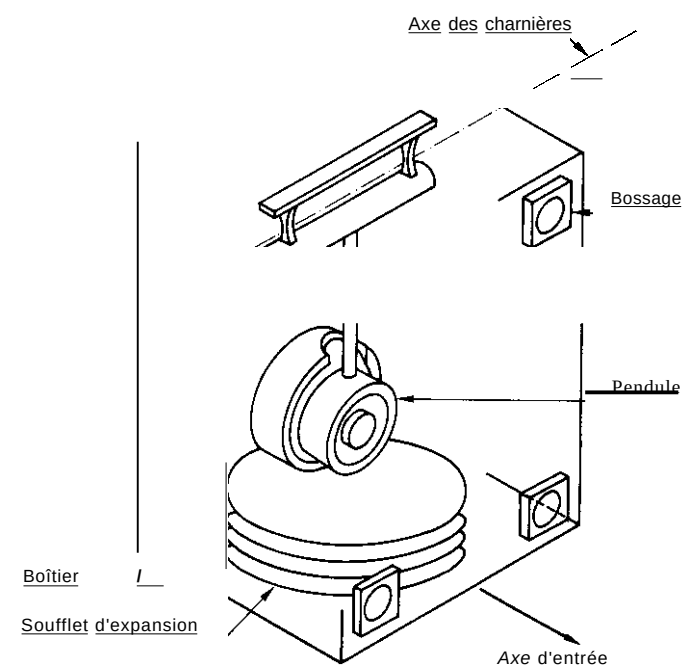


Figure 6-11. Accéléromètre pendulaire.

6.3.3 CARACTÉRISTIQUES FONCTIONNELLES

6.3.3.1 En boucle ouverte

- tension d'alimentation du détecteur

$$V = 6 \text{ volts}, \quad J = 15000 \text{ Hz};$$

- facteur d'échelle du détecteur

$$A = 1,2 \text{ V/}^\circ;$$

- facteur d'échelle du moteur couple

$$k = 500 \text{ dynes-cm/mA};$$

- facteur d'échelle global

$$S = \frac{ml}{k} = 5 \text{ mA/g};$$

- moment d'inertie du pendule

$$B = 35 \text{ g_cm}^2.$$

6.3.3.2 En boucle fermée

- gain de l'amplificateur

$$G = 25 \text{ mA/mV};$$

- raideur

$$1/R = 5'' \text{ d'arc/g};$$

- bande passante à 3 dB

$$J_{dB} \geq 120 \text{ Hz};$$

- dimensions = 25 x 28 x 50 mm;

- poids = 120 g.

6.4 Bouclage et codage d'un accéléromètre pendulaire (*)

6.4.1 BOUCLAGE ANALOGIQUE

Rappelons le principe du bouclage analogique d'un accéléromètre pendulaire. Le moteur couple exerce un couple ki lorsqu'il est parcouru par un courant i (k est la constante de couple). La différence entre le couple $mlJx$ dû à la force spécifique et le couple ki communie une accélération au pendule d'inertie B . Désignant par b le coefficient d'amortissement visqueux, l'équation dynamique prend la forme:

$$ki - mlJx = (Bs^2 + bs)a. \quad (6.25)$$

(*) Paragraphe rédigé par H. BERGER.

L'intégration de cette expression donne l'angle de décalage α du pendule traduit en tension par le détecteur de position de constante v . Cette tension amplifiée avec un gain G , démodulée, filtrée et appliquée au moteur couple d'inductance L et de résistance r en série avec une résistance de mesure R , fournit le courant continu i qui génère le couple moteur ki .

Quelles sont les difficultés que comporte cette boucle?

Il n'y a pas de problème de stabilité, car bien qu'elle soit du quatrième ordre on pourrait toujours, si cela était nécessaire, inclure un réseau de correction pour moduler la fonction de transfert. Les vrais problèmes sont ceux résultant du bruit du détecteur, et du bruit ramassé par la liaison détecteur-amplificateur, qui se traduisent par un décalage de la position zéro du détecteur et de tout ce que cela comporte comme inconvénients.

Il ne faut pas perdre de vue qu'il s'agit de mesurer mieux que 10^{-4} g, c'est-à-dire en gros quelques secondes d'arc. Une tension, aussi petite soit-elle, de même fréquence que celle qui excite le détecteur et donc que celle qui en sort, sera transformée en un courant continu donc en un couple qui ne pourra être compensé que par une inclinaison du pendule c'est-à-dire par un décalage de sa position zéro.

Par conséquent le maximum doit être fait (torsadage, blindage et raccourcissement des liaisons) pour que seule la tension du détecteur parvienne à l'entrée de l'amplificateur. Il s'agit là de problèmes bien connus des gens qui ont l'habitude de s'occuper de systèmes complexes.

Une excellente solution consiste à incorporer, au ras de l'accéléromètre sinon à l'intérieur, un préamplificateur correspondant aux premiers étages de l'amplificateur G (figure 6-12).

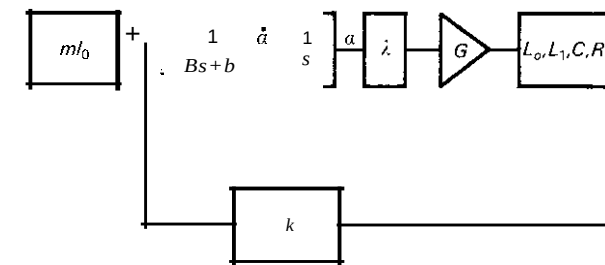


Figure 6-12. Diagramme fonctionnel du bouclage analogique d'un accéléromètre.

6.4.2 CODAGE DE L'ACCÉLÉROMÈTRE

La sortie de la boucle analogique est le courant i traversant la résistance de mesure R en série avec le moteur couple de l'accéléromètre.

Un accéléromètre est rarement utilisé seul, et les calculs que nécessite son incorporation dans un système de guidage ou de navigation sont à mener avec

une précision telle que la plupart du temps ils sont effectués par un calculateur digital. Le problème se pose alors de fournir à celui-ci l'information d'accélération sous forme d'incrément de vitesse.

Plusieurs solutions permettent de résoudre plus ou moins bien ce problème de codage courant-incrément. Parmi ces solutions, celle qui consiste à transformer le courant en une fréquence est particulièrement utilisée car elle permet d'obtenir une précision et une stabilité de codage supérieure à 10^{-4} .

Considérons le schéma de la figure 6-13.

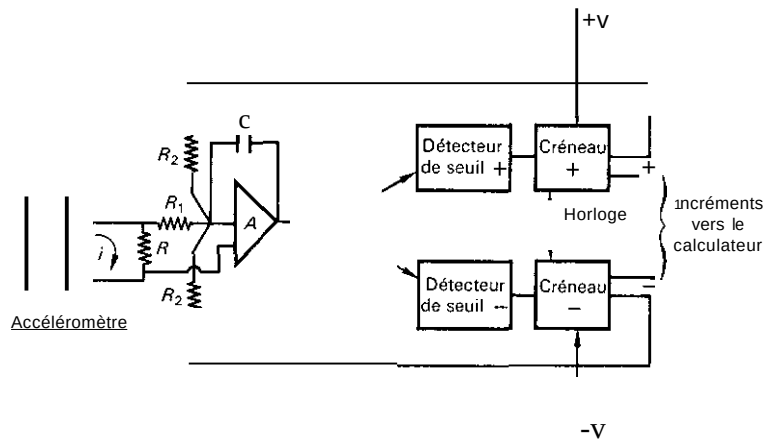


Figure 6-13. Codeur courant-fréquence.

On voit que le courant i de l'accéléromètre est intégré par un amplificateur G bouclé en intégrateur par le réseau RI C . La sortie de l'intégrateur est appliquée à deux détecteurs de niveau. Supposons que la tension aux bornes de $R1$ soit négative, la sortie de G sera une tension croissant positivement. A l'instant où elle deviendra égale à un seuil prédéterminé σ_+ le détecteur de seuil permettra à l'horloge de laisser passer vers l'entrée de l'amplificateur à travers la résistance $R2$, pendant un temps T , la tension de référence $+V$.

La sortie de G décroîtra négativement vers zéro, le détecteur de seuil sera bloqué, et à la fin du temps T l'entrée de l'intégrateur ne recevra plus que la tension Ri seule.

Pour une accélération constante i , la sortie de G est donc une succession de dents de scie, et à chaque front raide de cette tension, correspond l'envoi vers le calculateur d'un incrément de vitesse (et non pas d'un incrément d'accélération puisqu'il y a eu intégration de i par rapport au temps).

La sortie est donc un nombre d'incrément de vitesse. La fréquence de ces incréments est représentative de l'accélération, mais comme on ne cherche à mesurer l'accélération que pour pouvoir en déduire la vitesse, cette opération

d'intégration à l'intérieur même du codeur soulage d'autant les calculs à faire par le calculateur digital.

Le poids de chaque incrément vu par le calculateur est $P = VT/Ri$ et l'on voit avec quel soin doivent être définis V et T si l'on veut que P soit défini à 10^{-4} près.

Les tensions de référence $+V$ et $-V$ doivent avoir un taux de régulation de quelques 10^{-5} , les temps T , c'est-à-dire l'horloge et les circuits de déblocage des tensions de référence doivent être particulièrement stables; T étant de l'ordre de 250 microsecondes, on voit que $10^{-5} T$ ne dure que 2,5 nanosecondes. Un temps T stable à quelques 10^{-5} signifie donc que les circuits de déclenchement et les interrupteurs sont stables à quelques nanosecondes près.

Les paramètres importants de l'amplificateur G sont:

- sa tension de faux zéro ramenée à l'entrée, qui ne peut être compensée que par un décalage de zéro du pendule;
- son gain qui, doit être de l'ordre de 50000 si l'on veut que la contribution à l'erreur de l'ampli seul soit de l'ordre de 2.10^{-5}
- son impédance d'entrée qui doit être stable.

De même, les résistances $R1$ et $R2$ influent directement sur la précision du codage.

6.4.3 BOUCLAGE DIGITAL

Comme on l'a vu au paragraphe 5.4, le moteur couple à courant continu de l'accéléromètre n'étant pas différent de celui d'un gyroscope, on peut imaginer de ramener le pendule à zéro en envoyant des impulsions de courant continu de sens voulu, d'intensité et de durée calibrées.

Pour cela, la tension du détecteur de position de l'accéléromètre est convenablement amplifiée, démodulée, et déclenche l'envoi des impulsions vers le moteur couple.

Les deux variantes a et b du paragraphe 5.4 sont utilisées avec une nette préférence pour la variante b et le schéma d'interrupteurs à diodes de la figure 5-28.

Dans le cas du bouclage digital, on demande au pendule de l'accéléromètre de jouer parfaitement le rôle d'intégrateur. Son fonctionnement dynamique doit être rigoureusement symétrique, toute dissymétrie introduit l'équivalent d'une accélération constante et la mesure est faussée d'autant.

6.5 Erreurs

6.5.1 INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE SUR LE FACTEUR D'ÉCHELLE

Les paramètres sensibles à l'effet de la température et susceptibles de modifier la valeur du facteur d'échelle sont: la longueur du pendule, la densité du

liquide visqueux d'amortissement, l'induction magnétique dans l'entrefer des aimants, et la longueur du bobinage du moteur-couple. Il est possible de les ajuster pour obtenir autour de la température de fonctionnement choisie une compensation de leurs effets.

6.5.2 INFLUENCE DE LA RAIDEUR DES CHARNIÈRES

Les charnières introduisent un couple mécanique donné par l'expression

$$M = k_m(\alpha - \alpha_m) \quad (6.26)$$

dans laquelle

α = déflexion du pendule par rapport au zéro électrique,

α_m = position angulaire du zéro mécanique par rapport au zéro électrique.

L'équation d'équilibre devient, lorsque l'on prend en considération ce couple

$$ki + km(\alpha - \alpha_m) = kSf_x' \quad (6.27)$$

Si P est la raideur réduite des charnières:

$$\rho = \frac{k_m}{kS} \quad (6.28)$$

il vient

$$ki + kS\rho\left(\frac{f_x}{R} - \alpha_m\right) = kSf_x \quad (6.29)$$

soit

$$i = S\left(1 - \frac{\rho}{R}\right)f_x + S\rho\alpha_m. \quad (6.30)$$

Le facteur d'échelle est modifié par le facteur $(1 - \rho/R)$ et un biais de mesure B s'introduit:

$$B = \rho\alpha_m. \quad (6.31)$$

Le biais est donc une erreur de mesure d'accélération due à la raideur des charnières.

6.5.3 ERREUR D'ORIENTATION DE L'AXE D'ENTRÉE PAR RAPPORT AU PLAN DE POSE

On définit l'erreur d'orthogonalité de l'axe d'entrée par rapport au plan de pose par les angles β et γ . β est l'angle que fait l'axe d'entrée avec le plan normal au plan de pose passant par l'axe du pendule. γ est l'angle que fait l'axe d'entrée avec le plan normal au plan de pose passant par l'axe des charnières. Ces erreurs d'orientation de l'axe d'entrée conduisent à un couplage d'axes.

6.5.4 SEUIL DE MESURE

Le seuil est le plus petit incrément de force spécifique causant une variation de la sortie au voisinage d'une force spécifique nulle. Il est lié à l'hystérésis mécanique des charnières qui entraîne une incertitude d'orientation angulaire de l'axe d'entrée de l'ordre de 0,05 secondes d'arc.

6.5.5 CARACTÉRISTIQUES RÉELLES

Du fait de la présence d'autres phénomènes et en particulier de la dissymétrie des deux aimants, il apparaît que la caractéristique a l'allure représentée sur la figure 6-14 et donnée par l'équation:

$$i = S[B + f_x - B_d f_x^2] \quad (6.32)$$

dans laquelle B_d est l'écart de biais, ou caractéristique parabolique.

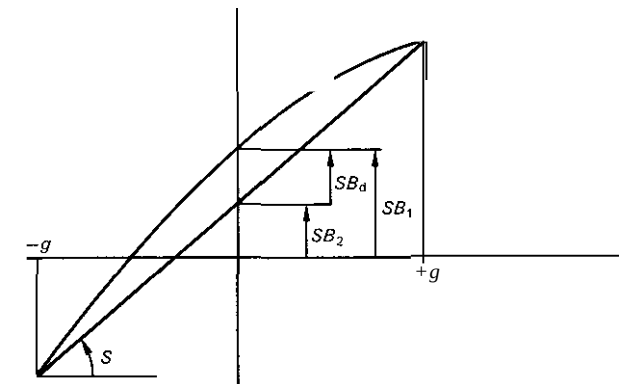


Figure 6-14. Caractéristique statique.

6.6 Méthodes de mesures

On distingue la caractéristique statique que l'on peut mesurer dans le champ de gravitation et la caractéristique dynamique que l'on mesure sur centrifugeuse.

6.6.1 MESURE DE LA CARACTÉRISTIQUE STATIQUE

Elle s'effectue en plaçant l'appareil dans le champ de gravitation suivant des positions successives appelées positions cardinales (voir figures 6-15 et 6-16). L'accéléromètre est monté sur un plateau dont le plan tourne autour d'une

droite horizontale; il peut prendre successivement les 4 positions définies par la figure 6-16.

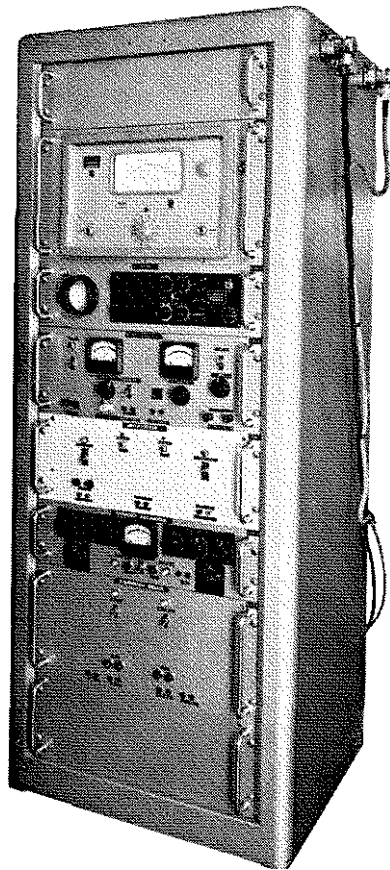


Figure 6-15. Stand de mesure.

— En position 1: le plan de pose de l'accéléromètre est rigoureusement vertical. L'intensité du courant envoyé dans le moteur couple est proportionnelle au biais (B_1) et à la composante de la gravité due à l'erreur de perpendicularité entre l'axe d'entrée et le plan de pose (y); il vient l'équation (voir figure 6-14)

$$i_{(+y)} = 5(B_1 + yg). \quad (6.33)$$

- En position 2: le plan de pose a tourné rigoureusement de 180° , il vient:

$$i_{(-y)} = 5(B_1 - yg). \quad (6.34)$$

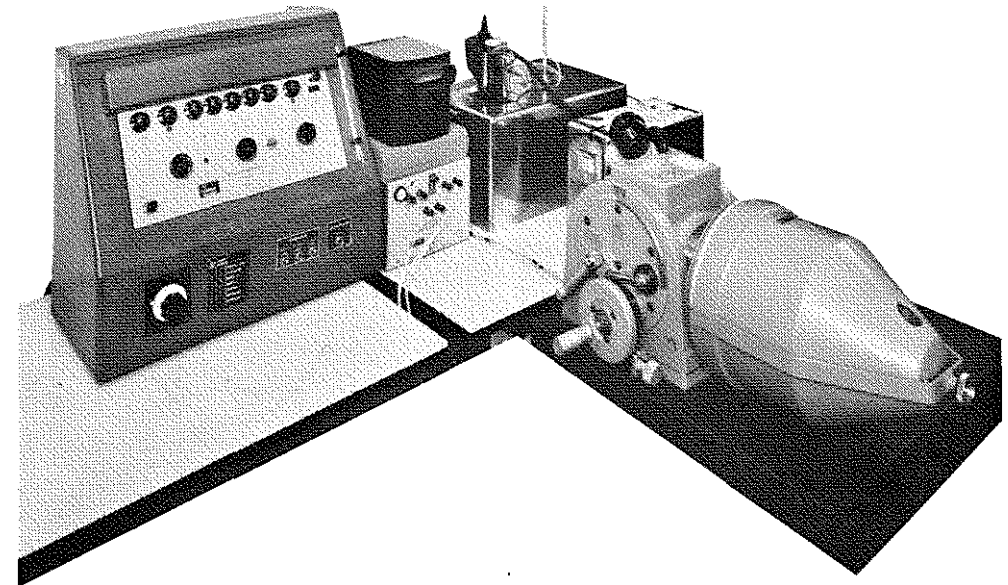


Figure 6-15. Stand de mesure (suite).

De ces deux équations, on déduit:

$$B_1 = \frac{1}{25} (i_{(+y)} + i_{(-y)}). \quad (6.35)$$

$$y = \frac{1}{25g} (i_{(+y)} - i_{(-y)}). \quad (6.36)$$

— En position 3: le plan de pose est rigoureusement horizontal, l'accéléromètre est soumis à une force spécifique représentant l'action du champ de gravitation local; il y a lieu de tenir compte de la latitude et de l'altitude pour la mesure précise du facteur d'échelle; l'équation d'équilibre est la suivante (voir figure 6-14):

$$i_{(+g)} = S(B_2 + g) \quad (6.37)$$

- En position 4: après avoir fait tourner le plan de pose de 180° par rapport à la position 3, on obtient:

$$i_{(-g)} = S(B_2 - g). \quad (6.38)$$

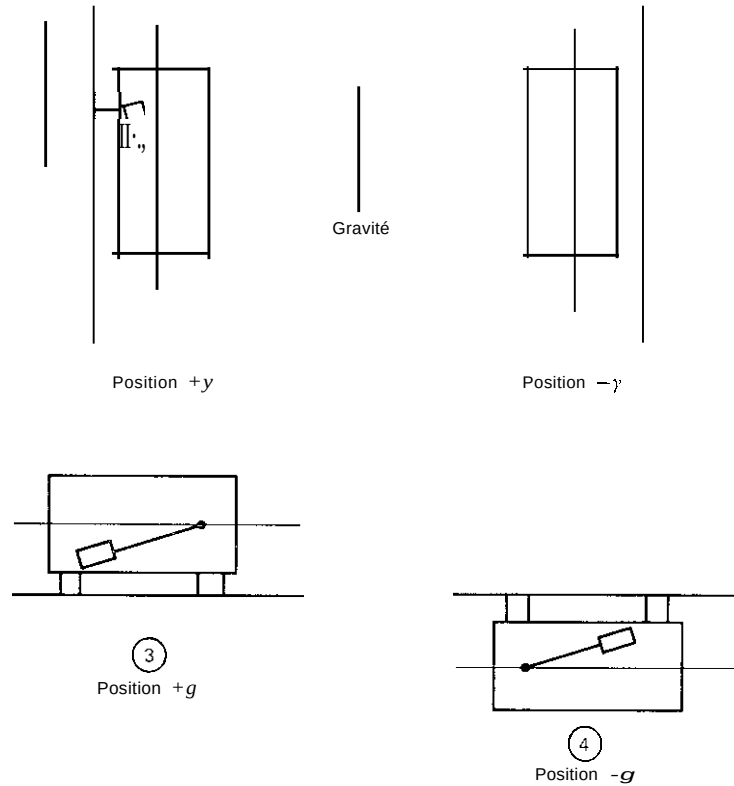


Figure 6-16. Positions cardinales 1-2-3-4.

De ces deux équations, on déduit le facteur d'échelle S et B_2 :

$$S = \frac{1}{2g} (i_{(+g)} - i_{(-g)}) \quad (6.39)$$

$$B_2 = \frac{1}{2S} (i_{(+g)} + i_{(-g)}). \quad (6.40)$$

On en déduit

$$B_d = B_1 - B_2. \quad (6.41)$$

En ce qui concerne la mesure des composantes de l'axe d'entrée sur le plan de pose (voir paragraphe 6.5.3), les positions 1 et 2 permettent de déterminer y . Pour mesurer [3], l'accéléromètre est positionné dans l'espace suivant la position

5 puis suivant la position 6 (voir figure 6-17); il vient:

$$i_{(+\beta)} = S(B_1 + \beta g) \quad (6.42)$$

$$i_{(-\beta)} = S(B_1 - \beta g) \quad (6.43)$$

d'où

$$\beta = \frac{1}{2Sg} (i_{(+\beta)} - i_{(-\beta)}) \quad (6.44)$$

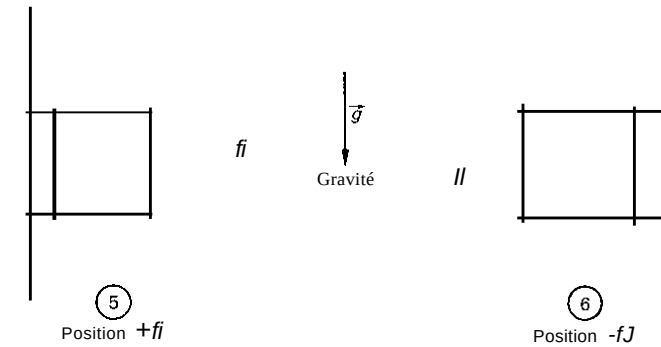


Figure 6-17. Positions cardinales 5-6.

6.6.2 MESURE DE LA CARACTÉRISTIQUE DYNAMIQUE

L'appareil est monté à l'extrémité du bras d'une centrifugeuse de grande précision (classe 10^{-6}). A une vitesse constante et stabilisée, on mesure le courant correspondant à l'équilibre du pendule. On peut alors tracer la caractéristique dynamique de 0 à ± 20 g par valeurs discrètes de force spécifique. Cette mesure est particulièrement délicate, car elle suppose une vitesse instantanée parfaitement constante. Elle suppose aussi la mesure précise du rayon de giration à quelque 10^{-6} près (0,01 mm pour 10 mètres).

La mesure statique du B_d qui permet de déterminer la caractéristique dynamique au-delà de ± 1 g à l'aide de l'expression (6.32) constitue une approche très satisfaisante.

6.7 Performances

Le tableau 6-1 présente les valeurs typiques des performances d'un accéléromètre inertiel pendulaire du type 10625 (SAGEM).

TABLEAU 6-1

Performances d'un accéléromètre SAGEM 10625

Domaine de mesure	$\pm 20 \text{ g}$
Biais B_1	$\pm 10^{-4} \text{ g}$
Caractéristique parabolique Bd	$\pm 10^{-5} \text{ g/g}^2$
Facteur d'échelle	mA/g
Erreur de facteur d'échelle	10^{-1}
Seuil	10^{-7} g
Bande passante à 3 dB	120 Hz
Vieillessement du facteur d'échelle	$10^{-4}/\text{an}$
Poids	120 g
Volume	36 cm^3

Le tableau 6-2 présente les valeurs typiques des performances d'un accéléromètre gyroscopique balourdé.

TABLEAU 6-2

Performances d'un accéléromètre gyroscopique ha/ourdé

Moment cinétique du gyroscope	$H = 10^5 \text{ C. G. S.}$
Valeur du balourd	$md = 10^4 \text{ dyne-cm}$
Facteur d'échelle de l'accéléromètre	$= 0,1 \text{ rd/sig}$
Stabilité du facteur d'échelle	10^{-5}
Biais	$= 10^{-5} \text{ g}$
Poids	$\approx 500 \text{ g}$
Volume	$\approx 100 \text{ cm}^3$

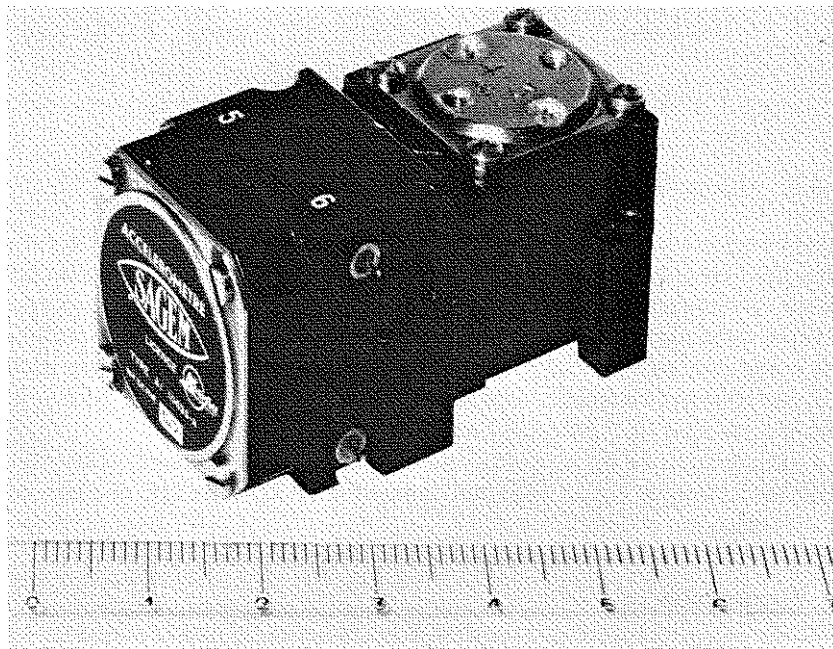


Figure 6-18. Accéléromètre SAGEM 10625.

CHAPITRE 7

PLATES-FORMES INERTIELLES

P. LLÛRET

7.1 Généralités

7.1.1 RÔLE DE LA PLATE-FORME

Dans tout système inertiel, on se propose de mesurer la force spécifique d'un mobile, en grandeur et direction. Deux types de solution sont possibles pour effectuer cette mesure:

a) La solution du type «strap-down»

Les accéléromètres sont ici directement fixés sur le véhicule et mesurent la force spécifique dans un système d'axes lié à ce véhicule. Pour connaître à chaque instant l'orientation de ce système d'axes par rapport à un trièdre de calcul, il faut fixer sur le véhicule des gyroscopes capables de mesurer les rotations de leur support avec une grande précision et dans un grand domaine de mesure (seuil inférieur à 0,01 degré par heure, valeur maximale de l'ordre de 100 degrés par seconde pour un avion). Ce type de solution est encore au stade expérimental et exige des progrès dans la technologie des gyroscopes, ainsi que dans le domaine des calculateurs auxquels on demande de grandes rapidités de calcul (nécessité d'une fréquence de récurrence élevée due aux variations angulaires rapides du trièdre de mesure).

b) La solution avec plate-forme

Les accéléromètres sont alors montés sur un support isolé des mouvements angulaires de l'avion. Ce support, appelé cœur, est suspendu «à la cardan» et possède une liberté angulaire totale par rapport à l'avion.

Des gyroscopes, senseurs de rotation par rapport à l'«espace inertiel», sont montés sur le cœur. Ils permettent de déceler toute rotation de leur support (qui est aussi celui des accéléromètres) provoquée par des couples perturbateurs. Leurs signaux sont utilisés pour déclencher l'action corrective qui rétablit l'orientation adéquate du cœur de la plate-forme.

La plate-forme stabilisée par gyroscopes (ou «asservie Sur gyroscopes») est ainsi le senseur inertiel qui permet la mesure des forces spécifiques, en grandeur et direction. Tous les systèmes inertiels «industriels» ont jusqu'ici mis en œuvre des plates-formes stabilisées par gyroscopes.

7.1.2 DESCRIPTION FONCTIONNELLE D'UNE PLATE-FORME

Les plates-formes inertielle pour avions ont la configuration classique à «quatre axes de cardan».

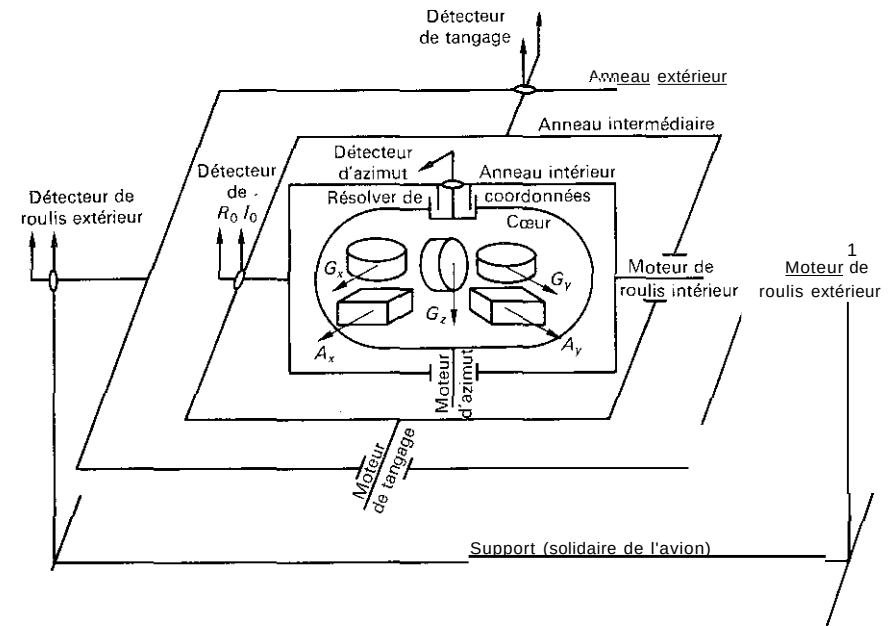


Figure 7-1. Schéma de principe d'une plate-forme à quatre axes de cardan.

On trouve, en partant de l'intérieur:

a) Le cœur

C'est le support des accéléromètres et des gyroscopes. Il peut tourner autour d'un axe C (axe d'azimut) porté par un palier de l'anneau de cardan intérieur. Sur cet axe sont montés:

- un moteur, dont le stator est solidaire de l'anneau intérieur et le rotor solidaire du cœur,
- un détecteur de position angulaire (synchro-transmetteur) dont le stator est solidaire de l'anneau intérieur, et le rotor solidaire du cœur,
- un résolveur (le «résolveur de coordonnées») dont le rôle est étudié en 7.1.3 c. et 7.4.2.

b) *L'anneau inférieur*

Cet anneau supporte le cœur par un palier qui matérialise l'axe d'azimut. Il possède un axe perpendiculaire à l'axe d'azimut (l'axe de «roulis intérieur»), qui prend appui sur un palier de l'anneau de cardan intermédiaire. Sur l'axe de roulis intérieur sont montés un moteur et un détecteur de position angulaire.

c) *L'anneau intermédiaire*

Il supporte l'anneau intérieur par un palier qui matérialise l'axe de «roulis intérieur». Il possède un axe perpendiculaire à l'axe de roulis intérieur (l'axe de tangage), qui prend appui sur un palier de l'anneau de cardan extérieur. Sur l'axe de tangage sont montés un moteur et un détecteur de position angulaire.

d) *L'anneau extérieur*

Il supporte l'anneau intermédiaire par un palier qui matérialise l'axe de tangage. Il possède un axe perpendiculaire à l'axe de tangage (l'axe de «roulis extérieur») qui prend appui sur un palier aligné avec l'axe longitudinal de l'avion. Sur l'axe de roulis extérieur sont montés un moteur et un détecteur de position angulaire.

La configuration à quatre axes de cardan est en toute rigueur surabondante: toute position angulaire relative du cœur par rapport à la cellule de l'avion peut être obtenue par une infinité de positions relatives des anneaux de cardan (voir 7.5.2). D'un point de vue statique, une plate-forme à trois axes de cardan serait suffisante. Mais des considérations dynamiques conduisent à préférer la solution «4 axes» pour les systèmes inertiels des avions. On montre d'ailleurs que la configuration à quatre axes permet de conserver la capacité «toutes attitudes» de la plate-forme même lorsqu'on restreint la liberté angulaire sur deux des axes (voir 7.5.3).

C'est ainsi que le débattement autour de l'axe de roulis intérieur peut être limité à 15 degrés de part et d'autre de la position médiane. Sur l'axe de tangage, on peut se contenter d'un débattement légèrement supérieur à 90° de part et d'autre de la position médiane ($\pm 110^\circ$ par exemple). Seuls les axes d'azimut et de roulis extérieur doivent avoir une liberté angulaire totale.

La «position canonique» de la plate-forme est celle pour laquelle l'axe de roulis intérieur et l'axe de roulis extérieur sont confondus, l'axe d'azimut étant perpendiculaire à l'axe de tangage.

Les détecteurs angulaires de chaque axe sont réglés pour indiquer «zéro» dans cette position (la position du zéro du détecteur de roulis extérieur est donc arbitraire suivant cette définition: on la règle en pratique pour que, la plate-forme étant montée sur l'avion et indiquant zéro sur tous les détecteurs, l'axe d'azimut se trouve vertical).

Comme on le verra en 7.4.3, l'indication du détecteur angulaire de roulis intérieur est maintenue constamment nulle à l'aide d'un asservissement, lorsqu'on est en fonctionnement normal. Cela suffit pour rendre les trois axes intérieurs (azimut, roulis, tangage) orthogonaux deux à deux.

On pourra donc par la suite considérer la plate-forme 4 axes comme une plate-forme 3 axes toujours maintenue en position canonique, et portée par un anneau pivotant «surabondant». On notera que, selon l'attitude de l'avion, l'axe de pivot de cet anneau peut se trouver confondu avec l'axe de roulis intérieur (position canonique) ou avec l'axe d'azimut (position de «passage de la boucle», voir 7.5.3), mais jamais avec l'axe de tangage, puisqu'il lui est orthogonal par construction.

7.1,3 TECHNOLOGIE DES PLATES-FORMES

a) *Le cœur*

Le cœur est une pièce complexe, usmée avec précision dans un matériau géométriquement stable (généralement, alliage d'aluminium apte au moulage). Il peut comporter deux ou trois alésages destinés à recevoir des gyroscopes dont le boîtier est généralement cylindrique.

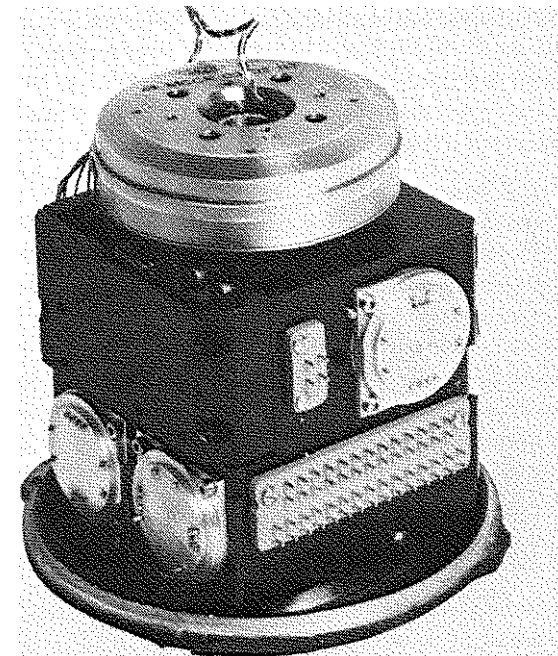


Figure 7-2. Cœur d'une plate-forme inertielle d'avion.

Deux ou trois plans de pose reçoivent les accéléromètres. Les axes d'entrée de gyroscopes et les axes sensibles des accéléromètres sont positionnés avec des erreurs qui ne dépassent pas quelques minutes d'arc.

Le cœur d'une plate-forme en état de fonctionnement se trouve à une température relativement élevée (de l'ordre de 70°C).

Les gyroscopes, par la dissipation des moteurs de leurs toupies, (quelques watts au total) constituent en effet un point chaud. De plus, on assure sur le cœur une régulation de température dont l'élément de commande est un apport contrôlé de chaleur par résistances électriques. La température de consigne de cette régulation à sens unique doit donc être choisie suffisamment élevée pour permettre le fonctionnement éventuel en ambiance chaude.

On trouve sur le cœur certains circuits électroniques: circuits de régulation thermique, préamplificateurs connectés aux détecteurs des gyroscopes ou accéléromètres, etc.

Les masses disposées sur le cœur sont ajustées pour obtenir l'équilibre statique autour de son axe de rotation (axe d'azimut). Les erreurs d'équilibrage se traduisent par des couples qui n'excèdent pas 50000 dynes cm. Les couples de frottement sur ce même axe vont de 30000 à 150000 dynes cm, suivant les réalisations.

Un paramètre important du cœur est son moment d'inertie par rapport à l'axe d'azimut (de 5×10^3 à 5×10^4 g cm²) : il conditionne la raideur qui peut être obtenue pour la chaîne d'asservissement de cet axe.

b) Les détecteurs d'angle

Les détecteurs d'angle montés sur chaque axe sont des synchro-transmetteurs ou résolver-transmetteurs plats, généralement pré-assemblés en cartouches qui jouent le rôle de paliers à billes (roulements doubles précontraints), et qui comportent également les contacts tournants permettant le passage des signaux électriques d'un anneau de cardan à l'autre.

Ces synchro-machines sont le plus souvent excitées avec une tension alternative de fréquence 400 Hz. Parfois, l'utilisation d'un enroulement d'excitation auxiliaire alimenté par un potentiomètre permet l'ajustement électrique du zéro du synchro-transmetteur. Le «facteur d'échelle» autour du zéro (rapport de la tension délivrée à l'écart angulaire qui la fait apparaître) est de l'ordre de 200 mY/degré.

c) Le résolver de coordonnées

Ce résolver, monté sur l'axe d'azimut, n'est pas un indicateur d'angle, mais un organe de calcul.

Il possède deux enroulements perpendiculaires sur le stator (ou primaire) et deux enroulements perpendiculaires sur le rotor (ou secondaire). Les deux enroulements primaires étant excités par deux tensions alternatives en phase R_I et R_Z , et le rotor ayant la position angulaire ψ , les tensions alternatives

recueillies aux deux secondaires sont en phase avec R_I et R_Z (ou en opposition de phase, suivant la valeur de ψ) et valent:

$$S_1 = R_1 \cos \psi - R_2 \sin \psi \quad (7.1)$$

$$S_2 = R_1 \sin \psi + R_2 \cos \psi \quad (7.2)$$

Le résolver de coordonnées réalise donc l'opération qui permet de passer des coordonnées d'un vecteur dans un système d'axes (R_1 et R_2) à ses coordonnées dans un autre système d'axes décalé de l'angle ψ (l'angle ψ est ici l'angle d'azimut).

d) Les moteurs de cardans

Les moteurs de cardans des plates-formes modernes sont des moteurs couples plats, à attaque directe. On ne trouve pratiquement plus de moteurs-réducteurs à engrenages.

Les moteurs couples utilisés peuvent être de deux types:

— moteurs diphasés, possédant un enroulement d'excitation alimenté par une tension alternative constante, et un enroulement de commande alimenté par une tension variable en quadrature avec la précédente. Ils présentent l'inconvénient d'une dissipation thermique non négligeable dans l'enroulement d'excitation.

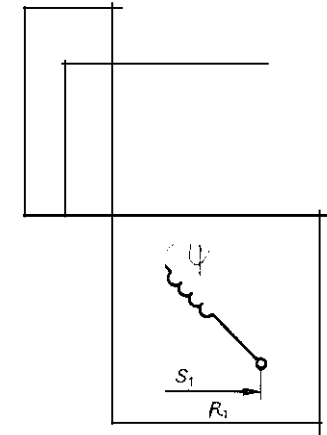


Figure 7-3. Schéma de principe du résolver de coordonnées.

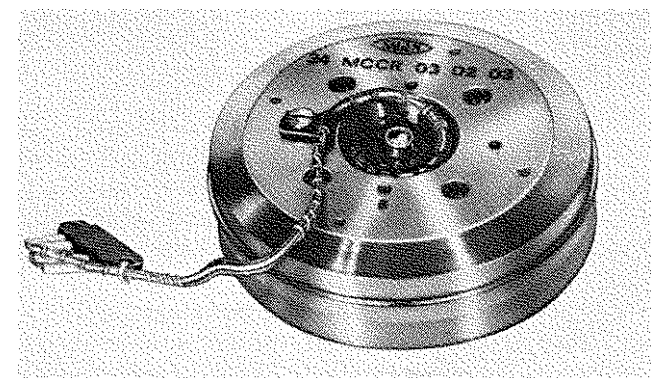


Figure 7-4. Moteur couple à courant continu, monté en cartouche.

moteurs à aimant permanent commandés en courant continu, dont l'emploi tend à se généraliser dans les plates-formes inertielles. Ils développent un couple proportionnel au courant qui les traverse (et changeant avec le sens du courant) et possèdent une force contre-électromotrice négligeable aux vitesses de rotation usuelles. Le tableau de la figure 7-5 donne les paramètres typiques d'un moteur couple à courant continu.

Résistance	50 Ω
Inductance	2×10^{-2} henry
Couple maximal	2×10^6 dyne cm
Courant développant le couple maximal	1A
Force contre-électromotrice développant	0,4 v/rd/s

Figure 7-5. Paramètres d'un moteur couple à courant continu.

Les moteurs couples sont généralement montés en cartouches, comme les détecteurs d'angle: ils jouent alors le rôle de paliers à billes et assurent les liaisons électriques d'un anneau de cardan à l'autre.

e) Les liaisons électriques

Les liaisons électriques à établir entre les composants électro-mécaniques et électroniques du cœur (ou des cardans) et l'extérieur de la plate-forme sont nombreuses: 50 à 60 fils peuvent entrer dans la plate-forme, dont 30 à 40 arrivent sur le cœur.

Au niveau des axes ayant une liberté angulaire totale, les liaisons se font par contacts tournants qui se décomposent en deux parties.

— Un collecteur, pièce cylindrique de faible diamètre (3 ou 4 mm) constituée par un empilage de rondelles isolées entre elles et dont la périphérie de chacune constitue une piste destinée à assurer le contact avec un balai. La partie centrale du collecteur contient un toron de fils dont chacun est connecté à l'une des pistes. Celles-ci, au pas de 0,7 mm, et parfois encore moins, sont faites d'un métal inaltérable (alliage d'or généralement).

— Un porte-balais, qui sert de support à une rangée de balais filiformes et dont sortent les fils qui leur sont connectés. Le porte-balais est centré sur le collecteur au moyen de roulements à billes ou de pivots et l'ensemble fait fréquemment partie d'une cartouche comprenant un détecteur d'angle ou un moteur couple. Les intensités tolérées dans ces liaisons sont de l'ordre de 1 ampère.

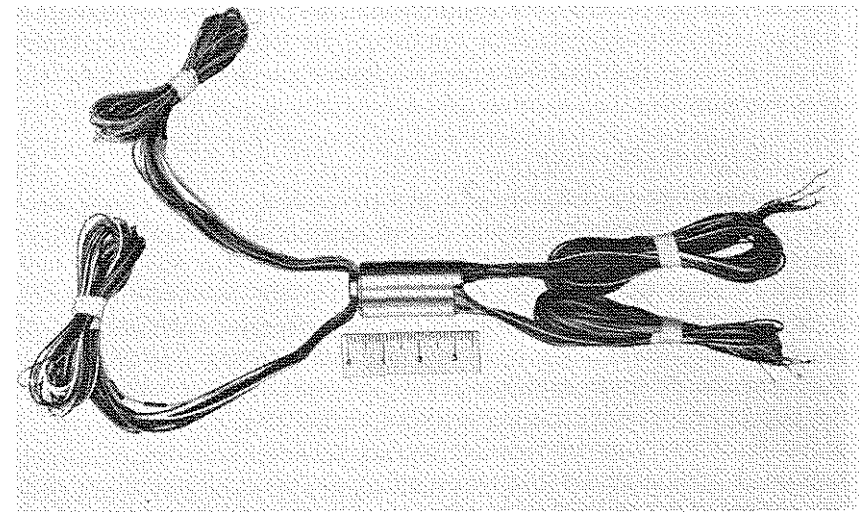


Figure 7-6. Ensemble d'un collecteur et d'un porte-balais préassemblés.

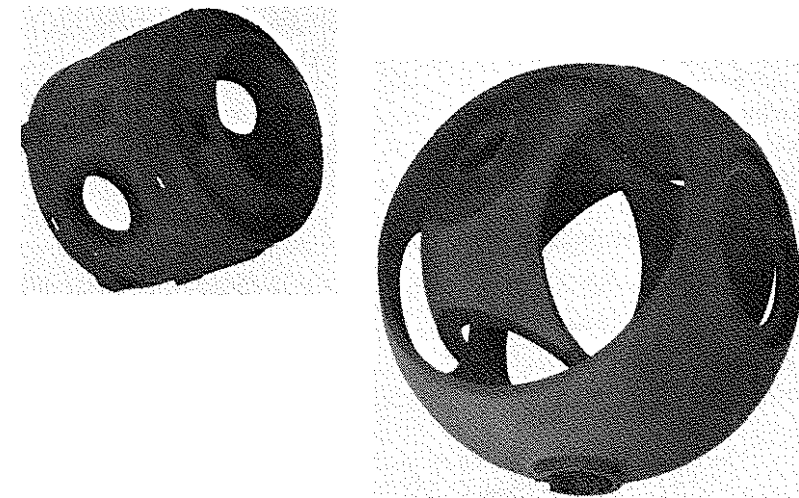


Figure 7-7. Cardans d'une plate-forme miniature.

Pour les axes de roulis intérieur et de tangage, dont l'angle de liberté est limité (respectivement $\pm 15^\circ$ et $\pm 110^\circ$), on remplace souvent les contacts tournants par des liaisons flexibles, moins onéreuses et d'une plus grande longévité. Elles sont généralement constituées par un ruban de circuit imprimé à traces parallèles dont le diélectrique est doué d'une bonne résistance mécanique et thermique.

f) *Les anneaux de cardan*

Les anneaux de cardan sont des pièces moulées d'alliage léger dont on n'usine que les alésages de paliers et quelques surfaces de référence en petit nombre. Leur équilibrage statique autour des axes qui les supportent est néanmoins assez bon (couples résiduels de l'ordre de 50000 dyne cm). Le couple de frottement sur les axes de cardans, dû principalement aux balais des moteurs à courant continu, est de l'ordre de 100000 à 200000 dyne cm.

Les anneaux de roulis extérieur et tangage ont une forme affectant l'allure d'un segment de sphère creuse: c'est la forme qui assure à la fois la meilleure rigidité et la meilleure imbrication géométrique des anneaux au cours des rotations. L'anneau de roulis intérieur prend souvent la forme d'une enceinte close contenant le cœur. Celui-ci se trouve alors enfermé dans une petite étuve où il est plus facile d'assurer la régulation thermique et l'homogénéité des températures. Un soin particulier est apporté à l'étude du montage et du démontage du cœur: il faut pouvoir facilement l'extraire de l'anneau de roulis intérieur ou l'y remonter, pour des raisons évidentes de maintenance.

Le palier de roulis extérieur, qui supporte l'ensemble de la plate-forme, est en général porté par une suspension élastique (anneau d'élastomère) qui assure le filtrage des vibrations de l'avion. Parfois, de minces anneaux élastiques sont également prévus au niveau de chaque palier de cardan.

La masse d'une plate-forme pour avions (cœur, trois anneaux de cardan, et suspension de l'anneau extérieur) est de l'ordre de 8 kg. Un paramètre important des anneaux de cardan est leur moment d'inertie autour des divers axes de rotation: il conditionne directement le calcul des asservissements de plate-forme.

Des ordres de grandeur sont donnés par le tableau de la figure 7-8.

Azimut	$3 \times 10^4 \text{ g cm}^2$
Roulis intérieur	10^5 g cm^2
Tangage	$2 \times 10^5 \text{ g cm}^2$
Roulis extérieur	$2 \times 10^5 \text{ g cm}^2$

Figure 7-8. Moments d'inertie couplés à chaque moteur (position canonique).

Ce tableau donne, pour une plate-forme en position canonique, le moment d'inertie global qui est couplé à chaque moteur de cardan. Pour le moteur d'azimut, il s'agit simplement du moment d'inertie du cœur autour de l'axe d'azimut.

Mais pour le moteur de roulis intérieur par exemple, il s'agit de la somme du moment d'inertie du cardan intérieur autour de l'axe de roulis intérieur, et du moment d'inertie du cœur par rapport à ce même axe, le cœur se trouvant en position canonique (synchro-transmetteur d'azimut à zéro). Il est facile de retrouver, de proche en proche, les moments d'inertie élémentaires qui ont servi à établir le tableau de la figure 7-8.

g) *Le boîtier de plate-forme*

La plate-forme est enfermée dans un boîtier qui, au minimum, est étanche aux poussières et à l'humidité. Dans certaines applications (système monté en soute d'avion non pressurisée) le boîtier doit même être étanche aux gaz, pour conserver autour de la plate-forme une atmosphère permettant l'écoulement des calories vers l'extérieur par convection.

Dans ce cas, le boîtier est rempli d'hélium (bon conducteur de la chaleur) ou d'un gaz inerte et sec (azote par exemple). Le boîtier peut avoir une forme extérieure cylindrique (structure plus résistante pour fonctionner en ambiance non pressurisée) ou parallélépipédique (forme convenant mieux aux boîtiers standardisés de l'aéronautique civile). Dans tous les cas, un échangeur thermique doit être incorporé à une ou plusieurs parois du boîtier. Cet échangeur est généralement constitué de deux parois creuses accolées, dont l'intérieur est garni de lamelles du type «radiateur».

Un ou plusieurs ventilateurs assurent dans la paroi interne la circulation forcée du gaz que contient le boîtier. La partie externe de l'échangeur est alimentée en air frais fourni par l'avion.

h) *L'électronique de plate-forme*

La majeure partie de l'électronique associée à la plate-forme est constituée par les quatre chaînes d'asservissement de cardans (voir 7-3 et 7-4) et par les deux ou trois chaînes d'asservissement des accéléromètres (voir chapitre 6).

Nous donnons ici quelques indications sommaires sur les autres fonctions assurées par l'électronique de plate-forme.

Alimentation des toupies de gyroscopes. Les moteurs de toupies sont des moteurs à bague d'hystérésis, qui démarrent comme un moteur asynchrone, puis se synchronisent sur la fréquence de la tension d'alimentation. Cette fréquence est stabilisée avec une grande précision (de l'ordre de 10^{-4}), ce qui assure un moment cinétique de toupie très stable.

La tension d'alimentation, qui peut être, suivant le cas, triphasée ou diphasée, sinusoïdale ou «en créneaux», est fournie par un générateur piloté par un oscillateur à quartz.

Régulation thermique de la plate-forme. Une étude plus théorique de cette régulation est donnée en 7.2. Les circuits électroniques comportent des circuits de détection de température, qui amplifient le signal continu fourni par une résistance variable en fonction de la température (ou par une thermistance), et des circuits de commande de puissance, qui, agissant sur des thyristors ou des relais (ou parfois des amplificateurs proportionnels, dans les régulations fines de faible puissance), assurent une dissipation thermique contrôlée autour des gyroscopes ou sur le boîtier de plate-forme (dissipation dans des résistances de circuit imprimé collées sur le cœur ou le boîtier).

Conversion des accélérations en incréments de vitesse et commande par impulsions de la précession des gyroscopes. Une étude plus complète de ces circuits de précision (ils font partie des «boucles de Schüleo» est donnée en 14.3.5.2.

Bien qu'étant en réalité un interface entre la plate-forme et le calculateur, ces circuits sont parfois rangés dans la catégorie «électronique de plate-forme». Ils sont en effet très fréquemment implantés dans le boîtier de plate-forme, qui leur assure l'environnement thermique stable qui conditionne leur précision.

7.2 La thermique des plates-formes

7.2.1 NATURE DU PROBLÈME

L'emploi de gyroscopes flottants, seule solution «de qualité inertielle» existant à l'heure actuelle, pose aux constructeurs des plates-formes des problèmes ardu de régulation thermique. Les ordres de grandeur à atteindre sont les suivants:

- assurer, en régime établi, une température du liquide de flottaison de l'ordre de 70°C, avec une stabilité à long terme de 0,2°C et des gradients ne dépassant pas 0,2°C dans tout le volume de liquide;

- acquérir l'état d'équilibre ainsi défini en 15 minutes à partir de la mise sous tension d'une plate-forme «froide» (température initiale du gyroscope égale à 20°C). Cette deuxième condition est sans aucun doute la plus sévère. Elle a pour but de faire coïncider approximativement le temps de mise en œuvre «thermique» avec le temps d'alignement du système inertiel. On peut dire de la sorte que le temps de réponse thermique est «masqué» par le temps d'alignement, et que le temps global de mise en œuvre est optimisé.

7.2.2 MÉTHODES EMPLOYÉES

On résout successivement le problème statique (régulation autour du point d'équilibre défini) puis le problème dynamique (acquisition rapide de cet état d'équilibre).

Le problème statique est principalement conditionné par:

- la puissance dissipée sur les moteurs de toupies des gyroscopes. Cette

puissance est le minimum «incompressible» que peut dissiper une plate-forme en état de marche, et on s'efforce évidemment de la minimiser (de l'ordre de 4 à 5 Watts pour trois gyroscopes),

- l'«impédance thermique» qui s'oppose à l'écoulement de la chaleur dissipée sur les gyroscopes vers l'extérieur (c'est-à-dire l'air externe de ventilation du boîtier de plate-forme). Cette impédance thermique s'exprime en degrés Celsius par watt. Elle est égale à l'écart de température entre le gyroscope et l'air extérieur divisé par la puissance qui s'écoule entre le gyroscope et l'extérieur, en régime établi (analogie: tension = écart de température, courant = flux thermique en watts ou en calories par seconde).

Des facteurs très divers contribuent à former l'impédance thermique ainsi considérée: conduction dans les métaux du gyroscope et du cœur, convection entre le cœur et le gaz contenu dans le boîtier de plate-forme, efficacité de l'échangeur thermique du boîtier de plate-forme, etc.

La plupart de ces facteurs ne sont accessibles que par l'expérimentation, bien que le calcul soit indispensable pour guider les efforts d'amélioration.

Le problème dynamique (acquisition rapide de l'état stable) est principalement conditionné par les «capacités thermiques») que constituent les diverses masses métalliques de la plate-forme et de son boîtier. La chaleur spécifique des alliages d'aluminium étant de l'ordre de 1 joule par gramme et par degré, on peut calculer qu'un cœur de plate-forme pesant 1 kilogramme demande une dissipation thermique de 166 watts pendant 5 minutes pour passer de 20°C à 70°C.

Les cardans et le boîtier devant eux aussi être chauffés, bien qu'à une température moindre, c'est à des puissances de l'ordre de 500 watts qu'on arrive pendant la période initiale de montée en température.

On est donc conduit à séparer en deux catégories les sources de dissipation thermique: chauffage rapide et chauffage d'entretien. Le chauffage rapide n'est enclenché qu'au début de la mise en œuvre et sa coupure doit intervenir à un moment très précis pour que la plate-forme soit voisine de sa température nominale. Ensuite, c'est le chauffage d'entretien (dissipation maximale de l'ordre de 60 ou 80 W) qui assure la régulation.

7.2.3 EXEMPLE DE SOLUTION

La figure 7-9 donne l'exemple d'une solution assez raffinée, comportant trois niveaux de régulation.

Les principales masses métalliques sont représentées par des «capacités thermiques») exprimées en joules par degré Celsius. Le gyroscope a été décomposé en un réseau de capacités (flotteur, liquide, boîtier extérieur) séparées par des impédances thermiques. La dissipation de son moteur de toupie est représentée par une source constante W_t (symbole normalisé d'une source de courant, exprimant ici un flux thermique en watts). Les dissipations de chauffage

rapide (chauffage initial) sont repérées par des symboles W' , les dissipations constantes ou de régulation par des symboles W . Les chaînes de régulation sont représentées par des boucles qui commandent une dissipation W en fonction d'une température détectée T . Sur le boîtier, une régulation particulière commande le débit d'air extérieur dans l'échangeur thermique: celui-ci se comporte comme une impédance thermique variable.

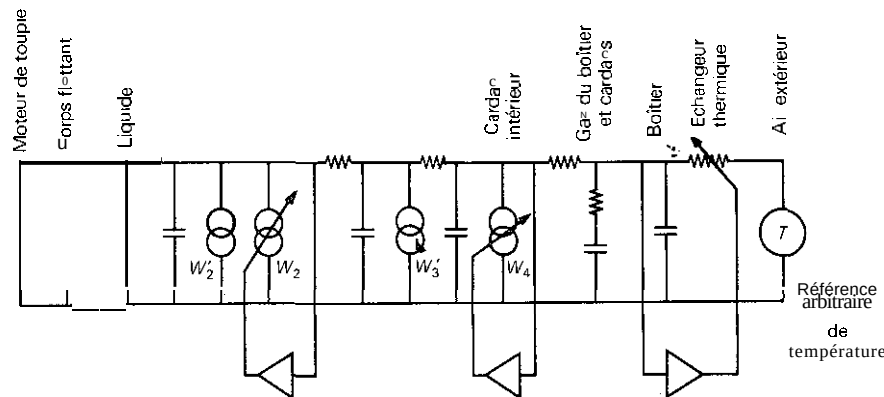


Figure 7-9 Schéma équivalent d'un «système thermique» de plate-forme.

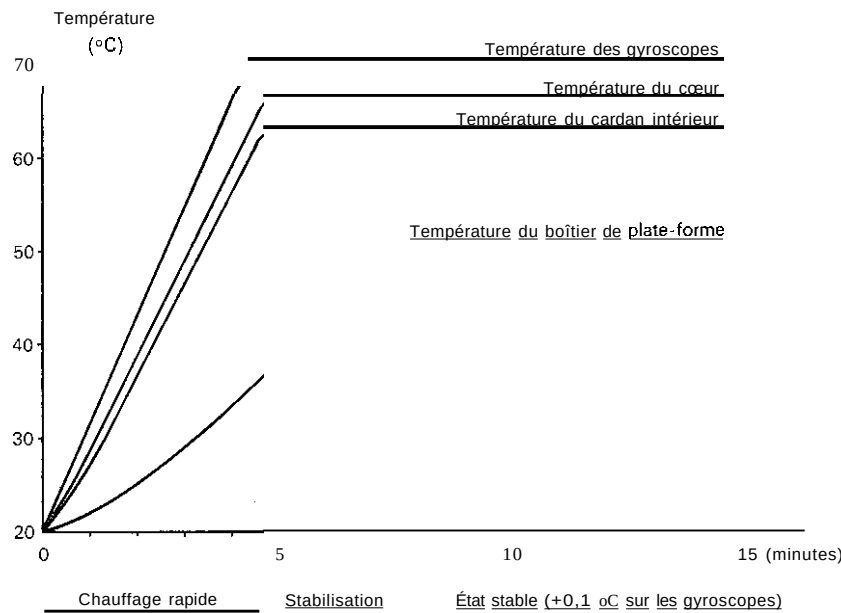


Figure 7-10. Mise en température d'une plate-forme.

Pour obtenir des modèles représentatifs du comportement thermique de la plate-forme, on est rapidement conduit à des réseaux équivalents comportant plusieurs dizaines de capacités et de résistances, avec des lois de régulation complexes.

La simulation sur ordinateur est alors un outil précieux. La figure 7-10 donne un résultat de simulation de réseau équivalent d'une plate-forme (montée en température, puis régulation de la température du gyroscope en fonction du temps).

7.3 Asservissement initial en position canonique

7.3.1 GÉNÉRALITÉS

Au moment de la mise sous tension du système inertiel, la plate-forme peut se trouver dans une position angulaire quelconque. La première opération est de l'amener en position canonique, position pour laquelle tous les détecteurs d'angles de cardans indiquent zéro. Si le boîtier de plate-forme est fixé sur un support horizontal (ceci est vrai en pratique à quelques minutes d'arc près), l'axe d'azimut se trouve alors vertical, les axes sensibles des accéléromètres X et Y se trouvent dans le plan horizontal: la plate-forme est convenablement placée pour le début de l'alignement.

Ce calage initial est fait à l'aide de quatre chaînes d'asservissement (une par axe de cardan), dont les signaux d'entrée sont ceux des détecteurs d'angle et dont les commandes s'appliquent aux moteurs de cardans correspondants. On a donc là quatre asservissements de position classiques, et entièrement indépendants entre eux.

Pendant cette opération, les gyroscopes sont livrés à eux-mêmes, et leur corps flottant a tout lieu d'être «sur butées». L'écart angulaire correspondant se retrouvera comme erreur initiale d'alignement lorsqu'après le calage initial de la plate-forme, on passera en asservissement sur gyroscopes.

7.3.2 BOUCLE D'ASSERVISSEMENT ET RÉSEAU CORRECTEUR

L'entrée de la chaîne est constituée par la différence entre la position angulaire du « stator », α , et celle du « rotor », θ (en allant de l'extérieur vers l'intérieur, chaque anneau de cardan est le « stator » de l'anneau suivant, qui est son « rotor »). Cette différence angulaire est transformée en tension par le détecteur d'angle de gain A . La tension est amplifiée par une chaîne électronique dont le gain statique est K .

Le réseau correcteur, de fonction de transfert $F(s)$ a un gain unité aux basses fréquences. La tension produite est appliquée au moteur de cardan, d'impédance $R + Ls$. Le courant qui en résulte produit un couple (gain du moteur = K_O) qui s'ajoute au couple perturbateur C_e pour faire tourner le rotor de moment d'inertie J . La vitesse de rotation, intégrée, donne la position angulaire du rotor, D .

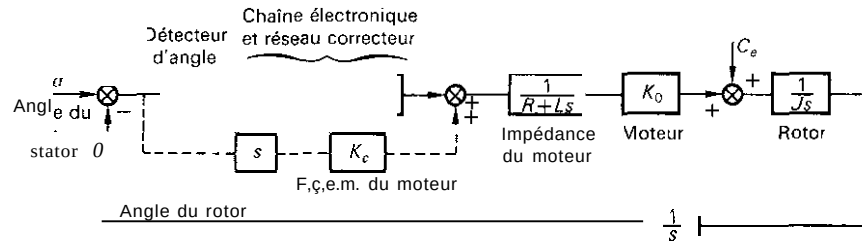


Figure 7-11. Boucle d'asservissement d'un axe de cardan au zéro de son détecteur d'angle.

En pointillés a été représenté l'effet de la force contre-électromotrice du moteur. Elle consiste en une tension proportionnelle à la dérivée de $\alpha - \theta$ (facteur K_c), tension qui s'ajoute à celle de la chaîne électronique (entraînement par courants de Foucault). Cet effet est en pratique négligeable.

La chaîne simplifiée a pour transmittance en boucle ouverte

$$T = \frac{\theta}{\alpha} = \frac{AKK_0}{JR} \frac{1}{s^2} \frac{1}{1 + \frac{L}{R}s} F(s). \quad (7.3)$$

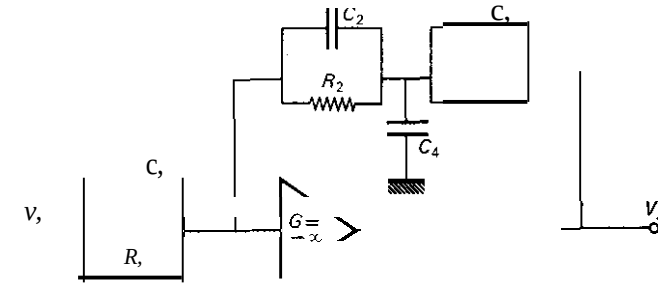
La chaîne comporte deux intégrations et un retard dû à l'inductance du moteur. Sa stabilité n'est assurée qu'avec un réseau correcteur apportant une avance de phase de plus de 45° dans un domaine de fréquences s'étendant au moins sur une octave de part et d'autre de la fréquence de coupure en boucle ouverte. On peut choisir pour le réseau correcteur une fonction de transfert du type

$$F(s) = \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s} \quad \text{avec} \quad T_1 \geq 10 T_2,$$

la pulsation de coupure de la boucle ouverte avec réseau correcteur ayant une valeur voisine de $\sqrt{T_1 T_2}$. Ce réseau, bien que simple, présente l'inconvénient d'un gain élevé (égal à T_1/T_2) pour les hautes fréquences, d'où une amplification des «bruits». Pour réduire cet inconvénient, on peut prendre un réseau correcteur du type:

$$F(s) = \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s} \frac{1 + T_3 s}{1 + T_4 s} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} T_2 \geq 10 T_1 \\ T_1 \geq 10 T_3 \end{matrix}$$

On a alors un retard de phase aux basses fréquences (autour de la pulsation $1/T_2$) et l'avance de phase pour les pulsations comprises entre $1/T_2$ et $1/T_1$. Le gain aux hautes fréquences est réduit (donc la sensibilité aux bruits) en contrepartie d'une diminution du gain pour les pulsations voisines de $1/T_1$.



$$\frac{V_s}{V_E} = \frac{R_2 + R_3}{R_1} \cdot \frac{1 + R_1 C_1 s}{1 + R_2 C_2 s} \cdot \frac{1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} (C_2 + C_3 + C_4) s}{1 + R_3 C_3 s}$$

Figure 7-12. Réalisation d'un réseau correcteur du second ordre.

Ce dernier point peut s'avérer gênant. En effet, au début de l'opération d'asservissement, les détecteurs d'angle sont généralement très éloignés du zéro, et les chaînes électroniques se trouvent saturées. La commande qui en résulte sur le moteur entraîne une rotation qui dépasse largement le point d'équilibre (inertie des cardans) et saluure la chaîne électronique dans le sens opposé. Pendant quelques secondes, on a donc une série d'oscillations où on passe de saturation positive en saturation négative.

La fréquence de ces oscillations est relativement basse, et peut se trouver dans la zone pour laquelle le réseau correcteur atténue et apporte du retard de phase (pulsations voisines de $1/T_1$).

Les oscillations sont alors d'autant plus difficiles à amortir, et le temps d'acquisition (entrée de l'asservissement en régime linéaire) peut se trouver plus long que prévu.

La précision du positionnement initial est modérée; on tolère des erreurs statiques de l'ordre de $0,5^\circ$. On a ainsi des asservissements peu raides qui peuvent trouver leur position d'équilibre en moins de 10 secondes, dans le cas le plus défavorable (axe de cardan partant de la position diamétralement opposée à son point d'équilibre).

7.4 Asservissement des cardans sur les gyroscopes

7.4.1 ASSERVISSEMENT « 1 AXE » : AXE D'AZIMUT

a) Généralités

L'asservissement de l'axe d'azimut sur le gyroscope d'azimut est le plus simple à décrire: l'axe d'entrée du gyroscope et l'axe de rotation du cœur sont colinéaires avec le couple appliqué par le moteur de cardan, ce qui isole cette chaîne de toutes les autres (à certains phénomènes près, qui sont secon-

daires). On supposera pour plus de commodité que le gyroscope est à un degré de liberté. Le cas du gyroscope à deux degrés de liberté s'en déduit, en considérant que son gain mécanique est égal à 1, et sa constante de temps très faible.

b) Boucle d'asservissement et réseau correcteur

La figure 7-13 montre que l'entrée de la boucle est la tension E , appliquée au moteur de cardan par la chaîne électronique. La f.c.é.m. du moteur, proportionnelle à la vitesse de rotation relative du rotor et du stator ($\dot{\alpha} - \Omega_e$), vient

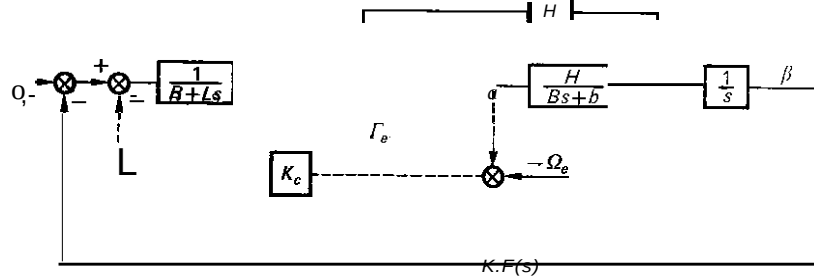


Figure 7-13. Boucle d'asservissement sur gyroscope.

s'en retrancher. Sous l'effet de la tension résultante, un courant apparaît dans le moteur couple, de résistance R et d'inductance L . Il donne naissance à un couple moteur Γ_M auquel viennent s'ajouter:

- un couple perturbateur Te'
- un couple résistant d'origine gyroscopique TG'

Sous l'effet de la résultante de ces couples, l'armature mobile prend la vitesse de rotation $\dot{\alpha}$ par rapport à «l'espace inertiel» (I = inertie de l'équipage mobile).

Cette vitesse $\dot{\alpha}$ de l'équipage mobile s'ajoute à la vitesse $-\Omega_e$ (perturbation) de l'équipage «fixe» pour donner la vitesse relative qui crée dans le moteur la force contre-électromotrice proportionnelle à K_c (contre-réaction de faible valeur).

La vitesse «inertielle») $\dot{\alpha}$, ressentie par le gyroscope, provoque la rotation de son flotteur à la vitesse $\dot{\beta}$ par rapport au boîtier du gyroscope (H = moment cinétique de la toupie, B = moment d'inertie du corps flottant autour de son axe de pivotement, b = constante de frottement visqueux du flotteur, rapport d'un couple à une vitesse de rotation).

La rotation du flotteur, donc la précession du moment cinétique de la toupie, engendre un couple gyroscopique résistant $H\dot{\beta}$, qui s'oppose au couple appliqué sur l'axe d'entrée du gyroscope (contre-réaction).

L'angle β de déflexion du flotteur est transformé par le détecteur d'angle du gyroscope en une tension qui entre dans la chaîne électronique. Celle-ci a un gain statique K (exprimé en volts par radian). $F(s)$ est la fonction de transfert du réseau correcteur, avec $F(0) = 1$.

c) Fonctions de transfert. Performances

L'étude la plus commode est celle de la fonction de transfert en boucle ouverte, qui permet d'apprécier la raideur maximale possible pour l'asservissement. Cette fonction de transfert est, en supposant négligeable l'effet de la f.c.é.m. du moteur:

$$T = \frac{KK_0}{R} \frac{1}{H} F(s) \frac{1}{s} \left(1 + \frac{L}{R}s\right) \left(1 + \frac{Jb}{H^2}s + \frac{JB}{H^2}s^2\right) \quad (7.4)$$

L'expression quadratique qui figure au dénominateur a pour discriminant:

$$\Delta = \left(\frac{b}{B}\right)^2 - \frac{4H^2}{JB} \quad (7.5)$$

(on reconnaît $b/B = I/T$, inverse de la constante de temps du gyroscope). Ce discriminant est habituellement positif, avec les ordres de grandeur adoptés pour les gyroscopes et plates-formes d'avions. Mieux, le terme $4H^2/JB$ est souvent très petit devant $(b/B)^2$.

L'expression quadratique a donc deux racines réelles qui valent au deuxième ordre près:

$$s_1 \approx -\frac{H^2}{Jb} \quad (7.6)$$

$$s_2 \approx -\frac{b}{B} \quad (7.7)$$

avec $s_1 \ll s_2$

La fonction de transfert en boucle ouverte, d'expression:

$$T = \frac{KK_0}{R} \frac{1}{H} F(s) \frac{1}{s} \frac{1}{\left(1 + \frac{L}{R}s\right) \left(1 + \frac{B}{b}s\right) \left(1 + \frac{Jb}{H^2}s^2\right)} \quad (7.8)$$

a donc l'allure indiquée par la figure 7-14.

Il apparaît que, même avec un réseau correcteur, il est pratiquement impossible de rendre la boucle stable si on lui donne une pulsation de coupure en boucle ouverte supérieure à la pulsation de coupure du gyroscope: le retard de

phase est excessif. La pulsation de coupure du gyroscope constitue donc une borne, et le réglage limite de la boucle non corrigée sera tel que la valeur absolue de T égale 1 pour une valeur de pulsation égale à la pulsation de coupure du gyroscope (et en supposant $F(s) = 1$ pour cette valeur).

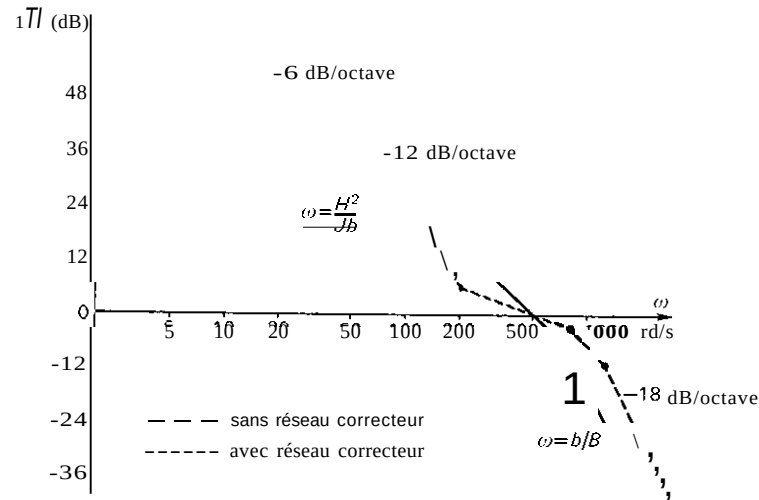


Figure 7-14. Fonction de transfert en boucle ouverte d'un asservissement sur gyroscope.

. Ceci va nous permettre d'évaluer la raideur maximale réalisable pour l'asservissement. En effet, pour la pulsation de coupure du gyroscope $\omega_c = b/B$, on a

$$\left(1 + \frac{L}{R} s\right) \approx 1$$

$$\left(1 + \frac{B}{b} s\right) \approx 1 \quad (\text{en fait, égal à } \sqrt{2})$$

$$\left(1 + \frac{Jb}{H's}\right) \approx \frac{Jb'}{BH^2}$$

On doit, dans ces conditions, avoir

$$|T| \leq 1$$

soit, en supposant $[F(j\omega_c)] = 1$

$$\frac{KK_0}{R} \frac{MB'}{Jb^2} \leq 1,$$

donc

$$\frac{KK_0}{R} \leq J \left(\frac{b}{B}\right)^2 \frac{b}{H}. \quad (7.9)$$

Le terme KK_0/R représente la raideur de l'asservissement, exprimée en couple par radian d'écart angulaire. On constate alors que cette raideur est limitée par deux catégories de paramètres:

- ceux qui dépendent du gyroscope, représentés par le terme (b/B) , (b/H) ; il en découle que, pour augmenter la raideur de l'asservissement, on a intérêt à avoir un gyroscope de pulsation de coupure élevée (b/B grand), de fort amortissement (b grand) et de faible moment cinétique (H petit, mais alors, la dérive du gyroscope sera moins bonne...).

celui qui ne dépend que de la plate-forme, c'est-à-dire J , moment d'inertie de l'anneau de cardan considéré. Plus ce moment d'inertie est grand, et meilleure est la raideur de l'asservissement qu'il est possible de réaliser. Ainsi, l'asservissement d'azimut, qui opère sur le moment d'inertie le plus faible de tous les axes de plate-forme (le cœur), sera le moins bon des asservissements.

En pratique, on sait réaliser des asservissements ayant des erreurs statiques de 10 à 20 secondes d'arc en azimut, et de quelques secondes d'arc en roulis intérieur et tangage (voir ci-dessous). Les réseaux correcteurs sont du même type que pour les asservissements sur détecteur d'angle, quoiqu'avec plus de raffinements (ordre plus élevé).

7.4.2 ASSERVISSEMENT DES AXES INTERMÉDIAIRES (ROULIS INTÉRIEUR ET TANGAGE)

Comme il a été dit en 7.1.2, une plate-forme normalement asservie indique zéro sur le détecteur angulaire de roulis intérieur (condition réalisée grâce à l'asservissement de roulis extérieur, voir 7.4.3). Les trois axes intérieurs sont alors orthogonaux deux à deux, et les axes d'entrée des gyroscopes X et Y se trouvent dans le même plan que les axes de roulis et tangage.

Mais ces axes n'ont aucune raison de coïncider deux à deux: les axes d'entrée des gyroscopes conservent une direction «inertielle», alors que les axes de roulis et tangage tournent au gré des changements de cap de l'avion. On peut représenter la position relative des axes par une figure plane (voir figure 7-15).

Une rotation élémentaire α_x ressentie par le gyroscope X se décompose alors en une rotation α_x/R selon l'axe de roulis, et une rotation α_x/T sur l'axe de tangage.

$$\alpha_x/R = \alpha_x \cos \psi,$$

$$\alpha_x/T = \alpha_x \sin \psi;$$

de même, une rotation α_y , se décompose en :

$$\begin{aligned}\alpha_y/R &= -\alpha_y \sin \psi \\ \alpha_y/T &= \alpha_y \cos \psi.\end{aligned}$$

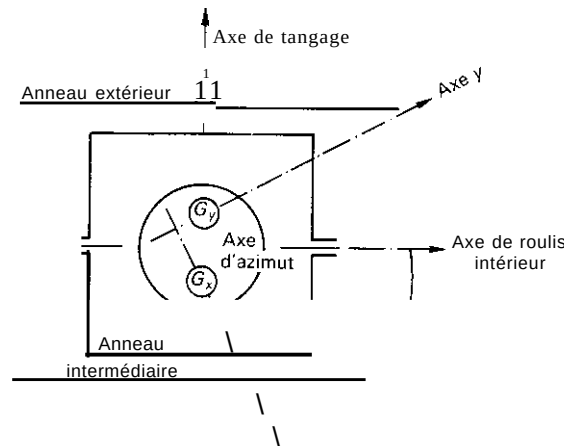


Figure 7-15. Position relative des axes d'entrée des gyroscopes X et Y, et des axes de roulis intérieur et de tangage.

Supposons un gyroscope fictif dont l'axe d'entrée serait aligné avec l'axe de roulis. Sous l'effet des deux rotations α_x et α_y , envisagées ci-dessus, il percevrait la rotation :

$$\alpha_R = \alpha_x \cos \psi - \alpha_y \sin \psi. \quad (7.10)$$

Un autre gyroscope fictif, dont l'axe d'entrée serait aligné avec l'axe de tangage, ressentirait :

$$\alpha_T = \alpha_x \sin \psi + \alpha_y \cos \psi. \quad (7.11)$$

Les signaux α_R et α_T peuvent être calculés par un résolver de coordonnées (voir relations (7.1) et (7.2)) à partir de signaux α_x et α_y se présentant sous forme de tensions alternatives et de la position angulaire ψ de l'arbre du résolver. On passe alors des signaux de deux gyroscopes réels (α_x et α_y) ayant une orientation quelconque, aux signaux α_R et α_T de deux gyroscopes fictifs dont les axes d'entrée coïncident avec l'axe de roulis intérieur et de tangage. En pratique, les détecteurs des gyroscopes sont connectés (directement ou après préamplifi-

cation sur le cœur) aux enroulements d'entrée R_1 et R_2 d'un résolver de coordonnées calé sur l'axe d'azimut : les signaux α_R et α_T apparaissent sur les enroulements de sortie S_1 et S_2 de ce résolver et sont acheminés vers l'entrée des chaînes d'asservissement.

Le résolver de coordonnées, qui assure la distribution des signaux d'erreurs d'asservissements, réalise la séparation des chaînes de roulis et de tangage en deux boucles entièrement indépendantes. On peut alors traiter le problème des asservissements comme il a été vu en 7.4.1 pour la chaîne d'azimut.

7.4.3 ASSERVISSEMENT DE L'AXE EXTÉRIEUR

La chaîne qui positionne le cardan extérieur lorsque les trois axes intérieurs sont asservis sur gyroscopes, s'apparente à celle qui permet de caler ce même cardan au zéro de son détecteur d'angle, lors de l'asservissement initial en position canonique. Mais l'entrée de chaîne est constituée maintenant par le signal du détecteur d'angle de l'axe de roulis intérieur.

Le but recherché est naturellement de maintenir ce signal à zéro, donc de conserver trois axes internes orthogonaux. On montre en 7.5 que ceci est réalisable pour toute orientation de la plate-forme. Dans ce paragraphe, nous approchons le problème en considérant les configurations pour lesquelles l'axe de roulis intérieur et l'axe de roulis extérieur sont alignés, ou font entre eux un angle qui n'approche pas trop de 90° .

Lorsque les deux axes sont alignés on peut représenter la relation cinématique des anneaux intérieur, extérieur, et du support (plancher de l'avion) en faisant abstraction de l'axe de tangage et de l'axe d'azimut (figure 7.16).

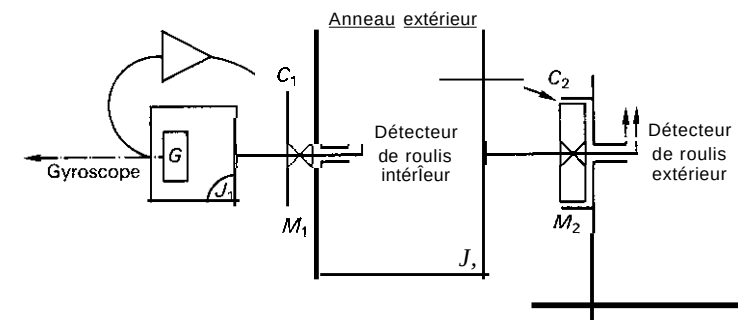


Figure 7-16. Relation cinématique simplifiée des axes de roulis extérieur et intérieur.

Une rotation du cœur, d'inertie J_1 , est détectée par un gyroscope et entraîne la commande du moteur de roulis intérieur M_1 qui développe un couple C_1 appliqué au cœur.

Le couple opposé $-C_I$ est évidemment appliqué sur le cadre extérieur d'inertie J_2 , sur lequel «s'appuie» le moteur M_1 . Ce couple perturbateur provoque une rotation du cadre extérieur par rapport au cadre intérieur. Cette rotation est décelée par le détecteur angulaire de roulis intérieur et provoque la commande d'un couple de rappel C_I sur le moteur extérieur M_2 . Le cadre extérieur «suit» donc fidèlement le cadre intérieur, dans cette configuration simplifiée.

On montre que si l'effet de force contre-électromotrice du moteur M_1 est négligeable, les chaînes d'asservissement intérieure et extérieure peuvent être considérées comme indépendantes, c'est-à-dire que leurs fonctions de transfert ne présentent pas d'imbrications ou de couplage. Le couple $-C_I$ appliqué au cadre extérieur est une perturbation comme il importe quelle autre, et chaque chaîne peut être étudiée séparément, notamment du point de vue de la stabilité.

Lorsque l'axe de roulis extérieur et l'axe de roulis intérieur ne sont plus confondus, c'est-à-dire lorsqu'il y a un angle de tangage θ non nul, on a la configuration représentée sous forme simplifiée par la figure 7-17.

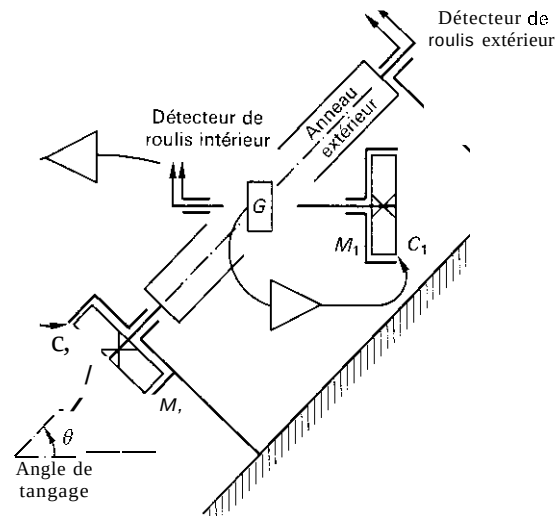


Figure 7-17. Relation cinématique des axes de roulis intérieur et extérieur, pour un angle de tangage non nul.

Le comportement cinématique de la plate-forme est étudié plus en détail en 7.5. Il confirme ce qu'on peut déduire intuitivement de la figure 7-17 : une rotation commandée par le moteur M_2 au cadre extérieur n'est pas transmise intégralement au détecteur de roulis intérieur, mais elle est atténuée par le

facteur $\cos \theta$. On peut dire qu'on retrouve sur le détecteur de roulis intérieur la «projection» de la rotation de l'axe extérieur.

Dans la chaîne d'asservissement du cadre extérieur, tous se passe alors comme si on introduisait un «gain mécanique» $\cos \theta$, d'autant plus petit qu'on se rapproche d'un angle de tangage égal à 90° . Or, comme il a été vu en 7.32, ce type de chaîne peut devenir instable lorsqu'on diminue le gain en boucle ouverte.

Si on veut fonctionner à des angles de tangage élevés, il faut donc prendre des précautions.

On peut par exemple étudier un réseau correcteur qui apporte de l'avance de phase aussi loin que possible vers les basses fréquences (la fréquence de coupure en boucle ouverte diminue lorsque le gain de la chaîne diminue, c'est-à-dire lorsque θ augmente). On peut aussi imaginer d'introduire dans la boucle une amplification électronique variable, proportionnelle à $1/\cos \theta$: la baisse du «gain mécanique» est alors compensée par l'augmentation du gain électrique.

Le point $\theta = 90^\circ$ n'en reste pas moins un point singulier. Pour s'en approcher ou l'atteindre («passage de la boucle»), il faut utiliser des artifices (voir paragraphe 7.5).

7.5 Cinématique d'une plate-forme asservie

Passage de la boucle

7.5.1 ÉQUATIONS CINÉMATIQUES DES CARDANS

Pour décrire la cinématique des cardans, on considérera un trièdre lié à chacun d'eux, et portant sur chaque axe un vecteur unitaire. Ainsi, des trois vecteurs unitaires liés au cœur sont notés :

$$1 U_x', 1 U''', 1 U_z \quad (\text{trièdre } 1U)$$

ceux du cardan intérieur sont :

$$2 U_x', 2 U''', 2 U_z \quad (\text{trièdre } 2U) \text{ etc.}$$

ceux du support extérieur (l'avion) sont :

$$5 U_x', 5 U_y', 5 U_z \quad (\text{trièdre } 5U).$$

Lorsque la plate-forme est en position canonique, tous les trièdres sont confondus. Les vecteurs $1U_x'$ sont colinéaires et leur direction est celle de l'axe de roulis de l'avion; les vecteurs $1U_y'$ sont colinéaires et parallèles à l'axe de tangage; les vecteurs $1U_z$ sont colinéaires et parallèles à l'axe d'azimut. On notera que lorsque la plate-forme est stabilisée, c'est le trièdre $(1 U_x', 1 U''', 1 U_z)$ qui conserve son orientation dans «l'espace inertiel». C'est donc ce trièdre qu'on peut considérer comme trièdre de référence.

Soient ψ , β , e et φ les angles tels qu'ils sont indiqués par les détecteurs angulaires des axes d'azimut, roulis intérieur, tangage, roulis extérieur. On convient que ces angles sont nuls lorsque la plate-forme est en position canonique.

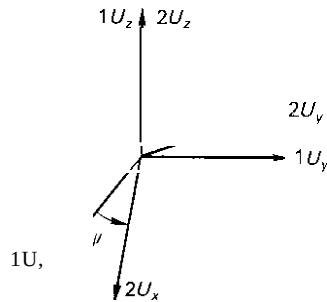


Figure 7-18. Relation entre les vecteurs 1U et 2U.

On se propose de trouver la relation qui lie les vecteurs iU aux trois vecteurs $1U$ pour une valeur quelconque des angles ψ , β , e et φ . On procède de proche en proche.

Ainsi (figure 7-18) les trièdres $1U$ et $2U$ ont leurs vecteurs $1U_x$ et $2U_x$ confondus (portés par l'axe d'azimut), alors que l'on a :

$$\begin{aligned} 2U_x &= \cos \psi \cdot 1U_x + \sin \psi \cdot 1U_y \\ 2U_y &= -\sin \psi \cdot 1U_x + \cos \psi \cdot 1U_y \end{aligned}$$

ce qui s'écrit, en notations matricielles:

$$\begin{bmatrix} 2U_x \\ 2U_y \\ 2U_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1U_x \\ 1U_y \\ 1U_z \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

De proche en proche, on établit que:

$$\begin{bmatrix} 3U_x \\ 3U_y \\ 3U_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2U_x \\ 2U_y \\ 2U_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi \cos \beta & \cos \psi \cos \beta \\ \sin \psi \sin \beta & -\cos \psi \sin \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1U_x \\ 1U_y \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

et ainsi de suite jusqu'à la matrice (A) qui relie $5U$ à $1U$.

$$\begin{bmatrix} 5U_x \\ 5U_y \\ 5U_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi - \sin \theta \sin \psi \sin \beta & \sin \theta \cos \psi \sin \beta & -\sin \theta \cos \beta \sin \varphi + \cos \theta \cos \beta \cos \varphi \\ -\sin \psi \cos \beta \cos \varphi + \sin \varphi (\sin \theta \cos \psi + \cos \theta \sin \psi \sin \beta) & \cos \psi \cos \beta \cos \varphi + \sin \varphi (\sin \psi \sin \theta - \cos \psi \cos \theta \sin \beta) & \sin \beta \cos \varphi + \cos \theta \cos \beta \sin \varphi \\ \sin \psi \cos \beta \sin \varphi + \cos \varphi (\sin \theta \cos \psi + \cos \theta \sin \psi \sin \beta) & -\cos \psi \cos \beta \sin \varphi + \cos \varphi (\sin \psi \sin \theta - \cos \psi \cos \theta \sin \beta) & -\sin \beta \sin \varphi + \cos \theta \cos \beta \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1U_x \\ 1U_y \\ 1U_z \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

7.5.2 REDONDANCE DE LA PLATE-FORME QUATRE AXES

On peut vérifier que la plate-forme quatre axes est redondante en montrant qu'il y a plusieurs façons d'assurer la même orientation relative du trièdre $5U$ et du trièdre $1U$. Ainsi, soit une orientation définie par les quatre angles ψ , β , e , φ . On peut chercher les accroissements angulaires $d\psi$, $d\beta$, $d\varphi$ et $d\varphi$ qui laissent inchangés les termes de la matrice (A). Il suffit pour cela que:

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial A_{ij}}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial A_{ij}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial A_{ij}}{\partial \varphi} d\varphi = 0 \quad (7.15)$$

Appliquons, par exemple, ceci au terme A_{23} de la matrice. Autour des valeurs $\beta = 0$ (condition physique réalisée par l'asservissement de roulis extérieur), et $\varphi = 0$, ceci donne la relation:

$$d\beta + \cos e d\varphi = 0 \quad (7.16)$$

Cela signifie que si une perturbation provoque un écart $d\beta$ sur l'angle de roulis intérieur, on maintient la stabilité du cœur en appliquant la correction

$$d\varphi = -\frac{1}{\cos e} d\beta \quad (7.17)$$

sur l'axe de roulis extérieur. On retrouve ainsi le «gain mécanique» égal à $\cos \theta$ dont il a été question dans l'étude de l'asservissement du quatrième axe (voir 7.4.3).

7.5.3 UTILISATION DE LA REDONDANCE: «PASSAGE DE LA BOUCLE»

a) Définition de la manœuvre de «passage de la boucle»

La manœuvre du «passage de la boucle» est le mouvement d'un avion qui fait un «looping»: l'avion vole initialement en position horizontale puis se cabre, monte «en chandelle» et passe sur le dos. Au cours de la montée en chandelle, et en supposant que celle-ci est parfaite, l'axe de roulis extérieur de la plate-forme est confondu avec l'axe d'azimut.

La stabilisation du cœur doit néanmoins être assurée. Si on suppose qu'avant la manœuvre, les détecteurs angulaires d'azimut et de roulis extérieur indiquent zéro, ils doivent indiquer tous deux 180° en fin de manœuvre: l'avion a effectivement réalisé un demi-tour, aussi bien en cap qu'en roulis. Il est donc intuitif que l'anneau de roulis extérieur doit accomplir un retournement (le «Flip» des anglo-saxons) au cours du passage en chandelle. Les chaînes d'asservissement doivent être conçues pour que ce retournement se fasse de lui-même, ou, au besoin, à l'aide de quelques subterfuges simples.

La plate-forme est alors douée de la capacité «toutes attitudes», Seule une plate-forme à quatre axes peut prétendre à cette qualité.

b) Équations du mouvement

Le mouvement angulaire de l'avion est une rotation autour de son axe transversal $5U$, (axe de tangage). Pour une raison qui apparaîtra plus loin, on supposera que le mouvement est amorcé à partir d'une position initiale de la plate-forme qui n'est pas exactement la position canonique (voir figure 7-19).

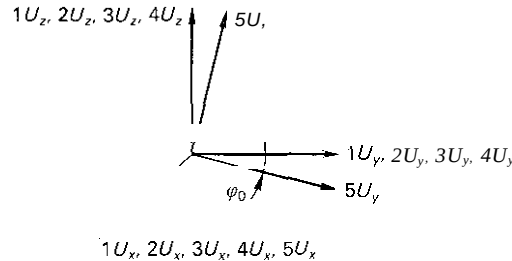


Figure 7-19. Position initiale de la plate-forme, avant le passage de la boucle.

Au départ, il existe un angle de roulis φ_0 petit mais non nul, si bien que les vecteurs $5U$, et $5U_z$ (axes de tangage et d'azimut de l'avion) sont décalés de l'angle φ_0 par rapport aux axes $1U$, et $1U_z$ du cœur (le système d'axes $1U$, supposé stable, sert de référence). Seuls $1U_x$ et $5U_x$ coïncident au départ.

Le mouvement de l'avion étant une rotation autour de l'axe $5U_y$, celui-ci reste fixe dans l'espace, et le vecteur $5U_y$ conserve des projections constantes sur le trièdre $1U$. Ces projections sont (produit scalaire de $5U$, avec $1U_x$, $1U_y$, $1U_z$, à partir de la relation matricielle (7.14) :

$$5U_y \cdot 1U_z = \sin \beta \cos \varphi + \cos \theta \cos \beta \sin \varphi = \sin \varphi_0 \quad (7.18)$$

$$5U_y \cdot 1U_x = -\sin \psi \cos \beta \cos \varphi + \sin \varphi (\sin \theta \cos \psi + \cos \theta \sin \psi \sin \beta) = 0 \quad (7.19)$$

Il n'est pas nécessaire d'écrire la troisième projection, qui serait redondante puisqu'il s'agit de vecteurs unitaires.

Ces deux équations ne font qu'exprimer la fixité du vecteur $5U_y$. Pour définir complètement l'orientation de l'avion, il faut se donner la projection de l'un des vecteurs $5U_x$ ou $5U_z$ sur l'un des axes $1U$ (une seule projection d'un seul vecteur suffit, puisqu'on sait que ce vecteur est unitaire et perpendiculaire à $5U_y$ et que le dernier vecteur s'en déduit). On a choisi d'écrire

$$5U_x \cdot 1U_x = \cos \theta \cos \psi - \sin \theta \sin \varphi \sin \beta = \cos \lambda(t) \quad (7.20)$$

où $\lambda(t)$ est la valeur imposée d'un angle qui définit l'allure du mouvement en fonction du temps. Pour les valeurs petites de $\lambda(t)$, cet angle coïncide pratiquement avec l'angle de tangage θ indiqué par la plate-forme (on s'en assurera en faisant $\psi = \beta = 0$ dans l'équation ci-dessus).

L'ensemble des trois équations (7.18), (7.19), (7.20), suffit pour définir:

- la position initiale de la plate-forme et de l'avion (petit angle de roulis φ_0),
- la cinématique de la plate-forme,
- le mouvement de l'avion, rotation autour de son axe de tangage selon une loi définie par le paramètre $\lambda(t)$,
- la fixité du cœur, qu'on suppose constamment stabilisé.

c) Passage de la boucle à faible vitesse

Quand le mouvement se fait à faible vitesse, les limitations dynamiques des asservissements de cardans n'apparaissent pas, et on peut supposer en particulier que l'angle de roulis intérieur β est maintenu constamment nul par l'asservissement de l'anneau extérieur. Les équations (7.18), (7.19), (7.20) deviennent :

$$\cos \theta \sin \varphi = \sin \varphi_0 \quad (7.21)$$

$$-\sin \psi \cos \varphi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi = 0 \quad (7.22)$$

$$\cos \theta \cos \psi = \cos \lambda(t). \quad (7.23)$$

Ce sont les équations cinématiques d'une plate-forme à trois axes, puisque faire $\beta = 0$ revient à rendre les anneaux intérieur et intermédiaire mécaniquement solidaires. Toute redondance disparaît, et on a une relation biunivoque entre $\lambda(t)$ d'une part, et ψ , θ , φ d'autre part.

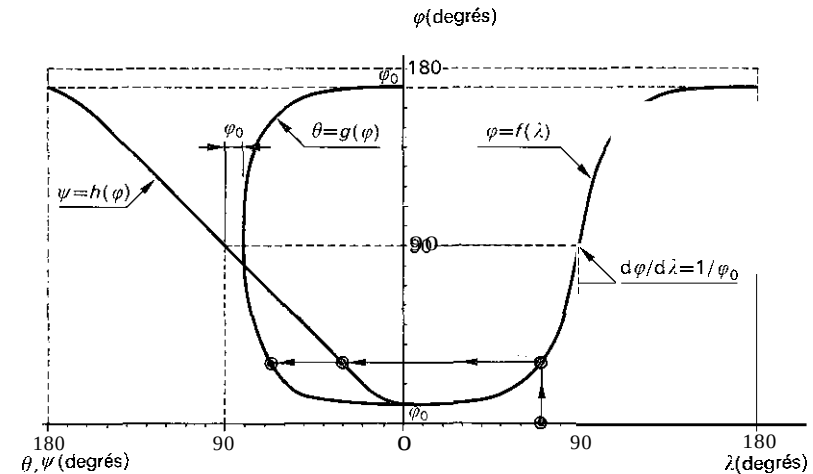


Figure 7-20. Variation des angles d'azimut, tangage, et roulis extérieur au cours du passage de la boucle à faible vitesse ($\beta = 0$).

La figure 7-20 montre la variation de ψ , θ , φ en fonction de λ . Pour clarifier l'exposé, on a fait un diagramme en deux parties. A droite a été portée la variation de l'angle de roulis extérieur φ en fonction de l'angle imposé λ . A gauche ont été représentées les valeurs que doivent prendre θ et ψ (tangage et azimut) en fonction d'une valeur φ découlant de λ par le graphique de droite. Mais l'ensemble des valeurs λ , φ , θ , ψ est en fait indissociable.

La partie droite du graphique montre que φ varie d'abord très lentement lorsque λ croît. Mais autour de $\lambda = 90^\circ$, c'est une variation très rapide qui est demandée à l'angle φ . Cette variation est d'autant plus rapide que l'angle de roulis initial est plus petit ($d\varphi/d\lambda = 1/\varphi_0$). A la limite, pour un angle de roulis initial nul, c'est une variation «en échelon» qui est demandée à l'angle de roulis extérieur (passage instantané de 0 à 180°). Le passage de la boucle est donc d'autant plus difficile que l'angle de roulis initial est petit, c'est-à-dire que le passage «en chandelle» amène l'axe de roulis extérieur à un faible écart angulaire de l'axe d'azimut.

Sur la partie gauche du graphique, on peut voir que la variation de l'angle de tangage θ est sensiblement proportionnelle à celle de λ pour les faibles valeurs de ces deux angles. Mais alors que λ varie de 0 à 180° , θ est animé d'un mouvement d'«aller-retour» qui ne lui fait pas dépasser en principe la position 90° , il n'atteint en fait que la valeur $90^\circ - \varphi_0$ au moment du retournement: l'axe de tangage plate-forme est alors confondu avec l'axe de roulis de l'avion, et prend en compte l'écart de roulis φ_0 . Ceci montre que pour avoir la capacité «toutes attitudes», il suffit d'un débattement limité autour de l'axe de tangage. En pratique, on se donne une marge de sécurité conduisant à un débattement de $\pm 110^\circ$ par exemple. Quant à l'angle d'azimut, il varie de façon sensiblement proportionnelle à l'angle de roulis extérieur, dès que celui-ci prend une assez grande valeur.

d) Passage de la boucle aux vitesses élevées

C'est principalement l'inertie cumulée des anneaux de cardan extérieur, intermédiaire et intérieur qui limite la vitesse à laquelle on peut «passer la boucle». L'accélération à imprimer à cet ensemble devient en effet considérable lors du mouvement de retournement. Selon la nature du moteur de cardan extérieur, on a une limitation en vitesse (moto-réducteurs à engrenages) ou en accélération angulaire (moteur couple à attaque directe). De ce fait, le mouvement de l'anneau extérieur prend du retard par rapport à ce que devrait être son mouvement théorique (angle β de roulis intérieur supposé nul).

L'asservissement de roulis extérieur chargé de «suivre le zéro du détecteur de roulis intérieur» ne suit plus. Un angle β non négligeable apparaît (il peut atteindre plus de 10°) si bien que la chaîne électronique de roulis extérieur est amenée en saturation et commande le couple maximum au moteur extérieur.

Pendant ce temps, les asservissements intérieurs maintiennent l'orientation du cœur.

Des écarts angulaires inhabituels (plusieurs minutes ou dizaines de minutes d'arc) peuvent d'ailleurs apparaître de manière fugitive au niveau des détecteurs des gyroscopes: la référence inertielle ne sera pas perdue si les gyroscopes ne vont pas «sur butées».

L'étude plus complète du mouvement de la boucle peut être faite à l'aide des équations cinématiques complètes 9.18 à 9.20 (angle β non nul) auxquelles on ajoute les équations dynamiques des cardans (inerties, couples développés par les moteurs) et les lois des chaînes d'asservissements (fonction de transfert, saturation de chaînes, etc.). La simulation sur ordinateur est alors indispensable.

CHAPITRE 8

CALCULATEURS

J. J. CHEVREUL L. CAMBERLEIN

Les systèmes à inertie utilisaient initialement des calculateurs analogiques. Le développement des techniques digitales a permis depuis quelques années de réaliser des calculateurs numériques d'un volume permettant leur emploi dans les matériels embarqués. Ils ont supplanté les calculateurs analogiques en raison de leur souplesse et de leur précision illimitée.

Les calculateurs numériques sont donc actuellement pratiquement universellement adoptés pour les calculs de bouclage dans les systèmes à inertie.

Ces calculateurs numériques sont soit des calculateurs universels à programme enregistré, soit des calculateurs spécialisés. En particulier les calculateurs du type analyseur différentiel (DDA) sont souvent utilisés dans les cas où les calculs à effectuer sont bien définis et où la souplesse des calculateurs universels n'est pas nécessaire.

Nous décrirons les principes de fonctionnement des calculateurs universels et des analyseurs différentiels. Nous traiterons également de la technologie, point particulièrement important dans les calculateurs embarqués car c'est elle qui doit permettre d'atteindre les objectifs essentiels dans ces applications: fiabilité maximale, masse, volume et consommation minimaux.

A titre d'exemples, les caractéristiques de quelques calculateurs seront exposées.

CALCULATEURS UNIVERSELS (*)

8.1 Calculateurs universels

8.1.1 PRINCIPES GÉNÉRAUX

Les calculateurs universels embarqués devant être capables de traiter les mêmes types de problèmes que les calculateurs sol beaucoup plus encombrants installés dans les centres de calcul ou de gestion, leur organisation et leur fonctionnement reposent sur les mêmes principes généraux. La caractéristique essentielle les distinguant des calculateurs fixes est l'apparition de contraintes technologiques sévères comme celles de miniaturisation, d'environnement (température et chocs) et de fiabilité, et leur utilisation en temps réel.

(*) Partie rédigée par J.J. CHEVREUL.

Fonctionnellement un calculateur numérique peut se subdiviser en trois blocs: l'unité de traitement, la mémoire principale et les unités d'entrée-sortie.

L'unité de traitement traite et gère l'information suivant les instructions contenues dans le programme. Elle se décompose elle-même en deux parties:

- d'une part l'unité arithmétique et logique dans laquelle l'information est traitée; elle est constituée essentiellement d'un certain nombre de registres et d'opérateurs capables de réaliser les différentes opérations logiques et arithmétiques essentielles;
- d'autre part l'unité de commande qui est chargée d'analyser et d'interpréter les instructions du programme pour fournir les ordres élémentaires à l'unité arithmétique et logique en vue de leur exécution.

L'unité de traitement ne pouvant travailler à un instant donné que sur un nombre très limité d'informations, c'est le bloc mémoire qui joue le rôle de réservoir où celle-ci vient puiser l'information qui lui est nécessaire et enregistre les résultats après chaque traitement élémentaire. La mémoire contient principalement deux types d'informations: les instructions et les informations numériques. L'unité de traitement lit et exécute les programmes instruction par instruction.

Les unités d'entrée-sortie permettent l'échange d'informations entre le calculateur et les équipements périphériques tels que détecteurs, boîte de commande, servo-mécanisme, système de visualisation, enregistreur, etc. et éventuellement avec une mémoire de masse (disque par exemple) de plus grande capacité mais beaucoup plus lente que la mémoire principale.

Suivant leur rapidité et leur autonomie vis-à-vis de l'unité de traitement on distingue différents types d'unités d'entrée-sortie:

- les entrées-sorties directes ou programmées permettent l'échange d'informations sous le contrôle direct du programme : chaque échange est commandé par l'unité de traitement et correspond à l'exécution d'une instruction;

- les canaux multiplexés permettent à un certain nombre d'équipements externes de communiquer avec la mémoire avec une interférence minimum sur le déroulement des programmes : les échanges étant initialisés par quelques instructions se déroulent ensuite indépendamment du programme;

- les canaux d'accès direct au niveau des blocs mémoires permettent l'échange d'informations à grande vitesse sans intervention de l'unité de traitement.

8.1.2 UNITÉ DE TRAITEMENT

8.1.2.1 Unité arithmétique et logique (UAL)

Elle réalise le traitement proprement dit de l'information qui y circule sous forme de mots dont la longueur est généralement unique. Les longueurs de

mots les plus courantes, pour les calculateurs embarqués, sont de 16, 24 et 32 bits (binary digits). Ces mots contiennent soit des valeurs numériques en représentation binaire, soit des instructions. Certains calculateurs travaillent directement sur deux longueurs (en général 16 et 32 bits) correspondant à des calculs en simple et double précision.

a) Calculateurs série ou parallèle

Suivant le mode de traitement de l'information, on distingue deux types de calculateurs assez différents, les calculateurs série dans lesquels les mots sont traités en *série*, c'est-à-dire bit après bit. Ces calculateurs ont l'avantage de nécessiter un matériel (circuits logiques) assez réduit mais leurs performances sont très modestes. Aussi le mode de traitement série n'est plus retenu que pour un petit nombre de calculateurs spécialisés.

Nous nous intéresserons donc uniquement aux calculateurs dits parallèles où les mots d'information sont traités en parallèle, c'est-à-dire sur tous leurs bits simultanément. Le nombre de circuits logiques nécessité par une telle machine est nettement plus important que pour le calculateur série (par exemple là où il suffit d'une voie pour échanger un mot entre deux registres d'un calculateur série, il en faut 32 pour un calculateur parallèle à mot de 32 bits). Par

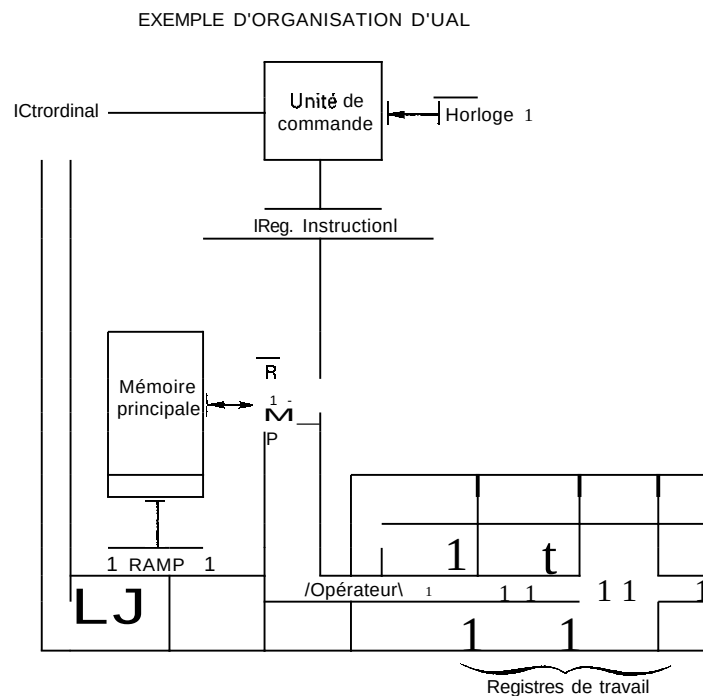


Figure 8-1.

contre l'amélioration des performances est considérable et justifie dans presque tous les cas, l'accroissement du coût.

b) Composition de l'UAL

L'unité arithmétique et logique d'un calculateur est composée essentiellement par un certain nombre de registres et d'opérateurs.

Les registres sont des éléments mémoire très rapides dont la capacité est généralement égale à un mot; ils sont constitués par autant de bistables qu'il y a de bits dans le mot machine. Un calculateur comporte un nombre minimum de registres dont: les registres de travail (pouvant se réduire à un seul accumulateur) adressables par l'instruction, les registres de liaisons avec la mémoire principale (registres adresse et information mémoire : RAMP, RIMP), le compteur ordinal qui mémorise l'adresse de l'instruction en cours d'exécution et le registre instruction lié à la chaîne de commande.

Les opérateurs réalisent les différentes opérations logiques et arithmétiques élémentaires telles que l'union, l'intersection, la disjonction, l'addition et la soustraction arithmétique ainsi que les décalages. Les opérations les plus complexes comme la multiplication et la division ne sont généralement pas effectuées par un opérateur spécialisé mais par plusieurs passages successifs dans les opérateurs.

8.1.2.2 Unité de commande

Son rôle est de décoder et interpréter les instructions du programme afin de donner les ordres élémentaires qui permettront à l'UAL d'exécuter ces instructions.

a) Instructions

Une instruction doit comporter au moins un ordre à exécuter qui se présentera sous forme d'un code d'opération. Ce code occupe un champ de l'instruction dont la longueur est fonction du nombre d'opérations directement exécutables par la machine; ce nombre est généralement compris entre 16 et 128 pour les calculateurs embarqués,

Le code d'opération est accompagné par une adresse au minimum, remplacée pour les opérations ne nécessitant pas cette adresse par un complément de code.

Instructions à une adresse. L'opération porte sur le contenu de l'adresse désignée dans l'instruction; si l'opération porte sur deux opérandes le second est pris dans un registre spécialisé appelé accumulateur où le résultat sera rangé lui aussi.

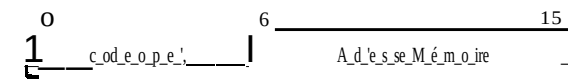


Figure 8-2.

Instructions à plusieurs adresses. Dans les machines modernes il s'est avéré qu'un seul accumulateur était insuffisant, on a donc été amené à adopter jusqu'à 16 registres de travail. En plus du code opératoire les instructions comportent alors deux adresses dont une adresse mémoire et une adresse de registre.

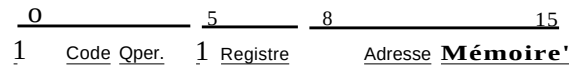


Figure 8-3.

Généralement l'opération est effectuée entre les opérandes placés l'un en registre et l'autre en mémoire et le résultat est rangé dans ce même registre. Souvent ce type de calculateur possède aussi des instructions comportant deux adresses de registres mais sans adresse mémoire.

Plus rares sont les calculateurs possédant des instructions à trois adresses dont généralement l'une est une adresse mémoire et les deux autres sont des adresses registres. L'adresse registre supplémentaire introduite désigne le lieu de rangement du résultat.

Le fait de disposer de plusieurs registres et d'instructions à plusieurs adresses permet d'éviter un trop grand nombre de transfert avec la mémoire qui allongent le temps de traitement et surtout augmentent l'encombrement du programme en mémoire. Ce dernier point est particulièrement important pour les calculateurs embarqués où le volume est limité et le coût du bit de mémoire particulièrement élevé.

Par exemple, pour effectuer une addition dans une machine à une adresse, il faut au minimum une instruction de préparation (transfert du 1er opérande dans l'accumulateur), une instruction d'exécution (addition du 2e opérande à l'accumulateur) et éventuellement une instruction de rangement. Dans une machine à deux adresses il suffit généralement d'une instruction réalisant l'addition des deux opérandes, le résultat étant placé systématiquement dans le registre qui contenait l'un des opérandes, celui-ci étant donc surchargé. Dans le cas où cet opérande doit être conservé (ce qui n'est pas le cas le plus courant) un transfert préalable est nécessaire. L'instruction à trois adresses évite cet inconvénient car l'adresse de rangement est indiquée explicitement.

Le gain obtenu en passant d'une instruction à deux adresses à une instruction à trois adresses est relativement modeste et son opportunité dépend surtout de la longueur du mot instruction souvent imposé par d'autres considérations.

b) Adresse mémoire

En fait l'adresse mémoire ne se présente généralement pas dans l'instruction comme un champ unique où l'adresse du mot désigné est simplement convertie en numération binaire et ceci pour des raisons de volume mémoire et de souplesse.

Volume mémoire. La mémoire d'un calculateur embarqué a généralement une capacité maximum de l'ordre de 32000 à 64000 mots, ce qui demanderait un champ de longueur excessive (16 bits) pour exprimer les adresses. On a donc recours à deux solutions.

La moins évoluée consiste à paginer la mémoire c'est-à-dire à la diviser en blocs, de 128 ou 256 mots par exemple. L'adresse mémoire contenue dans l'instruction donne alors seulement le rang du mot considéré dans la page en cours d'utilisation (7 ou 8 bits suffisent alors). Cette méthode présente l'inconvénient de compliquer la programmation lorsqu'un programme est trop long pour être contenu dans une même page.

La deuxième solution consiste à utiliser des bases, la base choisie étant indiquée explicitement dans l'adresse mémoire. L'adresse physique en mémoire est alors obtenue en effectuant systématiquement l'addition du déplacement avec la base désignée (une parmi 4 dans le cas présent). Cette solution présente l'avantage de permettre une translation aisée des programmes en modifiant les bases contenues dans des registres.

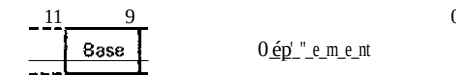


Figure 8-4.

Souplesse. Il est souvent nécessaire de travailler sur des variables indicées organisées en table dans la mémoire de façon à ce que leurs adresses soient directement liées à la valeur de l'indice. Une même instruction placée dans une boucle de programme doit donc être capable d'atteindre successivement les éléments de la table. On utilise alors un index, valeur numérique contenue dans un registre et qui sera elle aussi additionnée au déplacement. L'incréméntation de l'index permettra alors l'adressage successif des éléments de la table.

On trouvera ci-dessous un exemple d'adresse mémoire pour une machine possédant 4 bases, un registre d'index et capable d'indirection.

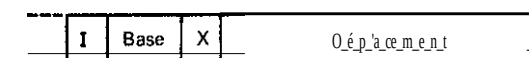


Figure 8-5.

Le bit 1 est normalement égal à zéro.

Si $X = 0$ il n'y a pas d'indexation.

Si $X = 1$ il y a indexation et l'adresse mémoire est alors calculée de la façon suivante:

$$Ad. = Base + Index + Déplacement.$$

Lorsque $1 =]$, l'adressage est indirect, ce qui signifie que le contenu de la case mémoire dont l'adresse vient d'être calculée ne désigne pas un opérande, mais l'adresse de cet opérande. La plupart des calculateurs ont la possibilité d'indirection.

c) Exemples d'instructions complètes

1°) A une adresse

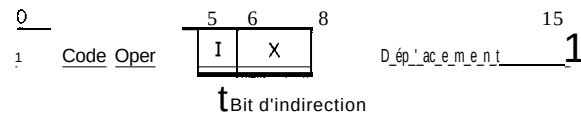


Figure 8-6.

32 codes d'opérations
possibilité d'indirection
3 registres d'index
déplacement dans des pages de 256 mots.

2°) A deux adresses

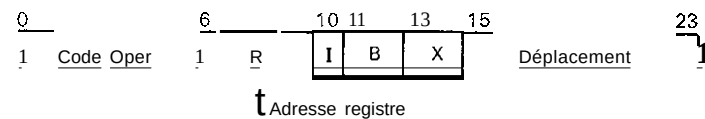


Figure 8-7.

- 64 codes d'opérations
- possibilité d'indirection
- 4 bases
- 3 index
- déplacement de 512 mots par rapport à la base indiquée
- 16 registres de travail.

d) Unité de commande

L'unité de commande peut être câblée ou microprogrammée.

1°) Unité de commande câblée (fig. 8-8). C'est la solution la plus classique pour réaliser une unité de commande.

Celle-ci est composée de trois blocs essentiels:

- l'horloge qui fournit la période de base T_0 du calculateur,
- le rythmeur qui fournit les rythmes t_j (environ une dizaine),

enfin la chaîne de commande qui est l'élément le plus complexe; elle décode l'instruction pour fournir un assez grand nombre d'indices I_k (environ une centaine) qui resteront généralement fixes pendant toute la durée de l'instruction.

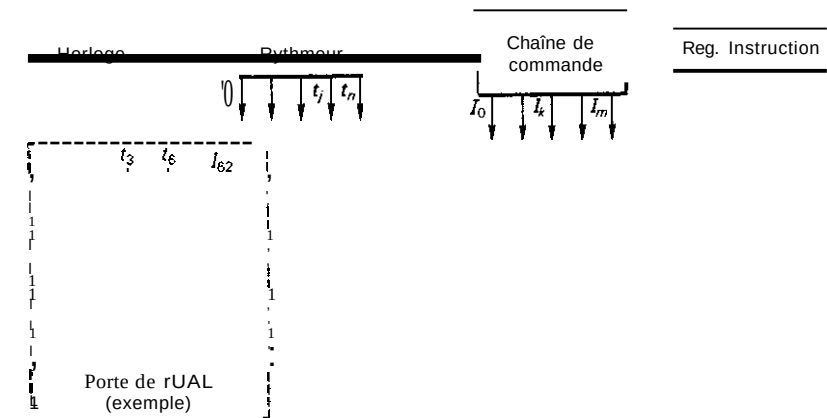


Figure 8-8.

Les signaux de rythme sont normalement activés successivement de t_0 à t_n avec un délai égal à T_0 secondes. Un cycle typique de rythmeur sera donc décrit en nT_0 secondes et une instruction est également exécutée en 2 à 4 cycles de rythmeur. Actuellement les périodes de base des calculateurs modernes se situent le plus souvent entre 200 et 400 nanosecondes.

Les signaux de rythme et les indices sont combinés de façon élémentaire pour commander directement chaque porte de l'unité arithmétique et logique.

2°) Unité de commande microprogrammée. Dans une machine microprogrammée le contrôle des éléments de l'unité de traitement n'est pas assuré par une logique câblée mais par des microprogrammes contenus dans une mémoire morte spécialisée.

Chaque instruction du programme principal entraîne le déroulement d'un microprogramme qui analyse l'instruction, l'exécute puis prend en compte l'instruction suivante réalisant ainsi le contrôle séquentiel du programme principal.

Les microprogrammes sont constitués par des micro-instructions correspondant chacune à un mot de la mémoire de contrôle. Généralement chaque micro-instruction contrôle l'unité de traitement pendant un seul temps élémentaire ou cycle de microprogramme. La micro-instruction dont la longueur peut varier de 20 à plus de 100 bits, suivant les calculateurs, contient deux types d'informations: d'une part les micro-ordres dont les champs après un décodage très élémentaire commandent chacun des éléments ou portes de l'unité arithmétique

et logique et d'autre part une information définissant, de façon conditionnelle ou non, l'adresse de la micro-instruction suivante à exécuter.

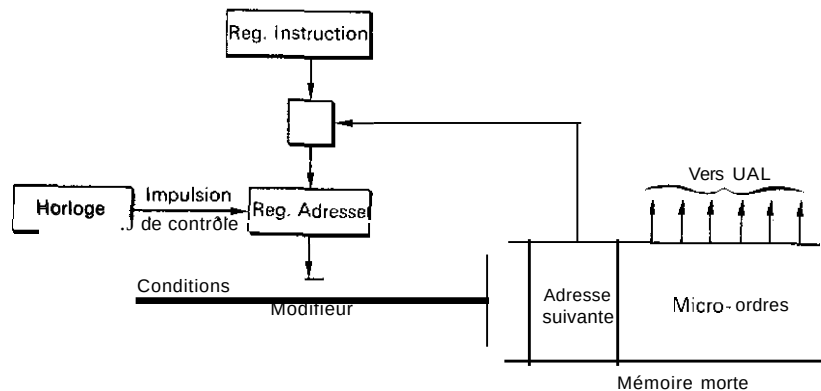


Figure 8-9.

Chaque impulsion d'horloge provoque l'exécution d'une nouvelle micro-instruction. La prise en compte d'une instruction peut être effectuée par transfert dans le registre adresse de la mémoire morte du code opératoire contenu dans le registre instruction. Dans ce cas le code opératoire correspond en binaire à l'adresse de départ du microprogramme d'exécution de cette instruction. Par la suite le registre adresse est chargé avec le champ «adresse suivante» de la micro-instruction en cours.

Un modifieur placé à l'entrée adresse de la mémoire morte permet en modifiant un ou plusieurs bits de l'adresse de provoquer les ruptures de séquence de microprogramme sous certaines conditions spécifiées dans la micro-instruction précédente.

3°) *Comparaison des deux types d'unité de commande.* L'avantage essentiel de la microprogrammation est de permettre, par remplacement ou accroissement du volume de la mémoire morte, de modifier complètement ou d'accroître les possibilités de la machine et donc de proposer des calculateurs pratiquement «sur mesure» sans modification importante du hardware.

Cette possibilité est pratiquement inexistante pour une machine à chaîne de commande câblée où le simple fait de modifier quelques codes peut entraîner une refonte importante de la chaîne de commande. Par contre cette dernière solution peut être légèrement moins coûteuse surtout en version embarquée où le prix du bit de mémoire morte très rapide est assez élevé.

Cependant pour une machine évoluée dont les instructions sont très puissantes les deux solutions conduisent sensiblement au même coût car le volume de mémoire morte nécessaire est loin d'être proportionnel à la complexité du code d'ordre.

On peut noter que la microprogrammation permet d'introduire facilement la virgule flottante dont l'emploi se développe dans les calculateurs embarqués modernes.

8.1.3 MÉMOIRES

8.1.3.1 Mémoires principales

Pour que l'unité de traitement puisse travailler à sa propre cadence, il faut lui fournir une quantité importante d'informations (instructions et opérandes) avec un débit élevé. Ces informations doivent être mémorisées dans un organe susceptible de les débiter quasi instantanément: c'est la mémoire principale.

D'une capacité généralement comprise entre 10^4 et 10^6 bits cette mémoire inscriptible peut être adressée par plusieurs unités de traitement mais est le plus souvent incorporée à l'unité centrale des calculateurs embarqués. Elle contient l'ensemble des informations (programmes et variables) nécessaires à un instant donné aux problèmes traités par la machine.

Le point mémoire est généralement de nature magnétique (le plus souvent mémoire à tores, parfois à fils), ce qui permet d'obtenir les capacités voulues avec un temps de cycle pouvant atteindre moins de 1 μ s pour les mémoires à tores, de l'ordre de 200 ns pour les mémoires à fils. Les mémoires à tambour sont de moins en moins utilisées comme mémoire centrale en raison de leur temps d'accès trop important.

Dans certaines applications où les programmes mis au point une fois pour toutes peuvent être figés, il est intéressant pour des questions d'encombrement et de fiabilité de scinder la mémoire principale en deux mémoires spécialisées: une mémoire morte contenant les programmes et les constantes et une mémoire vive de capacité réduite, généralement à semi-conducteurs, ne recevant que les variables.

8.1.3.2 Autres types de mémoire

Une même mémoire ne pouvant avoir à la fois une grande capacité et présenter un temps d'accès très réduit pour un coût raisonnable, une machine comportera toujours, en plus de sa mémoire principale, d'autres types de mémoire.

Les informations stockées dans un système à un instant donné, ne sont pas toutes utilisées à une même fréquence: les informations fréquemment employées seront stockées dans des éléments mémoires très rapides dont la capacité est assez réduite; par contre les informations appelées plus rarement seront rangées dans une mémoire de capacité importante de temps d'accès plus élevé et par conséquent moins coûteuse.

a) Mémoires bloc-note

Ces mémoires incorporées à l'unité de traitement ont une capacité relativement faible, variant de quelques bits (registres) à quelques milliers de bits.

Jusqu'alors elles ont été utilisées généralement comme élément de stockage des résultats intermédiaires de calcul. Cependant la tendance actuelle est d'étendre leur utilisation à un rôle de tampon entre la mémoire principale et l'unité de traitement dans les systèmes très performants.

Ces mémoires sont réalisées presque exclusivement en circuits intégrés, seule technologie permettant d'atteindre les rapidités nécessaires. Leur temps d'accès est inférieur à 100 ns.

b) Mémoires de masse

Il s'agit de mémoires à tambour ou à disque de capacité considérable destinées à mémoriser des tables de données ou des programmes volumineux, lorsque ceux-ci ne sont pas traités simultanément. Elles sont utilisées en raison de leur faible coût par bit et de leur grande capacité, joints à un débit d'information de plusieurs mégabits par seconde. Par contre leur temps d'accès est élevé: 10 ms à 100 ms.

c) Mémoires spécialisées

En dehors des trois grandes catégories de mémoires citées ci-dessus, on doit encore noter les mémoires spécialisées possédant des caractéristiques particulières.

Mémoires mortes. Destinées le plus souvent à remplacer la chaîne de commande de l'unité de traitement (microprogrammation), ces mémoires dont le contenu a été déterminé une fois pour toute (généralement à la fabrication) doivent présenter un temps d'accès 3 à 10 fois plus faible que la mémoire centrale. Ce sont généralement des mémoires intégrées, ou des mémoires à transformateur.

Mémoires associatives. En plus de l'adressage normal ces mémoires permettent l'adressage des mots par leur contenu, ce qui est particulièrement adapté à la consultation de tables.

La logique de ces mémoires est complexe, elles sont donc exclusivement réalisées en circuits intégrés et leur coût par bit est élevé.

8.1.4 UNITÉS D'ENTRÉE-SORTIE

Les unités d'entrée-sortie ont pour rôle d'assurer les échanges du calculateur avec ses équipements périphériques.

8.1A.1 Interruption

Après avoir donné un ordre d'échange le calculateur poursuit généralement le traitement des programmes en cours. Le périphérique adressé, souvent beaucoup plus lent que l'unité de traitement, informe le calculateur lorsqu'il devient prêt à participer à l'échange en effectuant une demande d'interruption.

A cette demande le calculateur répond par l'interruption du programme en cours et l'exécution d'un sous-programme spécifique de la demande qui commande l'échange puis vérifie qu'il s'est déroulé dans des conditions satisfaisantes.

Pour les calculateurs travaillant en temps réel, et c'est le cas des calculateurs embarqués, il est nécessaire de hiérarchiser les périphériques en attribuant un niveau de priorité aux différentes demandes d'interruption ainsi qu'aux programmes correspondants. Dans le cas où la demande d'interruption reçue est d'un niveau de priorité inférieur à celui du programme en cours, celle-ci est mise en attente pour être prise en compte seulement lorsque tous les traitements ou échanges auxquels sont attachés des niveaux supérieurs auront été exécutés.

8.1.4.2 Liaison programmée

Elle est destinée à assurer les opérations d'entrée-sortie avec les périphériques assez lents directement sous le contrôle du programme. Cette voie d'échange n'a aucune autonomie vis-à-vis de l'unité de traitement, car elle utilise les registres de l'unité arithmétique et logique et provoque à chaque échange une interférence importante.

Pour chaque échange d'information l'unité de traitement exécute une instruction, désigne le périphérique par une adresse et envoie ou reçoit l'information à échanger.

Par cette voie le calculateur est généralement mis en liaison avec des périphériques lents tels que lecteurs et perforateurs de ruban ou carte, téléimprimeurs, imprimantes etc.

8.1.4.3 Canal d'accès direct

Ce canal est généralement une simple liaison directe accédant à la mémoire principale du calculateur. Cette liaison est totalement indépendante de l'unité de traitement et le contrôle des échanges sur cette voie est souvent réalisé par une unité d'entrée-sortie extérieure au calculateur.

Les liaisons d'accès direct sont utilisées pour les périphériques rapides comme les mémoires de masse à disque magnétique ou encore pour connecter au calculateur une unité d'entrée-sortie multiplexée supplémentaire.

8.1.4A Canal multiplexé

Cette unité permet à un certain nombre d'équipements périphériques de communiquer simultanément avec la mémoire principale du calculateur sans gêner le déroulement du programme principal. Pour limiter l'interférence sur l'unité de traitement, cette unité de canal doit être aussi autonome que possible, c'est pourquoi elle possède généralement sa propre chaîne de commande, des registres tampons, un additionneur et un groupe de registres où sont stockés des renseignements relatifs à chacune des voies.

Parmi ces renseignements, on peut noter en particulier un code de commande, l'adresse courante de rangement ou lecture en mémoire et le nombre de caractères restant à échanger.

Pour chacune des voies c'est l'unité de traitement qui initialise l'unité canal en fournissant les adresses nécessaires, et le nombre de caractères à échanger. L'initialisation effectuée, l'unité canal prend son autonomie et contrôle seule l'échange entre le périphérique et la mémoire principale.

8.1.5 SOFTWARE

Assembleur-Compilateur

Le software de base d'un calculateur «sol» comprend en particulier un assembleur permettant la traduction du langage d'assemblage en langage machine et un compilateur qui réalise la traduction (compilation) d'un langage évolué en langage machine.

Le langage d'assembleur se distingue du langage machine dont il est très proche par le remplacement des différents codes binaires contenus dans l'instruction machine par des codes alphanumériques mnémoniques, beaucoup plus faciles à manipuler par le programmeur et en désignant les variables en mémoires non par leurs adresses mais par leurs noms symboliques. Le travail exécuté par le programme assembleur consiste donc essentiellement en un transcodage des codes opératoires et le calcul des différentes adresses. Une instruction en langage assembleur est traduite généralement par une seule instruction machine.

Les langages évolués tels que le Fortran sont beaucoup plus puissants et plus proches du langage mathématique que du langage machine, c'est pourquoi à l'encontre des langages assembleurs ils sont universels et acceptés par la plupart des ordinateurs (à travers leurs programmes de compilation) quels qu'en soient les constructeurs. Ils présentent donc l'avantage de simplifier et d'accélérer considérablement le travail du programmeur sans lui demander d'avoir une connaissance particulière de la machine utilisée. Une instruction de langage évolué pourra être traduite à la compilation par un grand nombre d'instructions machine.

Bien que les préoccupations relatives au volume des programmes en mémoire (nombre d'instructions nécessaires) et aux temps de traitement soient essentielles pour les calculateurs embarqués qui travaillent en temps réel, la tendance actuelle est de doter ces calculateurs d'un software de base complet comprenant un compilateur de langage évolué (Fortran IV par exemple). Il est certain que la compilation ne peut conduire à une véritable optimisation de l'occupation mémoire et du temps de calcul. Il apparaît cependant que les utilisateurs désirent pouvoir disposer d'un compilateur tout au moins pour écrire les programmes susceptibles d'évoluer et non critiques. Seul les programmes importants et figés dont les temps d'exécution sont critiques seront écrits en langage assembleur.

Pratiquement tous les calculateurs embarqués sont dotés d'un programme d'assemblage exécutable sur un calculateur «sol» de grande diffusion. Ceux disposant d'un compilateur sont encore actuellement peu nombreux.

Autres programmes

Avec tous les calculateurs sont fournis des programmes de test et de diagnostic permettant de faciliter la maintenance en détectant et localisant les pannes. D'autre part des programmes de simulation permettent de simuler les calculateurs embarqués sur des ordinateurs sol afin d'effectuer une première mise au point des programmes plus aisément.

A cela s'ajoute une bibliothèque de sous-programmes ainsi que le superviseur chargé de gérer les interruptions, l'initialisation des programmes, les échanges avec les mémoires de masse, etc.

En résumé le software d'un calculateur embarqué comprend:

- un assembleur,
- un compilateur,
- un simulateur,
- des programmes de test et diagnostic,
- une bibliothèque de sous-programmes,
- un superviseur.

8.1.6 PERFORMANCES DES CALCULATEURS EMBARQUÉS

La rapidité d'un calculateur peut être définie à partir du temps nécessaire à l'exécution des traitements qu'il doit réaliser; cependant ceux-ci étant très divers il est difficile d'utiliser une telle définition pour comparer différents calculateurs.

La méthode la plus utilisée consiste à considérer les temps d'exécution d'instructions caractéristiques comme l'addition et la multiplication.

En ce qui concerne les temps d'addition, les temps minimaux observés pour les calculateurs embarqués existant en 1962 étaient supérieurs à 10 μ s; en 1970 ils atteignent 2 μ s avec une valeur moyenne de 4 à 5 μ s.

En ce qui concerne les temps de multiplication, sur la même période le temps minimal est passé de 200 μ s à 6 μ s; la valeur moyenne actuelle se situe aux environs de 30 μ s.

Ces temps ne définissent cependant que partiellement la vitesse d'un calculateur. D'autres paramètres doivent être pris en compte, en particulier, la puissance du code d'ordre. Il est certain par exemple qu'un calculateur où on aura microprogrammé les fonctions sinus, logarithme, etc, sera plus rapide qu'un autre qui ne les comporterait pas pour résoudre un problème comprenant de nombreuses utilisations de telles fonctions.

8.2 Technologie

8.2.1 GÉNÉRALITÉS

Les progrès réalisés en électronique et plus particulièrement en électronique digitale sont mis en évidence de façon spectaculaire par la comparaison des premiers calculateurs digitaux à tubes électroniques réalisés il y a une vingtaine d'années, dont les dimensions et la susceptibilité aux contraintes mécaniques les rendaient impossibles à embarquer, avec les calculateurs modernes occupant seulement quelques décimètres cubes.

Ces progrès ont été particulièrement favorables aux calculateurs embarqués, essentiellement dans quatre domaines : miniaturisation, consommation, rapidité et fiabilité.

La miniaturisation d'abord améliorée par le remplacement des tubes par les transistors a effectué un nouveau bond avec l'apparition des circuits intégrés. La rapidité s'est, elle aussi, accrue dans des proportions considérables, facilitant le traitement de problèmes complexes en temps réel. Enfin les progrès en fiabilité permettent de diminuer le coût de maintenance et surtout de confier des tâches vitales aux calculateurs embarqués.

8.2.2 SPÉCIFICATIONS SPÉCIALES AUX CALCULATEURS EMBARQUÉS

Alors que les calculateurs « sol » installés dans les centres de traitement sont placés dans des salles à température et taux d'humidité constants, les calculateurs embarqués sont soumis à des contraintes extrêmement sévères et doivent donc satisfaire à des normes beaucoup plus exigeantes.

D'autre part la fiabilité d'un tel ordinateur se doit aussi d'être plus élevée car la sécurité et la réussite de la mission dépendent de son bon fonctionnement.

Un ordinateur placé à bord d'un avion ou d'un engin est soumis à des conditions de choc, température et vibration extrêmement diverses, il est donc nécessaire que chacun de ses composants soit d'excellente qualité et capable de résister à des tests très sévères.

A titre d'exemple les circuits intégrés sont soumis à des tests de choc (1500 g à 3000 g), de vibration (jusqu'à 2000 Hz, 30 g), d'accélération constante (20000 g), à des cycles thermiques rapides entre - 55 °C et + 125 °C, au brouillard salin et à la chaleur humide. Les conditions précises dans lesquelles sont effectués ces tests sont décrites dans des normes d'homologation telles que la norme CCTU 1703/A.

8.2.3 COMPOSANTS

8.2.3.1 Circuits logiques digitaux

Auparavant réalisés à partir de composants discrets (résistances, condensateurs, diodes, tubes ou transistors), les différentes fonctions logiques d'un

calculateur sont réalisées actuellement presque exclusivement à l'aide de circuits intégrés.

Cette technique permet d'élaborer sur un même substrat de silicium de dimension réduite (rectangle de quelques millimètres de côté) tous les composants, transistors, diodes et résistances nécessaires à la réalisation d'une ou plusieurs fonctions logiques élémentaires. Les avantages ainsi obtenus sont considérables aux points de vue miniaturisation, simplification des interconnexions et fiabilité.

Il existe actuellement deux technologies assez différentes en matière de circuits intégrés qui se distinguent essentiellement par la nature des transistors réalisés.

Circuits intégrés bipolaires. Ces circuits intégrés sont réalisés par diffusions sélectives et successives d'impuretés de type *Net P* sur un substrat de silicium de type *P* recouvert d'une couche épitaxiale de type *N*.

La figure 8-10 représente un transistor NPN ainsi obtenu.

Suivant les schémas retenus pour réaliser les mêmes fonctions logiques, on distingue actuellement trois familles principales de circuits intégrés logiques bipolaires :

- les circuits DTL (diode, transistor logic) (fig. 8-11),
- les circuits TTL (transistor, transistor logic) (fig. 8-12),
- les circuits ECL (emitter coupled logic) (fig. 8-13).

A titre d'exemple les schémas de portes à quatre entrées ainsi que leurs caractéristiques essentielles sont données pour chacune des familles.

Les schémas DTL sont relativement simples et comparables aux schémas utilisés avec des composants discrets, la puissance dissipée est moyenne mais les temps de propagation obtenus sont assez élevés (de l'ordre de quelques dizaines de nanosecondes). Les circuits TTL se distinguent des précédents par l'utilisation de transistors à émetteurs multiples et d'un étage de sortie à deux transistors du type « Totem pole » ; la puissance dissipée reste du même ordre mais les temps de propagation sont plus faibles (de l'ordre de la dizaine de nanosecondes).

Les circuits ECL sont caractérisés par le fait que les liaisons entre étages s'effectuent au niveau des émetteurs des transistors et que ces derniers ne passent jamais dans l'état saturé ; les temps de propagation obtenus sont particulièrement faibles (de l'ordre de quelques nanosecondes) mais par contre la puissance dissipée est importante.

En technologie bipolaire les niveaux d'intégrations atteints, vont de quelques portes pour les SSR (simple scale integration) à environ 100 portes pour les MSr (medium scale integration).

Circuits intégrés MOS. En technologie MûS (Métal, oxyde, semi-conducteurs) les transistors réalisés sont des transistors à effet de champ dont la réalisation est beaucoup plus simple.

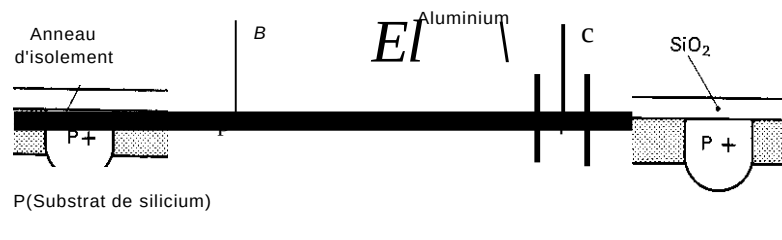


Figure 8-10.

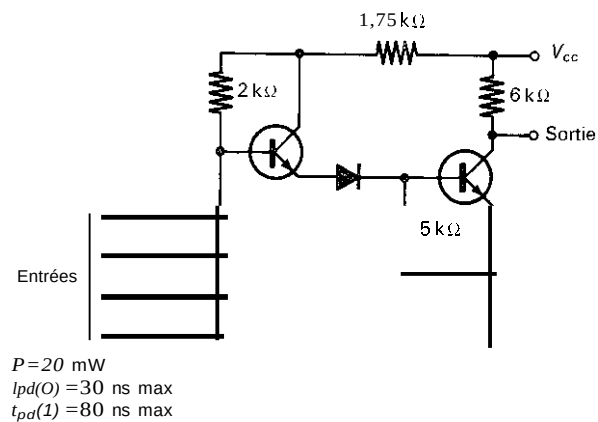


Figure 8-11.

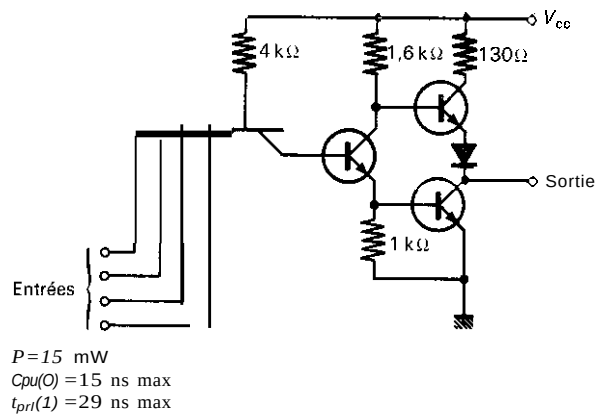


Figure 8-12.

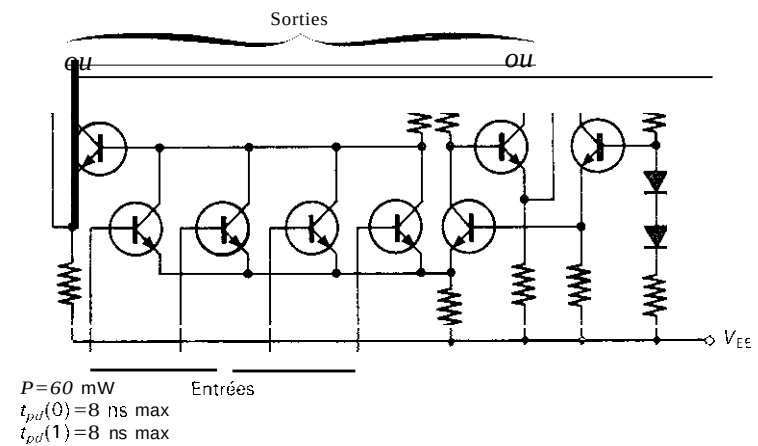


Figure 8-13.

La coupe (fig. 8-14) d'un transistor MûS de type P montre que celui-ci est réalisé directement sur le substrat (sans couche épitaxiale) en une seule diffusion alors qu'en technologie bipolaire 4 diffusions sont généralement nécessaires.

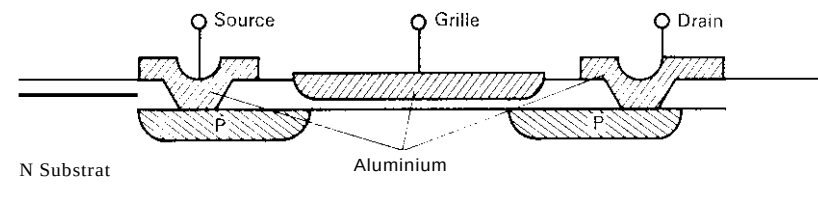


Figure 8-14.

Contrairement au cas des circuits intégrés bipolaires où l'on associe des transistors à des éléments passifs comme les résistances réalisées séparément dans des caissons isolés, dans les circuits intégrés MûS il n'y a qu'un seul type de composant, le transistor MûS utilisé soit comme élément passif, soit comme élément actif.

A titre d'exemple le schéma d'une porte à 4 entrées est donné par la figure 8.15 ci-après.

Les transistors T_1' , T_2' , T_3 , T_4 sont les composants actifs, alors que le transistor T_5 se comporte comme une résistance.

La technologie MûS permet d'atteindre un niveau d'intégration beaucoup plus élevé qu'en bipolaire, un circuit intégré MûS contient couramment jusqu'à plusieurs milliers de transistors. Ceci est dû aux différents avantages du

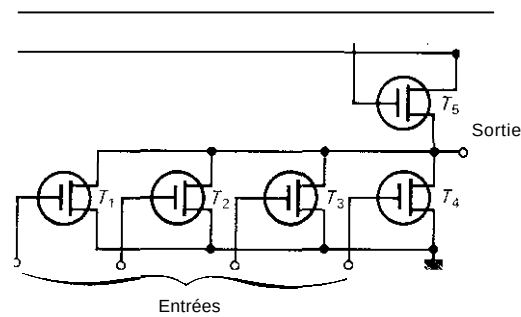


Figure 8-15.

transistor MOS : d'une part les impédances étant très élevées la puissance consommée est extrêmement faible; un boîtier pourra donc contenir un grand nombre de transistors tout en ayant une dissipation thermique raisonnable; d'autre part le nombre d'opérations à effectuer (diffusions et métallisations) étant très restreint, des fonctions complexes pourront être réalisées sur une même pastille tout en conservant un rendement de fabrication satisfaisant. En outre un transistor MûS occupe une surface nettement plus faible que celle nécessaire à un transistor ou une résistance en technologie bipolaire.

L'utilisation d'impédances élevées, favorables à une faible dissipation conduit à des performances dynamiques médiocres, principal défaut des MûS. Le temps de propagation à travers une porte MûS est généralement de l'ordre de quelques centaines de nanosecondes.

8.2.3.2 Circuits linéaires

Par circuits linéaires sont désignés ici tous les circuits électroniques utilisés dans un ordinateur autre que les circuits digitaux. Cette catégorie comprend essentiellement les circuits d'alimentation, les circuits associés à la mémoire (circuits de sélection, générateur de courant et amplificateur de lecture).

La tendance actuelle pour les ordinateurs embarqués est de réaliser ces circuits en grande partie sous forme intégrée monolithique ou hybride; seuls les éléments dissipant une trop forte puissance ne sont pas intégrés.

Les circuits intégrés linéaires monolithiques sont réalisés en faisant appel aux mêmes technologies, MaS ou bipolaires que pour les circuits logiques.

Lorsque les circuits doivent comporter des éléments (résistances ou condensateurs) de grande valeur ou de précision, ou lorsque la quantité nécessaire est trop faible pour justifier le développement d'un circuit intégré monolithique, ils sont plus facilement réalisés sous forme hybride.

Dans cette technologie les composants sont élaborés ou rapportés sur un substrat isolant de céramique ou de verre.

Les éléments passifs sont obtenus par évaporation ou sérigraphie à travers différents masques. Généralement les résistances sont réalisées d'abord par

dépôt d'oxyde métallique. On métallise ensuite le réseau d'interconnexions ainsi que la première électrode des condensateurs. Le diélectrique des condensateurs est ensuite obtenu par dépôt d'oxyde de silicium, puis une nouvelle métallisation forme leur seconde électrode. Les composants actifs, tels que les transistors montés dans des boîtiers spéciaux microminiatures, sont rapportés par soudure.

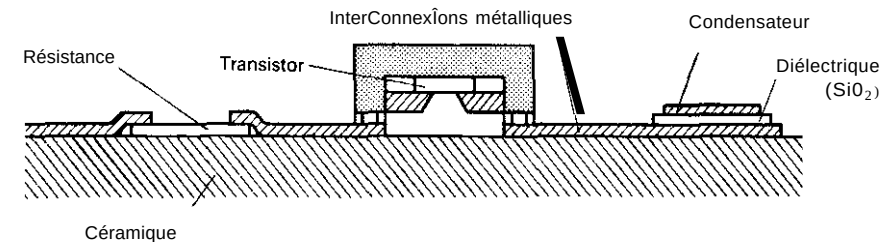


Figure 8-16.

Cette technologie permet de disposer de composants stables de grande précision (résistance à 1 %) avec des gammes de valeurs beaucoup plus étendues qu'en technologie monolithique.

8.2.4 TECHNOLOGIE ET ORGANISATION DES MÉMOIRES

8.2.4.1 Mémoires à semi-conducteurs

a) Mémoires vives

Les mémoires vives à semi-conducteurs se présentent sous forme de circuits intégrés comportant autant de bascules que de points mémoire.

Le choix entre les technologies MûS et bipolaire pour la réalisation des transistors des bascules et des circuits de décodage conduit à des performances nettement différentes.

La technologie bipolaire permet de réaliser des mémoires vives très rapides (temps d'accès ≈ 50 ns) mais la capacité est limitée à quelques dizaines de bits par circuit intégré et la consommation de puissance est importante.

La technologie MaS autorise une plus forte intégration car le transistor est alors de dimension plus réduite, la consommation par bit mémorisé est beaucoup plus faible qu'en bipolaire mais le temps d'accès est nettement plus élevé, de l'ordre de 500 ns.

b) Mémoires mortes

Le point mémoire est généralement constitué par un transistor, l'inscription s'effectuant le plus souvent à la fabrication lors du dépôt du dernier niveau de métallisation. La connexion ou l'absence de connexion sur un transistor fixe la nature du bit mémorisé.

Ce procédé présente l'inconvénient de nécessiter la réalisation d'un masque spécifique pour le contenu de mémoire demandé par l'utilisation. Si le coût de ce masque est facilement amorti par la réalisation d'un nombre important de circuits identiques, il devient prohibitif lorsque quelques exemplaires seulement sont nécessaires.

Des mémoires mortes facilement inscriptibles par l'utilisateur sont à l'étude, l'inscription pourra être effectuée au moyen d'impulsions électriques (sur-tension ou surintensité) provoquant la mise en court-circuit d'un composant (diode) ou la rupture d'un fusible.

En technologie bipolaire les circuits de mémoire morte comportent au maximum quelques centaines de bits et présentent un temps d'accès de l'ordre de 50 ns. En MOS les capacités sont beaucoup plus élevées et dépassent les 4000 bits, par contre les temps d'accès restent de l'ordre de 500 ns au minimum. Des solutions hybrides, actuellement à l'étude, semblent pouvoir concilier une forte capacité et une rapidité satisfaisante en réalisant les circuits de décodage et de lecture en bipolaire, la matrice de points mémoires restant seule en MûS.

8.2.4.2 Mémoires magnétiques

a) Mémoires à tores

Le point mémoire est constitué par un tore en matériau magnétique présentant un cycle d'hystérésis le plus rectangulaire possible. Le tore conserve le sens d'aimantation, représentant l'état binaire mémorisé, qui lui a été imposé lors de l'écriture. Au moment de la lecture on provoque le passage dans l'état « 0 » de tous les tores du mot adressé, les tores se trouvant initialement dans l'état « 1 » basculent alors en induisant une impulsion dans les conducteurs de lecture.

Il existe essentiellement trois modes de sélection.

Sélection 3D. Dans ce mode, qui est, le plus couramment utilisé, la sélection est réalisée par courant coïncidant.

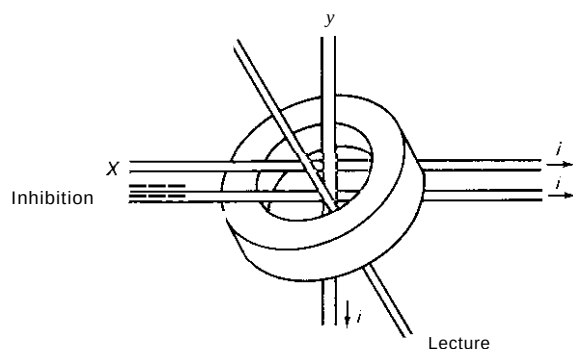


Figure 8-17.

Dans cette organisation la mémoire est constituée par un empilage de plans organisés en matrice carrée contenant chacun un bit de même rang de tous les mots. Il y a donc autant de plans que de bits dans le mot.

L'adressage est effectué en X, Y. Le courant traversant le fil X ou le fil Y est insuffisant pour faire basculer un tore, seul le tore dont les fils X et Y sont activés simultanément peut basculer.

Un fil L_i traverse tous les tores d'un même plan et permet de détecter le basculement du tore correspondant au mot adressé.

Dans une mémoire 3D, 4 fils. chaque tore est traversé par 4 fils: un fil X, un fil Y, un fil de lecture L_i et un fil d'inhibition.

Lors de la lecture les fils X et Y sont traversés par un courant $-1/2$, si le tore était précédemment dans l'état

« 1 » celui-ci bascule et induit une impulsion dans le fil de lecture L_i s'il était déjà dans l'état « 0 » le fil L_i ne reçoit aucun signal.

Lors de l'écriture les fils X et Y sont traversés par un courant $+1/2$; si le bit à écrire est un zéro le fil d'inhibition est parcouru par un courant $-1/2$ interdisant ainsi le basculement; dans le cas contraire le fil d'inhibition n'est pas activé et le tore bascule pour passer dans l'état « 1 ». Il est à noter que l'écriture doit toujours être précédée d'une lecture (ou effacement) afin que tous les tores du mot adressé soient bien dans l'état « 0 » au moment où commence l'écriture.

Dans une mémoire 3D, 3 fils, les fils de lecture et d'inhibition sont confondus. Cette disposition complique un peu l'électronique du bloc mémoire mais permet j'utilisation de tores plus petits donc plus rapides.

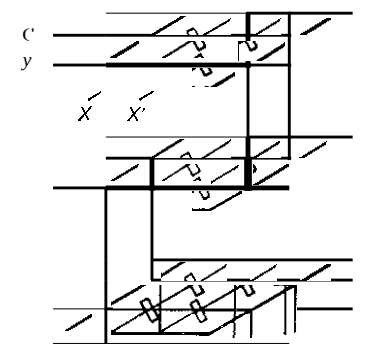


Figure 8-18.

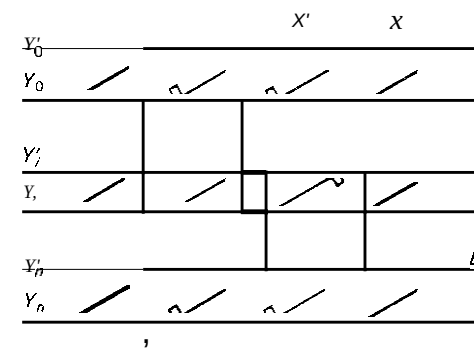


Figure 8-19.

Sélection 2D 1/2. Ce type de sélection est dérivé du précédent, le bloc mémoire est encore constitué d'autant de plans qu'il y a de bits dans le mot, chacun d'eux contenant 1 bit de chaque mot. Le fil d'inhibition rencontré dans le mode 3D, 4 fils n'existe pas ici et c'est le fil Y qui remplit son rôle.

La lecture est réalisée par le passage d'un courant -112 dans les fils X et Y, un fil L_i détecte alors le basculement du tore adressé dans chaque plan.

Lors de l'écriture le fil X est traversé par un courant $+112$ alors que le fil Y est traversé, soit par $+1/2$ s'il s'agit d'écrire un «1», soit par aucun courant pour écrire «0».

Cette disposition impose de prévoir un ensemble d'interrupteurs de courant en Y pour chacun des plans du bloc. D'autre part la matrice de tores constituant chacun des plans est rendue rectangulaire afin de rendre comparable les temps de propagations dans les fils X et Y.

Sélection 2D. Les tores sont disposés dans un même plan avec dans une direction les fils de mots traversant tous les tores d'un même mot et dans la direction orthogonale les fils de bits et les fils de lecture traversant les tores homologues de tous les mots.

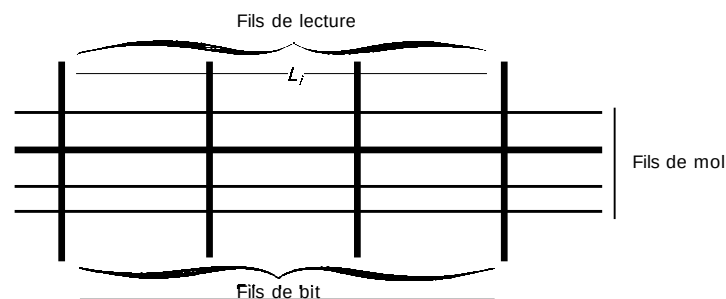


Figure 8-20.

Dans une mémoire 2D, 2 fils, les fils de bits et de lecture sont confondus.

La lecture s'effectue en envoyant un courant -1 dans le fil du mot adressé. Les fils L_i détectent le basculement éventuel de chacun des tores de ce mot.

L'écriture est obtenue en envoyant d'une part un courant $+112$ dans le fil du mot adressé et d'autre part $+112$ dans les fils de bit correspondant aux «1» et aucun courant dans les fils correspondant aux «0» du mot à écrire.

Comparaison des différents modes de sélection. Lorsque l'on passe du mode 3D au mode 2D 1/2 puis 2D le coût de l'électronique associée croît de façon importante alors que le câblage du bloc mémoire se simplifie et devient donc moins coûteux.

Dans le cas des calculateurs embarqués les capacités des blocs mémoires sont relativement modestes, l'électronique intervient alors dans une proportion

importante dans le coût total de la mémoire, la solution 3D est donc dans ce cas nettement avantageuse.

D'autre part la vitesse de fonctionnement augmente progressivement lorsque l'on passe de la sélection 3D à la sélection 2D (diminution du diamètre des tores et de la longueur des fils).

Il semble qu'actuellement les solutions les plus satisfaisantes pour les calculateurs embarqués soient les sélections 3D, 3 fils ou 2D 1/2.

b) Mémoires à fils

Le matériau mémorisant l'information est une couche magnétique déposée électrolytiquement sur un fil conducteur.

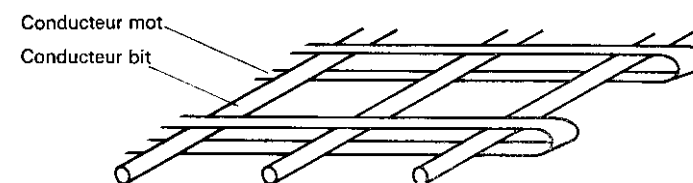


Figure 8-21.

La sélection est du type 2D, les conducteurs de bits portent le revêtement magnétique et les conducteurs de mot sont disposés orthogonalement aux précédents.

La couche magnétique possède une direction d'aimantation facile (aimantation circulaire) et une direction d'aimantation difficile (direction longitudinale).

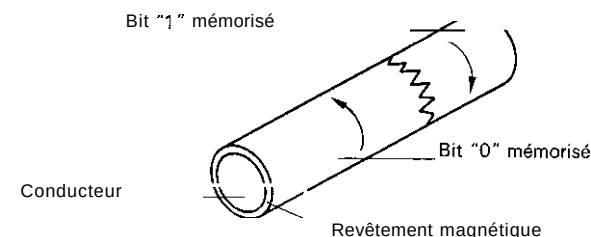


Figure 8-22.

La lecture s'effectue par envoi d'un courant dans le conducteur de mot, le champ créé est longitudinal et provoque la rotation de l'aimantation vers la direction d'aimantation difficile qui entraîne l'apparition d'une impulsion dans le conducteur de bit dont le signe dépend du sens de l'aimantation initiale.

Cette lecture est non destructive car après l'excitation d'interrogation

d'amplitude limitée, le vecteur aimantation retombe vers la direction privilégiée et dans le sens initial.

L'écriture s'effectue en envoyant un courant dans le conducteur de mot, et dans les fils de bits une impulsion de courant, positive ou négative suivant le bit à écrire, qui guide la retombée du vecteur aimantation.

Ce type de mémoire possède un temps de cycle (lecture ou écriture) nettement plus faible que les mémoires à tores (de l'ordre de 200 ns) et présente l'intérêt de permettre une lecture non destructive. Cependant l'électronique nécessaire est importante et délicate ce qui conduit à un prix de revient élevé et limite l'emploi des mémoires à fils à l'heure actuelle.

c) Mémoires à disque et à tambour

Dans ces types de mémoire l'information est mémorisée dans une couche magnétique, déposée sur un disque ou sur un tambour, au moyen d'une tête magnétique. La lecture peut être effectuée par la même tête.

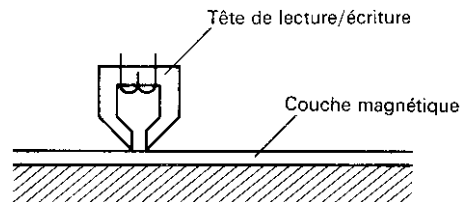


Figure 8-23.

Les têtes de lecture/écriture peuvent être fixes ou montées sur des bras mobiles leur permettant d'atteindre plusieurs pistes. Les têtes fixes peuvent être fixées rigidement au châssis ou installées sur un patin flottant sustenté aérodynamiquement.

Cette dernière méthode permet, en maintenant un écartement très réduit entre la tête et la couche magnétique, d'obtenir des densités linéaires d'information plus élevées.

Avec ces types de mémoires les capacités obtenues sont considérables (de l'ordre de quelques méga-octets) pour un coût unitaire très faible.

Bien que permettant un débit important ces mémoires présentent un temps d'accès aléatoire très élevé (de l'ordre de 20 ms).

a) Mémoires à transformateurs

Ce sont des mémoires mortes dont le contenu est fixé à la fabrication. Les transformateurs sont constitués par des tores à caractéristique magnétique linéaire possédant un enroulement secondaire unique et des enroulements primaires constitués par les fils de mot.

Suivant que le bit à écrire est un « 1 » ou un « 0 » on fait passer ou non le fil de mot dans le tore.

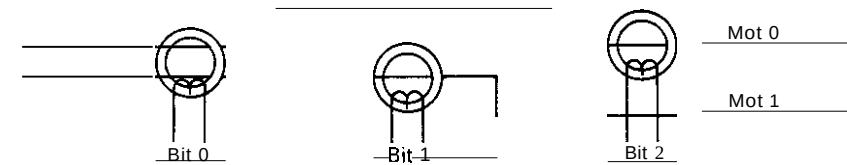


Figure 8-24.

Les temps d'accès obtenus pour ce type de mémoire sont de l'ordre de 100 à 300 ns.

8.2.5 INTERCONNEXIONS

Tous les circuits logiques d'un ordinateur ainsi qu'une bonne partie des circuits linéaires sont réalisés sous forme de circuits intégrés présentés dans des boîtiers dont les dimensions sont de l'ordre du centimètre. Ces boîtiers sont montés sur des cartes de circuits imprimés par soudure de leurs fils de sortie sur les bandes de conducteur ou dans des trous métallisés.

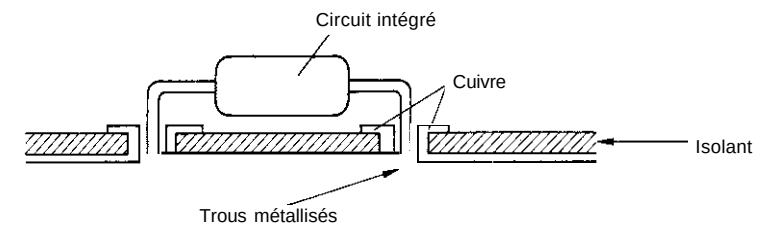


Figure 8-25.

Dans le cas des calculateurs embarqués où le problème d'encombrement est particulièrement important, les cartes peuvent porter jusqu'à 30 circuits intégrés pour 100 cm², chacun des circuits comportant en moyenne une dizaine de fils de sortie. Le réseau d'interconnexions à implanter sur la carte est particulièrement dense et ne peut généralement pas être réalisé sur une carte simple ou double face mais seulement sur une carte multicouche.

Les cartes multicouches sont obtenues par collage de cartes simple ou double face très minces (50/1m à 200/1m) supportant une partie du réseau d'interconnexions.

Pour assurer les liaisons nécessaires entre les conducteurs appartenant à des niveaux différents des trous sont percés à travers les couches puis métallisés par dépôt électrolytique. Ce type de carte peut comporter jusqu'à une dizaine de couches.

Ces cartes supportant les circuits intégrés, appelées cartes filles sont interconnectées entre elles, soit par câblage fil, soit au moyen d'une carte mère.

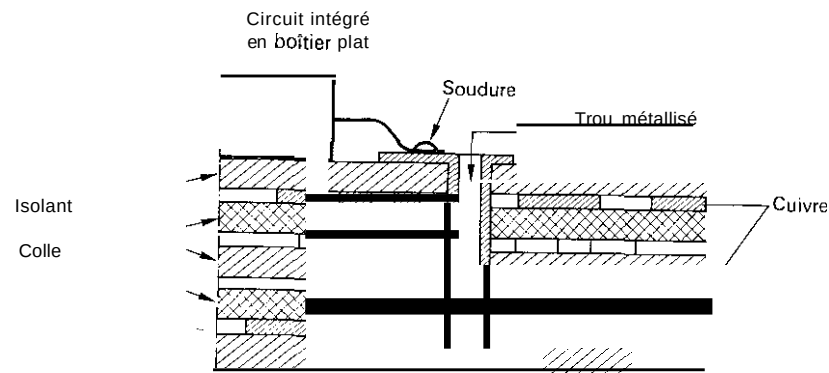


Figure 8-26.

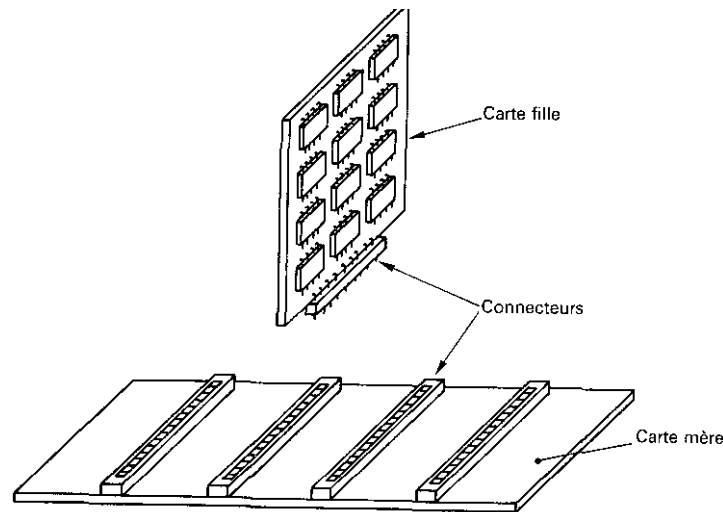


Figure 8-27.

La carte mère, généralement du type multicouche supporte uniquement des connecteurs SUR lesquels viennent s'enficher les cartes filles.

8.3 Fiabilité

8.3.1 DÉFINITION

La fiabilité d'un matériel caractérise son aptitude à ne pas tomber en panne en cours d'utilisation.

Cette définition peut aussi bien s'appliquer à un élément simple comme un

circuit intégré, une résistance ou une soudure qu'à un système complexe comme un avion ou un missile.

Trois types de pannes peuvent compromettre le fonctionnement d'un matériel.

D'abord les pannes dites «infantiles» qui surviennent très tôt dans la vie du matériel et sont généralement dues à une mauvaise fabrication et à un contrôle de qualité insuffisant. Pratiquement on peut les éliminer par une sélection sévère des composants et par une mise à l'épreuve de l'équipement terminé dans des conditions aussi proches que possible des conditions les plus défavorables rencontrées en cours de fonctionnement opérationnel.

Les défaillances du deuxième type sont celles qui sont dues à l'usure des éléments constitutifs. Les calculateurs digitaux modernes (à mémoire statique) ne comprenant pas de pièces mécaniques en mouvement, ni de tubes électroniques ne sont pratiquement pas sujets au vieillissement ou tout au moins celui-ci ne pourrait se faire sentir qu'au bout d'un laps de temps dépassant très largement la durée de vie du système dans lequel le calculateur est intégré.

Le troisième type de défaillance comprend les pannes dites accidentelles qui apparaissent de façon aléatoire et avec une même probabilité tout au long de la vie du matériel. C'est ce type qui nous intéresse plus particulièrement car si les pannes du premier type peuvent être éliminées par une mise à l'épreuve et celles du second type pratiquement inexistantes pour un calculateur, les pannes accidentelles sont difficiles à éviter. L'on ne peut diminuer leur probabilité qu'en utilisant les éléments très en dessous de leur charge nominale et en introduisant des redondances fort coûteuses.

8.3.2 INTÉRÊT DES CALCULS DE FIABILITÉ

Au stade de l'avant-projet, les calculs de fiabilité permettent de connaître sensiblement avec quelle probabilité le matériel conçu sera susceptible de remplir sans défaillance la ou les missions auxquelles il est destiné. Ces études ont donc pour but de s'assurer que les valeurs estimées sont compatibles avec les objectifs prescrits et, le cas échéant conduisent à réviser les choix technologiques et l'organisation fonctionnelle des circuits.

Au stade de l'utilisation, les études de fiabilité permettent de définir le volume du stock de maintenance optimum qui permet d'assurer, à un prix raisonnable, la disponibilité opérationnelle d'un matériel.

8.3.3 PRINCIPES DES CALCULS DE FIABILITÉ

Ces principes de calcul sont valables pour des matériels sujets uniquement aux pannes aléatoires accidentelles.

La fiabilité mathématique F (dans l'hypothèse d'une loi de Poisson) est définie par l'expression:

$$F(t) = e^{-\lambda t}$$

— λ est appelé taux de pannes accidentelles, / est la durée d'utilisation sur laquelle on veut connaître la fiabilité (probabilité de bon fonctionnement) du matériel. Le coefficient λ est généralement exprimé en nombre de pannes par heure. On utilise souvent, son inverse m appelé temps moyen entre pannes ou MTBF (Mean Time Between Failure) exprimé en heures.

Pour un système composé de n sous-ensembles ou composants de fiabilité F , et si la défaillance d'un seul de ces composants entraîne la défaillance du système, sa fiabilité F_s est donnée par :

$$F_s = \prod_{i=1}^n F_i,$$

$$F_s = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i t} = \exp\left(-t \sum_{i=1}^n \lambda_i\right),$$

d'où le taux de défaillance du système :

$$\lambda_s = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Il est donc aisé de prévoir la fiabilité d'un système complexe comme un calculateur lorsque la fiabilité de chacun de ses composants est connue.

Ordre de grandeur des λ à température ambiante pour quelques types de composants :

Points de soudure	$\lambda = 0,01 \cdot 10^{-6}$
Diodes silicium	$\lambda = 0,02 \cdot 10^{-6}$
Transistors silicium	$\lambda = 0,02 \cdot 10^{-6}$
Résistances à couches	$\lambda = 0,01 \cdot 10^{-6}$
Condensateurs céramique	$\lambda = 0,1 \cdot 10^{-6}$
Circuits intégrés TTL	$\lambda = 0,03 \cdot 10^{-6}$

On constate que l'utilisation de circuits intégrés conduit à une amélioration considérable de la fiabilité. La somme des composants discrets et des points de soudure correspondant au même circuit en réalisation classique donnerait un taux de défaillance λ environ 100 fois supérieur.

8.3.4 DÉTECTION DES PANNES ET REDONDANCES

Lorsque dans un système un sous-ensemble G possède une fiabilité insuffisante pour permettre d'obtenir la fiabilité globale souhaitée on introduit une redondance en disposant en parallèle plusieurs éléments identiques à G .

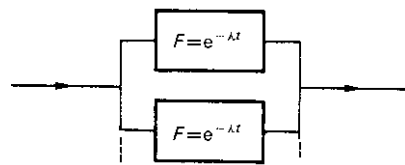


Figure 8-28.

Lorsque le bon fonctionnement d'un des éléments suffit à assurer le fonctionnement correct la fiabilité

est donnée par :

résultante est, respectivement pour 2 et 3 éléments en parallèle :

$$P_{2P} = 2P - F^2$$

$$P_{3P} = 3P - 3F^2 + P^3.$$

On constate que la probabilité de panne $D = 1 - F$ diminue considérablement lorsque le nombre d'éléments mis en parallèle croît.

Pour un calculateur la situation n'est généralement pas aussi simple. En effet si deux sous-ensembles identiques effectuent le même traitement d'information nous ne pouvons tout au plus que détecter le mauvais fonctionnement de l'un d'eux sans pouvoir préciser lequel est défaillant.

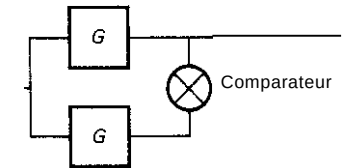


Figure 8-29.

Si le résultat de la comparaison est négatif on peut recommencer le traitement ce qui permet d'éviter une erreur due à un défaut fugitif, mais si l'un des éléments est définitivement hors d'usage ce procédé n'apporte aucune solution et ne permet donc pas d'améliorer la fiabilité.

Par contre si l'on dispose trois sous-ensembles G en parallèle on peut, par comparaison des résultats deux à deux, déterminer le module défaillant (à condition qu'il y en ait un seul à la fois) et choisir le résultat valable.

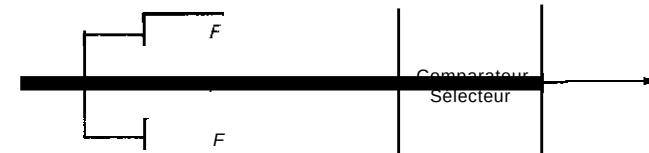


Figure 8-30.

Dans ce cas la fiabilité résultante est la probabilité qu'au moins deux éléments sur les trois fonctionnent correctement (en supposant que le comparateur sélecteur a une fiabilité beaucoup plus élevée) :

$$F_p = F^3 + 3(1 - F)F^2.$$

Comme on peut le constater cet accroissement de fiabilité est obtenu au prix d'une augmentation considérable du coût du système, cette méthode ne sera donc retenue qu'en dernier ressort après avoir épuisé toutes les possibilités pour rendre chacun des éléments suffisamment fiable intrinsèquement.

8.3.5 FIABILITÉ DES CALCULATEURS EMBARQUÉS

La tendance actuelle étant de confier au calculateur de plus en plus de tâches vitales, il est évident que les conséquences d'une panne deviennent extrêmement graves en compromettant la sécurité du vol. Pour les calculateurs embarqués la fiabilité est donc un critère fondamental.

Les temps moyens entre pannes des calculateurs embarqués modernes se situent généralement entre 1500 et 10000 heures. Il faut noter que l'alimentation et surtout la mémoire principale ont une contribution importante dans les taux de pannes obtenus (souvent plus de 60% de défaillances sont dues à la mémoire).

Il apparaît donc que c'est essentiellement dans le domaine des mémoires centrales que les améliorations soient à rechercher aussi bien par un progrès de leur technologie que par l'adjonction de dispositifs de détection d'erreurs (bit de parité, code redondant) et l'emploi de plusieurs blocs mémoire de façon à ce qu'une défaillance localisée dans un bloc ne puisse paralyser l'ensemble du système.

8.4 Exemples de calculateurs

A titre d'exemple, deux calculateurs embarqués vont être décrits rapidement. Ces deux calculateurs sont inclus dans des systèmes opérationnels de navigation inertielle, et ils offrent l'avantage de correspondre à des solutions différentes, tant du point de vue de la technique de mémorisation, que du point de vue du rôle accordé au calculateur dans l'ensemble du système.

Ces deux calculateurs sont d'une part l'Arma Micro D produit par American Bosch Arma Corporation et l'AE 51 produit par SAGEM.

8.4.1 CALCULATEUR Arma Micro D (figure 8-31)

Caractéristiques principales

- Caractéristiques générales: calculateur numérique universel, organisation série à un accumulateur, instruction à une adresse mémoire, virgule fixe
- Longueur du mot: 18 bits
- Fréquence d'horloge: 1,5 mégahertz
- Temps d'exécution: addition: 18 microsecondes
multiplication: 342 microsecondes
- Entrée-sortie: liaison programmée
- Mémoire: à tores, 4096 mots, temps de cycle: 3,3 μ s
- Technologie: circuits intégrés TTL montés sur cartes multicouches
- Masse: 2,6 kg } sans l'alimentation
- Volume: 3 litres

- Puissance: 35 watts
- MTBF estimé: 10000 heures (sans l'alimentation).

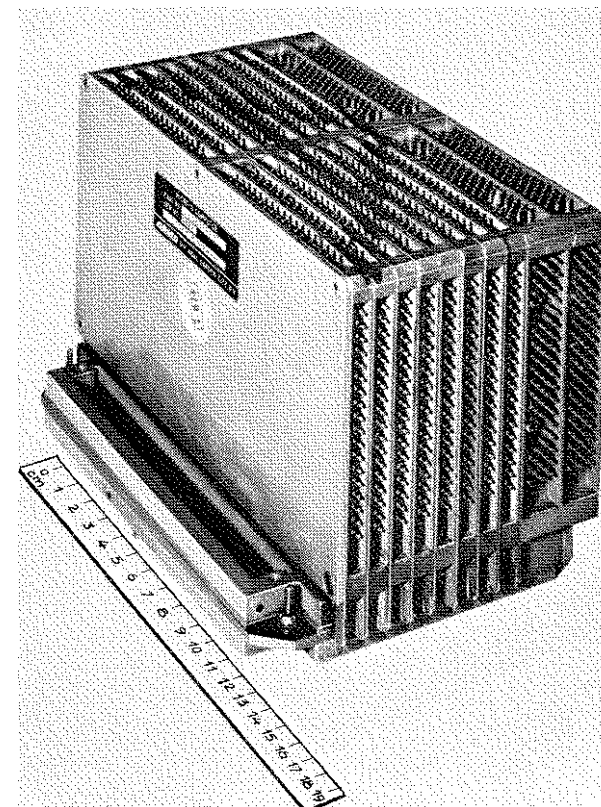


Figure 8-31.

8.4.2 CALCULATEUR AB 51 (figures 8-32 à 8-34)

Caractéristiques principales

- Caractéristiques générales: calculateur numérique universel, organisation série-parallèle à un accumulateur et 5 registres «bloc note», instruction à 2 ou 3 adresses mémoire, virgule fixe
- Longueur du mot: 24 bits
- Fréquence d'horloge: 640 kilohertz
- Temps d'exécution: addition: 19 microsecondes
multiplication: 39 microsecondes

- **Entrée-sortie:** liaison programmée
- **Mémoire:** tambour magnétique tournant à 24000 *tr/min* sur palier à air, capacité maximale : 8192 mots
- **Technologie:** circuits intégrés DTL et cartes multicouches
- **Masse;** 15 kg } avec 8192 mots mémoire
- **Volume;** 18 litres }
- **Puissance :** 110 watts
- **MTBF;** 2000 h.

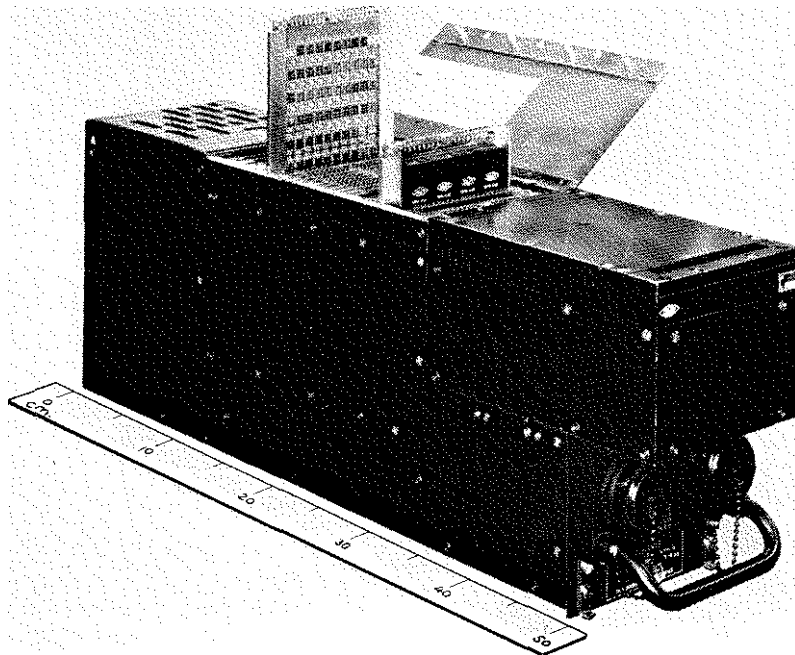


Figure 8-32.

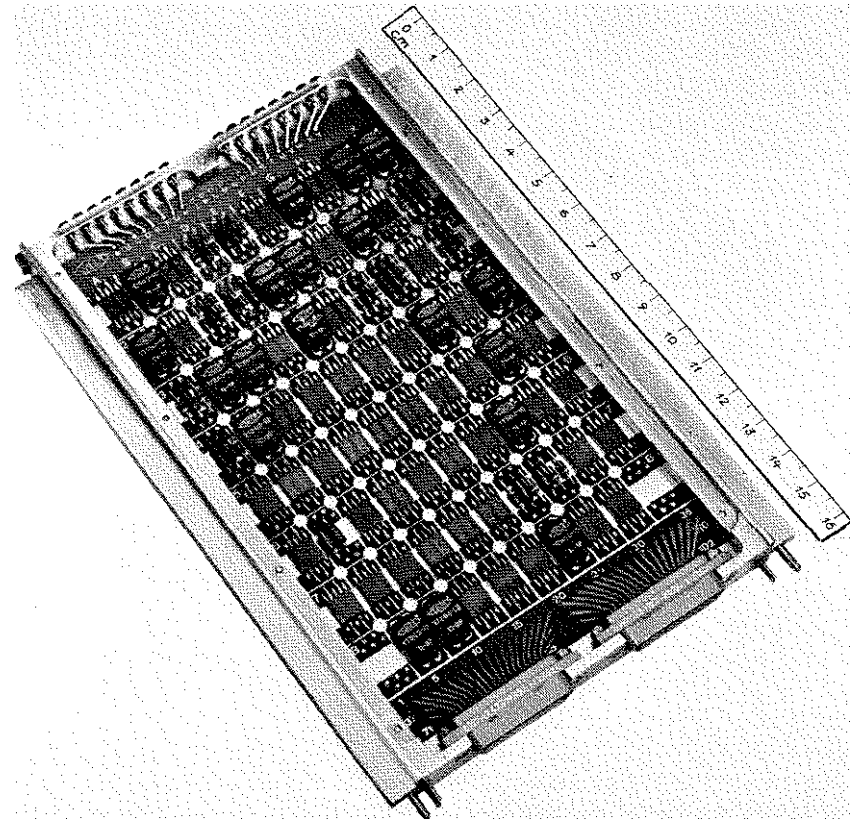


Figure 8-33.

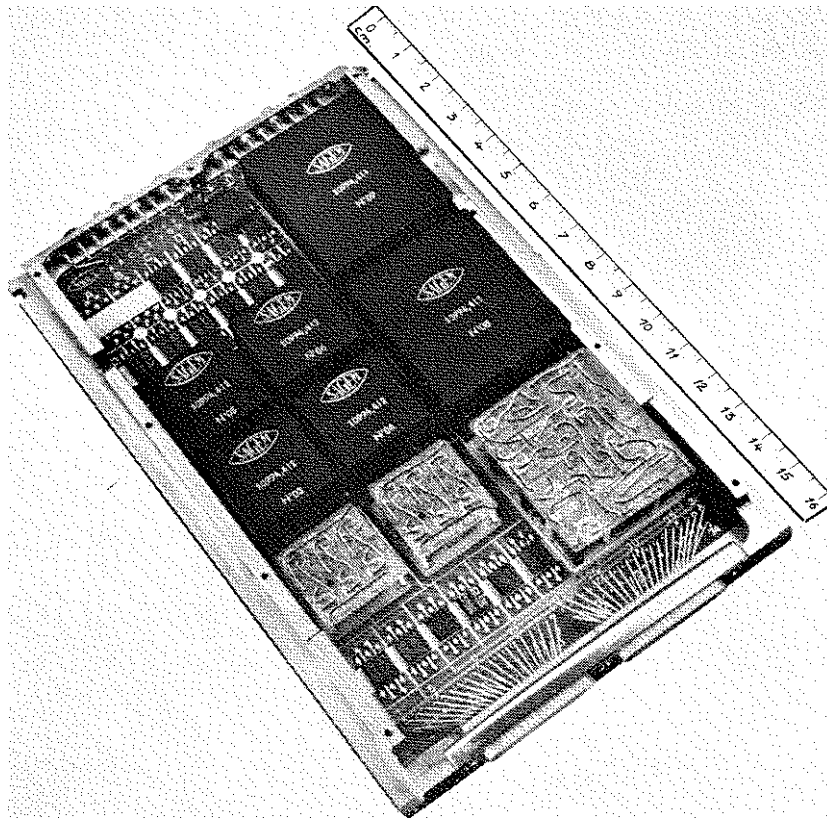


Figure 8-34.

ANALYSEUR DIFFÉRENTIEL NUMÉRIQUE (DDA) (*)

8.5 Généralités

Les calculateurs sont de deux types, analogiques ou numériques. Les premiers ont un fonctionnement continu, les seconds procèdent de façon discrète. Les analyseurs différentiels numériques ou DDA, de l'anglais Digital Differential Analyser, bien qu'appartenant à la deuxième catégorie ont hérité des techniques de calcul de la première.

En effet, le planimètre, probablement le premier analyseur différentiel, est

(*) Partie rédigée par L. CAMBERLEIN.

analogique. Il a été mis au point vers 1850 et l'un de ses modèles, le planimètre d'Amsler (1880), est encore couramment utilisé.

Des machines mécaniques à résoudre les équations différentielles ont ensuite été développées. Vers 1931, V. Bush (*) mit au point un appareil conçu pour des équations du sixième ordre. Le nom de O. Ambee (**) est également associé au développement de cette technique par ses travaux sur les montages servo et les générateurs de fonctions. Vers les années 1940, une grande impulsion fut donnée au calcul analogique en y introduisant des éléments électromécaniques et électroniques, en particulier pour des conduites de tir et des radars de poursuite. Les premiers analyseurs différentiels numériques ont été conçus aux États-Unis vers 1950 pour résoudre des problèmes de guidage de missile, les calculateurs numériques universels étaient alors trop volumineux, trop lourds, trop lents et trop gourmands en énergie. Depuis beaucoup de DDA ont été réalisés dans différents pays.

On distingue deux types d'organisation de DDA, série ou séquentielle et parallèle ou simultanée. La deuxième catégorie, qui a l'avantage de la rapidité, est rendue possible par le développement de technologies électroniques à très haute densité (LSI). C'est pourquoi cet exposé concerne plus particulièrement les DDA simultanés.

Le principe du calcul DDA est celui du calcul incrémental. Un exemple simple peut en montrer les différences avec la technique employée par les calculateurs universels. Pour réaliser l'opération scalaire suivante

$$z = Ax$$

où A est une constante et x une variable, le calculateur universel fait une multiplication, équivalent à $k-1$ additions, k étant le nombre de bits de calcul. Il recommence l'opération à chaque nouvelle valeur de x . Par contre, le DDA ne calcule à chaque nouvelle valeur de x , que l'incrément Δz à partir de l'incrément Δx

$$z_{n+1} = A(x_n + \Delta x) = z_n + A\Delta x$$

en s'arrangeant pour que $\Delta x = 1$, l'opération se réduit à une seule addition contre $k-1$

$$z_{n+1} = z_n + A.$$

Cet exemple met en évidence la différence de charge de calcul des deux techniques et explique la rapidité qu'il est possible d'atteindre en DDA (des fréquences de calcul de 100 kilohertz ont déjà été réalisées). Il montre aussi le caractère incrémental des informations d'entrée et de sortie du DDA.

(*) «The Digital Differential Analyser» *J. Franklin Inst.*, 212, N° 4, 447-488 (October 1930).

(**) «On the Principle of Connexion for Bush Integrators» *J. Sci. Instr.*, 284-287 (December 1946).

Le DDA bénéficie des avantages de l'une et l'autre technique, analogique et digitale. D'une part, les avantages « digitaux » de souplesse, de précision et de stabilité: la variable d'intégration peut être indépendante du temps, la précision est fonction de la longueur des mots, et la stabilité est indépendante de celle des sources de tension ou de courant. D'autre part, la rapidité qui peut approcher celle des calculateurs analogiques.

Les DDA conviennent particulièrement bien pour résoudre les équations différentielles en temps réel. Dans l'état de la technique et pour de petites fonctions de calcul (moins de 100 à 200 intégrateurs), ils sont souvent plus petits, plus rapides et moins coûteux que les calculateurs universels. Ils trouvent surtout leur application dans des problèmes temps réel de navigation, de guidage, de filtrage ou de contrôle. Ils sont également employés en simulation numérique ou associés à des calculateurs universels.

L'exposé qui suit est une introduction au DDA. Après une présentation des algorithmes d'intégration utilisés, des principes des intégrateurs et de leurs utilisations, on aborde les erreurs d'intégration par troncature et par arrondi. Les erreurs causées par les retards, les problèmes de stabilité et de transitoire ne sont pas traités. Ils peuvent être analysés par le calcul des différences finies ou la transformée en Z. Les organisations générales des DDA séquentiels et simultanés sont décrites sommairement. La programmation est évoquée avec la définition du schéma DDA et des cadrages; un filtre de Wiener et un filtre de Kalman sont donnés en exemples. Enfin deux exemples technologiques sont présentés; un intégrateur de DDA simultané à très haute densité et un analyseur différentiel numérique réalisant les calculs d'un navigateur inertiel.

8.6 Algorithmes d'Intégration pour analyseur différentiel numérique

Ce paragraphe est un rappel sommaire de quelques résultats et principes concernant les algorithmes ou méthodes d'intégration numérique d'équations différentielles utilisables en technique DDA. Pour un exposé complémentaire le lecteur pourra se reporter à l'annexe 6 où sont présentées des méthodes programmables sur calculateur universel.

L'intégration numérique d'une fonction $y(x)$ entre deux valeurs de la variable d'intégration x_n et x_{n+1} peut être calculée à partir de son développement limité en série de Taylor:

$$z(x, +) = z(x,) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y(x) dx \quad (8.1)$$

$$= z(x,) + \frac{(x_{n+1} - x_n)}{1!} \dot{z}(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2!} \ddot{z}(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)^3}{3!} \ddot{\ddot{z}}(x_n) + \dots \quad (8.2)$$

La différence entre x_n et x_{n+1} est appelée pas d'intégration. En choisissant un pas constant la relation (8.2) se simplifie

$$z_{n+1} = z_n + \frac{\Delta x}{1!} \dot{z}_n + \frac{\Delta x^2}{2!} \ddot{z}_n + \frac{\Delta x^3}{3!} \ddot{\ddot{z}}_n + \dots \quad (8.3)$$

avec, en supprimant l'indice pour simplifier

$$\Delta x = \Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

et en posant, pour plus de concision,

$$z_n = z(x_n).$$

La relation (8.3) peut être utilisée de façon récursive pour calculer une intégration pas à pas. Pour les DDA, on en limite généralement le développement au premier ou au deuxième ordre. La précision nécessaire est obtenue en choisissant un pas d'intégration suffisamment petit.

8.6.1 ALGORITHME DU PREMIER ORDRE (figure 8-35)

L'algorithme du premier ordre est le plus utilisé en raison de sa simplicité. Cependant son emploi doit être soigneusement contrôlé à cause de ses limitations de précision. En abandonnant dans (8.3) les termes d'ordre supérieur, il reste

$$z_{n+1} = z_n + \frac{\Delta x}{1!} \dot{z}_n \quad (8.4)$$

où

$$\dot{z}_n = y_n.$$

L'algorithme du premier ordre se réduit alors à

$$z_{n+1} = z_n + \Delta x y_n \quad (8.5)$$

également appelé méthode d'Euler ou des rectangles (voir (A6.8)).

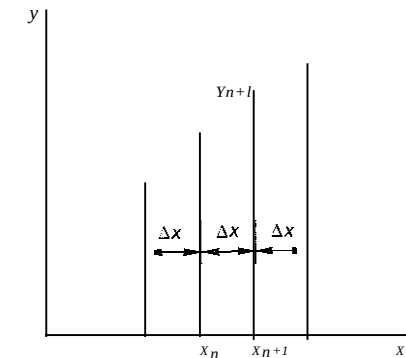


Figure 8-35. Algorithme d'intégration du premier ordre ou méthode des rectangles.

8.6.2 ALGORITHME DU DEUXIÈME ORDRE (figure 8-36)

On conserve les termes du premier et du deuxième ordre de la relation (8.3)

$$= z_n + \frac{\Delta x}{1!} \dot{z}_n + \frac{\Delta x^2}{2!} \ddot{z}_n \quad (8.6)$$

où

$$\dot{z}_n = y_n \quad (8.7)$$

$$\ddot{z}_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x} \quad (8.8)$$

L'algorithme du deuxième ordre devient

$$z_{n+1} = z_n + \Delta x \left(\frac{3}{2} y_n - \frac{1}{2} y_{n-1} \right), \quad (8.9)$$

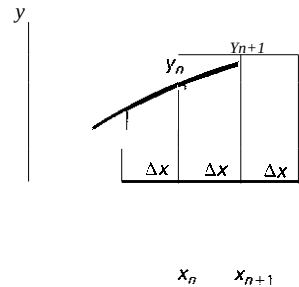


Figure 8-36. Algorithme d'intégration du deuxième ordre ou méthode des trapèzes.

c'est la méthode des trapèzes ou d'Adams-Bashforth du deuxième ordre (voir (A6.10)).

En faisant apparaître l'incrément de la différentielle et en le choisissant constant, comme celui de la variable, la relation (8.9) peut s'écrire

$$z_{n+1} = z_n + \Delta x \left(y_n + \frac{\Delta y}{2} \right) \quad (8.10)$$

où en supprimant l'indice pour simplifier

$$\Delta y = \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

Sous cette forme l'algorithme est plus facile à réaliser, il ne fait intervenir que l'incrément Δy , et non la différentielle y_{n-1} qu'il faudrait mémoriser entre deux pas d'intégration.

La complexité de réalisation de cet algorithme en DDA, bien que notablement supérieure à celle du premier ordre, est cependant raisonnable compte tenu des progrès de la miniaturisation électronique. Le gain de précision obtenu peut être dans certains cas indispensable.

8.7 Représentation de l'information

L'information dans un intégrateur DDA se présente sous deux formes: des nombres pleins binaires dans les registres des intégrateurs et des incréments qui circulent entre les intégrateurs. Les nombres pleins sont généralement en binaire pur complémenté à deux pour les valeurs négatives. Les incréments, limités par principe à un quantum ou bit, peuvent prendre les trois valeurs $-1, 0, +1$. Une représentation ternaire permet de représenter ces trois états de façon exacte. Cependant une représentation binaire à seulement deux états $-1, +1$, peut être employée, le zéro correspondant alors à une suite alternée $-1, +1, -1, +1, \dots$

La représentation ternaire est la plus généralement utilisée. Sa plus grande complexité, des liaisons deux fils au lieu d'un ou un codage à trois niveaux, est largement compensée par les avantages de l'état zéro. Cet état, en plus de certaines possibilités logiques, n'entraîne pas les dérives de calcul occasionnées par les oscillations qui représentent le zéro binaire (voir paragraphe 8.9).

8.8 Principe de fonctionnement d'un intégrateur de DDA parallèle

Un intégrateur de DDA parallèle comporte deux registres de même longueur (même nombre de bits) et deux additionneurs avec leurs logiques associées. L'habitude est d'appeler Y et R ces deux registres et additionneurs Y et R les additionneurs associés (figure 8-37).

Le registre Y recircule en permanence, poids faibles en tête, à travers l'additionneur Y à la fréquence horloge choisie. Si un incrément Δy se présente au début d'une recirculation, il est ajouté algébriquement à l'ancienne valeur de y , contenue dans Y

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y. \quad (8.11)$$

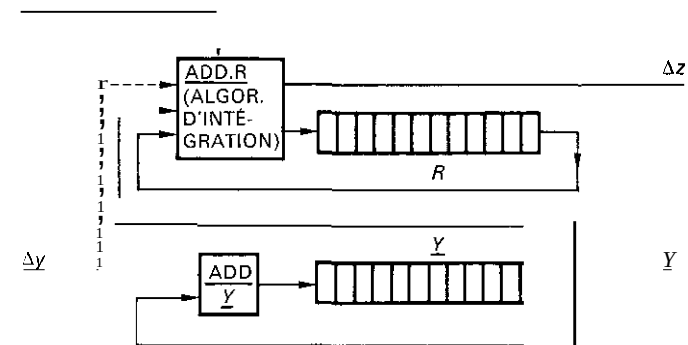


Figure 8-37. Principe d'un intégrateur de DDA simultané.

De la même façon le registre R recircule à travers l'additionneur R dont le fonctionnement dépend de l'algorithme d'intégration. Cet additionneur est contrôlé par l'incrément Δx de la variable indépendante. En l'absence de Δx , la recirculation du registre R ne change pas son contenu r . Par contre, en présence d'un incrément Δx , il est modifié selon l'algorithme adopté. Le détecteur de débordement de l'additionneur R est utilisé pour émettre l'incrément éventuel Δz de l'intégrale. Δz satisfait les relations (8.5) ou (8.10) selon l'algorithme d'intégration, c'est-à-dire

- algorithme du premier ordre

$$\Delta z + r_{n+1} = r_n + \Delta x y_n \quad (8.12)$$

où

$$\begin{aligned} \Delta z &= 0, & \text{si } |r_n + \Delta x y_n| < 1 \\ \Delta z &= \pm 1 & \text{si } |r_n + \Delta x y_n| \geq 1, \end{aligned}$$

— algorithme du deuxième ordre

$$\Delta z + r_{n+1} = r_n + \Delta x \left(y_n + \frac{\Delta y}{2} \right) \quad (8.13)$$

où

$$\begin{aligned} \Delta z &= 0, & \text{si } |r_n + \Delta x \left(y_n + \frac{\Delta y}{2} \right)| < 1 \\ \Delta z &= \pm 1, & \text{si } |r_n + \Delta x \left(y_n + \frac{\Delta y}{2} \right)| \geq 1 \end{aligned}$$

Dans tous les cas

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z = -1 \text{ ou } 0 \text{ ou } +1 \text{ incrément de } x, y, z, \\ |r_n| \text{ et } |r_{n+1}| < 1.$$

8.9 Analyse des erreurs d'intégration

Deux types d'erreurs apparaissent dans toute méthode d'intégration numérique, des erreurs de troncature et des erreurs d'arrondi. Ces erreurs peuvent donner naissance à une «dérive» systématique du résultat de l'intégration.

L'erreur de troncature est causée par les termes négligés du développement en série (8.3), elle dépend donc du choix de l'algorithme. L'erreur d'arrondi est liée au fait de la quantification des grandeurs représentées.

Cependant, pour un problème donné, il est toujours possible d'améliorer la précision en diminuant la valeur des incréments de la variable d'intégration, ce qui impose généralement d'augmenter la vitesse d'intégration et d'allonger les registres totalisateurs.

8.9.1 ERREUR DE TRONCATURE

Elle est égale au premier terme négligé du développement limité (8.3), à un infiniment petit d'ordre supérieur près.

Algorithme du premier ordre

L'erreur de troncature est, à un infiniment petit en Δx^3 près,

$$-\frac{\Delta x^2}{2} z'' = -\frac{\Delta x^2}{2} \dot{y}_n.$$

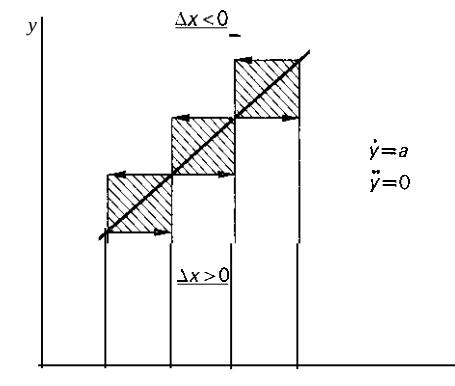


Figure 8-38. Erreur de troncature de l'algorithme du premier ordre.

Ce terme étant pair en Δx , le phénomène d'erreur est cumulatif quel que soit le signe de Δx . Il n'y a pas de compensation lors de mouvements alternés ou d'oscillations de la variable d'intégration.

Ainsi l'intégration d'une fonction linéaire de x , pour une oscillation de la variable, dérive comme on peut le voir immédiatement sur la figure 8-38. En effet si

$$\dot{y} = a = \text{constante},$$

alors

$$\text{erreur totale} = a \Sigma \left(\frac{\Delta x^2}{2} \right).$$

Algorithme du deuxième ordre

A un infiniment petit en Δx^4 près, l'erreur de troncature est

$$\frac{\Delta x^3}{3!} \ddot{z}_n.$$

La valeur impaire de l'exposant de Δx garantit une faible dérive de l'intégrale dans le cas d'oscillation de la variable.

Dans l'exemple précédent l'erreur est nulle quelles que soient les variations de x , puisque

$$\ddot{z} = \ddot{y} = 0.$$

Mais pour une fonction en x^2

$$y = ax^2,$$

$$\dot{y} = 2ax,$$

$$\ddot{y} = 2a,$$

en cas d'oscillation de Δx , l'erreur totale est également nulle, car cette fois

$$\sum \Delta x^3 = 0.$$

8.9.2 ERREUR D'ARRONDI

Dans un DDA les grandeurs sont échangées sous forme incrémentale. Cette quantification entraîne des erreurs. En particulier, la sortie d'un intégrateur transmet des incréments de l'intégrale, au résidu près r du registre R qui représente l'erreur d'arrondi. L'étude de l'influence de ces erreurs est en général délicate et doit être faite par une approche statistique (voir paragraphe A6.4).

8.10 Utilisation de l'intégrateur DDA

L'intégrateur DDA, décrit au paragraphe 8.8, a de nombreux usages: accumulation, intégration, multiplication, utilisation en comparateur, addition de débits, servo, etc. Certains intégrateurs possèdent également des modes de fonctionnement particuliers, tel que la comparaison du registre Y à 0, ou des logiques spéciales comme un test de débordement du registre Y , une possibilité d'extension du nombre des entrées Δy , etc. La description des utilisations les plus courantes permettra d'introduire par la même occasion le symbolisme graphique classique de représentation dans lequel on remplace généralement le symbole des différences finies Δ par d .

8.10.1 ACCUMULATION (figure 8-39)

Le registre Y et son additionneur constituent un accumulateur, ou compteur-décompteur, d'incrément dy . Cette fonction représente environ la moitié d'un intégrateur complet. Au début des calculs il est nécessaire d'introduire la valeur initiale Y_0 .

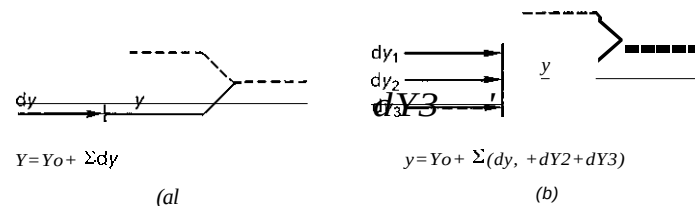


Figure 8-39. Accumulation:
a) d'une entrée dy ,
b) de plusieurs entrées dy .

Certains intégrateurs DDA possèdent un mode ou une logique spéciale permettant l'extension du nombre des entrées dy .

8.10.2 INTÉGRATION (figure 8-40)

C'est le fonctionnement de base de l'intégrateur DDA décrit au paragraphe 8.8. Il comprend les fonctions d'accumulation de la différentielle y et d'intégration proprement dite par rapport à la variable indépendante dx .

La variable dx peut être quelconque et indépendante du temps, c'est une caractéristique importante de l'intégrateur DDA. La sortie est l'incrément dz de l'intégrale. L'intégrale z peut être obtenue par accumulation des incréments dz à la valeur initiale z_0 .

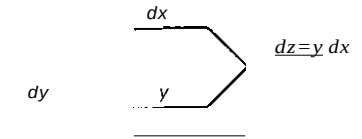


Figure 8-40. Intégration.

8.10.3 MULTIPLICATION (figure 8-41)

C'est un cas particulier d'intégration où la différentielle est constante. Le registre Y contient la constante et ne possède pas d'entrée. Le débit de la sortie dz est A fois celui de l'entrée dx .

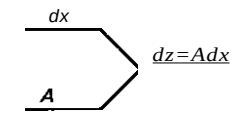


Figure 8-41. Multiplication.

8.10.4 UTILISATION EN COMPAREUR (figure 8-42)

L'intégrateur peut être utilisé en comparateur en mettant à profit la propriété de complément à deux de la numérotation binaire et le débordement du registre Y . Ce registre est initialement rempli à sa valeur maximale, indifféremment positive ou négative, que l'on représente par le symbole ∞ .

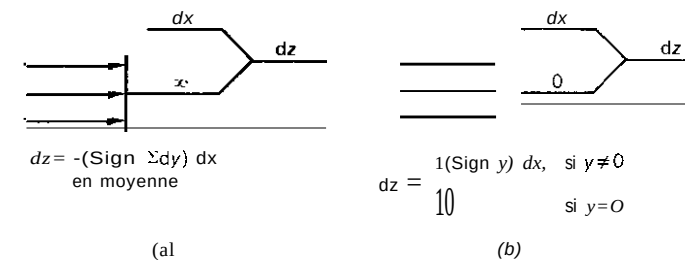


Figure 8-42. a) Intégrateur utilisé en comparateur.
b) Intégrateur avec logique spéciale de comparaison.

Le fonctionnement détaillé serait fastidieux à décrire. Le résultat essentiel est le suivant: le débit de sortie est globalement de signe opposé à la somme des dy . Si cette somme est nulle, le débit des dz est alternativement positif et

négatif, et nul en moyenne. Cette dernière particularité peut dans certains cas entraîner des dérives de calcul.

Certains DDA possèdent un mode de comparaison du contenu de Y à zéro. La sortie dz est alors fonction du produit des signes de y et de dx . Elle est nulle pour $y = 0$. Cet état de repos permet certaines utilisations logiques et présente l'avantage de ne pas introduire de dérives de calcul par oscillation de la sortie en l'absence d'entrée.

Dans cette utilisation comme dans la suivante, la variable dx est généralement l'horloge dt .

8,10,5 ADDITION DE DÉBITS — TECHNIQUE DES SERVAs (figure 8-43)

L'addition de débits est réalisée par les montages servo-intégrateur et servo-comparateur. La technique des servos est une technique d'asservissement très couramment employée en mécanisation DDA et bien connue des familiers du calcul analogique. Elle consiste à produire un signal d'erreur qui corrige la fonction à réaliser jusqu'à annuler cette erreur. L'addition de débits est le montage servo le plus simple, la fonction à réaliser est la somme des entrées.

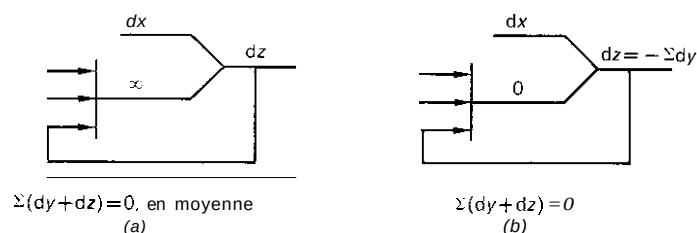


Figure 8-43. Addition de débits:
a) servo-intégrateur
b) servo-comparateur.

Le servo-comparateur a l'avantage d'avoir un état de repos et de faire correspondre une sortie nulle à une entrée nulle.

Le servo-intégrateur dans les mêmes conditions donne une sortie alternativement positive et négative et nulle en moyenne.

8.11 Organisation générale des analyseurs différentiels numériques

On appelle analyseur différentiel numérique ou DDA un réseau d'intégrateurs DDA interconnectés. Les interconnexions permettent le transfert des incréments. La définition des interconnexions des intégrateurs DDA ressemble beaucoup à celle des intégrateurs d'un calculateur analogique.

Il existe deux types d'organisation DDA, série ou parallèle, suivant que le traitement des intégrateurs se fait en séquence ou simultanément.

Au début des calculs, quelle que soit l'organisation, il est nécessaire d'initialiser les registres Y et R ou les mémoires correspondantes. Dans le cas de constantes il suffit de mémoire morte. Pour des initialisations variables il faut prévoir une mémoire modifiable ou un dispositif d'incrément. On peut également réaliser l'initialisation à partir d'un calculateur extérieur.

La description de l'organisation série sera faite succinctement à cause de son peu d'intérêt actuel. Sa complexité de réalisation plus grande, compte tenu des possibilités technologiques, et sa rapidité plus faible, par principe, conduisent généralement à lui préférer l'organisation parallèle, objet plus particulier de ce chapitre. Il est cependant utile de signaler que certaines erreurs causées par des retards sont moins importantes en DDA série que parallèle.

8.11.1 DDA SÉRIE ou SÉQUENTIEL (figure 8-44)

Les y et r sont conservés en mémoire et traités séquentiellement dans un double additionneur Y et R unique. Une mémoire joue ici le rôle des registres Y et R des intégrateurs de DDA parallèles. Les incréments de débordement dz sont également rangés en mémoire, puis utilisés comme dx et dy sous le contrôle d'une logique. Une mémoire-programme alimente cette logique. Le temps nécessaire pour traiter une fois l'ensemble des couples Y et R ou des intégrateurs équivalents est la période d'itération ou de calcul du DDA; on la traduit souvent en fréquence équivalente.

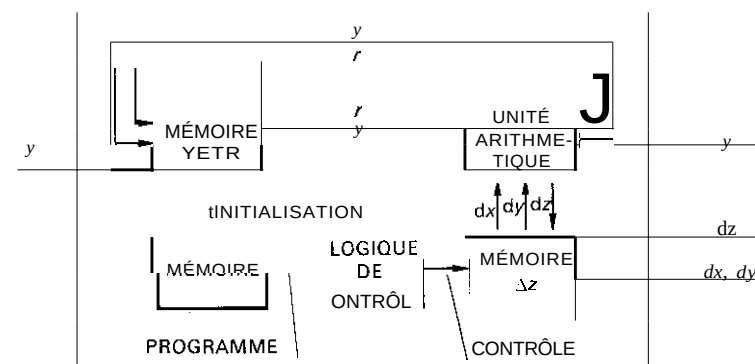


Figure 8-44. Organisation d'un DDA série.

8.11.2 DDA PARALLÈLE OU SIMULTANÉ (figure 8-45)

L'organisation est très simple. Il y a autant d'intégrateurs de DDA parallèles que nécessaire. Leur fonctionnement est simultané. Les transferts d'incréments se font en même temps, les valeurs y et r sont conservées dans leurs registres respectifs.

L'interconnexion des intégrateurs se fait par câblage. Il n'est pas besoin de mémoire autre que celle nécessaire à l'initialisation des registres Y et R . Le cycle de calcul ou période d'itération est le temps nécessaire au traitement d'un seul intégrateur. Les signaux d'entrée et de sortie sont indifféremment des incréments ou des mots pleins binaires.

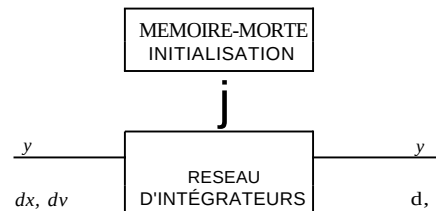


Figure 8-45. Organisation d'un DDA parallèle.

8.12 Programmation

La programmation d'un problème en DDA a deux aspects, d'une part la détermination du diagramme de chaînage des intégrateurs correspondants, d'autre part le choix des cadrages ou facteurs d'échelle entre les grandeurs du problème et les grandeurs machines.

8.12.1 DIAGRAMME DDA

La représentation des intégrateurs et celle des fonctions élémentaires qu'ils permettent de réaliser ont été exposées au paragraphe 8.10. La réalisation du diagramme ou schéma des intégrateurs nécessaires à la solution d'un problème consiste à assembler convenablement ces fonctions DDA élémentaires. Pour cela le problème doit être posé sous forme d'équation ou de système d'équations différentielles simultanées du premier ordre. En particulier, la représentation d'un système dynamique par ses équations différentielles d'état convient parfaitement.

Comme les solutions du système d'équations différentielles seront dans des registres Y et que les entrées de ces registres sont incrémentales, il faut remanier les relations de départ et faire apparaître les incréments. Ceci va être développé pour deux exemples simples: le filtre de Wiener du paragraphe 4.3.2.4 et le filtre de Kalman du paragraphe 4.6.3.

Ces deux types de filtres statistiques optimaux ont pour rôle d'extraire ou d'estimer en temps réel un signal scalaire x , de spectre donné, d'un signal y , bruité par un bruit blanc w non corrélé (figure 8-46). Les schémas DDA qui en seront déduits permettront ensuite de faire l'évaluation des composants nécessaires à leur réalisation technologique, par exemple dans l'hypothèse d'utilisation de composant type DDA-S décrit au paragraphe 8.13.

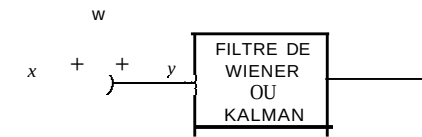


Figure 8-46. Exemple de filtrage de signal bruité.

Schéma DDA du filtre de Wiener

Le filtre de Wiener de cet exemple est décrit par l'équation différentielle de l'estimée $\hat{x}$ du signal x

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{x} + A(y - \hat{x}) \quad (8.14)$$

où

$$A = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{k^2}} \right)^{1/2} - 1$$

avec la condition initiale

$$\hat{x}(t_0) = 0.$$

La relation (8.14) peut être mise sous la forme

$$d\hat{x} = -\hat{x}dt + A(ydt - \hat{x}dt) \quad (8.15)$$

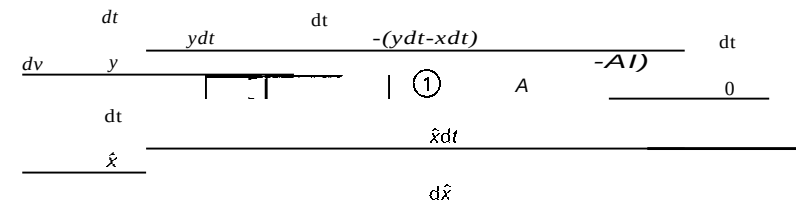


Figure 8-47. Schéma DDA du filtre de Wiener.

La relation (8.15) est directement transposable en schéma DDA (figure 8-47).

L'observation y , l'estimée $\hat{x}$ du signal et la constante A sont dans des registres Y . Deux comparateurs, montés en servo-comparateur, sont utilisés pour additionner des débits d'incrément. Cinq composants DDA-S suffisent à réaliser ce montage.

Schéma DDA du filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est décrit par les équations différentielles de la covariance Σ de l'erreur et de l'estimée $\hat{x}$ du signal.

$$\dot{\Sigma} = -2\Sigma - \frac{\Sigma^2}{k^2} + 1 \quad (8.16)$$

$$-\hat{x} + \frac{\Sigma}{k^2}(y - \hat{x}) \quad (8.17)$$

avec les conditions initiales

$$\Sigma(t_0) = \frac{1}{2},$$

$$\hat{x}(t_0) = 0.$$

On peut reecme (S.16) et (S.17) en faisant apparaître leurs accroissements différentiels

$$d\Sigma = -2\Sigma dt - \frac{\Sigma^2}{k^2} dt + dt \quad (S.18)$$

$$d\hat{x} = -\hat{x} dt + \frac{\Sigma}{k^2} (y dt - \hat{x} dt) \quad (S.19)$$

avec

$$d\Sigma^2 = 2\Sigma d\Sigma. \quad (S.20)$$

La figure S-18 représente le schéma DDA mécanisant les relations (S.18) et (S.20). La relation (S.19) serait réalisée par un schéma équivalent à celui de la figure S-17. Le diagramme complet comprendrait la connexion du registre A à la sortie $d(\Sigma/k^2)$. Le schéma S-4S est réalisé avec quatre composants DDA-S seulement, car il faut remarquer que certains registres Y sont identiques. L'ensemble du filtre de Kalman peut donc être réalisé avec neuf composants DDA-S.

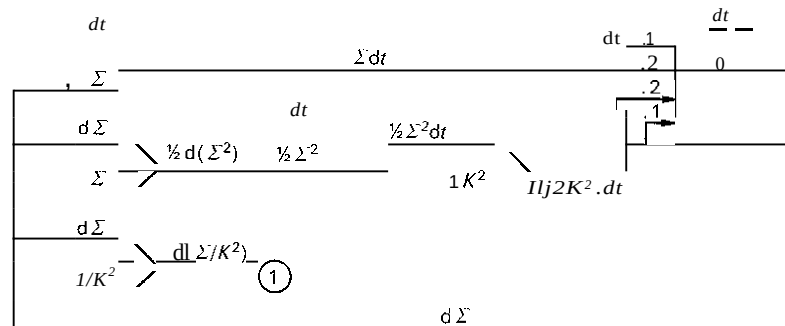


Figure 8-48. Schéma DDA du filtre de Kalman.

8.12.2 CADRAGE

Lorsque le schéma DDA a été établi, il reste à définir les cadrages, ce qui est un peu similaire à la détermination des cadrages d'un calculateur digital à virgule fixe. Le problème consiste au choix des facteurs d'échelles ou cadrages des informations contenues dans les registres, et à celui des poids des incréments

et de leurs positions d'entrée dans les registres Y. L'ensemble des opérations de cadrage peut être avantageusement conduite sous forme de tableau (*).

Cadrage des registres

Le facteur d'échelle ou cadrage d'un registre est le rapport entre la grandeur « problème » qu'il représente et la grandeur « machine », contenu numérique du registre. La grandeur problème est exprimée dans les unités du problème. La grandeur machine est sans unité et bornée à une valeur absolue. Le cadrage K_y de la grandeur problème y contenue dans le registre Y est tel que

$$y = K_y Y. \quad (S.21)$$

Le cadrage implique la connaissance du domaine de variation des grandeurs problème car, sauf cas particulier, il est interdit de faire déborder un registre Y . Si M_y est la borne supérieure des variations de y , K_y doit vérifier la contrainte

$$K_y \geq M_y. \quad (S.22)$$

Poids des incréments

Le poids d'un incrément est sa valeur dans les unités du problème. Entre l'incrément dz de sortie d'un intégrateur, la variable dx et le cadrage du registre Y , existe une relation qui dépend de la logique de débordement de l'intégrateur

— Intégrateur poids faible (ou «biased»)

Le dz est émis par le débordement du bit précédent le bit de signe

$$P(dz) = K_y \cdot P(dx) \quad (S.23)$$

et le résidu contenu dans R ne change pas de signe.

- Intégrateur poids fort (ou «unbiased»)

Le dz est émis par le débordement du bit de signe

$$P(dz) = 2K_y \cdot P(dx) \quad (S.24)$$

le résidu change de signe à chaque débordement. Cet intégrateur déborde deux fois moins souvent que le précédent. Par ailleurs il se produit un certain moyennage de l'erreur d'arrondi.

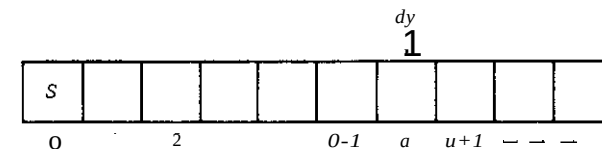


Figure 8-49. Position d'entrée de l'incrément dy .

(*) Voir en particulier: T. R. H. SIZER, *The Digital Differential Analyser*, Chapman and Hall Ltd (1968).

Position d'entrée des incréments

La position d'entrée de l'incrément d'un registre Y peut généralement être choisie par câblage ou par logique. Entre le poids de l'incrément et le cadrage du registre Y on a la relation

$$P(dy) = 2^{-\alpha} K_y \quad (8.25)$$

où α est le nombre de bits séparant la position d'entrée du bit de signe.

On peut noter que le cadrage d'un registre est égal au poids de son bit de signe dont la valeur machine est 1 par définition

$$K_y = P(Sy)' \quad (8.26)$$

8.13 Intégrateur DDA-S

Le DDA-S (figure 8-50) est un composant intégrateur à modes multiples destiné aux analyseurs différentiels numériques simultanés. Il a été développé pour SAGEM par Texas-Instruments-France, à l'origine pour des applications aéronautiques (voir chapitre 13), et réalisé en technologie MOS-LSI qui permet une très haute densité et une faible consommation. Son format réduit et la variété de ses modes d'utilisation rendent possible la réalisation d'analyseurs différentiels de faible volume n'employant qu'un seul type de composant pour les fonctions de calcul (voir paragraphe 8.14). Les différents modes d'utilisation sont obtenus par câblage externe et offrent le choix des combinaisons suivantes:

- un registre Y à une entrée et son intégration par rapport à deux variables indépendantes,
- un registre Y à deux entrées et son intégration par rapport à une variable indépendante,
- un registre Y à trois entrées,
- un comparateur à trois entrées d' Y ,

ce qui correspond environ à l'équivalent d'une fois et demie la fonction intégration. L'initialisation est un mode particulier qui effectue la mise en série des registres. Les échelles sont programmées lors de l'initialisation.

Ces différentes fonctions sont réalisées par un circuit comprenant trois registres de 25 bits associés à trois additionneurs-soustracteurs et à des logiques de contrôles. L'algorithme du premier ordre a été choisi pour sa simplicité. Cette option a beaucoup facilité l'implantation, permettant de conserver une complexité de circuit raisonnable et un volume total faible, malgré la variété des modes d'utilisation. Les possibilités en fréquence (20 kilohertz) et la longueur des registres (25 bits) sont suffisantes pour assurer une bonne précision dans la majorité des applications.

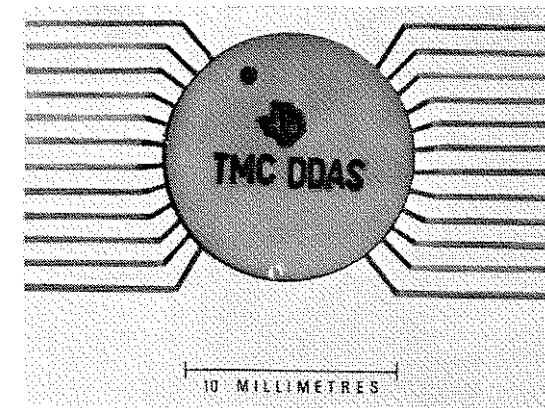


Figure 8-50. Composant intégrateur DDA-S.

Résumé des caractéristiques du DDA-S

Type: intégrateur multimode pour DDA simultané.
 Algorithme d'intégration: premier ordre,
 Mode incrémental: ternaire.
 Débordement d'intégration: type poids fort (unbiased),
 Longueur des registres: 25 bits,
 Technologie: MOS-LSI (850 transistors),
 Boîtier: rond, plat à 24 sorties, diamètre 12 mm,
 Fréquence maximale d'horloge: 500 kilohertz (100°C).
 Fréquence maximale de mot: 20 kilohertz (100°C).
 Consommation: 150 mW.
 Température de fonctionnement: - 55°C à + 125°C.

8.14 Exemple d'analyseur différentiel numérique DDA du navigateur inertielle SAGEM NSI (figure 8-51)

Ce DDA assure les calculs d'alignement et de navigation d'une plate-forme à inertie (voir chapitre 13). L'initialisation est faite par mise en série de tous les registres dans lesquels se vide le contenu d'une mémoire morte.

Caractéristiques

Organisation: simultanée.
 Composant intégrateur: DDA-S de technologie MOS.
 Nombre de composants intégration: 40.
 Nombre de fonctions d'intégration: 60,
 Mode incrémental: ternaire.
 Longueur des mots : 25 bits,

Fréquence d'horloge: 125 kilohertz.

Fréquence de mot: 5 kilohertz.

Mémoire morte d'initialisation: 4096 bits (un boîtier MOS).

Volume: 0,5 litre.

Masse: 0,5 kilogramme

Consommation: 7 watts.

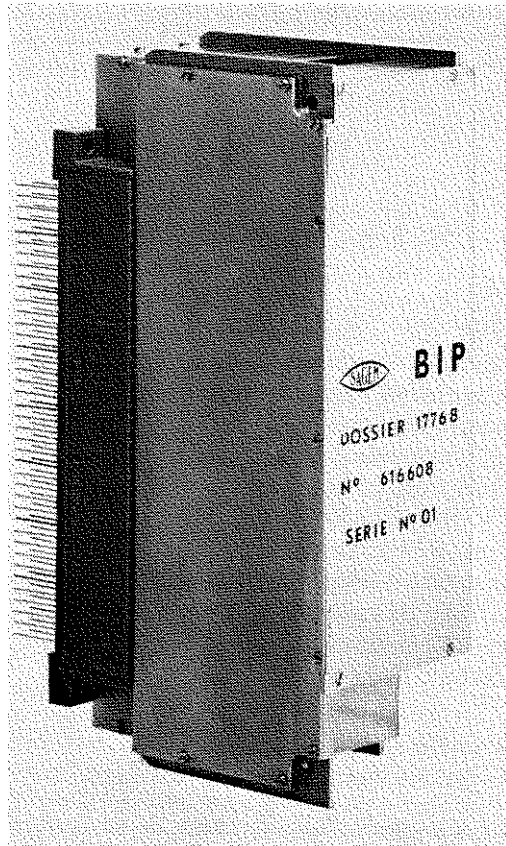


Figure 8-51. DDA du navigateur inertiel SAGEM NSI.

SYSTÈMES DE NAVIGATION

CHAPITRE 9

MÉCANISATION

D'UN SYSTÈME INERTIEL PUR (*)

P. FAURRE

9.1 Description des différentes mécanisations avec plate-forme asservie

On a décrit au chapitre 2 un système à inertie imaginaire à un axe. On considère dans ce chapitre le cas réel de la navigation sur la terre elliptique et animée d'une rotation $\vec{\Omega}$ par rapport à l'espace inertiel (voir figure 9-1 pour la définition des notations). Il faut disposer dans ce cas d'une plate-forme portant deux ou trois accéléromètres à un axe et deux gyros à deux axes (ou trois à un axe).

Pour les raisons exposées au chapitre 2, on choisit de maintenir cette plate-forme *localement horizontale*. Avec les notations de la figure 9-1, on peut démontrer aisément (voir le complément 1 de ce chapitre) que pour maintenir la plate-forme horizontale, il faut lui commander la rotation par rapport à l'espace inertiel

$$\vec{\omega} = \vec{\rho} + \vec{\Omega} \quad (9.1)$$

avec

$$\left| \begin{array}{l} -\frac{v_2}{R_2} - \frac{v_1}{\tau_\alpha} \\ P_1 = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{\tau_\alpha} \\ P_3 = \text{arbitraire,} \end{array} \right. \quad (9.2)$$

OÙ RI désigne le rayon de courbure de la terre suivant l'axe x_p . R_z est le rayon de courbure de la terre suivant l'axe yp et τ_α est la torsion géodésique relative à la direction d'angle α (nulle si la terre était sphérique, ou si les axes x_p et yp de la plate-forme étaient orientés N.S. et E.W. ($\alpha = 0$ ou $n/2$)). On trouvera dans le complément 2 de ce chapitre le calcul de R'' , R , et τ_α . La vitesse par rapport à la terre $\vec{v}$ a les composantes v_1 et v_2 sur les axes x_p et yp .

(*) Pour la compréhension des notations du chapitre, il convient de se reporter aux définitions des annexes 1,2 et 3.

On remarque immédiatement que P_3 est arbitraire et par conséquent plusieurs choix (à vrai dire une infinité!) sont possibles. Voici quelques exemples.

a) *Plate-forme asservie au Nord géographique*

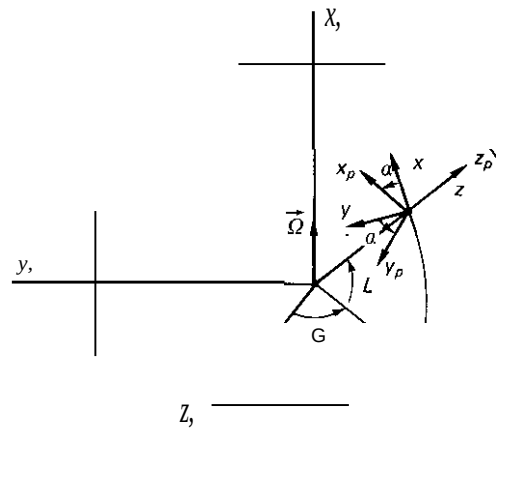
Dans ce cas on asservit l'axe x_p de la plate-forme au Nord géographique. Pour cela, on choisit

$$p_1 = -\frac{D_y}{R_y} \operatorname{tg} L, \quad (9))$$

l'axe y_p ayant la direction Est-Ouest géographique locale. L'inconvénient de ce choix est d'interdire les vols polaires, les taux de précession du gyro z devenant trop grands au voisinage des pôles (en effet $\operatorname{tg} \pm 90^\circ = \infty$). Néanmoins, cette solution était souvent adoptée du fait de la simplicité de la réalisation par des moyens analogiques du système de navigation correspondant.

b) *Plate-forme asservie à un pôle distinct du pôle Nord*

Afin de permettre les trajectoires polaires, on peut asservir l'axe x_p de la plate-forme à un point de la terre choisi éloigné de la position présente et de la



$\{t\} = (X, Y, Z) =$ repère lié à la terre

$\{l\} = (x, y, z) =$ repère géographique local encore dit repère vrai

$\{pl\} = (x_p, y_p, z_p) =$ repère plate-forme

$L =$ latitude

$G =$ longitude

$\alpha =$ azimut plate-forme

Figure 9-1. Repères terrestres et repère plate-forme

route à suivre. Eventuellement, on peut envisager de changer de pôle en cours de fonctionnement. Ainsi pour le système SF 500 (*) on asservit la plate-forme au pôle du grand cercle terrestre représentant la route à suivre.

La loi d'asservissement prend évidemment une forme analogue à l'expression (9.3) dans le système de coordonnées latitude-longitude (L^* , G^*) correspondant au pôle utilisé:

$$p_1 = -\frac{v_{y^*}}{R_{y^*}} \operatorname{tg} L^*, \quad (9.4)$$

l'axe y^* ayant la direction Est-Ouest dans le système de coordonnées sphériques utilisé.

c) *Plate-forme asservie à un système de coordonnées unipolaires*

Le système de coordonnées curvilignes orthogonales appelé système unipolaire mérite quelques explications. Faisons passer par le pôle Sud deux droites A et B parallèles aux axes équatoriaux y , et z , (figure 9-2).

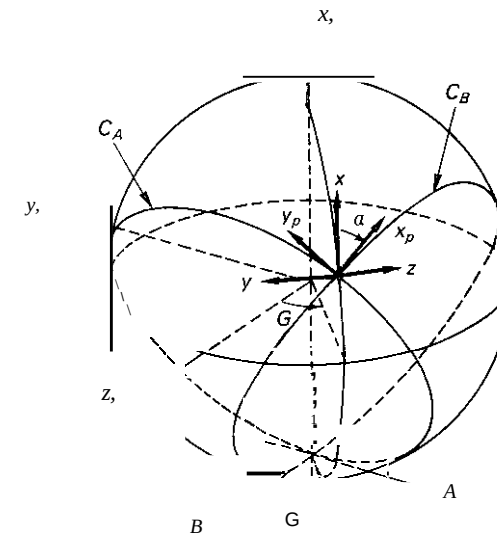


Figure 9-2. Système unipolaire.

Considérons alors les ensembles de cercles CA et C_B découpés sur la sphère de référence terrestre par les familles de plans ayant pour charnières A et B

(*) Système à inertie pour avion construit par SAGEM et Ferranti pour les prototypes du Concorde.

respectivement : on obtient ainsi un système de coordonnées curvilignes orthogonales auxquelles on peut asservir les axes X_p et Y_p de la plate-forme. L'avantage d'un tel système est qu'il n'y a plus qu'un seul point singulier, à savoir le pôle Sud.

Par de simples considérations géométriques sur la figure 9-2, on voit aisément que

$$\alpha = -G. \quad (9.5)$$

La loi d'asservissement $P3$ est donc

$$P3 = -\frac{v_y}{R_y} \mathbf{tg} L + \alpha \quad (9.6)$$

ou encore

$$P3 = \frac{v_y}{R_y} \frac{1 - \sin L}{\cos L} = \frac{v_y}{R_y} \mathbf{tg} \left(\frac{L - 90^\circ}{2} \right) \quad (9.7)$$

où v_y et R_y désignent la vitesse et le rayon de courbure suivant l'axe Est-Ouest local y . On remarque alors qu'au voisinage de $L = +90^\circ$, la quantité $(1 - \sin L)/\cos L$ reste bornée: les trajectoires au voisinage du pôle Nord ne présentent donc aucun inconvénient. Par contre les trajectoires au voisinage du pôle Sud ($L = -90^\circ$) entraînent comme en a) un taux de précession $P3$ trop élevé [$\mathbf{tg}(-90^\circ - 90^\circ/2) = \infty$]. Afin d'éviter cette limitation, il est possible d'utiliser le système unipolaire de pôle Sud dans l'hémisphère Nord et le système unipolaire de pôle Nord dans l'hémisphère Sud. La loi d'asservissement $P3$ est alors:

$$P3 = \frac{v_y}{R_y} \frac{F - \sin L}{\cos L} \quad (9.8)$$

avec

$$F = \begin{cases} +1 & \text{dans l'hémisphère Nord} \\ -1 & \text{dans l'hémisphère Sud.} \end{cases} \quad (9.9)$$

d) Plate-forme à azimut libre

Une autre solution consiste à choisir

$$P3 = \text{constante} \quad (9.10)$$

et souvent $P3 = 0$ (cas du système LTN 51 (*)). On dit alors que la plate-forme est à azimut libre car elle n'est asservie à aucun système de coordonnées.

(*) Système construit par Litton pour l'aviation commerciale.

9.2 Équations de mécanisation avec une plate-forme asservie

Si l'on dispose d'une plate-forme dont on a choisi la loi de rotation (p), il faut alors intégrer l'équation fondamentale

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{f} + \vec{g}(\vec{r}) \quad (9.11)$$

sur les axes du trièdre plate-forme qui est animé par rapport à l'espace inertiel de la rotation $\vec{\omega} = \vec{p} + \vec{Q}$. Désignant par $\vec{v}$ la vitesse par rapport à la terre, il est clair que (voir (A2.26) :

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} + \vec{Q} \times \vec{r} \quad (9.12)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} + (\vec{p} + \vec{Q}) \times \vec{v} + \vec{Q} \times \dot{\vec{v}} + \vec{Q} \times (\vec{Q} \times \vec{r}). \quad (9.13)$$

Les équations à intégrer sont donc

$$\dot{\vec{v}} = \vec{f} + \vec{g}_p - (\vec{p} + 2\vec{Q}) \times \vec{v} \quad (9.14)$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} - \vec{p} \times \vec{r} \quad (9.15)$$

où

$$\vec{g}_p = \vec{g} - \vec{Q} \times (\vec{Q} \times \vec{r}) \quad (9.16)$$

désigne la pesanteur *liulgaire*.

Toute mécanisation d'un système de navigation inertiel revient donc à intégrer les équations vectorielles (9.14) et (9.15) projetées sur les axes $[p]$, à générer les ordres de rotation de la plate-forme compte-tenu de la loi choisie pour $P3$, tout en calculant l'orientation des axes plate-forme par rapport à la terre.

De façon précise, si $T_{p/t}$ désigne la matrice de changement de base entre les repères $[p]$ et $[t]$ (voir l'annexe 2), $\vec{\Omega} = [Q, 0, 0]$ la projection du vecteur rotation terrestre sur les axes ft , P et Ω (resp. ρ_{h0} et v_{h0}) les composantes (resp. les composantes horizontales) de $\vec{p}$ et $\vec{v}$, enfin C la matrice de courbure de la terre dans les axes $[p]$ au point considéré (voir les compléments 1 et 2 du chapitre), on intègre les équations scalaires ou matricielles

$$\dot{\vec{v}}_p = \vec{f}_p + \vec{g}_p - A(\rho + 2T_{p/t} \vec{\Omega}) \vec{v}_p \quad (9.17)$$

$$\dot{T}_{p/t} = -A(\rho) T_{p/t} \quad (9.18)$$

$$\rho_{h0} = C_p v_{h0} \quad (9.19)$$

$$P3 = \text{suivant choix}, \quad (9.20)$$

ou un système équivalent. La matrice v indique alors la vitesse sur les axes

J'late-forme et la matrice T_{pl} , permet de déterminer la position et l'azimut. Enfin on génère les ordres de rotation de la plate-forme ω par l'expression

$$\omega = p + T_{pl} D. \quad (9.21)$$

9.3 Trois exemples de mécanisation

On va exposer en détail pour trois cas particuliers, les équations scalaires à intégrer. On suppose dans tous les cas que l'altitude h et la vitesse verticale v_3 sont données par d'autres instruments. Par conséquent les équations qui génèrent ces quantités à partir de mesures inertielles ne sont pas écrites (voir les chapitres 2 et 10 où l'on explique l'instabilité du calcul de h et de v_3 par des moyens purement inertiels).

9.3.1 PLATE-FORME ASSERVIE AU NORD

L'équation (9.14) donne dans ce cas (tenant compte du fait que $D_3 = 0$):

$$\dot{v}_1 = I_1 - P_2 v_3 + (P_3 + 2D_3) v_2 \quad (9.22)$$

$$\dot{v}_2 = f_2 - (\rho_3 + 2\Omega_3) v_1 + (\rho_1 + 2\Omega_1) v_3. \quad (9.23)$$

En ce qui concerne l'équation (9.18), on note que (voir l'expression (A2.15))

$$f_{11} = \cos L, \quad t_{21} = 0, \quad t_{31} = \sin L, \quad (9.24)$$

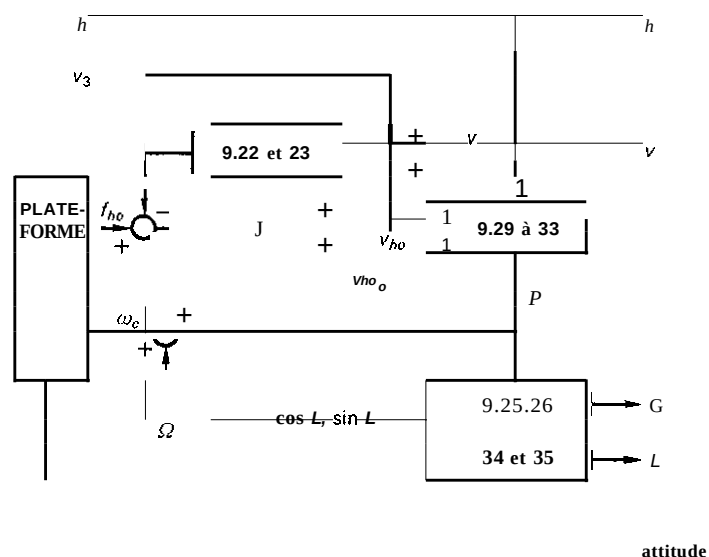


Figure 9-3. Schéma d'une mécanisation avec plate-forme asservie au Nord.

et on retient les deux équations

$$\dot{t}_{11} = -P_2 t_{31} \quad (9.25)$$

$$\dot{t}_{31} = P_2 f_{11} \quad (9.26)$$

D'autre part

$$\dot{Q}_1 = Q_2 t_{11} \quad (9.27)$$

$$D_3 = D t_{31} \quad (9.28)$$

et (voir le complément 2 de chapitre)

$$P_1 = -v_2 / (R_{p2} + h) \quad (9.29)$$

$$P_2 = v_1 / (R_{p1} + h) \quad (9.30)$$

$$P_3 = P_1 t_{31} / t_{11} \quad (9.31)$$

$$I / (R_{p1} + h) = \left(1 - 2e + 3e t_{31}^2 - \frac{h}{a} \right) / a \quad (9.32)$$

$$I / (R_{p1} + h) = \left(1 + e t_{31}^2 - \frac{h}{a} \right) / a. \quad (9.33)$$

Enfin la longitude est obtenue par intégration de l'équation

$$\dot{\lambda} = -\rho_1 / t_{11} \quad (9.34)$$

et la latitude par

$$L = \arctg(t_{31} / t_{11}) \quad (9.35)$$

ou par intégration de

$$\dot{L} = P_2' \quad (9.36)$$

Les équations (9.22) à (9.36) fournissent ainsi un système complet de mécanisation.

Les ordres de précession des gyros sont

$$\omega_1 = \rho_1 + \Omega_1 \quad (9.37)$$

$$\omega_2 = P_2 \quad (9.38)$$

$$\omega_3 = P_3 + Q_3. \quad (9.39)$$

La figure 9-3 schématise ce type de mécanisation.

9.3.2 MÉCANISATION À AZIMUT LIBRE

Dans ce cas la loi de rotation de la plate-forme est

$$P_3 = Y = \text{constante}. \quad (9.40)$$

On désigne les éléments de la matrice $T_{p/t}$ par

$$T_{p/t} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \quad (9.41)$$

et on écrit le système général (9.17) à (9.20). L'équation différentielle (9.17) donne

$$\dot{v}_1 = f_1 + [y + 2Qt_{31}]V_s - [P_2 + 2Qt_{21}]V_3 \quad (9.42)$$

$$\dot{v}_2 = f_2 - [\gamma + 2\Omega t_{31}]v_1 + [\rho_1 + 2\Omega t_{11}]v_3. \quad (9.43)$$

L'expression (9.19) s'écrit

$$-\frac{1}{r+h}v_1 - \frac{1}{R_s+h}v_2 \quad (9.44)$$

$$Pz = \frac{1}{R_s+h}V_s + \frac{1}{r+h}v_2 \quad (9.45)$$

où (voir le complément 2 du chapitre)

$$\frac{1}{R_s+h} = \frac{1}{a+h} (1 - et'' + 2et',) \quad (9.46)$$

$$\frac{1}{Rz+h} = \frac{1}{a+h} (1 - et_{31}' + 2et_{22}') \quad (9.47)$$

$$\frac{1}{r+h} = \frac{2e}{a+h} f_{111} z'' \quad (9.48)$$

L'équation différentielle (9.18) donnant la matrice orthogonale T s'écrit:

$$\dot{t}l = yZl - PZt_{31} \quad (9.49)$$

$$i_{21} = -\gamma t_{11} + P_1 i_{31} \quad (9.50)$$

$$i_{31} = Pztl - P_1 t_{31} \quad (9.51)$$

$$f_{12} = y t_{22} - P_2 t_{32} \quad (9.52)$$

$$i_{22} = -\gamma t_{12} + P_1 t_{32} \quad (9.53)$$

$$i_{32} = P_2 t_{12} - P_1 t_{22} \quad (9.54)$$

Les autres éléments de $T_{p/t}$ peuvent être calculés à partir des éléments précédents du fait que $T_{p/t}$ est une matrice orthogonale, à l'aide des expressions

$$t_{13} = t_{21}t_{32} - t_{22}t_{31} \quad (9.55)$$

$$t_{23} = t_{31}t_{12} - t_{11}t_{32} \quad (9.56)$$

$$t_{33} = t_{11}t_{22} - t_{21}t_{12}. \quad (9.57)$$

Les équations (9.42) à (9.57) constituent un système complet à mécaniser.

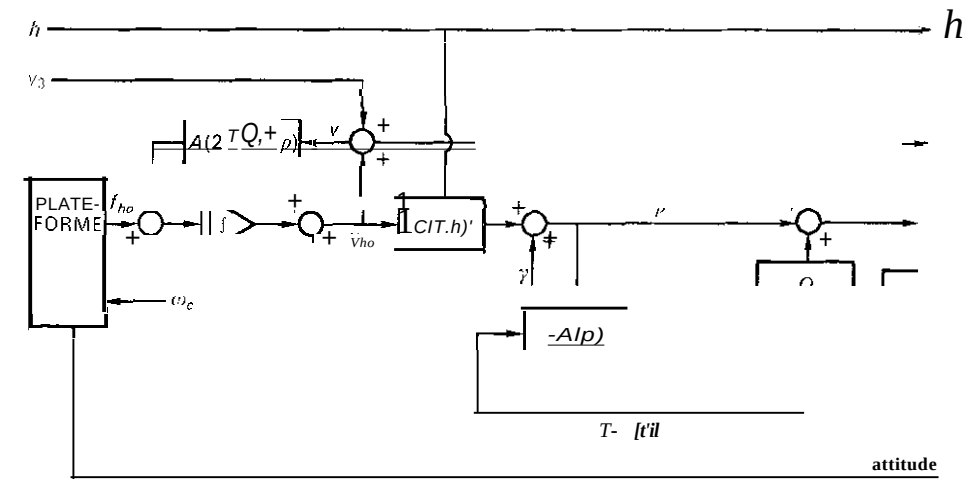


Figure 9-4. Schéma d'une mécanisation avec plate-forme à azimuth libre.

Les ordres de précession à la plate-forme sont évidemment:

$$\omega_1 = Qt_{11} + P_1 \quad (9.58)$$

$$\omega_2 = Qt_{21} + P_2 \quad (9.59)$$

$$\omega_3 = \Omega t_{31} + y. \quad (9.60)$$

La latitude L , la longitude G et l'angle d'azimut α sont obtenus aisément à partir de $T_{p/t}$ (voir l'expression (A1. 17)); par exemple on peut utiliser les formules

$$L = \text{aretg}(t_{31}/(t_{11} + t_{21}^2)^{1/2}) \quad (9.61)$$

$$G = \text{arctg}(-t''t_{33}) \quad (9.62)$$

$$\alpha = \text{arctg}(-t_2 t_{12}). \quad (9.63)$$

La figure 9-4 schématise ce type de mécanisation.

9.3.3 MÉCANISATION UNIPOLAIRE

Dans ce cas la loi de rotation est (voir (9.8) et (9.9))

$$P3 = \frac{D1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha}{R_{p2} + h} \frac{F - \sin L}{\cos L} \quad (9.64)$$

$$\frac{V1 \sin \alpha + v_2 \cos \alpha}{R_{p2} + h} \frac{\cos L}{F + \sin L} \quad (9.65)$$

Utilisant les notations introduites au paragraphe précédent et tenant compte des relations

$$1_{11} = \cos L \cos \alpha \quad (9.66)$$

$$1_{21} = -\cos L \sin \alpha \quad (9.67)$$

$$t_{31} = \sin L \quad (9.68)$$

et

$$R_{p2} = a(1 + e t_{31}^2), \quad (9.69)$$

il vient

$$\rho_3 = \frac{-v_1 t_{21} + v_2 t_{11}}{a \left(1 + e t_{31}^2 + \frac{h}{a} \right) (F + t_{31})} \quad (9.70)$$

Les taux de rotation $P1$ et $P2$ sont donnés par les mêmes formules que pour une mécanisation à azimuth libre, c'est-à-dire par les expressions (9.40) à (9.48). Du système différentiel donnant la matrice T_{pll} , il suffit de garder les trois équations générant t_{11} , t_{21} et t_{31} , à savoir

$$\dot{t}_{11} = \rho_3 t_{21} - \rho_2 t_{31} \quad (9.71)$$

$$\dot{t}_{21} = -\rho_3 t_{11} + \rho_1 t_{31} \quad (9.72)$$

$$\dot{t}_{31} = \rho_2 t_{11} - \rho_1 t_{21} \quad (9.73)$$

Enfin les équations générant v sont déduites de l'équation (9.17) :

$$\dot{v}_1 = I1 + [P3 + 2Qt_{31}]v_2 - [P2 + 2\Omega t_{21}]v_3 \quad (9.74)$$

$$\dot{v}_2 = f_2 - [\rho_3 + 2\Omega t_{31}]v_1 + [\rho_1 + 2\Omega t_{11}]v_3 \quad (9.75)$$

Les équations (9.44) à (9.48), (9.70) à (9.73) forment un système complet à mécaniser.

Les ordres de précession de la plate-forme sont évidemment

$$\omega_1 = Q t_{11} + P1 \quad (9.76)$$

$$\omega_2 = \Omega t_{21} + \rho_2 \quad (9.77)$$

$$\omega_3 = \Omega t_{31} + \rho_3 \quad (9.78)$$

La latitude L et l'angle d'azimut α sont obtenus aisément par

$$L = \arctg(t_{31}/(t_{11}^2 + t_{21}^2)^{1/2}) \quad (9.79)$$

$$\alpha = \arctg(-t_{21}/t_{11}). \quad (9.80)$$

De plus la longitude G se déduit directement de l'angle d'azimut" par la relation fondamentale du système unipolaire (9.5) : plus précisément sur un segment de trajectoire où F ne change pas de valeur

$$G - G_0 = -F(\alpha - \alpha_0). \quad (9.81)$$

La figure 9-5 résume ce type de mécanisation.

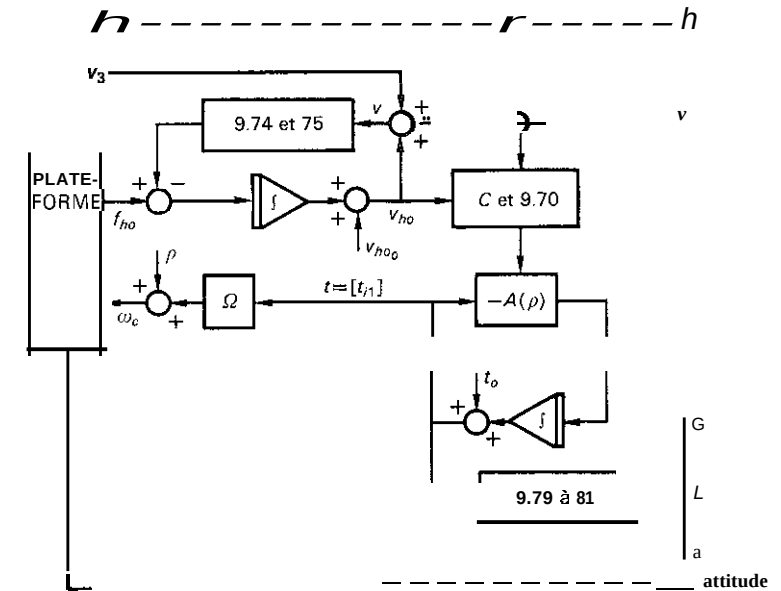


Figure 9-5. Schéma d'une mécanisation avec plate-forme unipolaire.

9.4 Comparaison des mécanisations précédentes

Le choix d'une mécanisation est une question délicate, car beaucoup de facteurs entrent en jeu.

i) La mécanisation doit pouvoir fonctionner sur toutes les trajectoires envisagées. Par exemple, on doit éliminer une mécanisation avec plate-forme asservie au Nord si des vols polaires sont prévus.

ii) La mécanisation doit être facile à réaliser, donc conduire à peu de calculs; nous avons porté sur le tableau 9-1 quelques éléments permettant d'évaluer la charge de calcul relative aux trois mécanisations précédentes. On a distingué des calculs dits à haute fréquence (de l'ordre de 10 à 20 Hz) correspondant aux calculs fondamentaux d'intégration et des calculs dits à basse fréquence (de 1 à 1/5 Hz) correspondant à l'exploitation des résultats précédents. D'autre part on a distingué les opérations simples (addition, multiplication, division) qui sont rapides sur un calculateur digital, des évaluations de fonctions simples (lignes trigonométriques, racines carrées, etc.) en général plus longues. Étant donné les caractéristiques d'un calculateur, on peut ainsi évaluer la charge correspondant aux différentes mécanisations envisageables.

TABLEAU 9-1

Comparaison des calculs relatifs à trois mécanisations différentes

Mécanisation	Calcul à haute fréquence 1 Calcul à basse fréquence				
	Nombre d'équations différentielles	Second membre des équations différentielles			
		Nombre d'opérations simples	Nombre de fonctions simples	Nombre d'opérations simples	Nombre d, fonctions simples
Asservie au Nord	5	37	0	1	1
Azimut libre ($\gamma = 0$)	8	60	0	8	4
Unipolaire	5	65	0	8	3

iii) Il faut aussi tenir compte du fait que souvent le calculateur exploite les résultats de la mécanisation en vue de déterminer des paramètres de navigation

et de guidage: écart latéral, route à suivre, etc... (voir paragraphe 9.5). Les différentes mécanisations fournissant des éléments différents, ces calculs seront plus ou moins aisés et le choix doit être fait compte-tenu du programme global à réaliser.

Ainsi dans le cas d'une mécanisation avec plate-forme asservie à un pôle variable (paragraphe 9.1.b), si l'on choisit à chaque instant le pôle tel que l'équateur correspondant soit la route à suivre, la latitude L^* déterminée par la mécanisation fournira directement l'écart latéral par rapport à la route à suivre: dans les autres types de mécanisation présentés, il conviendrait de faire un changement de coordonnées sphériques pour obtenir ce paramètre. En contre-partie cette mécanisation considérée isolément apparaîtrait comme plus complexe, car elle fait intervenir dans les calculs à basse fréquence un changement de coordonnées sphériques entre (L' , G^*) et (L , G) qui n'apparaît pas dans les trois exemples présentés en détail précédemment.

iv) Enfin la partie la plus difficile de la comparaison entre les mécanisations consiste à les considérer relativement aux erreurs qu'elles génèrent, compte-tenu des erreurs instrumentales. Il convient pour cela de faire appel aux méthodes de simulation développées dans le chapitre suivant.

On verra par exemple que si la dérive du gyro 1 est constante, l'erreur de position correspondante est

- dans le cas d'une mécanisation avec plate-forme asservie au Nord ou à azimuth libre avec un taux de précession y très inférieur à Ω

$$\delta x(t) = R\varepsilon \left(t - \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right), \quad (9.82)$$

- dans le cas d'une mécanisation à azimuth libre avec un taux de précession élevé ($\gtrsim 1000^\circ/\text{h}$)

$$\delta x(t) \approx 0. \quad (9.83)$$

Par contre si y est élevé, l'erreur de position due au facteur d'échelle K_{g3} du gyro d'azimut est approximativement multipliée par y/Q , c'est-à-dire au moins par 100.

Il convient donc de faire une analyse détaillée des erreurs du système en tenant compte des caractéristiques des erreurs instrumentales ainsi que des trajectoires possibles pour aboutir à une conclusion à ce sujet.

9.5 Paramètres de navigation et de guidage

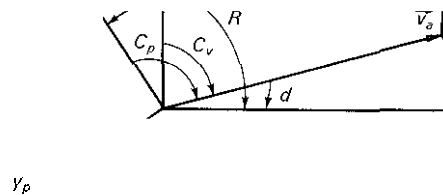
9.5.1 Quelle que soit l'application envisagée (type de véhicule ou type de mission), un système de navigation doit déterminer d'abord les éléments fondamentaux que sont la position, la vitesse et l'attitude du véhicule. Cepen-

dant l'exploitation de ces éléments peut être très différente suivant l'application. On ne considérera dans ce paragraphe que ce qui peut correspondre à un système de navigation pour avion. Pour fixer les idées, on supposera que la mécanisation est à azimuth libre (paragraphe 11.3.2).

9.5.2 PARAMÈTRES DE NAVIGATION

On a résumé sur la figure 9-6 les paramètres de navigation usuels scalaires et vectoriels. Les composantes v_1 et v_2 sur les axes $[p]$ de la vitesse au sol $\vec{v}_s$ sont fournies par la mécanisation du système à inertie ainsi que l'azimut plate-forme α . Le module de la vitesse air v_a est fourni par un instrument auxiliaire. Enfin le resolver d'azimut de la plate-forme donne le cap plate-forme C_p .

La figure 9-7 indique le schéma des calculs de navigation. Ces calculs sont bien entendu hors de la boucle correspondant à la mécanisation et peuvent être effectués à une fréquence très différente. Si l'on évalue la charge de calcul comme au paragraphe 9.4, on voit que les calculs des paramètres de navigation comprennent dans ce cas 18 opérations simples et 6 fonctions simples.



α = azimut plate-forme
 C_p = cap plate-forme
 C_v = cap vrai
 R = route
 θ_v = direction du vent
 d = dérive

$\vec{v}_a$ = vitesse propre
 $\vec{v}_s$ = vitesse sol
 $\vec{v}_v$ = vitesse du vent

Figure 9-6. Paramètres de navigation.

9.5.3 PARAMÈTRES DE GUIDAGE

On se place dans l'hypothèse où la trajectoire à suivre est un arc de grand cercle de la sphère terrestre allant du point tournant P , au point tournant P_2 :

cet arc de grand cercle est très voisin de la route la plus courte de P_1 à P_2 (géodésique) et porte le nom de route orthodromique (*).

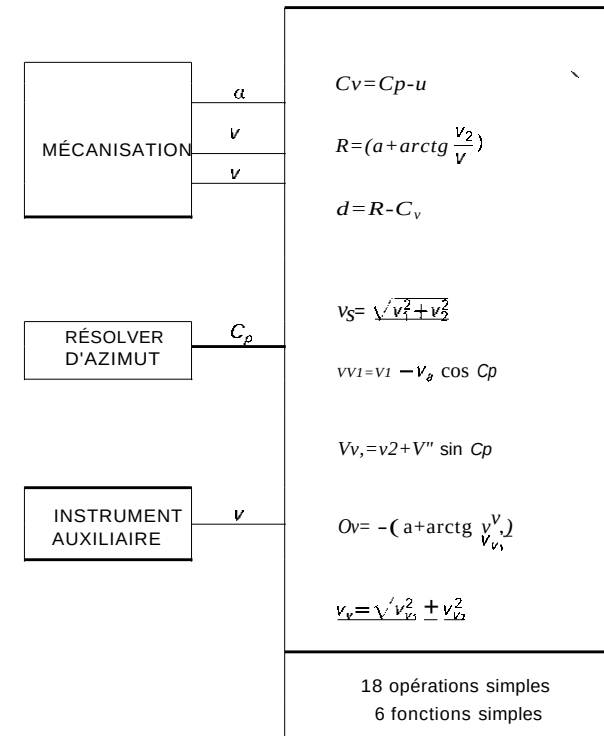


Figure 9-7. Calcul des paramètres de navigation.

L'avion se trouve à l'instant considéré en P et l'on définit P' comme le point le plus voisin de P sur la route théorique à suivre. Les paramètres de guidage vont permettre d'une part de rallier le point P_2 suivant la route orthodromique, d'autre part de mesurer l'écart par rapport à la route théorique. On définit ainsi (voir figure 9-8) l'écart latéral E et la route à suivre R_s . L'écart entre la route R suivie par l'avion et la route à suivre R_s est défini comme l'erreur de route

$$\Delta R = R - R_s \quad (9.84)$$

(*) Les routes orthodromique et géodésique sont différentes du fait que la terre n'est pas sphérique mais ellipsoïdale avec un coefficient d'aplatissement e voisin de $1/300$.

Enfin des paramètres d'intérêt sont la distance restante D entre P et P_z ainsi que le temps nécessaire pour atteindre P_z , $T = Div$.

Les vecteurs unitaires suivant les verticales locales en P_1 , P_2 , P et P' seront notés i_1, i_2, i et i' .

Les points tournants P_1 et P_2 sont définis par leurs coordonnées géographiques (L_1, G_1) et (L_2, G_2) à partir desquelles on définit les composantes sur les axes terrestres f_i des vecteurs unitaires i_1 et i_2 :

$$p_1^{(i)} = \sin L_i \quad (9.85)$$

$$p_2^{(i)} = -\sin G_i \cos L_i \quad (9.86)$$

$$p_3^{(i)} = \cos G_i \cos L_i \quad (9.87)$$

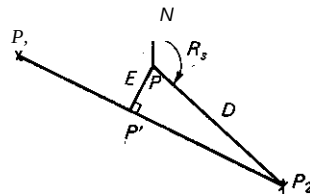
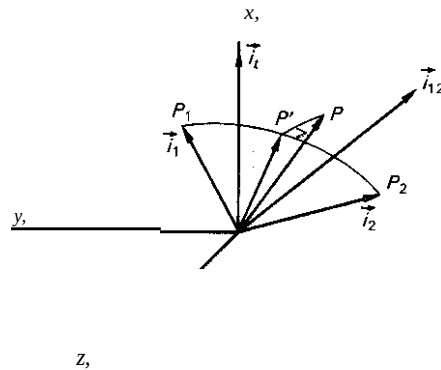


Figure 9-8. Paramètres de guidage pour une route orthodromique.

On définit le vecteur unitaire i_{12} directement perpendiculaire au plan (i_1, i_2) par

$$i_{12} = \frac{i_1 \times i_2}{|i_1 \times i_2|} \quad (9.88)$$

et ses composantes sur $[p]$ sont:

$$p^{(1)} = \mu(p_2^{(1)} p^{(1)} - p^{(1)} p_2^{(2)}) \quad (9.89)$$

$$p^{(12)} = \mu(p_3^{(1)} p^{(1)} - p^{(1)} p_3^{(2)}) \quad (9.90)$$

$$p^{(12)} = \mu(p_1^{(1)} p_2^{(2)} - p_2^{(1)} p_1^{(2)}) \quad (9.91)$$

avec

$$\mu = [(p_2^{(1)} p^{(1)} - p^{(1)} p_2^{(2)})^2 + (p^{(1)} p^{(1)} - p^{(1)} p^{(2)} Z + (p^{(1)} p_2^{(2)} - p_2^{(1)} p^{(2)} Z)^2]^{-1/2} \quad (9.92)$$

Ces calculs sont effectués une fois pour toute lors de l'introduction des points tournants.

Les composantes sur f_i du vecteur i suivant la verticale locale sont fournis à chaque instant par la mécanisation comme étant $[t_{31}, t_{32}, t_{33}]$. On peut alors calculer l'écart latéral E , la distance restante D et la route à suivre R_s à l'aide des formules

$$D = (a+h) \arccos(i' i_2) \quad (9.93)$$

$$E = (a+h) \arcsin(i' i_{12}) \quad (9.94)$$

$$R_s = \arccos \frac{(ixi,)' (ixi,)}{|ixi,||ixi,|} \quad (9.95)$$

qui peuvent être facilement développées en fonction des composantes précédentes (le vecteur unitaire i , a les composantes $(1, 0, 0)$).

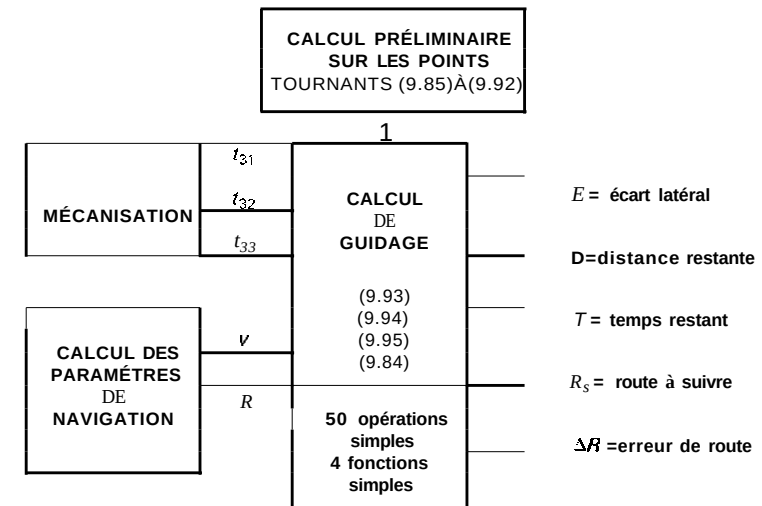


Figure 9-9. Calcul des paramètres de guidage.

La figure 9-9 représente l'organisation fonctionnelle des calculs de guidage. Ces calculs représentent 50 opérations simples et 4 fonctions simples.

9.6 Mécanisation d'un système strapdown

9.6.1 Un système strapdown est constitué de capteurs de rotation et de force spécifique (gyroscopes et accéléromètres) dont les axes d'entrée sont liés **au véhicule. Les gyroscopes bouclés en gyromètres et les accéléromètres donnent les composantes w et f de la rotation instantanée du véhicule et de la force spécifique projetées sur les axes du véhicule. Il s'agit en quelque sorte d'une plate-forme $[p]$ asservie aux mouvements angulaires du véhicule. A ce «détail» près les équations de mécanisation précédemment obtenues sont valables. Avec les notations du paragraphe 9.2, elles s'écrivent**

$$\begin{cases} \dot{v} = f + g - A(\rho + 2T_{p/t}\Omega)v & (9.96) \\ \dot{T}_{pl} = -A(p)T_{pl} & (9.97) \\ \rho = w - Tpj, D. & (9.98) \end{cases}$$

Il convient d'intégrer ces équations à assez haute fréquence, compte-tenu des caractéristiques des mouvements angulaires du véhicule: cette fréquence peut atteindre 1000 Hz alors que pour une mécanisation à plate-forme asservie elle est typiquement de 10 Hz. On voit que la charge de calcul est bien plus importante ici que pour une mécanisation à plate-forme asservie. On se reportera aux annexes 3 et 6 pour les méthodes numériques d'intégration correspondantes.

9.6.2 SYSTÈME STRAPDOWN REDONDANT

9.6.2.1 L'avantage des systèmes strapdown est de permettre de façon simple la redondance au niveau du composant alors que pour des systèmes à plate-forme, on envisage en général la redondance par l'utilisation de plusieurs plates-formes: les systèmes strapdown présentent donc en principe des avantages de fiabilité. On va considérer ci-après à titre d'exemple la mécanisation d'un ensemble redondant à $n (\geq 4)$ gyromètres.

9.6.2.2 Système redondant à $n (\geq 4)$ gyromètres

i) Orientation des instruments

On désignera par $\vec{E}_i$ l'axe d'entrée du i -ième gyromètre qui fournit de la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ du véhicule la mesure

$$W_i = \vec{\omega} \vec{E}_i + \varepsilon_i(0), \quad (9.99)$$

(*) Un mathématicien dirait que le i -ième gyromètre mesure la composante «covariante» du vecteur $\vec{\omega}$ le long de l'axe $\vec{E}_i$.

ε_i étant la dérive du gyromètre vérifiant l'inégalité suivante en cas de fonctionnement normal

$$|\varepsilon_i| \leq \varepsilon. \quad (9.100)$$

Afin de former un système redondant, on dispose les axes d'entrées des gyromètres ($\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$) de façon que tout triplet ($\vec{E}_i, \vec{E}_j, \vec{E}_k$) forme un trièdre de référence (non nécessairement orthonormé). Pour tout quadruplet $p = \{i, j, k, l\}$ sous-ensemble de $\{1, 2, \dots, n\}$, il existe alors une relation linéaire entre $\vec{E}_i, \vec{E}_j, \vec{E}_k$ et $\vec{E}_l$:

$$\alpha_p \vec{E}_i + \beta_p \vec{E}_j + \gamma_p \vec{E}_k + \delta_p \vec{E}_l = 0. \quad (9.101)$$

L'orientation des axes d'entrée doit être optimisée de façon à rendre tous les coefficients du même ordre de grandeur.

ri) Détection de panne

Les gyromètres fournissant les mesures

$$\omega_1 = \vec{\omega} \vec{E}_1 + \varepsilon_1 \quad (9.102)$$

$$\omega_n = \vec{\omega} \vec{E}_n + \varepsilon_n, \quad (9.103)$$

on voit qu'en cas de bon fonctionnement les inégalités

$$|\alpha_p \omega_i + \beta_p \omega_j + \gamma_p \omega_k + \delta_p \omega_l| < (|\alpha_p| + |\beta_p| + |\gamma_p| + |\delta_p|) \varepsilon \quad (9.104)$$

sont vérifiées pour tous les quadruplets p .

On définit pour le quadruplet p la composante T_p du vecteur T appelée **vecteur de test**, définie par

$$T_p = \begin{cases} 0 & \text{si l'inégalité (9.104) est vérifiée} \\ 1 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Au cas où le vecteur de test n'est pas nul, on peut en déduire que certains gyromètres sont en panne et même éventuellement les identifier. Envisageons quelques cas.

1°) Cas $n = 4$.

Il y a évidemment un seul quadruplet dans ce cas: $p = (1, 2, 3, 4)$. La mécanisation est alors la suivante:

$T = 0$: bon fonctionnement de l'ensemble.

$T = 1$: un gyromètre au moins est en panne; on ne peut l'identifier.

2°) Cas $n = 5$.

Il y a 5 quadruplets: $P_1 = (2, 3, 4, 5)$, $P_2 = (1, 3, 4, 5)$, $P_3 = (1, 2, 4, 5)$, $P_4 = (1, 2, 3, 5)$, $P_5 = (1, 2, 3, 4)$.

La mécanisation est

$T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]'$: bon fonctionnement de l'ensemble;

$T = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]'$: 1^{er} gyro en panne;

$T = [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]'$: 2^m, gyro en panne.

$T = [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]'$: 3^m, gyro en panne;

$T = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]'$: 4^m, gyro en panne;

$T = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0]$: SM, gyro en panne;

autres cas: plus d'un gyro en panne; on ne peut les identifier.

3°) Cas $n = 6$.

Il Ya dans ce cas 15 quadruplets notés successivement:

$P_{CI1}) = (3456), \quad P_{(13)} = (2456), \quad P_{(14)} = (2 \ 3 \ 5 \ 6),$

$P_{CI5)} = (2346), \quad P_{CI6)} = (2345),$

$P_{I13)} = (1 \ 4 \ 5 \ 6), \quad P_{(14)} = (1 \ 3 \ 5 \ 6), \quad P_{(25)} = (1 \ 3 \ 4 \ 6),$

$P_{CI6)} = (1 \ 3 \ 4 \ 5),$

$P_{(34)} = (1 \ 2 \ 5 \ 6), \quad P_{(35)} = (1 \ 2 \ 4 \ 6), \quad P_{(36)} = (1 \ 2 \ 4 \ 5),$

$P_{(45)} = (1 \ 2 \ 3 \ 6), \quad P_{CI46)} = (1 \ 2 \ 3 \ 5),$

$P_{(56)} = (1 \ 2 \ 3 \ 4).$

La mécanisation est alors:

$T = [0 \ \dots \ 0]'$: fonctionnement normal;

$T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]'$: 1^{er} gyro en panne;

$T = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]'$: 2^m, gyro en panne;

$T = [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]'$: 3^m, gyro en panne;

$T = [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]'$: 4^m, gyro en panne;

$T = [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]'$: SM, gyro en panne;

$T = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]'$: 6^m, gyro en panne;

$T = [14 \text{ éléments unité et } 1 \text{ élément nul en position } (ij)]$: les gyros i et j sont en panne.

autres cas: plus de deux gyros en panne; on ne peut les identifier.

iii) Meilleure estimée de la rotation

Ayant déterminé par le test précédent l'ensemble des instruments en bon fonctionnement, il faut estimer sur le repère orthonormé de calcul les compo-

santes de $\vec{\omega}$. Dans ce repère, les équations (9.102) à (9.103) prennent la forme

$$A\hat{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} \quad (9.105)$$

où les lignes de la matrice A sont les composantes des vecteurs $\vec{E}_i$ dans le repère choisi. Il convient alors de résoudre ce système aux moindres carrés:

$$\hat{\omega} = (A' A)^{-1} A' \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}. \quad (9.106)$$

COMPLÉMENT 1 AU CHAPITRE 9

**ROTATION À IMPOSER À UN TRIÈDRE
POUR QU'IL RESTE LOCALEMENT TANGENT À UNE SURFACE**

Soit une surface régulière (S) quelconque et un point mobile P se déplaçant sur (S) (figure 9-10). A un déplacement $d\vec{P}$ sur la surface correspond une modification $d\vec{n}$ de la normale. Afin que le trièdre (x, y, z) lié à *Preste* tangent à la surface (S), il faut **et il suffit que sa rotation instantanée $\vec{\rho}$ par rapport à (S) soit constamment telle que**

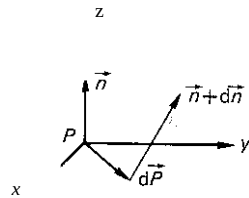


Figure 9-10. Trièdre tangent à une surface.

Il apparaît aussitôt qu'il y a une **infinité de choix possibles pour $\vec{\rho}$** , car si $\vec{\rho}$ convient, $\vec{\rho} + \mu \vec{n}$, où μ est un scalaire arbitraire, est aussi une solution.

$$dn = \vec{\rho} \times \vec{n} dt. \quad (9.107)$$

Localement (S) a pour équation, dans le trièdre (x, y, z) :

$$z + \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}by^2 + cxy = 0. \quad (9.108)$$

Pour

$$dP = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9.109)$$

on a

$$dn = \begin{bmatrix} a dx + c dy \\ c dx + b dy \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9.110)$$

Ainsi

$$\begin{cases} \rho_1 & -c \frac{dx}{dt} - b \frac{dy}{dt} = -cv_1 - bv_2 \\ \rho_2 & a \frac{dx}{dt} + c \frac{dy}{dt} = av_1 + cv_2 \\ \rho_3 & = \text{arbitraire.} \end{cases} \quad (9.111)$$

Lorsque les axes x et y sont les axes principaux de courbures de (S) en P, on a

$$a = 1/R_{p1} \quad b = 1/R_{p2} \quad c = 0 \quad (9.112)$$

et dans ce cas

$$\begin{cases} \rho_1 = -v_2/R_{p2} \\ \rho_2 = v_1/R_{p1} \\ \rho_3 = \text{arbitraire.} \end{cases} \quad (9.113)$$

Mais dans le cas général où les axes x et y sont décalés des axes principaux par l'angle α , on a

$$a = 1/R_1 \quad b = 1/R_2 \quad c = 1/\tau_\alpha \quad (9.114)$$

où τ_α est la torsion géodésique attachée à la direction α avec

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_{p1}} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_{p2}} \quad (9.115)$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\sin^2 \alpha}{R_{p1}} + \frac{\cos^2 \alpha}{R_{p2}} \quad (9.116)$$

$$\frac{1}{\tau_\alpha} = \cos \alpha \sin \alpha \left(\frac{1}{R_{p2}} - \frac{1}{R_{p1}} \right), \quad (9.117)$$

et la relation fondamentale (9.111) s'écrit alors sous la forme plus condensée suivante

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (9.118)$$

avec

$$C = \begin{bmatrix} -1/\tau_\alpha & -1/R_2 \\ 1/R_1 & 1/\tau_\alpha \end{bmatrix}. \quad (9.119)$$

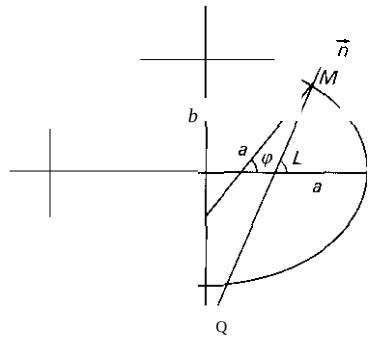
Cette matrice C porte le nom de **matrice de courbure** ou encore **tenseur de courbure**. Elle dépend du point considéré sur la surface ainsi que de l'orientation des axes x et y dans le plan tangent.

COMPLÉMENT 2 AU CHAPITRE 9

ELLIPSOÏDE TERRESTRE ET TENSEUR DE COURBURE

9C2.1 Ellipsoïde de référence

Le géoïde terrestre (surface équipotentielle du vecteur pesanteur vulgaire g) approximant au mieux la surface d'altitude 0 de la terre est représenté en première approximation par un ellipsoïde de révolution (figure 9-11).



Le grand axe (équatorial) est désigné par a , le petit axe (polaire) par b , et l'aplatissement e est défini par

$$e = \frac{a-b}{a}. \quad (9.120)$$

Les deux ellipsoïdes de référence que l'on peut considérer sont:

i) l'ellipsoïde «international» :

$$a = 6378388\text{m} \quad e = 1/297,0;$$

ii) l'ellipsoïde NASA (satellites β 57 et 58) :

$$a = 6378163 \pm 21 \text{ m} \quad e = 1/(298,24 \pm 0,01).$$

9C2.2 Calcul des rayons principaux de courbure

Considérant la représentation paramétrique d'une ellipse, le point courant M a pour coordonnées

$$\begin{aligned} a \cos \varphi \\ M \quad b \sin \varphi = a(1-e) \sin \varphi \end{aligned} \quad (9.121)$$

et la normale en ce point a pour paramètres directeurs

$$\vec{n} \begin{cases} (1-e) \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{cases} \quad (9.122)$$

La latitude géographique L est donc donnée par

$$\operatorname{tg} L = \frac{1}{1-e} \operatorname{tg} \varphi. \quad (9.123)$$

L'ellipsoïde étant de révolution, le rayon de courbure principal R_{p_2} (suivant la direction perpendiculaire au plan de la figure 9-11) est

$$R_{p_2} = MQ. \quad (9.124)$$

Une simple résolution de triangle donne alors

$$R_{p_2} = a \frac{\cos \varphi}{\cos L} = \frac{a}{1 + ((1-e) \sin' L)}. \quad (9.125)$$

soit au premier ordre

$$R_{p_2} = a(1 + e \sin' L). \quad (9.126)$$

Le rayon de courbure R_{p_1} de l'ellipse représentée sur la figure 9-11 est (résultat de géométrie différentielle classique)

$$R_{p_1} = \frac{ds}{dL} \quad (9.127)$$

avec

$$ds = a \sqrt{\sin^2 \varphi + (1-e)^2 \cos^2 \varphi} d\varphi. \quad (9.128)$$

En exprimant ds en fonction de dL , il vient

$$R_{p_1} = a(1-2e+3e \sin' L). \quad (9.129)$$

9C2.3 Tenseur de courbure pour une orientation quelconque

Soit un trièdre local quelconque (x, y, z) correspondant aux trois angles d'Euler G , L et α dans le cadre des mécanisations des paragraphes 9.3.2 et 9.3.3. Alors

$$t_{11} = \cos \alpha \cos L \quad (9.130)$$

$$t_{21} = \sin \alpha \cos L \quad (9.131)$$

$$t_{31} = \sin L. \quad (9.132)$$

On en déduit

$$\cos^2 \alpha = \frac{t_{11}^2}{t_{11}^2 + t_{21}^2} \quad (9.133)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{t_{21}^2}{t_{11}^2 + t_{21}^2} \quad (9.134)$$

$$\cos \alpha \sin \alpha = \frac{-t_{11} t_{21}}{t_{11}^2 + t_{21}^2} \quad (9.135)$$

Les formules (9.115) à (9.117), (9.126) et (9.129) nous donnent alors les éléments du tenseur de courbure correspondant au trièdre local considéré

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{a} (1 - e I_{31}^2 + 2e I_{11}^2) \quad (9.136)$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{a} (1 - e I_{31}^2 + 2e I_{21}^2) \quad (9.137)$$

$$\frac{1}{\tau_z} = \frac{2e}{a} t'_{11} t_{21} \quad (9.138)$$

9C2.4 Déflexion de verticale

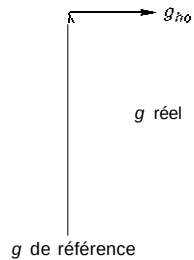


Figure 9-12.
Déflexion de verticale.

Par rapport au modèle idéal décrit plus haut (ellipsoïde de référence), le géoïde terrestre présente des déviations caractérisées par des déflexions de verticale (figure 9-9).

La composante «horizontale» g_{ho} peut être considérée pour des études de simulation comme aléatoire, stationnaire, de moyenne nulle avec un écart-type de $15 \cdot 10^{-6}$ g environ et une distance de corrélation D voisine de 100 km.

CHAPITRE 10

ERREURS D'UN SYSTÈME DE NAVIGATION PAR INERTIE

P. FAURRE

10.1 Introduction

On a vu (paragraphe 9.2) que la mécanisation la plus générale d'un système de navigation par inertie pur consiste à intégrer l'équation vectorielle

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{f} + \vec{g}(\vec{r}) \quad (10.1)$$

où, plus précisément à intégrer les équations scalaires obtenues en projetant sur les axes du trièdre-calculateur (défini au paragraphe 3 de ce chapitre) l'équation

$$\ddot{\vec{r}} + 2\vec{\omega}_c \times \dot{\vec{r}} + \ddot{\vec{\omega}}_c \times \vec{r} + \vec{\omega}_c \times (\vec{\omega}_c \times \vec{r}) - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \vec{f} + \vec{g}_p(\vec{r}). \quad (10.2)$$

Cette équation donne le système suivant (voir les expressions (9.17) à (9.20)) :

$$\begin{cases} \ddot{v}_c = f_a + g(T_{c/t}) - A(\rho_c + 2 T_{c/t} \Omega) v_c \\ \dot{\rho}_c = C(T_{c/t}) v_c \\ \dot{T}_{c/t} = -A(\rho_c) T_{c/t} \\ \dot{W}_c = P_C + T_{c/t} Q \end{cases} \quad (10.3)$$

On suppose dans ce chapitre que l'intégration des équations (10.3) est faite parfaitement par le calculateur du système à inertie (pas d'erreur d'arrondi ou de discrétisation); on y étudie seulement les erreurs introduites par les instruments et l'alignement initial. Cette hypothèse est réaliste car la longueur des mots du calculateur et le pas d'intégration sont le plus souvent choisis de sorte que les erreurs numériques soient très inférieures aux erreurs dues aux instruments et à l'alignement.

ÉQUATIONS D'ERREURS

10.2 Le trièdre plate-forme et les erreurs des instruments

10.2.1 Pour fixer les idées, on va considérer le cas précis d'une plate-forme avec trois accéléromètres et trois gyros à un degré de liberté, dont la disposition nominale est schématisée sur la figure 10-1 (*). Les axes d'entrée des accéléromètres sont définis par les vecteurs unitaires $\vec{A}_1, \vec{A}_2$ et $\vec{A}_3$, les axes d'entrée, de toupie et de sortie des gyros par les vecteurs unitaires $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ et $\vec{E}_3, \vec{T}_1, \vec{T}_2$ et $\vec{T}_3, \vec{S}_1, \vec{S}_2$ et $\vec{S}_3$ respectivement.

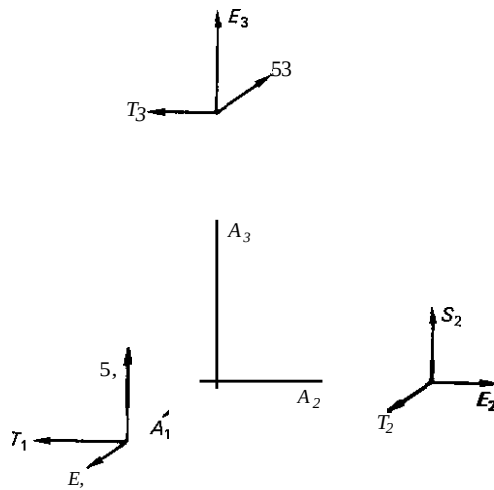


Figure 10-1. Disposition nominale des instruments.

10.2.2 Les instruments n'ont pas en fait leur disposition nominale. Pour décrire leur orientation, on introduit le trièdre-plate-forme orthonormé $[p]$ ayant pour axe x_p le vecteur $\vec{A}_1$ et comme plan $x_p y_p$ le plan (A_1, A_2) . Les axes d'entrée des instruments ont ainsi pour composantes sur le trièdre $[p]$ (voir figure 10-2)

$$\vec{A}_1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{A}_2 : \begin{bmatrix} \theta_1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{A}_3 : \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(*) Il va de soi que les considérations qui suivent s'étendent sans difficulté à toutes autres Orientations. Celles de la figure 10-1 sont classiques et ont été choisies pour cette raison.

$$\vec{E}_1 : \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad \vec{E}_2 : \begin{bmatrix} \alpha_4 \\ 1 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad \vec{E}_3 : \begin{bmatrix} \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ 1 \end{bmatrix},$$

10.2.3 On sait que l'accéléromètre i donne comme signal de sortie

$$f_{ai} = b_i + (1 + K_{ai}) (\vec{J} \cdot \vec{A}_i) \quad (10.4)$$

où b_i désigne le biais, K_{ai} le facteur d'échelle de l'accéléromètre et $(\vec{J} \cdot \vec{A}_i)$ la projection orthogonale de la force spécifique $\vec{J}$ sur l'axe d'entrée de l'accéléromètre. Donc si $\vec{J}$ a pour composantes sur $[p]$ $J_p = [J_{p1} \ J_{p2} \ J_{p3}]'$, alors les signaux de sortie des accéléromètres sont

$$f_{a1} = b_1 + (1 + K_{a1}) J_{p1} \quad (10.5)$$

$$f_{a2} = b_2 + (1 + K_{a2}) (J_{p1} + J_{p2}) \quad (10.6)$$

$$f_{a3} = b_3 + (1 + K_{a3}) (\theta_2 J_{p1} + \theta_3 J_{p2} + J_{p3}), \quad (10.7)$$

ou encore en notation matricielle et au premier ordre

$$f_a = f_p + \bar{K}_a f_p + b \quad (10.8)$$

avec

$$\bar{K}_a = \begin{bmatrix} K_{a1} & 0 & 0 \\ \theta_1 & K_{a2} & 0 \\ \theta_2 & \theta_3 & K_{a3} \end{bmatrix}. \quad (10.9)$$

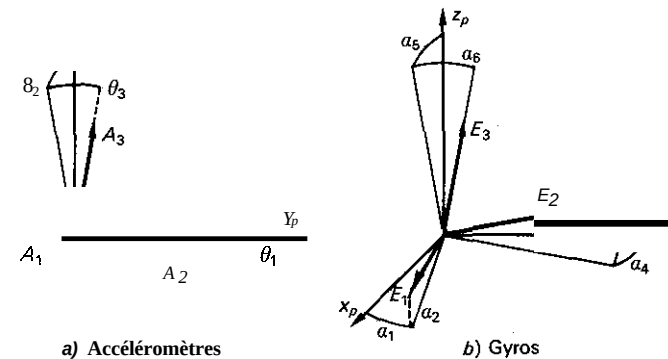


Figure 10-2. Orientation effective des axes d'entrée des instruments.

10.2.4 D'autre part on sait que si le gyro i reçoit la commande ω_{ci} , il asservit (*) la plate-forme à une rotation $\vec{\omega}_p$ telle que

$$\vec{\omega}_p \cdot \vec{E}_i = \varepsilon_i + (1 + K_{gi}) \omega_{ci} + (\vec{B}_i \times \vec{f}) \cdot \vec{S}_i \quad (10.10)$$

où ε_i représente la dérive du gyro, K_{gi} son facteur d'échelle et $\vec{B}_i$ son balourd dont seules les composantes $B_{ij} = \vec{E}_i \cdot \vec{T}_j$ sur l'axe de toupie et $B_{ei} = \vec{B}_i \cdot \vec{E}_i$ sur l'axe d'entrée interviennent. Donc si la plate-forme reçoit la commande $\omega_c = [\omega_{c1}, \omega_{c2}, \omega_{c3}]'$, sa rotation instantanée est en fait le vecteur ω_p de composante $\omega_p = [\omega_{p1}, \omega_{p2}, \omega_{p3}]'$ sur les axes $[pl]$, où

$$\omega_p = \omega_c + \vec{K}_g \omega_c + \vec{K}_b f + \varepsilon \quad (10.11)$$

avec

$$\vec{K}_g = \begin{bmatrix} K_{g1} & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -\alpha_4 & K_{g2} & -\alpha_3 \\ -\alpha_5 & -\alpha_6 & K_{g3} \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

et

$$\vec{K}_b = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{e1} & 0 \\ -B_{e1} & B_{12} & 0 \\ 0 & B_{e3} & B_{13} \end{bmatrix}. \quad (10.13)$$

10.3 Le trièdre-calculateur et l'équation en ψ

10.3.1 LE TRIÈDRE-CALCULATEUR

Par définition le *trièdre-calculateur* $[cl]$ est le trièdre obtenu à partir du repère terrestre ft par la transformation que représente la matrice T_{clt} obtenue par intégration de l'équation (10.3).

Si les instruments, leurs dispositions et l'alignement initial étaient parfaits, les trièdres $[pl]$ et $[cl]$ seraient initialement confondus (but de l'alignement initial) et le resteraient par la suite car la rotation inertielle ω_c du trièdre $[cl]$ est constamment commandée à la plate-forme. Mais en raison des imperfections instrumentales, ω_p diffère de ω_c (voir l'expression (10.11)), et il s'ensuit un décalage entre $[pl]$ et $[cl]$ qui évolue avec le temps. Pour caractériser cette erreur, on introduit la rotation ψ faisant passer de $[cl]$ à $[pl]$. Avec l'hypothèse que cette

(*) On suppose avoir affaire à une plate-forme asservie. Une mécanisation strapdown pourrait être analysée de façon analogue.

rotation est de faible amplitude, on a les relations (voir l'expression (A2.28))

$$T_{clp} = 1 + A(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & -\psi_3 & \psi_1 \\ \psi_3 & 1 & -\psi_1 \\ -\psi_2 & \psi_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.14)$$

$$T_{p/c} = I - A(\psi). \quad (10.15)$$

10.3.2 L'ÉQUATION EN ψ

Interprétée vectoriellement, l'équation (10.11) devient

$$\vec{\omega}_p = \vec{\omega}_c + \vec{\psi} \times \vec{\omega}_c + \vec{K}_g \vec{\omega}_c + \vec{K}_b \vec{f} + \varepsilon. \quad (10.16)$$

En effet ω_c est la matrice des composantes de $\vec{\omega}_c$ sur $[cl]$ et ω_p celle de $\vec{\omega}_p$ sur $[pl]$; $\vec{\omega}_c + \vec{\psi} \times \vec{\omega}_c$ est ainsi le vecteur de composantes ω_c sur $[pl]$. Si l'on observe que (voir l'expression (A2.31))

$$\vec{\omega}_p - \vec{\omega}_c = \vec{\omega}_{p/c} = \vec{\psi}^p \vec{\omega}_c^c, \quad (10.17)$$

on peut mettre l'expression (10.16) sous la forme

$$\vec{\psi}^c + \vec{\omega}_c \times \vec{\psi} = \varepsilon + \vec{K}_g \vec{\omega}_c + \vec{K}_b \vec{f} \quad (10.18)$$

soit encore

$$\dot{\vec{\psi}}^i = \varepsilon + \vec{K}_g \vec{\omega}_c + \vec{K}_b \vec{f}. \quad (10.19)$$

Cette équation est appelée *équation en ψ* . Elle traduit le fait que l'évolution au cours du temps du décalage angulaire de la plate-forme est due aux imperfections des gyros : dérive fixe, dérive due aux accélérations agissant sur les balourds et erreur dans la commande des taux de précession des gyros. Les gyros contrôlant des taux de rotation par rapport à l'espace inertiel, il n'est pas surprenant que l'équation en ψ traduise une simple intégration par rapport à l'espace inertiel de ces erreurs instrumentales.

La forme scalaire de l'équation en ψ qui sera utilisée par la suite est obtenue en projetant sur les axes $[cl]$ (ou $[pD]$ l'équation (10.18) :

$$\frac{d}{dt}(\psi_1) = \omega_3 \psi_2 - \omega_2 \psi_3 + \varepsilon_1 + K_{g1} \omega_1 - \alpha_1 \omega_2 - \alpha_2 \omega_3 + B_{11} f_1 + B_{e1} f_2 \quad (10.20)$$

$$\frac{d}{dt}(\psi_2) = \omega_1 \psi_3 - \omega_3 \psi_1 + \varepsilon_2 - \alpha_4 \omega_1 + K_{g2} \omega_2 - \alpha_3 \omega_3 - B_{e2} f_1 + B_{12} f_2 \quad (10.21)$$

$$\frac{d}{dt}(\psi_3) = \omega_2 \psi_1 - \omega_1 \psi_2 + \varepsilon_3 - \alpha_5 \omega_1 - \alpha_6 \omega_2 + K_{g3} \omega_3 + B_{e3} f_2 + B_{13} f_3. \quad (10.22)$$

Pour simplifier l'écriture de ces équations par la suite, on définira la matrice colonne E par l'expression

$$E = \varepsilon + \vec{K}_g \omega_c + \vec{K}_b f \quad (10.23)$$

que l'on appellera *dérive totale* des gyros.

10.4 Équations des erreurs de position

L'équation (10.8) représentant les signaux des accéléromètres a pour équivalent vectonnel

$$\vec{f}_a = \vec{f} - \vec{\psi} \times \vec{f} + \vec{K}_a \vec{f} + \vec{b} \quad (10.24)$$

et c'est ce vecteur qui est utilisé par le système à inertie au lieu de $\vec{J}$ dans l'intégration des équations (10.2) ou (10.3) pour déterminer la position. Ainsi $\vec{r}$ désignant le vecteur position vraie et $\vec{r} + \vec{\delta r}$ le vecteur position calculée le système d'équations scalaires intégrées correspond à l'équation vectorielle :

$$\begin{aligned} (\vec{r} + \vec{\delta r}) + 2\vec{\omega}_c \times (\vec{r} + \vec{\delta r}) + \vec{\omega}_c \times (\vec{r} + \vec{\delta r}) + \vec{\omega}_c \times (\vec{\omega}_c \times (\vec{r} + \vec{\delta r})) - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times (\vec{r} + \vec{\delta r})) \\ = \vec{r} - \vec{\psi} \times \vec{f} + \vec{K}_a \vec{f} + \vec{b} + \vec{g}_p(\vec{r} + \vec{\delta r}), \end{aligned} \quad (10.25)$$

Mais la pesanteur vulgaire $\vec{g}_p(\vec{r})$ est donnée par la formule

$$\vec{g}_p(\vec{r}) = -k \frac{\vec{r}}{r^3} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \vec{e}(\vec{r}) \quad (10.26)$$

où $\vec{e}(\vec{r})$ correspond aux termes d'ellipticité du géoïde terrestre, d'où l'on peut développer le développement au premier ordre

$$\vec{g}_p(\vec{r} + \vec{\delta r}) - \vec{g}_p(\vec{r}) = -\omega_s^2 (\vec{1} - 3\hat{r} \otimes \hat{r}) \vec{\delta r} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\delta r}) \quad (*) \quad (10.27)$$

Dans cette dernière expression $\hat{r} = \vec{r}/r$ désigne le vecteur unitaire porté par la verticale locale et $\omega_s^2 = k/r^3$ est le carré de la pulsation de Schuler.

Comparant les équations (10.25) et (10.2), il vient en utilisant l'expression (10.27)

$$\begin{aligned} \vec{\delta \ddot{r}} + 2\vec{\omega}_c \times \vec{\delta \dot{r}} + \vec{\omega}_c \times \vec{\delta \ddot{r}} + \vec{\omega}_c \times (\vec{\omega}_c \times \vec{\delta \ddot{r}}) \\ = -\vec{\psi} \times \vec{f} + \vec{K}_a \vec{f} + \vec{b} - \omega_s^2 (\vec{1} - 3\hat{r} \otimes \hat{r}) \vec{\delta r} \end{aligned} \quad (10.28)$$

soit encore

$$\vec{\delta \ddot{r}} + \omega_s^2 (\vec{1} - 3\hat{r} \otimes \hat{r}) \vec{\delta r} = -\vec{\psi} \times \vec{f} + \vec{K}_a \vec{f} + \vec{b} \quad (10.29)$$

(*) On rappelle que $\vec{1}$ représente le tenseur unité, c'est-à-dire que $\vec{1} \vec{\delta r} = \vec{\delta r}$. D'autre part le produit tensoriel $\hat{r} \otimes \hat{r}$ est défini par $(\hat{r} \otimes \hat{r}) \vec{\delta r} = \hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{\delta r})$.

Cette équation que l'on appellera *équation des erreurs de position* traduit de façon précise l'évolution de ces erreurs. Le second membre de l'équation caractérisant les causes d'erreurs est constitué d'une part des erreurs instrumentales des accéléromètres $(\vec{b} + \vec{K}_a \vec{f})$ qui fournissent une mesure erronée de la force spécifique, d'autre part du décalage angulaire de la plate-forme $\vec{\psi}$ par rapport à son orientation supposée qui entraîne une mauvaise interprétation de la force spécifique mesurée $(-\vec{\psi} \times \vec{f})$. Le premier membre de l'équation traduit la dynamique de propagation des erreurs: contrairement au cas de l'équation en $\vec{\psi}$ il ne s'agit pas d'une simple intégration par rapport à l'espace inertiel. Cela vient du fait que la navigation s'effectue au voisinage de la terre qui est dotée d'un champ de gravitation $\vec{g}(\vec{r})$: l'élément différentiel de ce champ intervient par l'intermédiaire du terme $\omega_s^2 (\vec{1} - 3\hat{r} \otimes \hat{r}) \vec{\delta r}$. On a déjà vu au chapitre 2 l'effet bénéfique de ce terme pour les erreurs horizontales (le système se comporte comme un oscillateur de pulsation ω_s au lieu d'être un double intégrateur), et l'effet catastrophique de ce même terme pour les erreurs de navigation verticale (le système est exponentiellement instable).

La forme scalaire de l'équation d'erreur de position utilisée par la suite est obtenue en projetant l'équation (10.29) sur n'importe quel repère animé de la rotation $\vec{\rho}$ par rapport à la terre et de la rotation $\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\rho}$ par rapport à l'espace inertiel. Il vient alors

$$\begin{aligned} \delta \ddot{r} + 2\omega \times \delta \dot{r} + \dot{\rho} \times \delta r + \rho((Q + w) \delta r) \\ + \{(\omega_s^2 - \omega^2) \vec{1} - 3\omega_s^2 \hat{r} \otimes \hat{r} + \Omega \otimes \Omega\} \delta r = -\vec{\psi} \times \vec{f} + \vec{K}_a \vec{f} + \vec{b} \quad (*) \end{aligned} \quad (10.30)$$

Mis sous forme canonique, ce système différentiel s'écrit, avec $\delta r = [\delta x, \delta y, \delta z]'$

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = \delta \dot{x} \quad (10.31)$$

$$\frac{d}{dt}(\delta y) = \delta \dot{y} \quad (10.32)$$

$$\frac{d}{dt}(\delta z) = \delta \dot{z} \quad (10.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta \dot{x}) = -f_3 \psi_2 + f_2 \psi_3 + b_1 + K_{a1} f_1 + 2\omega_3 \delta \dot{y} - 2\omega_2 \delta \dot{z} \\ + (\omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_s^2) \delta x + (\dot{\rho}_3 - \omega_1(Q + \omega_2) + \omega_2 Q_1) \delta y \\ + (-\dot{\rho}_2 - \omega_1(Q + w) + \omega_3 Q_1) \delta z \end{aligned} \quad (10.34)$$

(*) Dans cette expression $\vec{1}$ représente la matrice identité.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta \dot{y}) = & 13 \psi_1 - f_1 \psi_3 + b_1 + \theta_1 f_1 + K_{a2} 1, -2 \omega_3 \delta \dot{x} + 2 \omega_1 \delta \dot{z} \\ & + (\omega_1^2 + \omega_3^2 - \omega_s^2) \delta y + [-\dot{\rho}_3 - \omega_s(\omega_1 + \Omega_1) + \omega_1 \Omega_2] \delta x \\ & + [\dot{\rho}_1 - \omega_s(2\omega_3 + \Omega_3) + \omega_3 \Omega_2] \delta z \end{aligned} \quad (10.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta \dot{z}) = & -f_2 \psi_1 + f_1 \psi_2 + b_3 + \theta_2 f_1 + \theta_3 f_2 + K_{a3} f_3 - 2 \omega_1 \delta \dot{y} + 2 \omega_2 \delta \dot{x} \\ & + (\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2 \omega_s^2) \delta z + [\dot{\rho}_2 - \omega_s(\omega_1 + \Omega_1) + \omega_1 \Omega_3] \delta x \\ & + [-\dot{\rho}_1 - \omega_s(2\omega_2 + \Omega_2) + \omega_2 \Omega_3] \delta y. \end{aligned} \quad (10.36)$$

Pour simplifier l'écriture de ces équations par la suite, on définit le vecteur $\vec{V}$ par l'expression

$$\vec{V} = b + \vec{K}_a f \quad (10.37)$$

que l'on appellera *biais total* des accéléromètres.

10.5 Interprétation des erreurs

Le système des 9 équations différentielles (10.20) à (10.22) et (10.31) à (10.36) permet ainsi de calculer δx , δy , δz , ψ_1 , ψ_2 et ψ_3 en fonction du temps à partir de conditions initiales correspondant à l'alignement initial et d'erreurs instrumentales spécifiées. La deuxième partie du chapitre va traiter de cette intégration, mais auparavant on va interpréter les diverses erreurs dynamiques.

1°) Erreurs de position

Il est clair que $\delta x(t)$, $\delta y(t)$ et $\delta z(t)$ représentent les erreurs de position et d'altitude.

2°) Erreurs d'attitude

La plate-forme à inertie fournit une référence d'attitude. En effet à partir de l'orientation de la plate-forme et des paramètres calculés par le système à inertie, on peut matérialiser à bord du véhicule une estimation $[V]$ du trièdre géographique local $[v]$. On définit la rotation $\vec{\phi}$ qui fait passer de $[v]$ à $[V]$ et qui caractérise ainsi les erreurs de verticale et d'azimut. Dans le cas d'une mécanisation asservie au Nord, il est clair que $[V]$ et $[p]$ sont confondus. Décomposant la rotation $[V] \rightarrow [p]$ en $[v] \rightarrow [c] \rightarrow [p]$, on voit aisément que sur les axes $[p]$ dans ce cas

$$\varphi_1 = \psi_1 - \delta y/R \quad (10.38)$$

$$\varphi_2 = \psi_2 + \delta x/R \quad (10.39)$$

$$\varphi_3 = \psi_3 - \delta y \operatorname{tg} L/R. \quad (10.40)$$

Pour d'autres mécanisations on obtient sans difficulté des formules analogues.

+

3°) Erreurs de vitesse

Le vecteur qui a les composantes v_c sur les axes $[p]$ matérialise à bord le vecteur vitesse donné par le système à inertie. Ainsi l'erreur de Vitesse apparaît comme la somme de l'erreur de vitesse calculée $\delta \dot{r}$ et de l'erreur due à l'interprétation des composantes sur un trièdre $[p]$ décalée par rapport au trièdre calculateur $[c]$ par une rotation $\vec{\psi}$:

$$\delta \vec{v} = \delta \dot{r} + \vec{\psi} \times \vec{v} \quad (10.41)$$

ou encore

$$\delta \vec{v} = \delta \dot{r} + \vec{\rho} \times \delta \vec{r} + \vec{\psi} \times \vec{v}, \quad (10.42)$$

expression dans laquelle les dérivées sont prises par rapport à un repère quelconque. La forme scalaire de l'expression (10.42) projetée sur les axes $[p]$ (ou $[c]$) est:

$$\delta v_1 = \delta \dot{x} + (\omega_2 - \Omega_2) \delta z - (\omega_3 - \Omega_3) \delta y + \psi_2 v_3 - \psi_3 v_2 \quad (10.43)$$

$$\delta v_2 = \delta \dot{y} + (\omega_3 - \Omega_3) \delta x - (\omega_1 - \Omega_1) \delta z + \psi_3 v_1 - \psi_1 v_3 \quad (10.44)$$

$$\delta v_3 = \delta \dot{z} + (\omega_1 - \Omega_1) \delta y - (\omega_2 - \Omega_2) \delta x + \psi_1 v_2 - \psi_2 v_1. \quad (10.45)$$

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS D'ERREURS

10.6 Instabilité du calcul de l'altitude et de la vitesse verticale

Dans le cas d'un véhicule stationnaire, l'équation d'erreur de position sur l'axe vertical (10.36) s'écrit

$$\delta \ddot{z} - (\Omega_1^2 + 2 \omega_s^2) \delta z = -2 \Omega_1 \delta \dot{y} - \Omega_1 \Omega_3 \delta x + \vec{V}_3. \quad (10.46)$$

La solution $\delta z(t)$ contient des termes de la forme

$$\exp(\sqrt{2 \omega_s^2 + \Omega_1^2} t), \quad (10.47)$$

ce qui entraîne que l'erreur de verticale croît de façon exponentielle avec le temps. Cette croissance est telle qu'on ne peut envisager de déterminer l'altitude et la vitesse verticale par des moyens purement inertiels pour des durées supérieures à quelques minutes. On supposera donc dans la suite du chapitre que l'altitude et la vitesse verticale sont fournies par des instruments auxiliaires ou par un système hybride et l'on fera l'hypothèse suivante:

$$\delta \dot{z} = \delta \ddot{z} = 0. \quad (10.48)$$

10.7 Erreurs pour des véhicules de vitesse faible ou constante

10.7.1 VÉHICULES LENTS

Les hypothèses suivantes sont vérifiées pour les véhicules lents (bateaux, sous-marins, véhicules terrestres ...) :

— pas d'erreur dans la détermination de l'altitude

$$\delta z = \delta \dot{z} = 0, \quad (10.49)$$

— déplacement lent, entraînant d'une part

$$\vec{p} \approx 0 \quad (10.50)$$

$$(10.51)$$

d'où l'on déduit

$$\vec{\omega} \approx \vec{\Omega}, \quad (10.52)$$

d'autre part

$$\vec{f} \approx -\vec{g}. \quad (10.53)$$

Compte tenu de ces conditions, les équations d'erreurs (10.18) et (10.30) s'écrivent alors

$$\dot{\psi} + \Omega \times \psi = \varepsilon + \bar{K}_g \Omega + \bar{K}_b g = E \quad (10.54)$$

$$\delta \ddot{r} + 2\Omega \times \delta \dot{r} + \omega_s^2 (I - 3\hat{r} \otimes \hat{r}) \delta r$$

$$+ (\Omega \otimes \Omega - \Omega^2 I) \delta r - \psi \times g = -\bar{K}_a g + b = V. \quad (10.55)$$

Considérant $\psi = [\psi_1, \psi_2, \psi_3]'$ et $\delta r = [\delta x, \delta y, 0]'$, ces équations donnent le système scalaire suivant lorsque le trièdre de projection et de dérivation est le trièdre plate-forme

$$\dot{\psi}_1 + \Omega_2 \psi_3 - \Omega_3 \psi_2 = E, \quad (10.56)$$

$$\dot{\psi}_2 + \Omega_3 \psi_1 - \Omega_1 \psi_3 = E_2 \quad (10.57)$$

$$\dot{\psi}_3 + \Omega_1 \psi_2 - \Omega_2 \psi_1 = E, \quad (10.58)$$

$$\delta \ddot{x} - 2\Omega_3 \delta \dot{y} + (\omega_s^2 + \Omega_1^2 - \Omega^2) \delta x + \Omega_1 \Omega_2 \delta y + g \psi_2 = V_1 \quad (10.59)$$

$$\delta \ddot{y} + 2\Omega_2 \delta \dot{x} + (\omega_s^2 + \Omega_2^2 - \Omega^2) \delta y + \Omega_2 \Omega_1 \delta x - g \psi_1 = V_2. \quad (10.60)$$

Ces équations étant linéaires à coefficients constants, on peut prendre les trans-

formées de Laplace des deux membres. Le système devient alors

$$\begin{vmatrix} s & -\Omega_3 & \Omega_2 & 0 & 0 \\ \Omega_3 & s & -\Omega_1 & 0 & 0 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & s & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & s^2 + \omega_s^2 + \Omega_1^2 - \Omega^2 & \Omega_1 \Omega_2 - 2\Omega_3 s \\ -g & 0 & 0 & \Omega_1 \Omega_2 + 2\Omega_3 s & s^2 + \omega_s^2 + \Omega_2^2 - \Omega^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_1(s) \\ \psi_2(s) \\ \psi_3(s) \\ \delta x(s) \\ \delta y(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1(s) + \psi_1(0) \\ E_2(s) + \psi_2(0) \\ E_3(s) + \psi_3(0) \\ V_1(s) + s\delta x(0) + \delta \dot{x}(0) - 2\Omega_3 \delta y(0) \\ V_2(s) + s\delta y(0) + \delta \dot{y}(0) + 2\Omega_3 \delta x(0) \end{vmatrix} \quad (10.61)$$

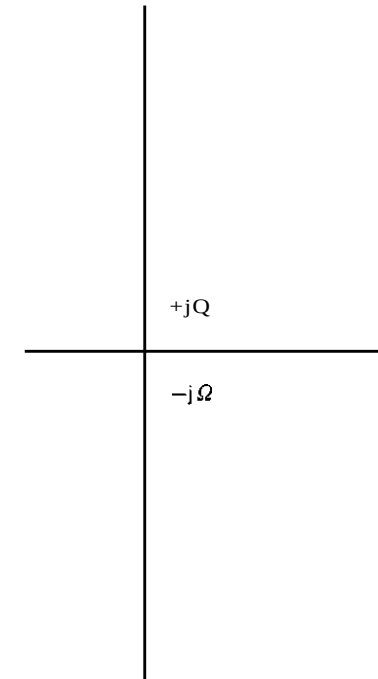


Figure 10-3. Pôles de l'équation (12.62) caractérisant les erreurs pour un véhicule stationnaire.

Le polynôme caractéristique, déterminant de la première matrice de l'expression (10.61), est alors

$$\Delta(s) = S(S' + Q') [S^4 + s^2(2\omega_s^2 - \Omega^2 + 3\Omega_3^2) + \omega_s^4 - \omega_s^2(\Omega^2 + \Omega_3^2) + \Omega_3^2 Q']. \quad (10.62)$$

Les racines de l'équation caractéristique qui caractérisent l'évolution dynamique des erreurs sont : $0, \pm j\Omega$ qui correspondent aux erreurs évoluant avec la période de 24 heures, $\pm j\omega_{s1}$ et $\pm j\omega_{s2}$ où ω_{s1} et ω_{s2} sont très voisins de la pulsation de Schuler ω_s et qui correspondent aux erreurs évoluant avec la période de 84 minutes.

Les deux pulsations voisines ω_{s1} et ω_{s2} introduisent dans les courbes d'erreurs des phénomènes de battement connus sous le nom d'*effet Foucault*. La pulsation de ces battements correspond à

$$\frac{1}{2}\Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_{s2} - \omega_{s1}), \quad (10.63)$$

quantité que l'on peut déterminer à partir de l'équation (10.62) comme étant

$$\frac{1}{2}\Delta\omega = \frac{\Omega}{2} \frac{J4\sin^2 L}{4\omega_s^2} + \frac{\Omega^2}{4\omega_s^2} (1 - 9\sin^2 L) \cos^2 L. \quad (10.64)$$

On a représenté sur la figure 10.4 les différentes périodes intervenant dans l'évolution des erreurs du système stationnaire, ainsi que la période des battements T_b entre les pulsations ω_{s1} et ω_{s2} .

10.7.2 VÉHICULES AYANT UNE VITESSE CONSTANTE

On considère à présent un véhicule dont la vitesse a sur les axes plate-forme des composantes constantes

$$v_1 = \text{constante} \quad (10.65)$$

$$v_2 = \text{constante} \quad (10.66)$$

$$v_3 = 0, \quad (10.67)$$

ce qui entraîne que ω_1, ω_2 et ω_3 sont constants, et que $\dot{\rho}$ est négligeable. Les équations d'erreurs sont alors comme dans le cas de véhicules lents des équations linéaires à coefficients constants, ayant pour polynôme caractéristique:

$$\Delta(s) = s(s' + w') [s^4 + s^2\{2\omega_s^2 - \omega^2 + 3\omega_3^2\} + \omega_s^4 - \omega_s^2(\omega^2 + \omega_3^2) + \omega^2\omega_3^2 + (\omega_1\Omega_2 - \omega_2\Omega_1)^2]. \quad (10.68)$$

Pour montrer la variation des périodes T , (de «24 heures»), T'' , T' , (de «84 minutes») et T_b avec la vitesse du véhicule, on a porté sur le tableau 10-1 leurs valeurs dans quelques cas.

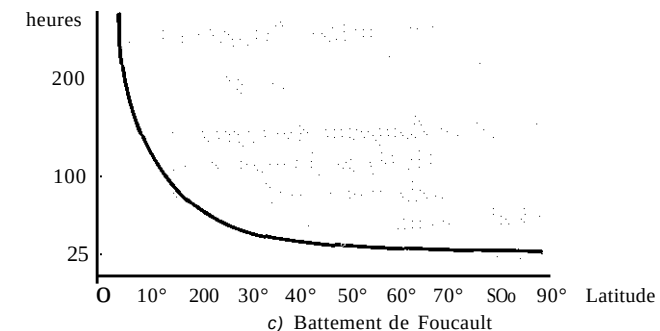
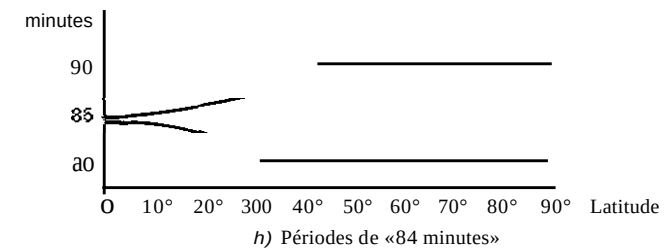
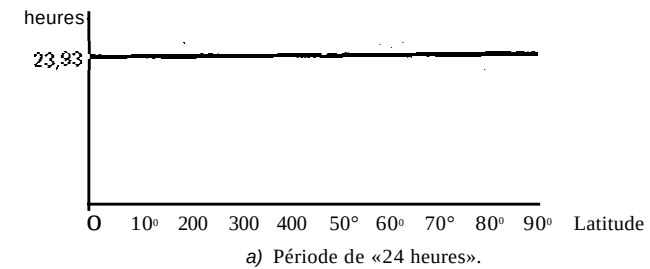


Figure 10.4. Les diverses périodes des erreurs d'un navigateur par inertie stationnaire.

On peut représenter graphiquement ces résultats sur le diagramme erreur d'azimut/erreur de latitude (figure 10-6).

La conclusion essentielle est que les erreurs de latitude et d'azimut restent bornées, alors que l'erreur de longitude croît linéairement en fonction du temps.

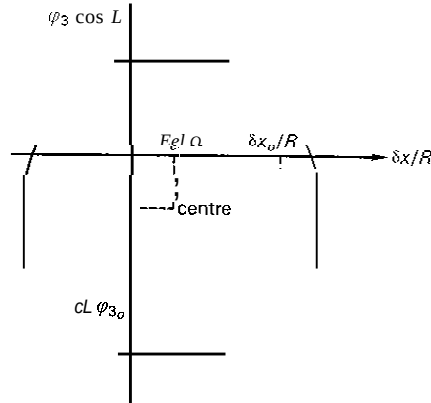


Figure 10-6. Diagramme erreur d'azimut/erreur de latitude.

EXEMPLE

Considérons maintenant un système marin caractérisé par les valeurs suivantes:

$$E_e = E_y = E_p = 5.10^{-3} \text{ } ^\circ/\text{h},$$

$\delta x_0 = \delta y_0 = 0$ et $\varphi_{30} = -E_e/(Q \cos L) = -4,7.10^{-4} \text{ rd}$ (alignement réalisé $L = 45^\circ$, donc $\cos L = \sin L = 0,707$, $\Omega = 15^\circ/\text{h}$. par gyrocompas);

Alors

$$\delta x(t) = 2,12 (1 - \cos Qt) \text{ km};$$

$$\delta y(t) = 9,39 t(\text{heure}) + 1,51 \sin Qt \text{ km};$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(t) &= -4,7.10^{-4} (1 + \sin Qt) \text{ rd} \\ &= -1,6(I + \sin Qt) \text{ minute d'angle.} \end{aligned}$$

Les courbes correspondantes sont représentées sur la figure 10-7.

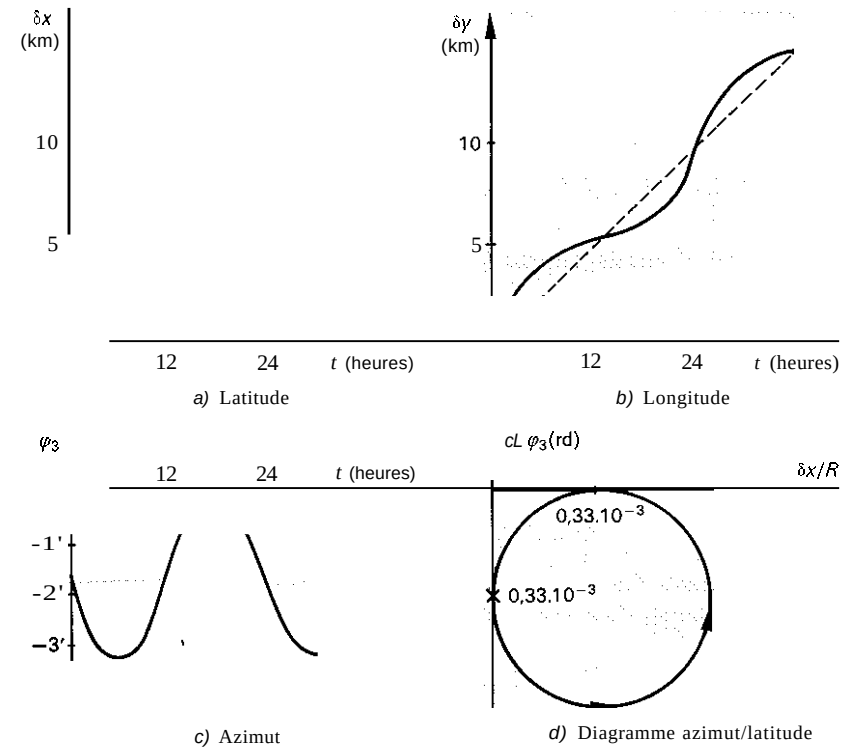


Figure 10-7. Erreurs d'un système marin amorti.

10.9 Solution approchée pour quelques heures de fonctionnement

On peut remarquer que pour le cas des véhicules terrestres

$$\omega = |\vec{\omega}| \leq \Omega + \frac{v}{R} \ll \omega_s, \quad (10.91)$$

Pour des durées de quelques heures, c'est-à-dire pour

$$t \ll 24 \text{ heures}, \quad (10.92)$$

avec les hypothèses d'une trajectoire à vitesse approximativement constante, et d'erreurs instrumentales constantes, il est possible d'intégrer les équations d'erreurs en ne conservant que les termes prépondérants.

Ainsi avec ces hypothèses

$$\dot{\delta x} \approx 0, \quad \dot{\delta y} \approx 0, \quad \dot{\varphi}_3 \approx g. \quad (10.93)$$

et supposant une mécanisation avec plate-forme asservie au Nord

$$\omega_1 = -v_2/R + Ql \quad (10.94)$$

$$\omega_2 = v_1/R \quad (10.95)$$

$$\omega_3 = -\frac{Y_2}{R} \text{tg} L + Q, \quad (10.96)$$

Les équations d'erreurs simplifiées s'écrivent

$$\dot{\psi}_1 + \omega_2 \psi_3 - \omega_3 \psi_2 = E, \quad (10.97)$$

$$\dot{\psi}_2 + \omega_3 \psi_1 - \omega_1 \psi_3 = E_2 \quad (10.98)$$

$$\dot{\psi}_3 + \omega_1 \psi_2 - \omega_2 \psi_1 = E, \quad (10.99)$$

$$\delta \ddot{x} + \omega_s^2 \delta x = -g \psi_2 + V_1 \quad (10.100)$$

$$\delta \ddot{y} + \omega_s^2 \delta y = g \psi_1 + V_2, \quad (10.101)$$

Tous les coefficients étant supposés constants, on utilise la transformation de Laplace pour intégrer l'équation en ψ :

$$\begin{bmatrix} s & -W_1 & \omega_2 \\ \omega_3 & s & -W_2 \\ -W_2 & \omega_1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1(s) \\ \psi_2(s) \\ \psi_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{10} + E_1/s \\ \psi_{20} + E_2/s \\ \psi_{30} + E_3/s \end{bmatrix} \quad (10.102)$$

d'où

$$\begin{bmatrix} \psi_1(s) \\ \psi_2(s) \\ \psi_3(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s(s^2 + \omega_s^2)} \begin{bmatrix} s^2 + \omega_1^2 & \omega_3 s + \omega_2 \omega_1 & -\omega_2 s + \omega_3 \omega_1 \\ -\omega_3 s + \omega_2 \omega_1 & s^2 + \omega_2^2 & \omega_1 s + \omega_2 \omega_3 \\ \omega_2 s + \omega_3 \omega_1 & -\omega_1 s + \omega_2 \omega_3 & s^2 + \omega_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{10} + E_1/s \\ \psi_{20} + E_2/s \\ \psi_{30} + E_3/s \end{bmatrix} \quad (10.103)$$

De plus les équations (10.100) et (10.101) donnent:

$$\delta x(s) = \frac{-21-2}{s^2 + \omega_s^2} [s \delta x_0 + \delta \dot{x}_0 - g \psi_2 + \frac{V_1}{s}] \quad (10.104)$$

$$\delta y(s) = \frac{-21-2}{s^2 + \omega_s^2} [s \delta y_0 + \delta \dot{y}_0 + g \psi_1 + \frac{V_2}{s}] \quad (10.105)$$

On obtient ainsi les expressions des transformées de Laplace des erreurs de position et de l'erreur ψ_3 :

$$\begin{aligned} \delta x(s) = & \frac{s \delta x_0}{s^2 + \omega_s^2} + \frac{\delta \dot{x}_0}{s^2 + \omega_s^2} + \frac{V_1}{s(s^2 + \omega_s^2)} \\ & + \frac{g}{s(s^2 + \omega_s^2)(s^2 + \omega_1^2)} [(-\omega_3 s + \omega_2 \omega_1)(\psi_{10} + E_1/s) + (s^2 + \omega_2^2)(\psi_{20} + E_2/s) \\ & + (W_1 s + \omega_2 \omega_3)(\psi_{30} + E_3/s)] \quad (10.106) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta y(s) = & \frac{s \delta y_0}{s^2 + \omega_s^2} + \frac{\delta \dot{y}_0}{s^2 + \omega_s^2} + \frac{V_2}{s(s^2 + \omega_s^2)} \\ & + \frac{g}{s(s^2 + \omega_s^2)(s^2 + \omega_1^2)} [(s^2 + \omega_1^2)(\psi_{10} + E_1/s) + (\omega_3 s + \omega_2 \omega_1)(\psi_{20} + E_2/s) \\ & + (-\omega_2 s + \omega_1 \omega_3)(\psi_{30} + E_3/s)] \quad (10.107) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_3(s) = & \frac{1}{s(s^2 + \omega_s^2)} [(\omega_2 s + \omega_3 \omega_1)(\psi_{10} + E_1/s) + (-\omega_1 s + \omega_2 \omega_3)(\psi_{20} + E_2/s) \\ & + (s^2 + \omega_3^2)(\psi_{30} + E_3/s)] \quad (10.108) \end{aligned}$$

Les expressions ainsi obtenues ne sont valables que pour

$$t \ll 24 \text{ heures}, \quad (10.109)$$

c'est-à-dire

$$t \ll l/w, \quad (10.110)$$

mais sont valables pour

$$t \sim l/w, \quad (10.111)$$

On peut donc développer ces expressions pour les fréquences s supérieures en module à ω_s , ce qui donne

$$\begin{aligned} \delta x(s) = & \frac{s \delta x_0}{s^2 + \omega_s^2} + \frac{\delta \dot{x}_0}{s^2 + \omega_s^2} + \frac{V_1}{s(s^2 + \omega_s^2)} \\ & - \frac{g}{s(s^2 + \omega_s^2)} \left[\frac{\omega_3}{s} \left(\psi_{10} + \frac{E_1}{s} \right) + \psi_{20} + \frac{E_2}{s} + \frac{\omega_1}{s} \left(\psi_{30} + \frac{E_3}{s} \right) \right] \quad (10.112) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta y(s) = & \frac{s \delta y_0}{s^2 + \omega_s^2} + \frac{\delta \dot{y}_0}{s^2 + \omega_s^2} + \frac{V_2}{s(s^2 + \omega_s^2)} \\ & + \frac{g}{s(s^2 + \omega_s^2)} \left[\psi_{10} + \frac{E_1}{s} + \frac{\omega_3}{s} \left(\psi_{20} + \frac{E_2}{s} \right) - \frac{\omega_2}{s} \left(\psi_{30} + \frac{E_3}{s} \right) \right] \quad (10.113) \end{aligned}$$

$$\psi_3(s) = \frac{1}{s^2} \left[\omega_2 \left(\psi_{10} + \frac{E_1}{s} \right) - \omega_1 \left(\psi_{20} + \frac{E_2}{s} \right) + s \left(\psi_{30} + \frac{E_3}{s} \right) \right]. \quad (10.114)$$

Utilisant le tableau A4-1 des transformées de Laplace inverses, on obtient les expressions temporelles suivantes pour les erreurs de position:

$$\begin{aligned} \delta x(t) = & \delta x_0 \cos \omega_s t + \delta \dot{x}_0 \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} + R \left(\frac{V_1}{g} - \psi_{20} \right) (1 - \cos \omega_s t) \\ & - R(E_2 + \omega_1 \psi_{30} - \omega_3 \psi_{10}) \left(t - \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right) \\ & + R(\omega_3 E_1 - \omega_1 E_3) \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos \omega_s t}{\omega_s^2} \right) \end{aligned} \quad (10.115)$$

$$\begin{aligned} \delta y(t) = & \delta y_0 \cos \omega_s t + \delta \dot{y}_0 \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} + R \left(\frac{V_2}{g} + \psi_{10} \right) (1 - \cos \omega_s t) \\ & + R(E_1 + \omega_3 \psi_{20} - \omega_2 \psi_{30}) \left(t - \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right) \\ & + R(\omega_3 E_2 - \omega_2 E_3) \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos \omega_s t}{\omega_s^2} \right) \end{aligned} \quad (10.116)$$

On retrouve dans les expressions (10.115) et (10.116) des termes qui figuraient déjà dans l'analyse des erreurs du navigateur simplifié du chapitre 2, mais il y a aussi des termes nouveaux.

Les trois premiers termes (effet des erreurs initiales de position, de vitesse et de verticale) sont identiques à ceux obtenus lors de l'analyse d'un système à un axe. En ce qui concerne δx [resp. δy], la dérive E_2 [resp. E_1] doit être augmentée du terme supplémentaire

$$\begin{aligned} E_{2s} &= \omega_1 \psi_{30} - \omega_3 \psi_{10} \\ \text{[resp. } E_{1s} &= \omega_3 \psi_{20} - \omega_2 \psi_{30}] \end{aligned} \quad (10.117)$$

dans le terme décrivant l'erreur de position due à la dérive du gyro dans un système à un axe :

$$\delta x = -RE \left(t - \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right) \quad (10.118)$$

Enfin un terme vraiment nouveau apparaît dû au couplage des deux directions de navigation (x et y) :

$$\delta x = R(m_3 E_1 - m_1 E_3) \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos \omega_s t}{\omega_s^2} \right) \quad (10.119)$$

$$\text{[resp. } \delta y = R(m_3 E_2 - m_2 E_3) \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos \omega_s t}{\omega_s^2} \right)].$$

L'erreur de cap $\varphi_3(t)$ est donnée par

$$\varphi_3(t) = \psi_3(t) - \delta y(t) \operatorname{tg} L / R \quad (10.120)$$

soit

$$\varphi_3(t) = \psi_{30} + (\omega_2 \psi_{10} - \omega_1 \psi_{20} + E_3) t + (m_2 E_1 - \omega_1 E_2) \frac{t^2}{2} - \delta y(t) \frac{\operatorname{tg} L}{R} \quad (10.121)$$

Cas d'un alignement initial autonome *Syst. inertiel autonome*

Afin d'évaluer plus précisément les performances d'un système de navigation, on suppose que

$$\delta x_0 = \delta y_0 = \delta \dot{x}_0 = \delta \dot{y}_0 = 0 \quad (10.122)$$

et que l'alignement initial est réalisé de façon autonome. Les erreurs initiales sont alors fonction des erreurs instrumentales, et sont données par (voir expressions (11.16) à (11.18)) :

$$\psi_{10} = -V_2 / g + P_1 \quad (10.123)$$

$$\psi_{20} = V_1 / g + \beta_2 \quad (10.124)$$

$$-\frac{E_2}{\Omega_1} - \frac{V_2}{g} \operatorname{tg} L + P_3 \approx -\frac{E_2}{\Omega_1} + P_3 \quad (10.125)$$

où P'' , P_2 et P , sont les écarts par rapport à un gyrocompas parfait.

On peut alors déduire les erreurs de position et de cap des formules (10.115), (10.116) et (10.121) :

$$\begin{aligned} \delta x(t) = & -RP_2(1 - \cos \omega_s t) - R[\Omega_1 \beta_3 + \Omega_3 \left(\frac{V_2}{g} - P_1 \right)] \left(t - \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right) \\ & + R(Q, E, -\Omega_1 E_s) \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos \omega_s t}{\omega_s^2} \right) + \frac{1}{\Omega_1} [(Q, E_1 - Q_1 E_3) \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos \omega_s t}{\omega_s^2} \right) \\ & + (-E_2 + \Omega_1 \beta_3 + \Omega_3 \left(\frac{V_2}{g} - \beta_1 \right)) \left(t - \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right)], \end{aligned} \quad (10.126)$$

$$\begin{aligned} \delta y(t) = & RfJ_1(I-\cos\omega_s t) \\ & + R[E_1 + Q\left(\frac{V_1}{g} + \beta_1\right)]\left(t - \frac{\sin\omega_s t}{\omega_s}\right) + RE_2 Q\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1-\cos\omega_s t}{\omega_s^2}\right) \\ & - \frac{v_2}{Q_1} \left[(E_2 + \Omega_1 \beta_2) \left(t - \frac{\sin\omega_s t}{\omega_s}\right) + \Omega_1 E_3 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1-\cos\omega_s t}{\omega_s^2}\right) \right] \\ & - \frac{v_2}{Q_1} \left[Q_1 E_2 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1-\cos\omega_s t}{\omega_s^2}\right) + \left(\frac{V_1}{g} + \beta_2\right) \left(t - \frac{\sin\omega_s t}{\omega_s}\right) \right], \quad (10.127) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(t) = & -\frac{E_2^2}{\Omega_1} - \frac{V_2^2}{g} L + fJ_3 + E_3 - Q_1 \left(\frac{1}{g} + \beta_2\right) J_1 t - \Omega_1 E_2 \frac{t^2}{2} \\ & + \frac{v_1}{R} \left[\left(-\frac{V_2}{g} + \beta_1\right) t + E_1 \frac{t^2}{2} \right] + \frac{v_2}{R} \left[\left(\frac{V_1}{g} + \beta_2\right) t + E_2 \frac{t^2}{2} \right] - \frac{\tan L}{R} \delta y(t). \quad (10.128) \end{aligned}$$

TABLEAU 10-2

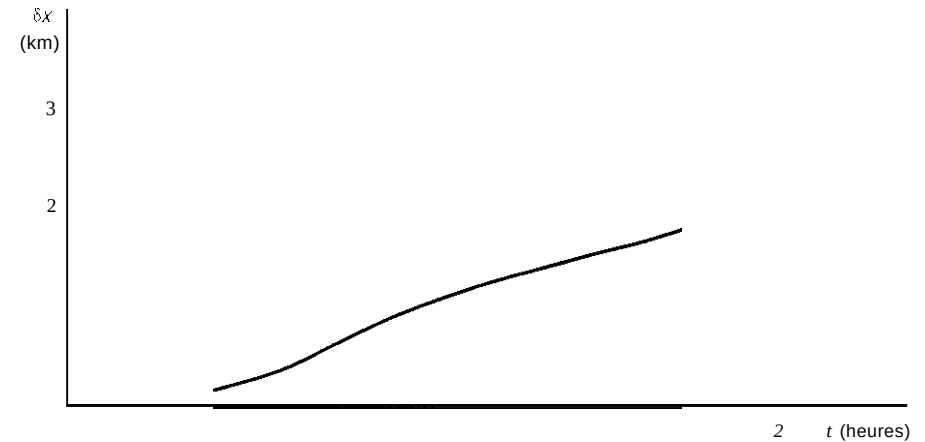
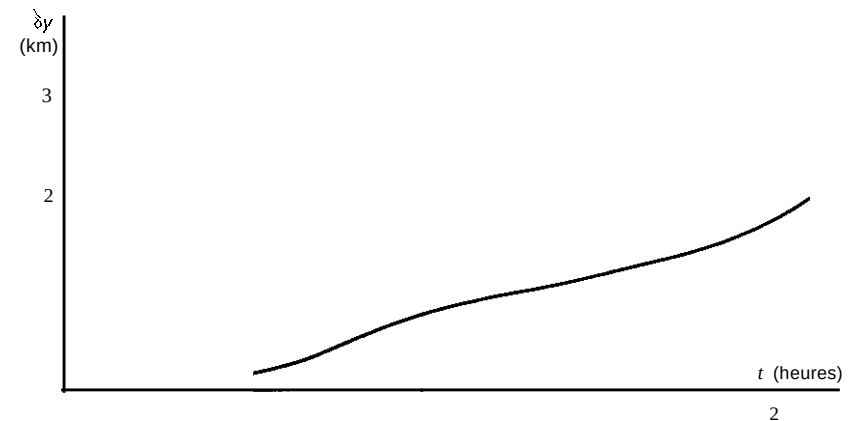
Valeurs des jonctions d'erreurs $CT = 2\pi/\omega_s = 84 \text{ mn} = 5040 \text{ s}$

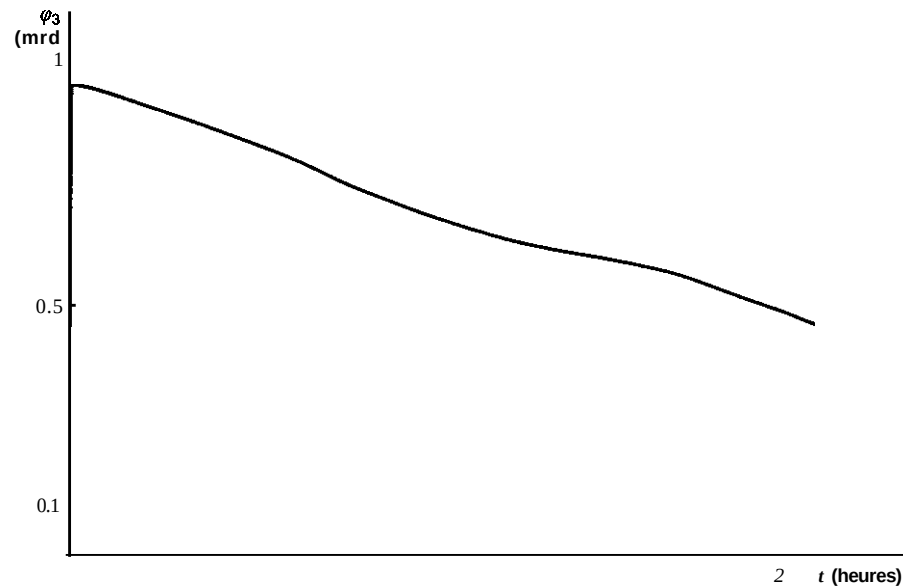
t (5)	$1-\cos\omega_s t$	$\frac{\sin\omega_s t}{\omega_s}$ (s)	$\frac{1-\cos\omega_s t}{\omega_s^2}$ (5)	$\frac{1-\cos\omega_s t}{\omega_s^2}$ (10 ⁵ s ²)	$\frac{1-\cos\omega_s t}{\omega_s^2}$ (10 ⁵ s ²)
0	0	0	0	0	0
630	0,29	567	63	1,88	0,10
1260	1	802	458	6,43	1,50
1890	1,29	567	1333	11,0	6,88
2520	2	0	2520	12,9	18,9
3150	1,29	-567	3717	11,0	38,6
3780	1	-802	4582	6,43	65,0
4410	0,29	-567	4977	1,88	95,4
5040	0	0	5040	0	127
6300	1	8,2	5498	6,43	192
7560	2	0	7560	12,9	273
8820	1	-802	9622	6,43	382,5
10080	0	0	10080	0	508

Pour évaluer aisément les valeurs numériques des erreurs dans un cas particulier, on peut se servir du tableau 10-2 qui donne en fonction du temps les valeurs numériques des fonctions d'erreurs apparaissant dans les expressions (10.126) à (10.128).

EXEMPLE

On a reporté sur les figures 10-8, 10-9 et 10-10 les erreurs de position et de cap calculées d'après les formules précédentes (alignement autonome) pour les valeurs numériques ci-après

Figure 10-8. Erreur Nord δx .Figure 10-9. Erreur Ouest δy .

Figure 10-10. Erreur d'azimut φ_3 .

$$E_1 = 0,01^\circ/\text{h} \quad E_2 = -0,01^\circ/\text{h} \quad E_3 = -0,01^\circ/\text{h}$$

$$\beta_1 = 0 \quad \beta_2 = 0 \quad \beta_3 = 0$$

$$\nabla 1/g = 0 \quad \nabla 2/g = 0$$

$$v_1 = 180 \text{ m/s} \quad v_2 = 180 \text{ m/s}$$

$$R = 6367 \text{ m} \quad \lambda = 45^\circ$$

$$L = 45^\circ \text{ (en moyenne), d'où } \Omega_1 = \Omega_3 = 5,142 \cdot 10^{-5} \text{ rd/s.}$$

Les erreurs sont données par

$$\delta x = 0,17 \left(t - \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right) + 4,92 \cdot 10^{-5} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos \omega_s t}{\omega_s^2} \right),$$

$$\delta y = 0,139 \left(t - \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right) + 3,33 \cdot 10^{-5} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos \omega_s t}{\omega_s^2} \right),$$

$$\varphi_3 = 0,94 \cdot 10^{-1} - 4,848 \cdot 10^{-8} t + 2,49 \cdot 10^{-12} \frac{t^2}{2}$$

$$- 2,18 \cdot 10^{-8} \left(t - \frac{\sin \omega_s t}{\omega_s} \right) - 5,23 \cdot 10^{-12} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos \omega_s t}{\omega_s^2} \right).$$

10.10 Simulation numérique sur ordinateur

Les paragraphes précédents ont dû convaincre le lecteur de la difficulté d'obtenir des formules explicites approchées (et exemptes d'erreurs!) donnant les erreurs d'un système à inertie.

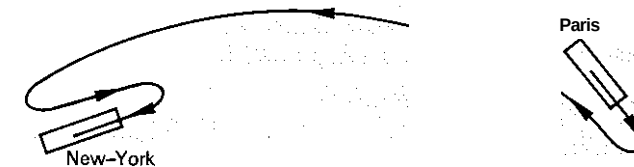


Figure 10-11. Trajectoire Paris-New York.

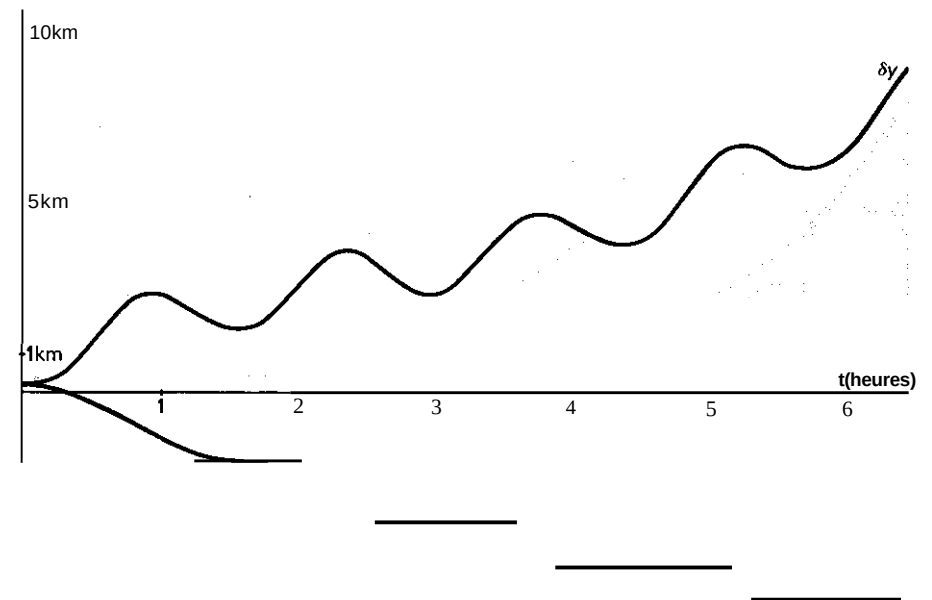


Figure 10-12. Erreurs avec mécanisation asservie au Nord.

TABLEAU 10-3

*Erreurs instrumentales et erreur d'alignement correspondant
aux figures 10-12 à 10-14*

Gyros

Dérives: $\delta_1 = \delta_2 = 0,007^\circ/\text{h}$ $\delta_3 = 0,01^\circ/\text{h}$

Facteurs d'échelle: $K_{g1} = K_{g2} = K_{g3} = 5 \cdot 10^{-4}$

Balourds: $B_{t1} = B_{t2} = B_{t3} = B_{e1} = B_{e2} = B_{e3} = 0,50/\text{h/g}$.

Accéléromètres

Biais: $b_1 = b_2 = 10^{-4} \text{ g}$

Facteurs d'échelle: $K_a = K_a = 10^{-1}$.

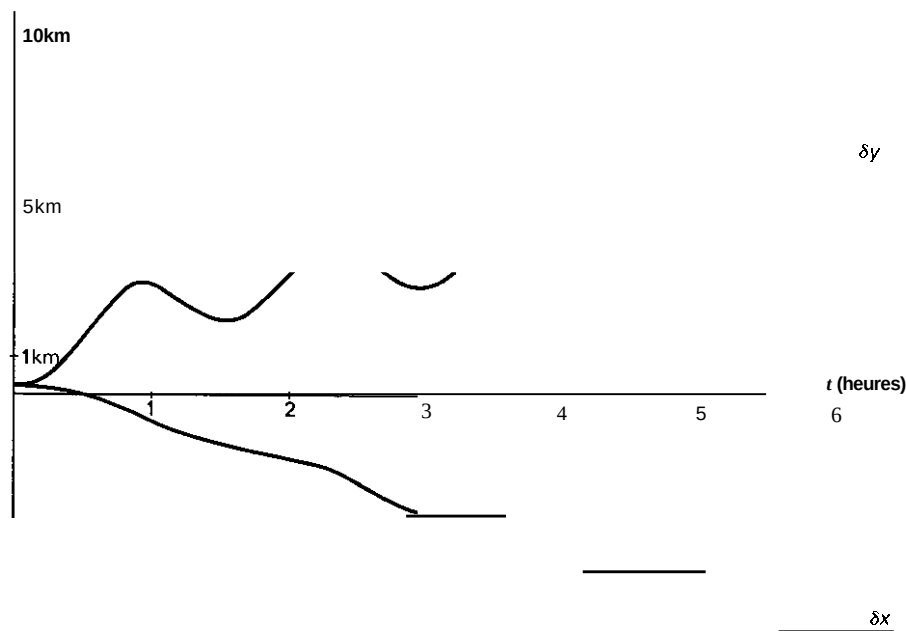
Erreurs d'orientation des instruments

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \epsilon = 10^{-4} \text{ radian}$.

Erreurs de l'alignement initial

$\delta x_0 = \delta y_0 = 200 \text{ m}$

$P_x = P_y = 5''$ $P_z = 2''$.

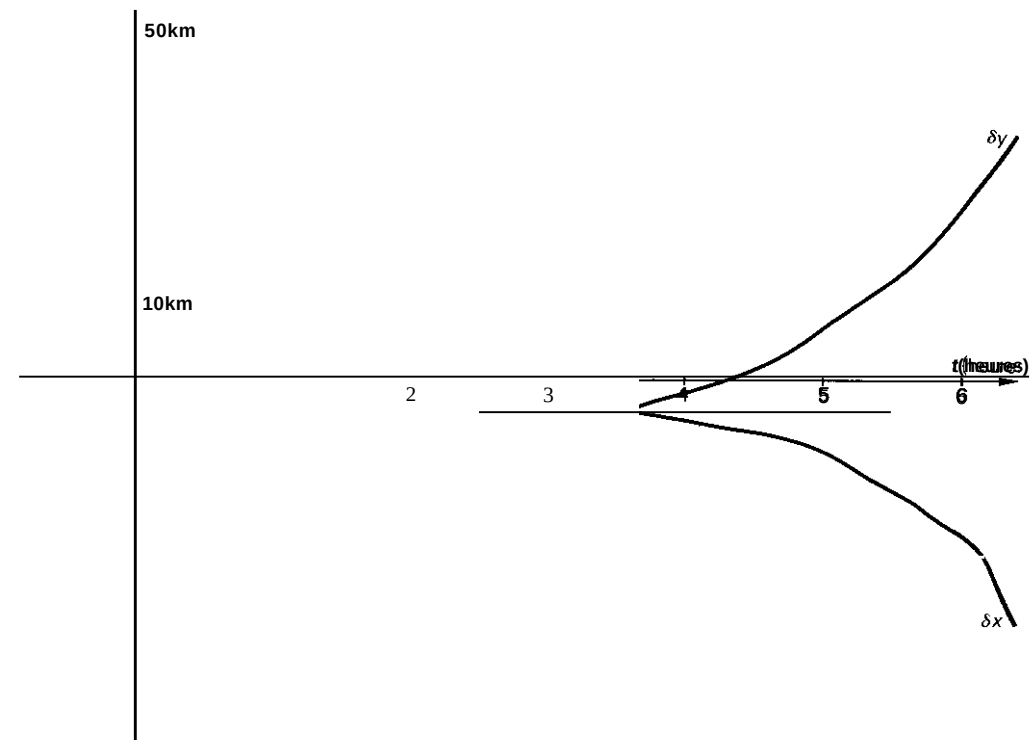
Figure 10-13. Erreurs avec mécanisation à azimuth libre ($\gamma = 00/\text{h}$).

Une méthode extrêmement efficace consiste à intégrer numériquement sur ordinateur les équations différentielles (10.20) à (10.22) et (10.31) à (10.36), conjointement avec un sous-programme générant les paramètres $f(t)$, $\omega(t)$ et $L(t)$ dépendant de la trajectoire. On se reportera à l'annexe 6 pour une description des diverses méthodes numériques envisageables.

A titre d'illustration, on donne ci-après sous forme de courbes le résultat de tels calculs pour une trajectoire allant de Paris à New-York en 6 heures 30 minutes représentée sur la figure 10-11.

On a représenté avec l'hypothèse d'un alignement initial autonome et des erreurs instrumentales décrites dans le tableau 10-3 les erreurs de latitude (δx), et de longitude (δy) dans le cas d'une mécanisation asservie au Nord (figure 10-12), d'une mécanisation à azimuth libre avec un taux de précession nul (figure 10-13) et avec un taux de précession de $1000^\circ/\text{h}$ (figure 10-14).

On voit que les erreurs de position pour la mécanisation asservie au Nord (figure 10-12) et pour la mécanisation à azimuth libre à taux de précession nul (figure 10-13) sont tout à fait comparables. Par contre on voit un comportement très différent sur la figure 10-14 où les erreurs sont quatre fois plus importantes en fin de trajectoire: faire précessionner la plate-forme autour de l'axe vertical

Figure 10-14. Erreurs avec mécanisation à azimuth libre ($\gamma = 1000/\text{h}$).

à une vitesse élevée ($\gamma = 1000^\circ/\text{h}$), ce qui conduit à une vingtaine de rotations de la plate-forme au cours de la trajectoire, a un effet bénéfique pour les erreurs résultant des dérives E_1 et E_2 ; par contre l'effet du facteur d'échelle K_g , est amplifié par un facteur de l'ordre de 100, ce qui conduit finalement à ces dégradations de performances. Ceci illustre les considérations faites au paragraphe 9.4 au sujet du choix d'une mécanisation.

ANALYSE STATISTIQUE DES ERREURS

10.11 Caractère aléatoire des erreurs instrumentales et des erreurs dynamiques d'un système à inertie

10.11.1 Dans l'analyse faite jusqu'à présent, on a toujours supposé que les erreurs instrumentales étaient constantes au cours du temps. Si cette hypothèse est raisonnable pour certaines de ces erreurs (orientation des axes d'entrée par exemple), elle est tout à fait irréaliste pour d'autres, la dérive des gyros par exemple. On est ainsi conduit à considérer ces erreurs comme des fonctions aléatoires dont les lois statistiques sont décrites par l'une des méthodes exposées au chapitre 4.

La dérive ε d'un gyroscope peut ainsi être représentée;

soit par sa fonction de covariance (voir l'expression (4.5))

$$\varphi_\varepsilon(\tau) = E\{\varepsilon(t+\tau)B(t)\} \quad (10.129)$$

soit par un modèle markovien (voir paragraphe 4.4)

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A\xi + v \\ E\{vv'\} = Q\delta \end{cases} \quad (10.130)$$

$$\begin{cases} E\{vv'\} = Q\delta \end{cases} \quad (10.131)$$

$$\varepsilon = h\xi. \quad (10.132)$$

10.11.2 ELLIPSE À 50%, À 90% ET C.E.P.

Les erreurs dynamiques du système à inertie sont alors, elles aussi, des fonctions aléatoires. On peut les considérer comme provenant de l'excitation des équations d'erreurs par les erreurs instrumentales. Si l'on suppose que ces dernières sont gaussiennes, il découle de la linéarité des équations d'erreurs que les erreurs dynamiques sont elles aussi gaussiennes. On peut donc les caractériser parfaitement par leur moyenne et leur covariance.

En ce qui concerne les erreurs de position $\delta x(t)$ et $\delta y(t)$, la densité de probabilité correspondante (supposant ces erreurs centrées) est

$$p(\delta x, \delta y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \det A} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\delta x \ \delta y] A^{-1} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \right\} \quad (10.133)$$

où

$$A(t) = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} = E \left\{ \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} [\delta x \ \delta y] \right\} \quad (10.134)$$

est la covariance des erreurs de position à l'instant t . La matrice de covariance $A(t)$ ou, de façon équivalente, les variances a et b et la covariance c caractérisent bien les performances du système. On leur préfère souvent cependant l'une des représentations suivantes.

i) Ellipse à 50% (figure 10-15)

C'est l'ellipse d'égale densité de probabilité (c'est-à-dire une courbe d'équation $p(\delta x, \delta y) = \text{constante}$) qui enferme 50% de la probabilité. En d'autres termes, à l'instant t , il y a une probabilité 0.5 que l'erreur $(\delta x, \delta y)$ soit à l'intérieur (resp. à l'extérieur) de cette ellipse. Les éléments caractéristiques de cette ellipse sont calculés à partir de $A(t)$ par les formules suivantes:

$$\text{grand axe} = 1,1774 \sqrt{A} \quad (10.135)$$

$$\text{petit axe} = 1,1774 \sqrt{B} \quad (10.136)$$

$$\alpha = \text{direction du grand axe} = \arctg \frac{c}{a-b} \quad (10.137)$$

avec

$$A = a + b + \frac{\sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}}{2} \quad (10.138)$$

$$B = \frac{a + b - \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}}{2} \quad (10.139)$$

ii) Ellipse à 90% (figure 10-15)

C'est l'ellipse d'égale densité de probabilité telle que l'erreur $(\delta x, \delta y)$ soit à l'intérieur [resp. à l'extérieur] de cette ellipse avec la probabilité 0.9 [resp. 0.1]. Cette ellipse est concentrique à la précédente et son grand axe et son petit axe sont donnés par les formules:

$$\text{grand axe} = 2,145 \sqrt{A} \quad (10.140)$$

$$\text{petit axe} = 2,145 \sqrt{B} \quad (10.141)$$

iii) C.E.P. (figure 10-15) (*)

(*) De l'anglais «Circle of Equal Probability», ou du français «Cercle d'Égale Probabilité».

C'est le rayon du cercle contenant 50% de la probabilité. Ce paramètre souvent utilisé ne caractérise pas complètement la matrice de covariance $A(t)$ contrairement aux ellipses à 50 et 90%.

On peut calculer le C.E.P. par la formule approchée suivante:

$$C.E.P. = \begin{cases} 0,676\sqrt{A} + 0,84\frac{B}{\sqrt{A}} & \text{si } \sqrt{B} < 0,348\sqrt{A} \\ 0,568\sqrt{A} + 0,609\sqrt{B} & \text{si } \sqrt{B} > 0,348\sqrt{A}. \end{cases} \quad (10.142)$$

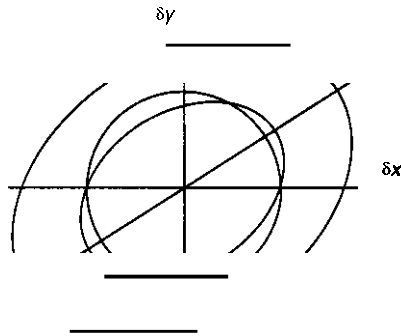


Figure 10-15. Ellipses à 50 et à 93% et Cercle d'Égale Probabilité.

10.12 Équations des covariances d'erreur et simulation numérique

10.12.1 EFFET D'UN BIAIS D'ACCÉLÉROMÈTRE ALÉATOIRE

On va d'abord illustrer les considérations relatives à l'analyse statistique des erreurs sur un cas simple. On a vu au chapitre 2 et au paragraphe 10.4 que l'erreur de position δx due à un biais d'accéléromètre b est donnée comme solution de

$$\delta \ddot{x} + \omega_s^2 \delta x = b. \quad (10.143)$$

Si l'on considère ce biais b comme constant au cours du temps, l'erreur de position correspondante est

$$\delta x(t) = \frac{b}{\omega_s^2} (1 - \cos \omega_s t). \quad (10.144)$$

Par contre si le biais b est une fonction aléatoire stationnaire de covariance

$$\rho_b(\tau) = E\{b(t+\tau)b(t)\} = \sigma_b^2 e^{-|\tau|/T} \quad (10.145)$$

ou de façon équivalente si b est généré par le modèle markovien

$$\dot{b} = -\frac{1}{T}b + v \quad (10.146)$$

$$E\{VV'\} = \frac{2\sigma_b^2}{T}\delta \quad (10.147)$$

$$E\{b^2(t_0)\} = \sigma_b^2, \quad (10.148)$$

le résultat est tout différent.

En effet, si l'on définit le vecteur d'état

$$x = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta \dot{x} \\ b \end{bmatrix}, \quad (10.149)$$

celui-ci obéit au modèle

$$\dot{x} = Fx + V \quad (10.150)$$

avec

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_s^2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \quad (10.151)$$

$$E\{VV'\} = Q\delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_b^2}{T} \end{bmatrix} \delta \quad (10.152)$$

et

$$E\{x(t_0)x'(t_0)\} = \Sigma_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_b^2 \end{bmatrix}. \quad (10.153)$$

Ayant ainsi mis le problème sous la forme d'une équation différentielle excitée par un bruit blanc, on peut calculer la covariance $\Sigma(t)$ de $x(t)$ par intégration

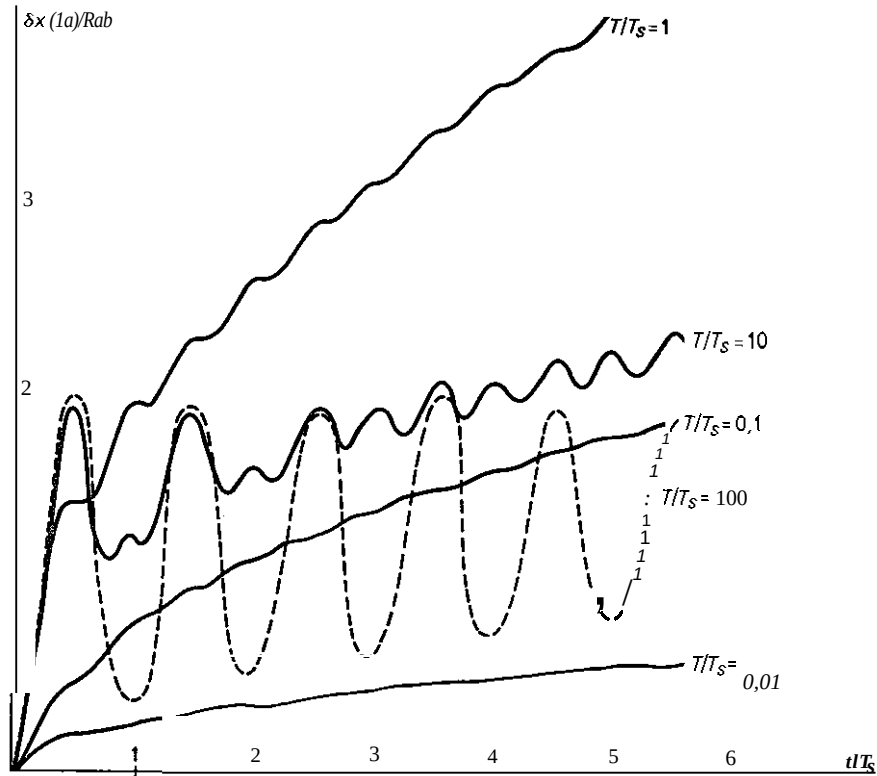


Figure 10-16. Erreur de position (1σ) due à un biais aléatoire d'accéléromètre.

de l'équation (voir paragraphe 4.4,2)

$$\begin{cases} \dot{\Sigma} = F\Sigma + \Sigma F' + Q \\ \Sigma(t_0) = \Sigma_0 \end{cases} \quad (10.154)$$

$$\Sigma(t_0) = \Sigma_0 \quad (10.155)$$

On a reporté sur la figure 10-16 les courbes donnant l'écart-type de l'erreur de position ($\sqrt{\Sigma_1}(t)$) pour diverses valeurs du temps de corrélation T du biais b . On peut remarquer que la formule (10.144) correspond au temps de corrélation $T = \infty$.

On peut tirer les conclusions suivantes de ces courbes:

- pour $T/T_s > 100$ le comportement est très voisin du cas $T = \infty$ pour lequel la courbe est en $(1 - \cos \omega_s t)$;
- pour $T/T_s < 0,01$ il y a un filtrage important du biais par le système;
- pour $T/T_s \approx 1$, il y a un effet de résonance tel que les erreurs dues au biais b sont bien plus importantes que celles qu'on déduirait de l'analyse déterministe fondée sur la formule (10.144).

10.12.2 ÉQUATION DES COVARIANCES D'ERREUR

On peut utiliser la même approche pour analyser le cas général. Les équations d'erreur (10.20) à (10.22) et (10.31) à (10.36) se mettent sous la forme

$$\dot{x}_d = F_d x_d + u \quad (10.156)$$

où le vecteur d'état x_d des erreurs dynamiques est défini par

$$X = [\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \delta x \ \delta y \ \delta z \ \delta \dot{x} \ \delta \dot{y} \ \delta \dot{z}]' \quad (10.157)$$

et où le vecteur u correspond aux erreurs instrumentales excitant les équations d'erreurs;

$$u_t = \varepsilon_1 + K_{g1} \omega_1 - \alpha_1 \omega_2 - \alpha_2 \omega_3 + B_{t1} f_1 + B_{e1} f_2 \quad (10.158)$$

$$u_z = \varepsilon_2 - \alpha_4 \omega_1 + K_{g2} \omega_2 - \alpha_3 \omega_3 - B_{e2} f_1 + B_{tz} f_z \quad (10.159)$$

$$u_3 = \varepsilon_3 - \alpha_5 \omega_1 - \alpha_6 \omega_2 + K_{g3} \omega_3 + B_{e3} f_2 + B_{t3} f_3 \quad (10.160)$$

$$u_4 = u_5 = u_6 = 0 \quad (10.161)$$

$$u_7 = b_1 + K_{a1} f_1 \quad (10.162)$$

$$u_8 = b_2 + \theta_1 f_1 + K_{a2} f_2 \quad (10.163)$$

$$u_9 = b_3 + 82f_1 + 8,7f_2 + K'3f_3 \quad (10.164)$$

La matrice F_d peut elle aussi être écrite aisément à partir des équations d'erreurs.

Dans le cadre d'une analyse statistique des erreurs, chaque erreur instrumentale est représentée par un modèle markovien du type (10.130) à (10.132). On appellera ξ le processus markovien global permettant de représenter l'ensemble des erreurs instrumentales et par conséquent le vecteur u :

$$J \dot{\xi} = A \xi + v \quad (10.165)$$

$$E\{vv'\} = Q \delta \quad (10.166)$$

$$1_u = C \xi \quad (10.167)$$

Il s'ensuit que si l'on pose

$$x = \begin{bmatrix} x_d \\ \xi \end{bmatrix} \quad (10.168)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_d & C \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad (10.169)$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \quad (10.170)$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Q} \end{bmatrix}, \quad (10.171)$$

on obtient un modèle markovien global de la forme

$$\dot{x} = Fx + V \quad (10.172)$$

$$E\{VV'\} = \mathcal{Q}\delta. \quad (10.173)$$

Il suffit alors d'intégrer l'équation donnant la covariance $\Sigma(t)$ de $x(t)$

$$\dot{\Sigma} = F\Sigma + \Sigma F' + \mathcal{Q} \quad (10.174)$$

à partir de la condition initiale

$$\Sigma(t_0) = \Sigma_0 \quad (10.175)$$

qui traduit l'alignement initial effectué sur le système. On obtient ainsi les **paramètres statistiques (variances et covariances) traduisant les performances du système considéré.**

Cette analyse est infiniment plus satisfaisante que l'analyse déterministe exposée au paragraphe 12.10. En effet intégrer les équations d'erreurs avec **des erreurs instrumentales constantes peut conduire à des conclusions trop optimistes ou trop pessimistes** suivant que les valeurs numériques choisies conduisent à des effets qui s'annulent ou se cumulent. Il conviendrait, dans le cadre de l'analyse déterministe, pour se garantir de tels excès d'intégrer de nombreuses fois avec des valeurs numériques changées de signe les équations d'erreurs. L'analyse statistique ici présentée conduit par contre directement à des valeurs statistiques qui sont des écarts-types ou des covariances beaucoup plus significatifs des performances du système considéré. La contre-partie de cet avantage réside en un volume de calcul beaucoup plus important pour intégrer les équations des covariances.

10.12.3 INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Etant donné le volume de calculs représentés par l'équation des covariances d'erreur (10.174), il est hors de question de l'intégrer par d'autres moyens que **numériques. On se reportera à l'annexe 6 pour la description de méthodes numériques d'intégration.**

Ci-après on présente sur les figures 10-17 à 10-20 les courbes donnant le C.E.P., les valeurs à 1σ (*) des erreurs de vitesse δv_1 et δv_2 et de l'erreur de cap $\delta \varphi_3$. On a supposé que

$$\delta z = \delta \dot{z} = 0 \quad (10.176)$$

(*) C'est-à-dire l'écart-type.

et les seules erreurs instrumentales retenues sont les dérives des gyroscopes ε_1 , ε_2 et ε_3 et leurs facteurs d'échelle K_{g1} , K_{g2} et K_{g3} , ainsi représentées;

$$\dot{\varepsilon}_i = v_i \quad (10.177)$$

$$E\{v_i v_i'\} = q_i \delta \quad (10.178)$$

$$E\{\varepsilon_{i0}^2\} = \sigma_{i0}^2 \quad (10.179)$$

$$\begin{cases} \dot{K}_{gi} = 0 \end{cases} \quad (10.180)$$

$$\begin{cases} E\{K_{gi0}^2\} = \sigma_{i0}'^2. \end{cases} \quad (10.181)$$

L'alignement initial est de plus supposé réalisé par un gyto-compas classique.

Les valeurs numériques retenues correspondent au tableau 10-4.

On peut remarquer que les courbes présentées ont des allures semblables aux courbes obtenues par intégration des équations d'erreur (figures 10-12 et 10-13). **Cependant leur interprétation est toute différente: ici on obtient des valeurs statistiques (écart-type, C.E.P.) au lieu des résultats d'une simulation directe.**

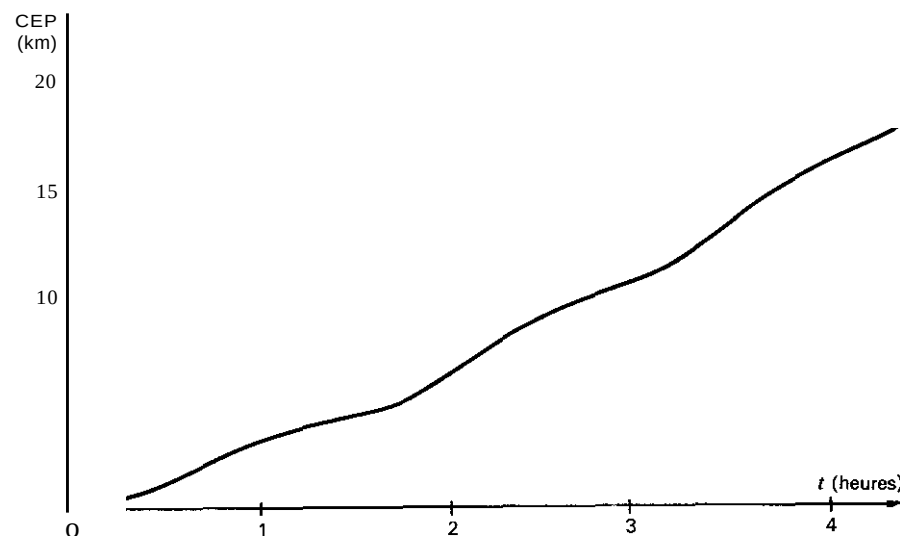


Figure 10-17. C.E.P.

TABLEAU 10-4

Valeurs numériques pour les figures 10-17 à 10-20

Dérive des gyros de jour à jour: $\dot{\gamma}_{ia} = \begin{cases} 0,02^\circ/\text{h} & \text{pour } i = 1,2 \\ 0,05^\circ/\text{h} & \text{pour } i = 3 \end{cases}$

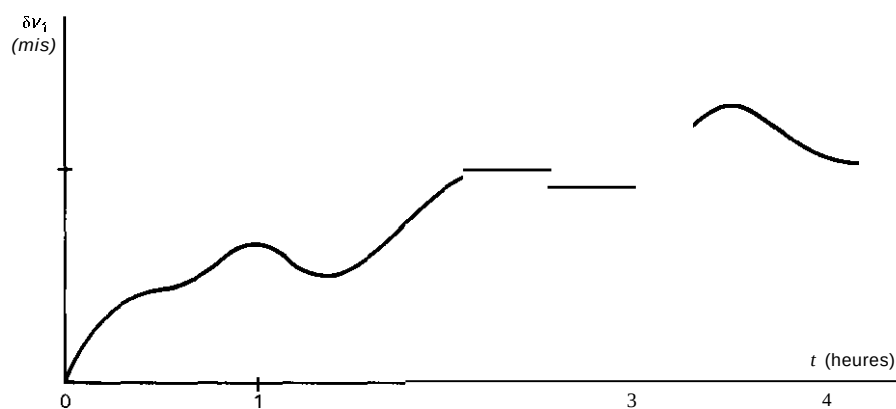
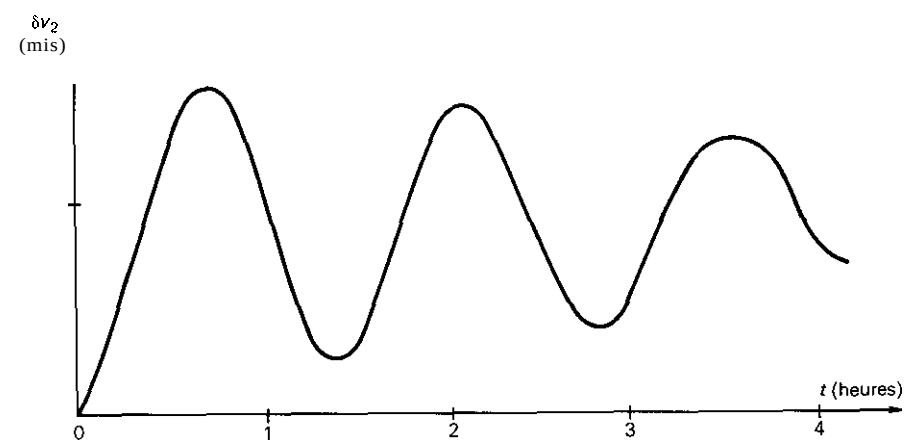
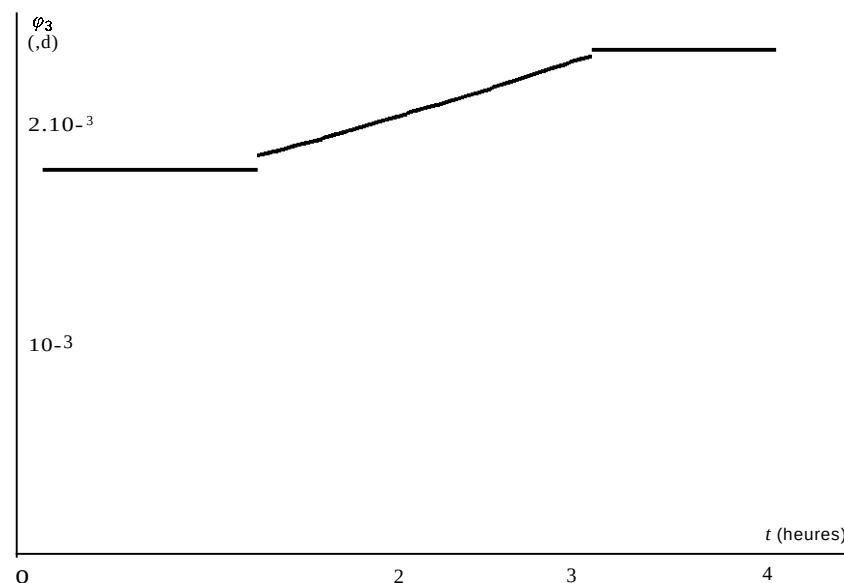
Dérive aléatoire: $\begin{cases} (0,007S''/\text{h})'/3\text{h} & \text{pour } i = 1,2 \\ q_i = \{(0,01\sigma/\text{h})2/2\text{h}\} & \text{pour } i = 3 \end{cases}$

Facteurs d'échelle: $\sigma'_{i0} = 2 \cdot 10^{-3}$

Alignement initial: $E\{\delta x_0^2\} = E\{\delta y_0^2\} = (250 \text{ m})^2$

$$E\{\beta_1^2\} = E\{\beta_2^2\} = (10'')^2$$

$$E\{\beta_3^2\} = (30'')^2$$

Figure 10-18. Erreur de vitesse Nord $\delta v_1(1\sigma)$.Figure 10-19. Erreur de vitesse Ouest $\delta v_2(1\sigma)$.Figure 10-20. Erreur de cap $\varphi_3(1\sigma)$.

CHAPITRE II

ALIGNEMENT INITIAL D'UN SYSTÈME À INERTIE APPROCHE CLASSIQUE ET APPROCHE OPTIMALE

P. FAURRE

11.1 Principes généraux d'alignement

11.1.1 Ou a vu au chapitre 12 l'importance de l'alignement initial d'un système de navigation par inertie. En effet toute erreur d'alignement se propage (en s'amplifiant plus ou moins) comme erreurs de position, de vitesse et d'attitude au cours de la navigation.

L'alignement initial consiste à effectuer les opérations suivantes:

- introduire la position initiale,
- introduire la vitesse initiale par ses projections sur les axes calculateurs [c],
- aligner les trièdres plate-forme [p] et calculateur [c] en faisant subir une rotation convenable à l'un ou à l'autre (éventuellement aux deux à la fois).

11.1.2 Supposons pour fixer les idées que la position initiale soit connue parfaitement, que la vitesse initiale soit nulle (aux perturbations près des faibles mouvements linéaires du véhicule: vibration, rafale de vent, chargement de fret, etc.) et que l'alignement initial consiste à orienter le trièdre plate-forme suivant le trièdre géographique local [v] (cas d'une mécanisation asservie au Nord).

L'alignement peut alors être réalisé:

- soit en transférant à la plate-forme par recopie optique et mécanique une orientation matérialisée par des repères externes,
- soit en utilisant les instruments inertiels de la plate-forme et rien d'autre. C'est ce dernier cas qui est envisagé tout au long de ce chapitre. L'alignement est alors dit, autonome; la fonction rendant la plate-forme horizontale est qualifiée de *niveau* et celle qui rend l'orientation correcte par rapport au Nord est appelée *gyrocompas*.

11.1.3 On désigne par $\vec{\phi}$ la rotation faisant passer de [v] à [p]. Il est clair que l'alignement est réalisé lorsque $\vec{\phi}$ est nul (figure 11-1).

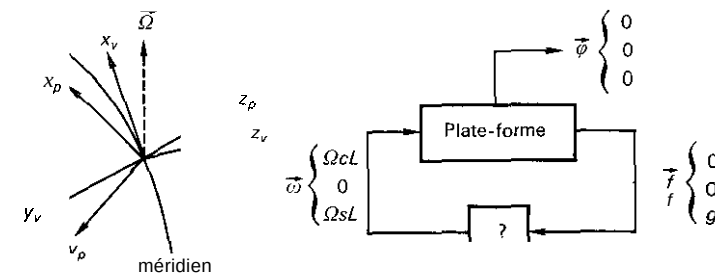


Figure 11-1. Alignement classique.

Si la plate-forme est parfaitement alignée ($\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$), les signaux accélérométriques sont

$$J_1 = 0 \quad (1U)$$

$$J_2 = 0 \quad (11.2)$$

$$I_3 = g \quad (11.3)$$

et les signaux de commande des gyros maintenant la plate-forme ainsi alignée sont

$$\omega_1 = Q \cos L \quad (11.4)$$

$$\omega_2 = 0 \quad (11.5)$$

$$\omega_3 = Q \sin L. \quad (11.6)$$

11.1.4 Le point de vue *classique* est alors le suivant. L'alignement autonome va consister à faire un bouclage des instruments (voir figure 11-1) tel que l'état caractérisé par (1U) à (11.6) soit le *seul état d'équilibre stable* du système ainsi réalisé. On demande en plus que cet état d'équilibre:

- soit atteint le plus rapidement possible,
- ne soit pas affecté par les divers bruits perturbant le système.

Ces deux spécifications apparaîtront comme contradictoires et nécessiteront de faire un compromis rapidité-précision.

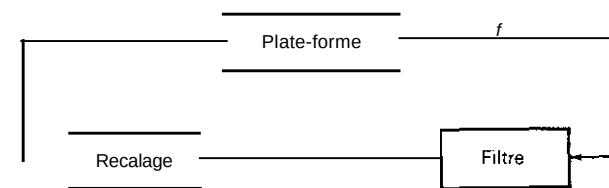


Figure 11-2. Alignement optimal.

11.1.5 D'un autre côté, le point de vue *optimal* consiste à utiliser des **modèles statistiques des divers facteurs aléatoires**. La réalisation de l'alignement optimal suit alors le schéma de la figure II-2.

Les observations j sont filtrées de façon à donner la meilleure estimée possible $\hat{\phi}$ de $\tilde{\phi}$ (précision optimale) : la plate-forme est alors recalée en lui faisant effectuer la rotation $-\hat{\phi}$.

Ce type d'alignement est dit optimal car il entraîne à chaque instant la **meilleure précision possible pour la durée écoulée**.

POINT DE VUE CLASSIQUE

11.2 Précision maximale d'un alignement autonome et calibration initiale

11.2.1 PRÉCISION MAXIMALE DE L'ALIGNEMENT

On reprend les notations du paragraphe 10.2.2. Si l'alignement autonome est réalisé parfaitement (ce qui suppose en particulier l'absence de perturbations extérieures et de bruits internes), la position d'équilibre est définie par :

$$b_1 + \vec{A}_1 \vec{k} g = 0 \quad (11.7)$$

$$b_2 + \vec{A}_2 \vec{k} g = 0 \quad (11.8)$$

$$\vec{\Omega} \vec{E}_2 = s'' \quad (11.9)$$

Et lorsque cet équilibre est atteint, les signaux de commande des gyros 1 et 3, Q_{e1} et Q_{e3} ont des valeurs telles que

$$\vec{\Omega} \vec{E}_1 = S_1 + (1 + K_{g1}) \Omega_{e1} \quad (11.10)$$

$$\vec{\Omega} \vec{E}_3 = s_3 + (1 + K_{g3}) Q_{e3} \quad (11.11)$$

On va calculer le décalage $\tilde{\phi}$ résultant entre $[u]$ et $[p]$. Soient $\vec{I}$, $\vec{J}$ et $\vec{K}$ les vecteurs unitaires portés par les axes $[p]$. Leurs composantes sur $[u]$ sont

$$1: \begin{cases} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{cases} : \begin{cases} 1 \\ \varphi_3 \\ -\varphi_2 \end{cases} \quad \vec{J} : \begin{cases} -\varphi_3 \\ 1 \\ \varphi_1 \end{cases} \quad \vec{K} : \begin{cases} \varphi_2 \\ -\varphi_1 \\ 1 \end{cases} \quad (11.12)$$

Les équations (11.7) à (11.9) s'écrivent alors

$$b_1 - \varphi_2 g = 0 \quad (11.13)$$

$$b_2 + \varphi_1 g = 0 \quad (11.14)$$

$$Q \cos L (-\varphi_3) + \Omega \sin L (\alpha + \varphi_1) = S_z, \quad (11.15)$$

d'où

$$\varphi_1 = -b_1/g \quad (11.16)$$

$$\varphi_2 = b_2/g \quad (11.17)$$

$$\varphi_3 = \alpha_4 - \frac{S_z}{Q \cos L} + \operatorname{tg} L (\alpha + \varphi_1). \quad (11.18)$$

11.2.2 EXEMPLE

Supposons $|b_1| = |b_2| = 10^{-4} g$,

$$|S_z| = |S_1| = |s_1| = 0,01^\circ/h \approx 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ rd/s},$$

$$\alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

Avec $Q = 0,73 \cdot 10^{-4} \text{ rd/s}$ et $L = 45^\circ$, on a

$$Q_1 = Q_2 \approx 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ rd/s}.$$

Alors

$$|\varphi_1| = |\varphi_2| = 10^{-4} \text{ rd} = 20'',$$

$$|\varphi_3| = 10^{-4} \text{ rd} = 3,5'.$$

11.2.3 CALIBRATION INITIALE

D'un autre côté les signaux de précession Δe_1 et Q_{e3} vérifient

$$Q \cos L + Q \sin L (-\varphi_2 + \alpha_2) = \varepsilon_1 + (1 + K_{g1}) \Omega_{e1} \quad (11.19)$$

$$Q \cos L (P_2 + \dots) + Q \sin L = \varepsilon_2 + (1 + K_{g2}) Q'' \quad (11.20)$$

Par comparaison des signaux Ω_{e1} et Ω_{e3} aux valeurs attendues Ω_{c1} et Ω_{c3} où L_e désigne la latitude initiale introduite, on peut former l'estimation des dérivées

$$\hat{\varepsilon}_1 = Q \cos L_e - Q_{e1} \quad (11.21)$$

$$\hat{\varepsilon}_3 = Q \sin L_e - Q_{e3} \quad (11.22)$$

On voit facilement que si l'on calibre de cette façon les gyros, les dérivées résiduelles seront (en négligeant les divers bruits)

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 - \hat{\varepsilon}_1 = -K_{g1} \Omega \cos L + \Omega \sin L (-\varphi_2 + \alpha_2) + \Omega \sin L \frac{\Delta x_0}{R} \quad (11.23)$$

$$\tilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 \quad (11.24)$$

$$\tilde{\varepsilon}_3 = \varepsilon_3 - \hat{\varepsilon}_3 = -K_{g3} \Omega \sin L + \Omega \cos L (\varphi_2 + \alpha_2) - \Omega \cos L \frac{\Delta x_0}{R} \quad (11.25)$$

11.3 Équation fondamentale de l'alignement

11.3.1 On va établir l'équation dynamique vérifiée par $\vec{\phi}$ lorsque l'on applique à la plate-forme les taux de rotation $Q \cos L$, 0 et $Q \sin L$ (correspondant à l'équilibre recherché) augmentés des taux de commande T'' , T' , et T , (permettant d'atteindre l'équilibre).

On fait l'hypothèse que $\vec{\phi}$ correspond à une rotation de faible amplitude (quelques degrés au plus), un alignement grossier ayant déjà été réalisé.

Il est clair que

$$\vec{\omega}_{v/i} = \vec{\Omega} \quad (11.26)$$

$$\vec{\omega}_{p/i} = \vec{\Omega} + \vec{\phi} \times \vec{\Omega} + \vec{E} + \vec{T}. \quad (11.27)$$

Donc

$$\vec{\phi}^p = \vec{\phi}^v = \vec{\omega}_{p/v} = \vec{\omega}_{p/i} - \vec{\omega}_{v/i} = \vec{\phi} \times \vec{\Omega} + \vec{E} + \vec{T} \quad (11.28)$$

soit

$$\vec{\phi}^i = \vec{\phi}^v + \vec{\Omega} \times \vec{\phi} = \vec{E} + \vec{T}. \quad (11.29)$$

C'est l'équation fondamentale de l'alignement initial, encore appelée *équation en ϕ* . Projetée sur les axes $[v]$ ou $[p]$, elle s'écrit

$$\dot{\phi}_1 - \Omega_3 \phi_2 = E_1 + T_1, \quad (11.30)$$

$$\dot{\phi}_2 + \Omega_3 \phi_1 - \Omega_1 \phi_3 = E_2 + T_2, \quad (11.31)$$

$$\dot{\phi}_3 + \Omega_1 \phi_2 = E_3 + T_3. \quad (11.32)$$

Les signaux de sortie des accéléromètres sont alors

$$J_1 = -(P_1 g + V_1), \quad (11.33)$$

$$J_2 = \phi_1 g + V_2, \quad (11.34)$$

11.3.2 On remarque que le système linéaire (11.30) à (11.34) avec l'état (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) , les commandes (T''', T'', T') et les observations (J_1, J_2) est complètement commandable et complètement observable. On peut donc conclure dès lors que l'alignement autonome est possible (voir paragraphe (3.5.3)).

11.4 Alignement du premier ordre

11.4.1 On considère la loi de commande simple:

$$T_1 = -k J_1 / g \quad (11.35)$$

$$T_2 = k_2 f_1 / g \quad (11.36)$$

$$T_3 = k_3 f_1 / g. \quad (11.37)$$

Ce bouclage est représenté sur la figure 11-3.

On peut de cette façon réaliser l'alignement initial avec une dynamique arbitraire en choisissant par exemple comme polynôme caractéristique du système

$$A(s) = \left(s + \frac{1}{T}\right)^3 \quad (11.38)$$

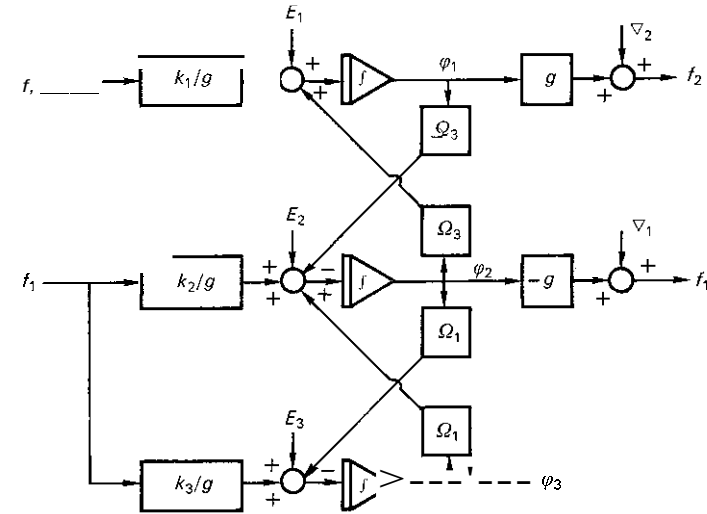


Figure 11-3. Alignement du premier ordre.

En effet l'équation dynamique de la plate-forme ainsi bouclée est

$$\dot{\phi}_1 + k_1 \phi_1 - \Omega_3 \phi_2 = E_1 - k_1 \frac{V_1}{g}, \quad (11.39)$$

$$\dot{\phi}_2 + \Omega_3 \phi_1 + k_2 \phi_2 - \Omega_1 \phi_3 = E_2 + k_2 \frac{V_1}{g}, \quad (11.40)$$

$$\dot{\phi}_3 + (\Omega_1 + k_3) \phi_2 = E_3 + k_3 \frac{V_1}{g}, \quad (11.41)$$

Le polynôme caractéristique est donc

$$A(s) = \det \begin{bmatrix} s + k_1 & -\Omega_3 & 0 \\ \Omega_3 & s + k_2 & -\Omega_1 \\ 0 & \Omega_1 + k_3 & s \end{bmatrix} \quad (11.42)$$

soit

$$\Delta(s) = (s+k_1) [s(s+k_2) + QI(k_3+QI)] + QIs. \quad (11.43)$$

Identifiant les expressions (11.43) et (11.38), on obtient les trois équations en k_1 , k_2 et k_3 :

$$k_1 + k_2 = \frac{3}{T} \quad (11.44)$$

$$k_1 k_2 + k_3 \Omega_1 = \frac{3}{T^2} - \Omega^2 \quad (11.45)$$

$$k_1 QI(k_3 + QI) = \frac{1}{T^3}. \quad (11.46)$$

Tenant compte du fait que

$$T \ll I/Q \quad (11.47)$$

car l'on cherche à réaliser l'alignement initial en une durée bien inférieure à vingt-quatre heures, on peut résoudre le système (11.44) à (11.46) en :

$$k_1 = 1fT \quad (11.48)$$

$$k_2 = 2/T \quad (11.49)$$

$$k_3 = 1/(T^2 QI) \quad (11.50)$$

Avec l'hypothèse d'erreurs instrumentales constantes et d'absence de perturbation, la position d'équilibre - que l'on peut considérer comme atteinte au bout de $10T$ par exemple - est donnée par les formules suivantes simplifiées en utilisant la condition (11.47) :

$$\varphi_1 = -\frac{\nabla_2}{9} + \frac{TE}{1+Q_3E_3} \frac{T^2QI}{1+T^2\Omega_1^2} + Q_3 \frac{1}{1+T^2\Omega_1^2} \frac{\nabla_1}{9} \approx \frac{\nabla_2}{9} \quad (11.51)$$

$$\varphi_2 = E_3 \frac{T^2\Omega_1}{1+T^2\Omega_1^2} + \frac{1}{1+T^2\Omega_1^2} \frac{\nabla_1}{9} \approx \frac{\nabla_1}{9} \quad (11.52)$$

$$\varphi_3 = -\frac{E_2}{\Omega_1} - \frac{2}{\Omega_1 T} \frac{\nabla_2}{9} + \frac{2}{\Omega_1 T} \varphi_2 + \frac{\Omega_3}{\Omega_1} \varphi \approx \quad (11.53)$$

11.4.2 SENSIBILITÉ AUX PERTURBATIONS

Les mouvements parasites du véhicule viennent dégrader l'alignement initial par l'intermédiaire d'accélération perturbatrices au niveau de ∇_1 et de ∇_2 .

Les fonctions de transfert entre ∇_1 et ∇_2 d'une part et φ_1 , φ_2 et φ_3 d'autre part sont donc caractéristiques de la qualité d'une méthode d'alignement initial. D'autre part l'obtention de la verticale étant rarement un problème, **on gardera comme caractéristique fondamentale la seule fonction de transfert $\varphi_3(s)/\nabla_1(s)$.**

Dans le cas de l'alignement considéré ci-dessus on calcule aisément (en faisant une approximation)

$$\frac{\varphi_3(s)}{\nabla_1(s)} = \frac{(s+I/T)(s+2/T)}{gT^2QI(s+I/T)^3} \frac{s+2/T}{gT^2\Omega_1(s+1/T)^2} \quad (11.54)$$

On voit qu'à haute fréquence

$$\frac{\varphi_3(s)}{\nabla_1(s)} \approx \frac{1}{gT^2\Omega_1 s}, \quad (11.55)$$

ce qui justifie la dénomination *alignement du premier ordre*, le comportement à hautes fréquences étant identique à celui d'un système du premier ordre.

11.5 Alignement usuel du second ordre

11.5.1 On réalise le niveau dans ce cas par la méthode exposée au paragraphe 2.4, c'est-à-dire en appliquant les commandes:

$$T_1 = -\frac{1+K_2^*}{R} w_2 \quad (11.56)$$

$$\frac{I+K_2}{R} w_1 \quad (11.57)$$

avec

$$w_1 = \int (f_1 - K_1 w_1) dt \quad (11.58)$$

$$w_2 = \int (f_2 - K_1^* w_2) dt. \quad (11.59)$$

Afin de réaliser le gyrocompas, on applique la commande

$$T_3 = \frac{K_3}{R} w_1. \quad (11.60)$$

L'avantage d'une telle méthode d'alignement sur la précédente est qu'en faisant $K_1 = K_2 = K_3 = 0$, on obtient la mécanisation de navigation (voir figure

11-4). D'autre part la fonction de transfert entre les accélérations perturbatrices ∇_1 et l'erreur d'azimut φ_3 est en $1/s^2$ à hautes fréquences; ceci présente l'avantage de mieux filtrer les bruits que dans le cas précédent et justifie la dénomination **alignement du second ordre**.

, Le système d'équations différentielles représentant cet alignement initial est alors (on a groupé les variables fortement couplées) :

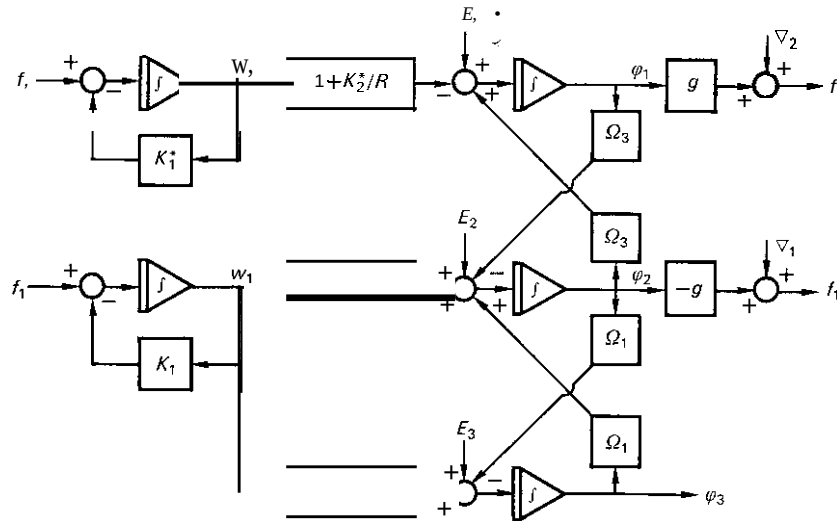


Figure 11-4. Alignement du second ordre.

$$\int \dot{\varphi}_1 - \Omega_3 \varphi_2 = E \left(1 + \frac{K_2^*}{R} \right) w_2, \quad (11.61)$$

$$\dot{w}_2 = \varphi_1 g + \nabla_2 - K_1^* w_2 \quad (11.62)$$

$$\dot{\varphi}_2 + \Omega_3 \varphi_1 - \Omega_1 \varphi_3 = E + \frac{I + K_2}{R} w_1 \quad (11.63)$$

$$\dot{\varphi}_3 + \Omega_1 \varphi_2 = E_3 + \frac{K_3}{R} w_1 \quad (11.64)$$

$$\dot{w}_1 = -\varphi_2 g + \nabla_1 - K_1 w_1. \quad (11.65)$$

Le polynôme caractéristique s'écrit

$$\Delta(s) = \det \begin{vmatrix} s & 1 + \frac{K_2^*}{R} & -\Omega_3 & 0 & 0 \\ -g & s + K_1^* & 0 & 0 & 0 \\ Q_3 & 0 & s & -\Omega_1 & -\frac{I + K_2}{R} \\ 0 & 0 & Q_1 & s & -\frac{K_3}{R} \\ 0 & 0 & g & 0 & s + K_1 \end{vmatrix} \quad (11.66)$$

soit

$$\Delta(s) = \Delta_2(s) \Delta_3(s) + \Omega_3^2 (s + K_1) (s + K_1^*) \quad (11.67)$$

avec

$$\Delta_2(s) = s(s + K_1^*) + \frac{g}{R} (1 + K_2^*) \quad (11.68)$$

$$\Delta_3(s) = s^2(s + K_1) + \Omega_1 \left[\Omega_1(s + K_1) + K_3 \frac{g}{R} \right] + \frac{g}{R} (1 + K_2) s. \quad (11.69)$$

Il est possible de choisir arbitrairement la dynamique de l'alignement. Par exemple pour avoir

$$\Delta(s) = \left(s + \frac{1}{T} \right)^5 \quad (11.70)$$

avec

$$T \ll \Omega^{-1}, \quad (11.71)$$

il convient d'identifier

$$\Delta_2(s) = \left(s + \frac{1}{T} \right)^2 \quad \text{et} \quad \Delta_3(s) = \left(s + \frac{1}{T} \right)^3,$$

ce qui conduit à prendre

$$K_1^* = \frac{2}{T} \quad (11.72)$$

$$I + K_2^* = \frac{R}{g} \frac{1}{T^2} \quad (11.73)$$

$$K_1 = \frac{3}{T} \quad (11.74)$$

$$I + K_2 = \frac{R}{9} \frac{3}{T^2} \quad (11.75)$$

$$K_3 = \frac{R}{9} \frac{1}{T^3} \quad (11.76)$$

Par exemple pour une latitude $L = 45^\circ$ (ce qui entraîne $\Omega_i \approx 0,5 \times 10^{-4}$ rd/s) les valeurs des gains pour différentes valeurs de la période caractéristique T sont données dans le tableau 11-1.

TABLEAU 11-1
Gains pour un alignement du second ordre

$T(s)$	K_1^*	$1 + K_2^*$	K_1	$I + K_2$	K_3
12	0,167	4500	0,25	13 500	7500000
60	0,033	180	0,05	540	60400

En pratique on ne commence un gyrocompas du second ordre que lorsque la plate-forme a une erreur de verticale faible (quelques minutes). Un schéma d'alignement réaliste consisterait à réaliser un bouclage correspondant à $T = 12$ s avec $K_3 = 0$ pendant 2 minutes, puis à passer sur un bouclage complet de période caractéristique $T = 60$ s pour affiner l'alignement.

On peut calculer aisément la position d'équilibre à partir des équations (1 1.61) à (1 1.65)

$$w'' \approx w_2 \approx 0 \quad (*) \quad (11.77)$$

$$\varphi_1 \approx -\frac{V_2}{9} \quad (11.78)$$

$$\varphi_2 \approx \frac{V_1}{9} \quad (11.79)$$

$$\frac{E_2}{\Omega_1} \quad (11.80)$$

(*) La notation $\approx$ signifie: « tend approximativement vers ».

11.5.2 SENSIBILITÉ AUX PERTURBATIONS

Comme dans le cas d'un alignement du premier ordre, on caractérise cette sensibilité par la fonction de transfert $\varphi_3(s)/V_1(s)$, qu'on peut évaluer (avec quelques approximations) ainsi:

$$\frac{\varphi_3(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{gT^3\Omega_i} \frac{s - 3T\Omega_i^2 + 2T\Omega_i^2}{(s + 1/T)^3} \quad (11.81)$$

11.6 Comparaison des alignements du premier et du second ordre et alignements plus complexes

11.6.1 TEMPS DE RÉPONSE

Le but de l'alignement étant essentiellement de réduire à zéro l'erreur d'azimut φ_{30} , il convient de regarder l'évolution de $\varphi_3(t)$ en fonction du temps:

- pour un alignement du premier ordre

$$\varphi_3(s) = \frac{s + 2/T}{(s + 1/T)^2} \varphi_{30} \quad (11.82)$$

d'où

$$\varphi_3(t) = \left(1 + \frac{t}{T}\right) e^{-t/T} \varphi_{30}, \quad (11.83)$$

— pour un alignement du second ordre

$$\varphi_3(s) = \frac{8^2 + \frac{3}{T}8 + \frac{3}{T^2}}{(s + 1/T)^3} \varphi_{30} \quad (11.84)$$

d'où

$$\varphi_3(t) = \left(1 + \frac{t}{T} + \frac{1}{2} \frac{t^2}{T^2}\right) e^{-t/T} \varphi_{30}. \quad (11.85)$$

On a tracé sur la figure 11-5 les courbes correspondantes. On voit clairement que la considération du temps de réponse conduit à choisir T petit.

Le tableau 11-2 donne les divers temps de réponse pour les alignements du premier et du second ordre.

11.6.2 SENSIBILITÉ AUX BRUITS

On a déjà calculé les deux fonctions de transfert (11.54) et (11.81) caractéristiques de cette sensibilité:

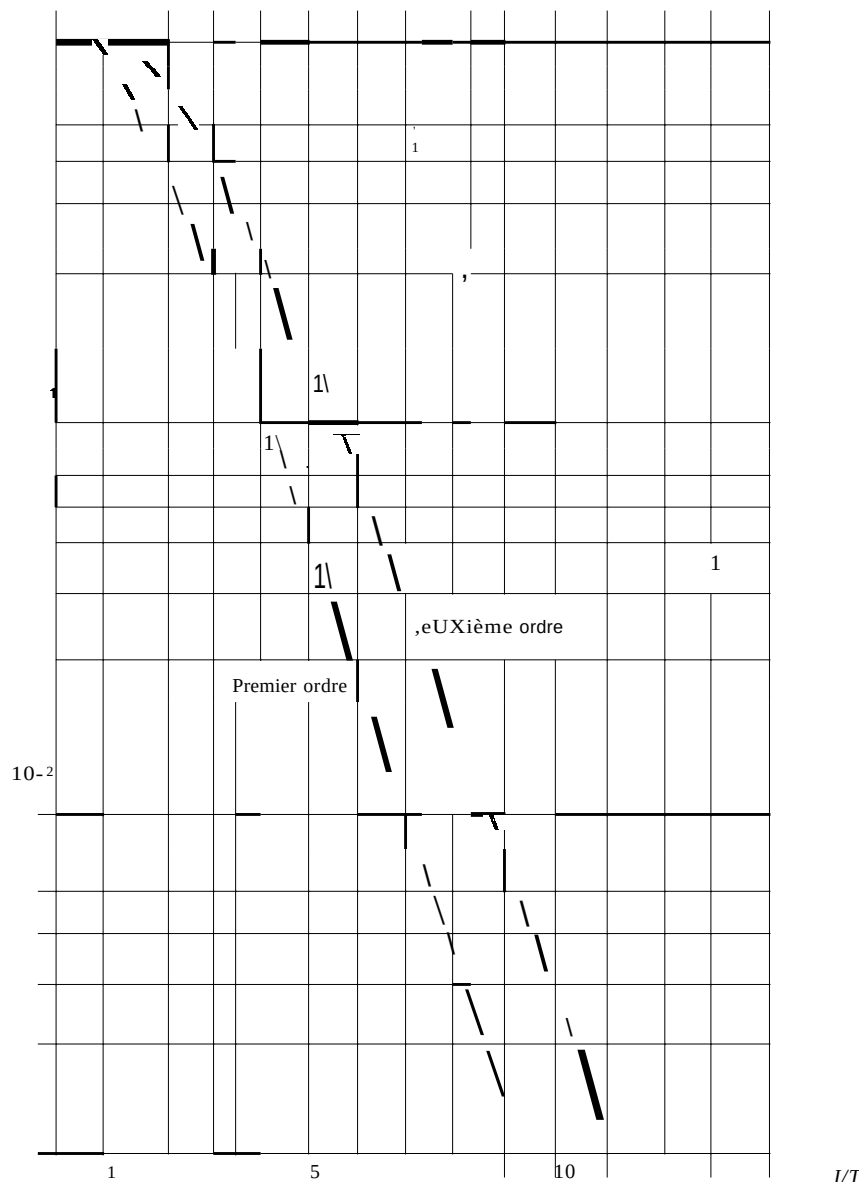


Figure 11-5. Gyrocompas du premier et du deuxième ordre.

TABLEAU 11-2

Temps de réponse des alignements du premier et du deuxième ordre

Temps de réponse à	Alignement	
	du premier ordre \	du deuxième ordre
10^{-1}	3,9 T	5,2 T
10^{-2}	6,6 T	8,4 T
10^{-3}	9,2 T	11,2 T

— pour un alignement du premier ordre

$$\frac{\varphi_3(s)}{V_j(s)} = \frac{s+2/T}{gT^2 Qj(s+1/T)^2} \quad (11.86)$$

--- pour un alignement du deuxième ordre

$$\frac{\varphi_3(s)}{V_j(s)} = \frac{1}{gT^3 Qj} \frac{5-3T\Omega_2^2+2T\Omega_3^2}{(s+1/T)^3} \quad (11.87)$$

Les diagrammes logarithmiques d'atténuation correspondants sont représentés sur la figure 11-6. Le système du deuxième ordre apparaît comme meilleur aussi bien à basse qu'à haute fréquence, fournissant dans le dernier cas une atténuation de 12 dB/octave (à comparer à 6 dB/octave pour le système du premier ordre).

D'autre part, dans les deux cas, le facteur d'exposant négatif en T apparaissant en (11.86) et (11.87) conduit à choisir T grand pour mieux filtrer les bruits.

11.6.3 CHOIX D'UN ALIGNEMENT OPTIMAL

On vient de voir les exigences contradictoires de choisir T à la fois petit (temps de réponse faible) et grand (bon filtrage des bruits). Un choix raisonnable doit donc se fonder sur une *connaissance statistique des bruits* $V_1(t)$ et $V_2(t)$. Cette connaissance permettrait de calculer la covariance de $\varphi_3(t)$ due aux bruits (voir paragraphe 4.2.1) et ainsi de faire un compromis raisonnable. Ce genre de considérations et de méthodes de calcul conduit en général à des schémas d'alignement d'ordre plus élevé: ainsi le gain K_3 du gyrocompas du deuxième ordre peut se trouver remplacé par une fonction de transfert $K_3/(s+OJ_0)$ ou même une fonction de transfert plus complexe.

Par la suite, on supposera donné un modèle statistique des bruits et des erreurs instrumentales, et l'on utilisera les méthodes par vecteur d'état (voir paragraphes 4.5 à 4.7) pour obtenir l'alignement optimal.

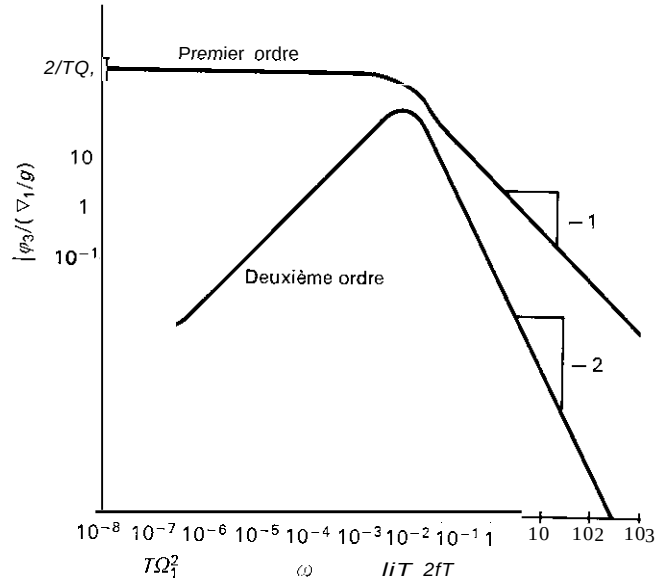


Figure 11-6. Diagramme logarithmique asymptotique de $|\varphi_3|/(\nabla_1/g)$ (Latitude $L = 45^\circ$, d'où $\Omega_1 = \Omega_3 = \Omega = 5.10^{-5}$ rdls $T = 60$ s.

POINT DE VUE OPTIMAL

11.7 Mise sous forme de vecteur d'état du problème d'alignement initial

11.7.1 Afin d'alléger ce qui suit, on fait l'hypothèse de modèles statistiques très simples pour les dérives des gyros E_1' , E_2' et E_3' et les perturbations extérieures V_1 et V_2' ceci sans limiter en aucune façon le caractère général des méthodes exposées qui s'appliquent tout aussi bien à des modèles plus complexes.

En ce qui concerne les dérives E_1' , E_2' et E_3' , on suppose qu'elles sont constantes pendant l'alignement, mais inconnues; elles obéissent donc au modèle

$$\dot{E}_1 = 0 \quad (11.88)$$

$$\dot{E}_2 = 0 \quad (11.89)$$

$$\dot{E}_3 = 0, \quad (11.90)$$

avec une moyenne nulle et pour écart-types

$$E\{E_i^2\} = \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11.91)$$

Cette hypothèse est réaliste si les gyros ont atteint leur régime d'équilibre thermique, car la durée d'alignement est faible. Par contre si l'on démarrerait l'alignement avant l'équilibre thermique, les dérives évolueraient rapidement avant de se stabiliser : il conviendrait dans un tel cas d'utiliser un modèle statistique plus complexe que celui donné par les relations (11.88) à (11.91).

En ce qui concerne les perturbations aléatoires V_1 et V_2' , on suppose qu'elles sont markoviennes et définies par un temps de corrélation $1/\beta$, et un écart-type σ_b . Le modèle correspondant est donc

$$-\beta V_1 + w_1 \quad (11.92)$$

$$-\beta V_2 + w_2 \quad (11.93)$$

avec

$$E\{V_{10}^2\} = E\{V_{20}^2\} = \sigma_b^2 Z \quad (11.94)$$

et

$$E\{w_1(t)w_1(\tau)\} = E\{w_2(t)w_2(\tau)\} = 2\beta\sigma_b^2\delta(t-\tau). \quad (11.95)$$

11.7.2 Prenant à présent comme vecteur d'état

$$x = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, E_1', E_2', E_3']', \quad (11.96)$$

comme vecteur commande

$$u = [T_1, T_2, T_3]', \quad (11.97)$$

comme vecteur observation

$$y = [[1' f_2']', \quad (11.98)$$

et comme vecteur bruit sur les observations

$$\xi = [V_1, V_2']' \quad (11.99)$$

et considérant les équations (11.30) à (11.34), (11.88) à (11.90), (11.92) et (11.93), nous obtenons un modèle de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx + \xi \\ \dot{\xi} = A\xi + v. \end{cases} \quad (11.100)$$

Cependant il est facile de voir que le couple (H, F) correspondant n'est pas complètement observable: il suffit pour s'en apercevoir de former la matrice d'observabilité $[H', F'H', F^2H', \dots]$ (voir paragraphe 3.5). Ceci conduit à introduire la variable

$$\Phi_3 = \varphi_3 + E_2/\Omega_1 \quad (11.101)$$

et le nouveau vecteur d'état

$$x = [\varphi_1, \Phi_3, E_1, E_3']'. \quad (11.102)$$

Le nouveau modèle du type (11.100) qui est alors complètement observable est

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \\ y &= \mathbf{H}\mathbf{x} + \xi\end{aligned}\quad (11.103)$$

$$\dot{\xi} = A\xi + v$$

$$E\{x_0 x_0'\} = A_0, \quad E\{\xi_0 \xi_0'\} = \Theta_0, \quad E\{vv'\} = Q_2 \delta(t - \tau)$$

avec

$$\begin{aligned}F &= \begin{bmatrix} 0 & \Omega_3 & 0 & 1 & 0 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & G &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ H &= \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & A &= -\beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ Q_2 &= 2\beta\sigma_b^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \Theta_0 &= \sigma_b^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (11.104)$$

et

$$A_0 = d_{\text{lag}}^T \{ \sigma_v^2, \sigma_a^2, \sigma_{\dot{E}_1}^2, \sigma_{\dot{E}_3}^2 \}$$

où σ_v^2 et σ_a^2 désignent respectivement les variances de φ_1 et φ_2 d'une part, $\sigma_{\dot{E}_3}^2$ d'autre part, après le calage grossier de la plate-forme effectué avant de commencer l'alignement initial fin que l'on considère ici.

11.8 Alignement initial optimal et sous-optimal

11.8.1 Ainsi on vient de mettre le problème de l'alignement initial sous la forme canonique d'un problème de filtrage statistique (voir chapitre 4). L'alignement optimal va donc consister - ainsi qu'il a déjà été indiqué sur la figure 11-2 - à filtrer les observations y afin d'obtenir la meilleure estimée $\hat{x}$ de x . Cette estimation $\hat{x}$ est alors utilisée pour recalibrer la plate-forme en lui faisant effectuer la rotation $(-\hat{\phi}_1, -\hat{\phi}_2, -\hat{\phi}_3)$. On indique ci-dessous les performances que l'on doit attendre d'un tel alignement, puis on considère la mécanisation d'un tel filtre.

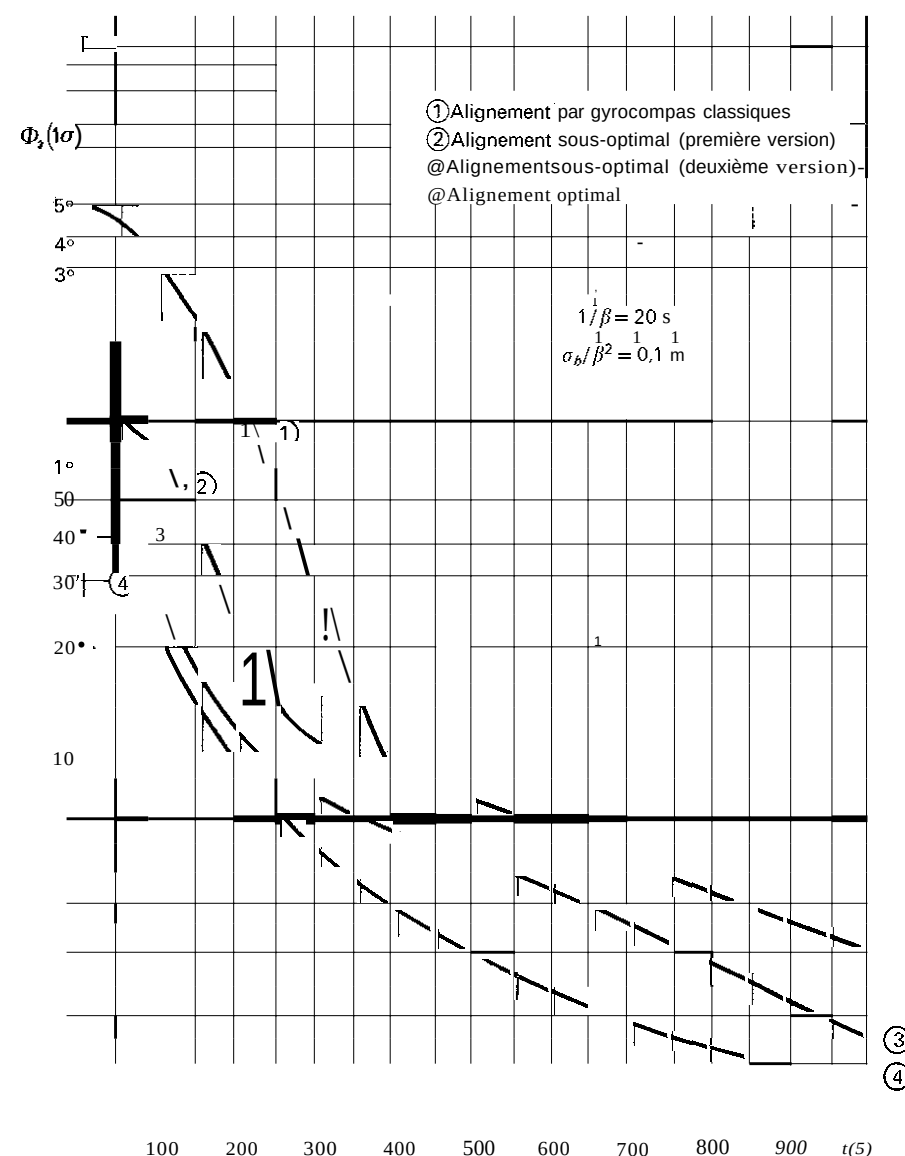


Figure 11-7. Performances de divers alignements initiaux.

11.8.2 PERFORMANCES DE L'ALIGNEMENT OPTIMAL

On a vu au paragraphe 4.7.4 que si l'on désigne par $\Sigma(t)$ la covariance de $\tilde{x}(t)$:

$$\Sigma(t) = E\{\tilde{x}(t)\tilde{x}'(t)\}, \quad (11.105)$$

alors $\Sigma(t)$ peut être calculé en intégrant l'équation différentielle

$$\dot{\Sigma} = F\Sigma + \Sigma F' - \Sigma \mathcal{H}' Q_2^{-1} \mathcal{H} \Sigma \quad (11.106)$$

où

$$\mathcal{H} = HF - AH, \quad (11.107)$$

à partir de la condition initiale

$$\Sigma(t_0+) = A_0 - A_0 H' (H A_0 H' + Q_2)^{-1} Q_2^{-1} H A_0. \quad (11.108)$$

TABLEAU 11-3

Valeurs numériques correspondant aux figures 11-7 à 11-9

J/J	$= 20s$
σ_b / β^2	$= 0,1 \text{ m}$
σ_v	$= 3^\circ$
σ_a	$= 5^\circ$
σ_{E_1}	$= 0,05''/h$
σ_{E_3}	$= 0,1''/h$

On peut comparer dans le cas envisagé les performances de l'alignement optimal à celles de l'alignement par gyrocompas classique du second ordre décrit au paragraphe 11.5 ($K_3 = 0$ et $T = 12 \text{ s}$ pendant 2 minutes, puis $T = 60 \text{ s}$). La courbe 1 de la figure 11-7 représente l'évolution de l'écart-type de Φ_3 pendant le gyrocompas classique. La courbe 4 donne l'évolution pour l'alignement initial optimal. On remarque que pour le gyrocompas classique l'écart-type de Φ_3 converge vers $5'30''$ alors que pour l'alignement optimal il tend vers $1'20''$.

D'autre part les temps de réponse à JO' et à $6'$ sont respectivement 500 s et 550 s pour l'alignement classique, 200 s et 300 s pour l'alignement optimal.

11.8.3 MÉCANISATION DE L'ALIGNEMENT OPTIMAL

L'alignement optimal consiste d'abord à réaliser un bouclage donnant une bonne verticale (équation (11.108)). On ne considérera pas cette phase de l'alignement, mais seulement la phase consistant à trouver le Nord (analogue au gyrocompas classique). Les équations à mécaniser sont les suivantes (voir paragraphe 4.7.4) :

$$\dot{\Phi}_1 = \Omega_3 \Phi_2 + \hat{E}_1 + K_{11} z_1 + K_{12} z_2 \quad (11.109)$$

$$\dot{\Phi}_2 = -\Omega_3 \Phi_1 + \Omega_1 \Phi_3 + K_{21} z_1 + K_{22} z_2 \quad (11.110)$$

$$\dot{\Phi}_3 = -\Omega_1 \Phi_2 + \hat{E}_3 + K_{31} z_1 + K_{32} z_2 \quad (11.111)$$

$$\hat{E}_1 = K_{41} z_1 + K_{42} z_2 \quad (11.112)$$

$$\hat{E}_3 = K_{51} z_1 + K_{52} z_2 \quad (11.113)$$

avec

$$z_1 = 1 + fJ_1 - g_{Q3} \Phi_1 + fJ_2 \Phi_2 + g_{Q_2} \Phi_3 \quad (11.114)$$

$$z_2 = \dot{f}_2 + \beta \dot{f}_2 - \beta g \Phi_1 - g \Omega_3 \Phi_2 - g \hat{E}_1. \quad (11.115)$$

Les gains K_{ij} sont obtenus par la formule (4.1S6)

$$K(t) = \Sigma \mathcal{H}' Q_2^{-1} \quad (11.116)$$

où la covariance $\Sigma(t)$ provient de l'intégration de l'équation (11.106) à partir des conditions initiales (11.108). On a représenté les valeurs de ces gains sur les figures 11-8 à 11-12.

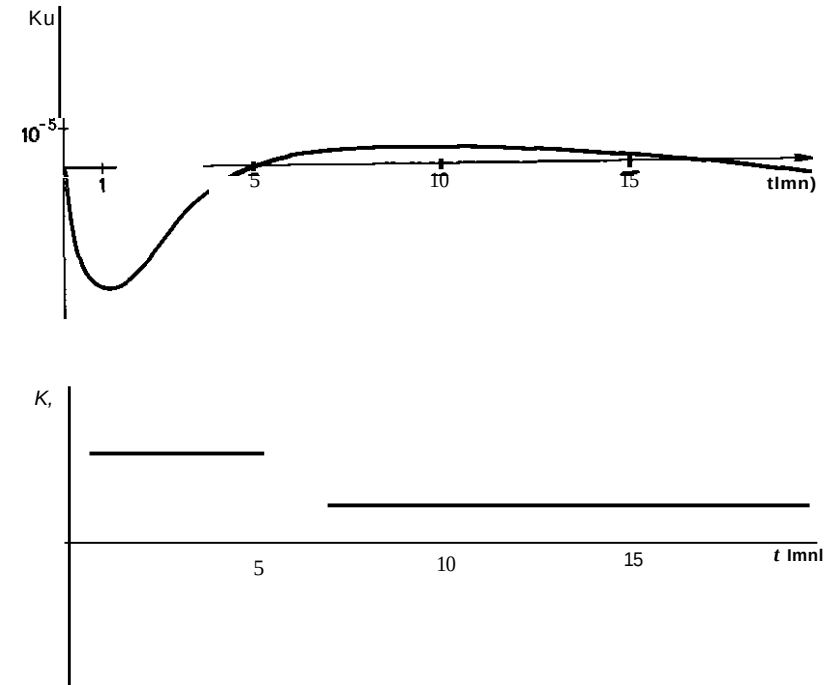


Figure 11-8. Gains optimaux K_u et K_v sur Φ_1 .

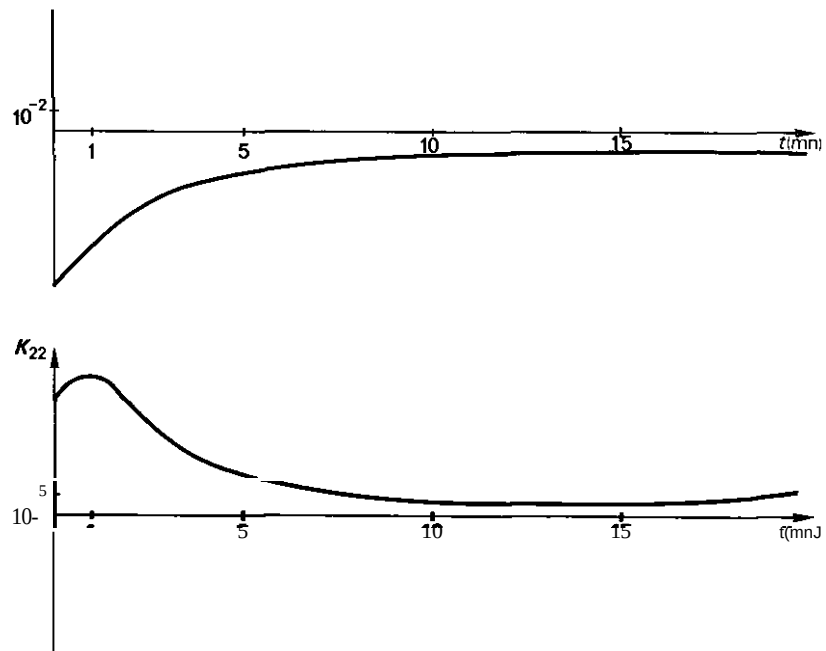


Figure 11-9. Gains optimaux K_{21} et K_{22} sur $\hat{\phi}_2$.

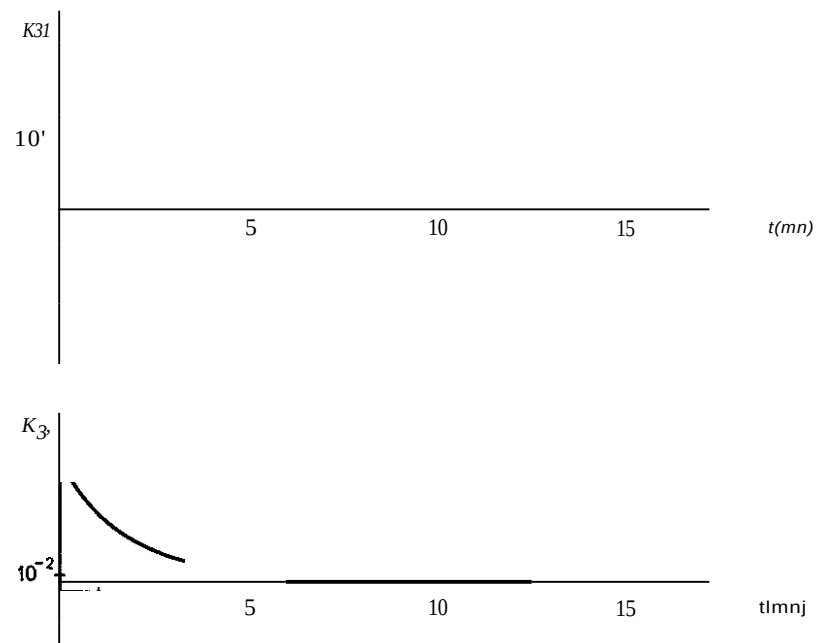


Figure 11-10. Gains optimaux K_{31} et K_{32} sur $\hat{\phi}_3$.

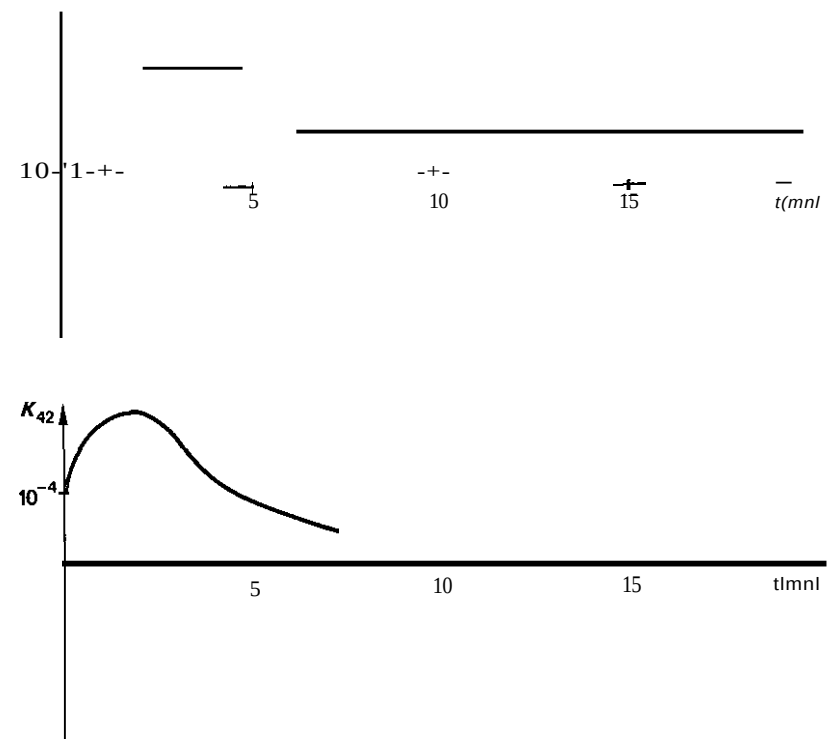


Figure 11-11. Gains optimaux K_{41} et K_{42} sur $\hat{E}_1''$.

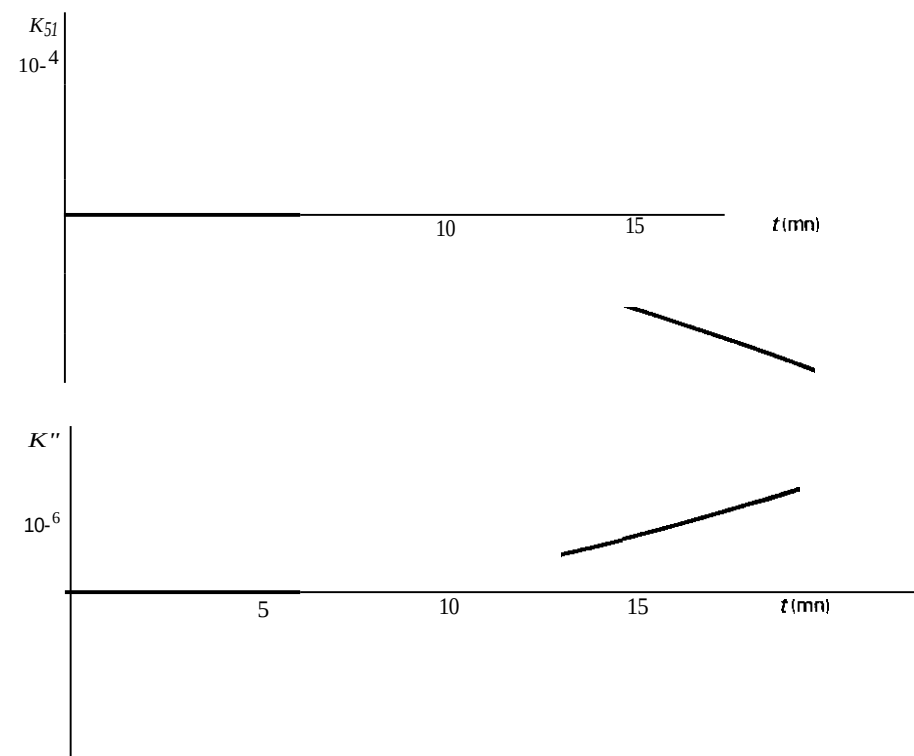


Figure 11-12. Gains optimaux K_{51} et K_{52} sur $\hat{E}_3$.

On peut remarquer que, comme pour le gyrocompas classique, les couplages importants pour l'alignement viennent des gains K_{11} , (bouclage $f_2 \rightarrow \hat{\phi}_1$), K_{21} (bouclage $f_1 \rightarrow \hat{\phi}_2$) qui donnent la verticale et K_{31} (bouclage $f_1 \rightarrow \hat{\phi}_3$) qui est le gyrocompas proprement dit; ceci apparaît par le fait que ces gains sont bien plus grands que les autres. Cependant l'évolution de ces gains au cours du temps n'a rien de prévisible a priori par d'autres méthodes que celle exposée.

11.8.4 ALIGNEMENT SOUS-OPTIMAL

On va illustrer ici le concept de filtre ou système *sous-optimal*. On vient de voir que la part importante des calculs d'alignement optimal consiste à générer les dix gains K_{11} à K'' par intégration de l'équation de Riccati (11.106). Or sur les figures 11-18 à 11-12, on voit aisément que certains gains sont négligeables et que de toutes façons on peut essayer de les approximer par des fonctions simples bien plus faciles à calculer que l'équation de Riccati.

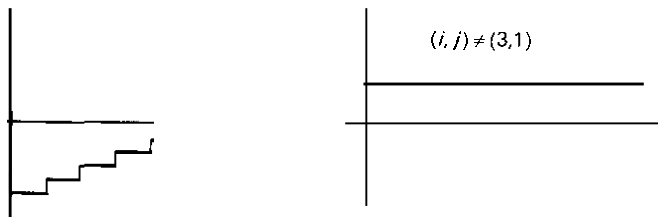


Figure 11-13. Gains sous-optimaux (premier filtre).

Ainsi par exemple le premier filtre sous-optimal testé a des gains constants, sauf le gain principal sur ϕ_3 , K_{31} approximé par une fonction en escalier à 6 paliers (voir figure 11-13). Les performances de ce filtre sous-optimal sont représentées par la courbe 2 de la figure 11-7.

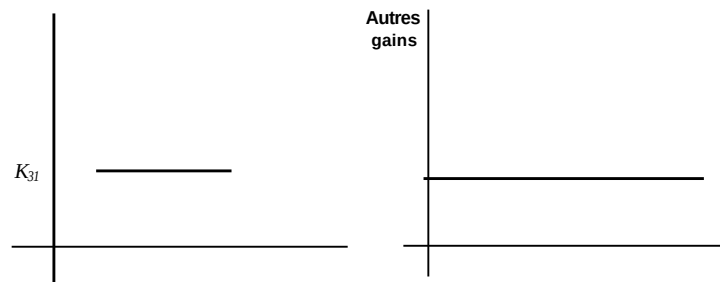


Figure 11-14. Gains sous-optimaux (deuxième filtre).

On a testé ensuite une autre forme d'approximation des gains sur ϕ_2 et ϕ_3 , K_{21} , K_{22} , K_{31} et K_{32} par des fonctions de la forme

$$K(t) = C + D e^{-\beta t}, \quad (11.117)$$

les autres gains restant constants (voir figure 11-14).

Les performances de cet autre système sous-optimal sont représentées par la courbe 3 de la figure 11-7 et sont extrêmement voisines des performances optimales. Il est d'autre part très aisé de générer des gains non constants de la forme (11.117) de façon récursive sur un calculateur universel ou sur un D.D.A. Cette génération nécessite une multiplication et une addition à chaque pas, ainsi qu'il ressort des formules ci-après

$$\begin{cases} (K_{n+1} - C) = \mu(K_n - C) \end{cases} \quad (11.118)$$

$$\begin{cases} K_{n+1} = C + (K''u - C) \end{cases} \quad (11.119)$$

avec

$$\mu = -\beta \Delta t. \quad (11.120)$$

CHAPITRE 12

SYSTÈMES HYBRIDES APPROCHE CLASSIQUE ET APPROCHE OPTIMALE

P. FAURRE

12.1 Introduction aux systèmes hybrides ou aidés

12.1.1 On a vu dans les chapitres précédents que, bien qu'ayant en début de fonctionnement une précision excellente, les systèmes à inertie ont des performances qui se dégradent en fonction de la durée écoulée depuis le dernier alignement. On est ainsi conduit à chercher un moyen d'«aider» les systèmes à inertie avec des instruments plus grossiers, mais dont les erreurs restent bornées avec le temps. Le système global de navigation ainsi réalisé porte le nom de système *hybride* ou encore de système *aidé*.

On a déjà présenté au chapitre 2 pour le cas idéal d'un navigateur à un axe un système hybride classique utilisant une référence extérieure de vitesse et un système hybride à recalages de position optimaux. Ce chapitre va présenter le cas général d'un système à trois axes.

Contrairement au navigateur inertiel, beaucoup des instruments auxiliaires ne fournissent que des informations partielles et souvent intermittentes sur les paramètres de navigation (position, vitesse et attitude). On peut concevoir intuitivement un système hybride comme un système de navigation utilisant les mesures auxiliaires pour recalculer certains paramètres de navigation et le système à inertie pour extrapoler entre ces mesures.

12.1.2 INSTRUMENTS DE NAVIGATION AUXILIAIRES (*)

On va envisager ci-après les divers types d'informations fournies éventuellement au système par des instruments auxiliaires.

i) Informations de vitesse sur les axes du véhicule

Divers instruments peuvent fournir la vitesse relative au sol soit par des moyens radar (Doppler), soit par des moyens mécaniques (compteur de vitesse lors du roulage d'un avion).

(*) Le qualificatif « auxiliaire » n'a aucun sens péjoratif dans ce texte, mais sert à qualifier les capteurs ou systèmes non inertiels.

D'autres instruments donnent la vitesse par rapport au fluide ambiant (Loch, speedomètre). Dans tous ces cas le capteur est lié au véhicule et par conséquent la mesure de vitesse auxiliaire $\vec{v}_a$ qu'il fournit est donnée par ses composantes sur les axes du véhicule (ou encore sur les axes plate-forme, la conversion se faisant à l'aide des angles donnés par les résolveurs de la plate-forme). L'information intéressante en vue de l'hybridation résulte de la comparaison entre la vitesse $\vec{v}_c$ calculée par le système à inertie et $\vec{v}_a$. On note cette différence

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_c - \vec{v}_a. \quad (12.1)$$

Lorsque l'on interprète la vitesse calculée par le système à inertie sur les axes plate-forme, l'erreur de vitesse correspondante $\delta \vec{v}$ définie par l'expression

$$\vec{v}_c = \vec{v} + \delta \vec{v} \quad (12.2)$$

où $\vec{v}$ est la vitesse vraie, a été calculée au chapitre 10 (voir (10.41)); elle est donnée par:

$$\delta \vec{v} = \delta \vec{r} + \vec{\psi} \times \vec{v}. \quad (12.3)$$

On définit d'autre part l'erreur de mesure $\delta \vec{v}_a$ de l'instrument auxiliaire par

$$\vec{v}_a = \vec{v} + \delta \vec{v}_a. \quad (12.4)$$

On obtient alors par comparaison des deux vitesses

$$\Delta \vec{v} = \delta \vec{r} + \vec{\psi} \times \vec{v} - \delta \vec{v}_a, \quad (12.5)$$

terme qui est utilisé pour l'hybridation.

ii) Informations de vitesse sur des axes terrestres

Si l'instrument de mesure n'est pas sur le véhicule, la mesure auxiliaire de vitesse est fournie sur des axes géographiques locaux: c'est le cas si la vitesse d'un avion est mesurée par une station d'observation au sol transmettant le résultat à l'avion, ou encore si l'on utilise la vitesse donnée par le système de navigation d'un porte-avion pour un avion parqué (immobile) sur son pont.

On peut voir aisément, par des considérations analogues à celles faites ci-dessus et au paragraphe 10.5 que la comparaison des vitesses conduit dans ce cas à la quantité

$$\Delta \vec{v} = \delta \vec{r}' + \vec{\phi} \times \vec{v} - \delta \vec{v}_a. \quad (12.6)$$

iii) Informations de position

Certains appareils donnent des mesures de position continues ou intermittentes. Comme dispositifs continus, signalons les systèmes radioélectriques LORAN, TACAN, OMEGA, etc. On peut ranger dans les dispositifs intermittents toute méthode classique à faire le point (relativement à des amers ou

des balises remarquables par exemple), ou les procédés utilisant les satellites de navigation. Désignant par $\vec{r}$ la position vraie, par $\vec{r}_c$ la position calculée par le système à inertie, par $\vec{r}_a$ la position donnée par la mesure auxiliaire et par $\delta\vec{r}_a$ l'erreur correspondante, on a

$$\vec{r}_a = \vec{r} + \delta\vec{r}_a \quad (12.7)$$

et la différence entre les positions indiquées

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_c - \vec{r}_a \quad (12.8)$$

est donnée par l'expression

$$\Delta\vec{r} = \delta\vec{r} - \delta\vec{r}_a \quad (12.9)$$

où $\delta\vec{r}$ est l'erreur de position du système à inertie.

iv) Information de cap et de verticale

Certains dispositifs auxiliaires (compas magnétique, gyrocompas, gyro de verticale, centrale de cap et de verticale, senseur d'horizon pour un satellite) fournissent la verticale et/ou le cap. Désignant par φ_{1a} , φ_{2a} et φ_{3a} les erreurs des instruments auxiliaires utilisés, la comparaison entre les éléments fournis par le système à inertie et les éléments auxiliaires donne tout ou partie des composantes du vecteur

$$\vec{\Phi} = \vec{\phi} - \vec{\phi}_a \quad (12.10)$$

qui sont (voir 10.38) à (10.40))

$$\Phi_1 = \psi_1 - \frac{\delta y}{R} - \varphi_{1a} \quad (12.11)$$

$$\Phi_2 = \psi_2 + \frac{\delta x}{R} - \varphi_{2a} \quad (12.12)$$

$$\Phi_3 = \psi_3 - \delta y \frac{tgL}{R} - \varphi_{3a}. \quad (12.13)$$

v) Informations astrales

On peut lier directement ou indirectement un télescope ou une lunette à la plate-forme à inertie et effectuer des visées astrales pour mesurer de combien la plate-forme a dérivé au cours de son fonctionnement.

En fonction des éphémérides et de l'heure, l'astre A doit se trouver dans la direction $\vec{u}_c$ de gisement" et d'élévation β sur les axes **calculateurs** (figure 12-1). Ayant pointé le télescope dans la direction $\vec{u}_p$ de gisement" et d'élévation β par rapport aux axes plate-forme on constate l'écart Ψ_v , Ψ_w qui correspond aux mesures bruitées des composantes du vecteur $\vec{\psi}$ (rotation entre $[cl]$ et $[pD]$ sur les

axes v et w qui complètent avec u un trièdre orthonormé. Deux mesures astrales simultanées (si l'on dispose de deux télescopes) ou successives (un seul télescope) équivalent donc à une mesure du vecteur $\vec{\psi}$ aux erreurs de pointage $\vec{\eta}$ près:

$$\vec{\Psi} = \vec{\psi} + \vec{\eta}. \quad (12.14)$$

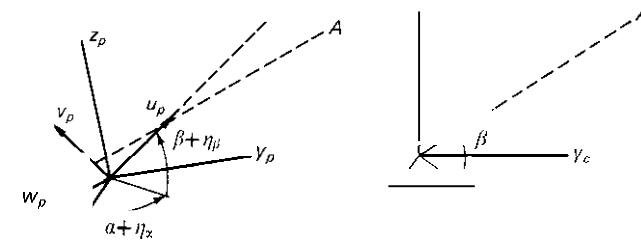


Figure 12-1. Visée astrale.

vi) Alignement initial

On peut remarquer que pour un alignement initial autonome (chapitre 11), on «aide» le système à inertie par deux informations auxiliaires;

- la vitesse par rapport à la terre est nulle aux mouvements perturbateurs près,
- la position initiale (L_a , G_o) est introduite par l'utilisateur.

La mécanisation et le système réalisé pour l'alignement initial sont donc un cas particulier de systèmes aidés.

12.2 Synthèse des systèmes hybrides

La plupart des informations auxiliaires ont un caractère intermittent alors que le système à inertie fonctionne en principe en permanence: il convient donc de prévoir des modes de fonctionnement hybride ou inertiel pur suivant que ces informations sont disponibles ou non, tout en ne négligeant pas les problèmes de commutation et de transitoire entre ces modes.

On va ranger les diverses méthodes de synthèse de systèmes hybrides en deux classes: les méthodes dites *classiques* d'une part et les méthodes dites *optimales* et *sous-optimales* d'autre part (*).

(*) Cette terminologie est peu satisfaisante (tout système classique peut prétendre être optimal ou, sinon, sous-optimal), mais on l'utilise ici faute de mieux.

12.2.1 ApPROCHE CLASSIQUE

Cette approche est ainsi nommée car elle utilise le langage «classique» des fonctions de transfert et la théorie «classique» des asservissements. Sur la figure 12-2, on a représenté un schéma de navigateur par inertie : la force spécifique mesurée par les accéléromètres, corrigée des accélérations de Coriolis est intégrée deux *fois* pour donner la vitesse et la position, à partir desquelles les accélérations de Coriolis et le taux de rotation ω commandé à la plate-forme sont alors calculés. On a vu au chapitre 9 des réalisations plus précises de ce schéma.

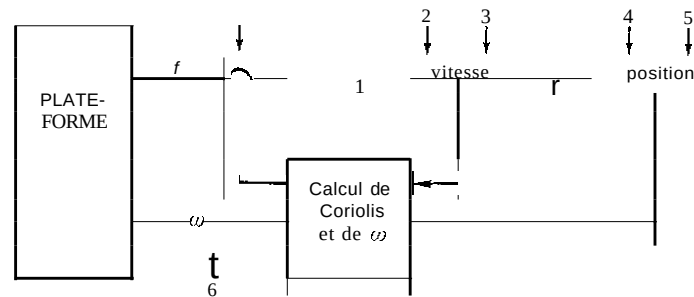


Figure 12-2. Points d'intervention sur un système pur.

Le modèle linéarisé des erreurs d'un tel navigateur inertiel pur a des pôles juste oscillants (périodes de 84 minutes et de 24 heures : voir chapitre 10). L'idée immédiate est de chercher à amortir le système en déplaçant les pôles à gauche dans le plan complexe. On élimine les bouclages internes qui rendraient le système dynamiquement inexact. On cherche à utiliser par contre pour cela les signaux d'erreurs auxiliaires $\Delta\hat{v}$, $\Delta\hat{r}$, $\hat{\Phi}$ ou $\hat{\Psi}$ filtrés par une fonction de transfert adéquate $K(s)$ et agissant en un ou plusieurs points bien choisis du système.

On a listé sur la figure 12-2 les divers points d'intervention envisageables: (1) au niveau de la force spécifique, (2) au niveau de la vitesse à l'intérieur de la boucle, (3) au niveau de la vitesse à l'extérieur de la boucle, (4) au niveau de la position à l'intérieur de la boucle, (5) au niveau de la position à l'extérieur de la boucle, (6) au niveau du taux de rotation commandé à la plate-forme. Le schéma du système de navigation résultant est présenté sur la figure 12-3b.

Le choix du point d'intervention et de la fonction de transfert $K(s)$ est fait soit par des considérations semi empiriques («un bon système est un système amorti avec un coefficient d'amortissement $\zeta = 0,7$ ») soit par des méthodes optimales stationnaires à la Wiener (voir paragraphe 4.3). On exposera au paragraphe 12.3 deux exemples d'une telle synthèse.

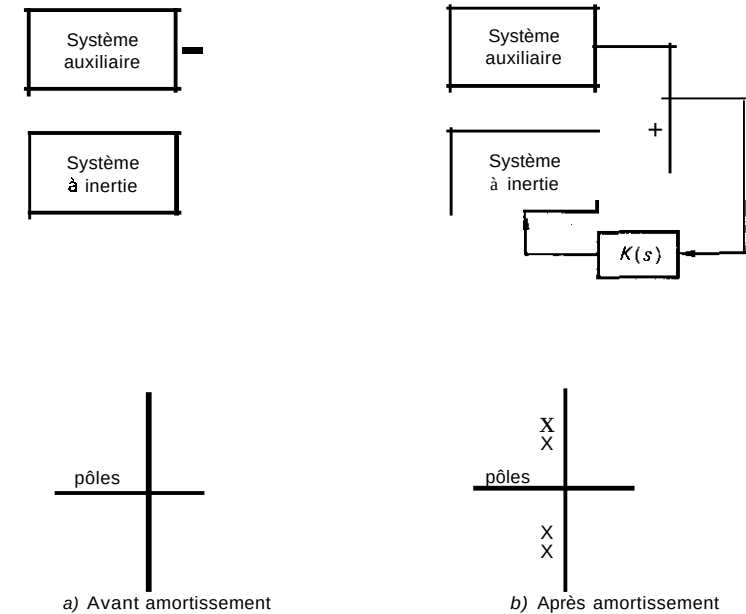


Figure 12-3. Système hybride amorti.

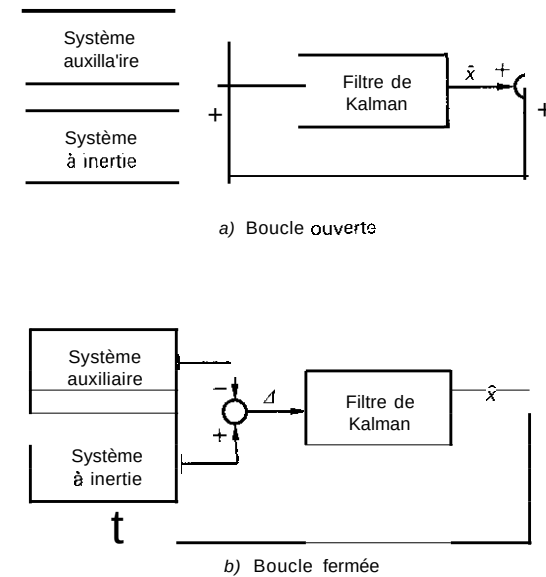


Figure 12-4. Système hybride optimal.

12.2.2 APPROCHE OPTIMALE ET SOUS-OPTIMALE

L'approche (moderne) optimale consiste à représenter les diverses erreurs statistiques intervenant dans le système à l'aide d'un modèle markovien (voir paragraphe 4.4) et à traiter par un filtre de Kalman l'ensemble des signaux d'erreurs Δ interprétés alors comme des observations sur les erreurs dynamiques du système à inertie. Les estimations ainsi obtenues servent à recalibrer les paramètres de navigation soit en boucle ouverte (figure 12-4a) soit en boucle fermée (figure 12-4b).

Un système dit sous-optimal a une structure identique: on le qualifie ainsi lorsqu'il est obtenu soit par simplification d'un filtre optimal, soit en faisant l'hypothèse d'une structure plus simple dont on optimise les paramètres par des méthodes de vecteur d'état.

12.3 Systèmes hybrides amortis classiques

On va considérer deux exemples de systèmes amortis à titre d'illustration des méthodes de synthèse classiques: l'une utilisant une référence de vitesse extérieure (Doppler), l'autre utilisant un télescope.

12.3.1 COUPLAGE INERTIE-DOPPLER DU DEUXIÈME ORDRE

Ainsi qu'on l'a déjà vu, le signal d'erreur $\Delta\vec{v}$ obtenu par comparaison des vitesses inertielles et Doppler s'exprime par (expression (12.5))

$$\Delta\vec{v} = \delta\vec{r} + \vec{\psi} \times \vec{v} - \delta\vec{v}_a. \quad (12.15)$$

Le schéma d'hybridation le plus simple — qui sera seul envisagé en détail ici — consiste à agir sur le point (1) (figure 12-2) avec le signal $K\Delta\vec{v}$; en d'autres termes on remplace dans la mécanisation du système la force spécifique $\vec{J}$ mesurée par les accéléromètres par $\vec{J} + K\Delta\vec{v}$.

Ce schéma ne modifie pas l'équation en ψ . Par contre l'équation des erreurs de position devient

$$\delta\ddot{\vec{r}} + K\delta\dot{\vec{r}} + \omega_s^2(\vec{1} - \hat{r} \otimes \hat{r})\delta\vec{r} = -\vec{\psi} \times (\vec{f} + K\vec{v}) + \vec{V} + K\delta\vec{v}_a. \quad (12.16)$$

On a fait ainsi apparaître des termes d'amortissement ($K\delta\dot{\vec{r}}$) dans l'équation des erreurs de position. On peut tirer quelques conclusions rapides sur ce schéma d'amortissement:

- la période de 24 heures n'est pas affectée (pôles de l'équation en ψ),
- les oscillations de Schuler (w_{s1} et w_{s2}) pourront être amorties,
- le gain d'amortissement K doit être choisi de façon à amortir suffisamment le système (gain K élevé), mais sans introduire de nouveaux termes trop importants excitant l'équation d'erreur (12.15) (gain K petit).

Il est facile d'écrire les équations scalaires correspondant au système (12.16) et on peut alors les intégrer numériquement. On va choisir une autre approche qui fournira l'occasion d'écrire une forme simplifiée des équations d'erreurs.

Partant des équations établies au chapitre 10 et simplifiant les équations d'erreurs de position, on obtient le système:

$$\dot{\psi}_1 = \omega_3\psi_2 - \omega_2\psi_3 + E_1 \quad (12.17)$$

$$\dot{\psi}_2 = \omega_1\psi_3 - \omega_3\psi_1 + E_2 \quad (12.18)$$

$$\dot{\psi}_3 = \omega_2\psi_1 - \omega_1\psi_2 + E_3 \quad (12.19)$$

$$\delta\ddot{x} + \omega_s^2\delta x = -g\psi_2 + V_1 \quad (12.20)$$

$$\delta\ddot{y} + \omega_s^2\delta y = g\psi_1 + V_2. \quad (12.21)$$

Si l'on note que (voir (10.38) et (10.39))

$$\varphi_1 = \psi_1 - \delta y/R \quad (12.22)$$

$$\varphi_2 = \psi_2 + \delta x/R, \quad (12.23)$$

on peut écrire

$$\dot{\varphi}_1 + \frac{\delta\dot{y}}{R} = \omega_3\psi_2 - \omega_2\psi_3 + E_1 \quad (12.24)$$

$$\dot{\varphi}_2 - \frac{\delta\dot{x}}{R} = \omega_1\psi_3 - \omega_3\psi_1 + E_2 \quad (12.25)$$

$$\delta\ddot{x} = -g\varphi_2 + V_1 \quad (12.26)$$

$$\delta\ddot{y} = g\varphi_1 + V_2. \quad (12.27)$$

Ces équations sont représentées par les schémas fonctionnels en traits pleins de la figure 12-5.

Lorsque l'on introduit le couplage hybride présenté plus haut les équations (12.26) et (12.27) deviennent

$$\delta\ddot{x} + K\delta\dot{x} = -g\varphi_2 + V_1 + K\delta v_{a1}, \quad (12.28)$$

$$\delta\ddot{y} + K\delta\dot{y} = g\varphi_1 + V_2 + K\delta v_{a2}. \quad (12.29)$$

Les termes nouveaux sont représentés par les lignes et blocs pointillés de la figure 12-5.

Les deux boucles des diagrammes fonctionnels de la figure 12-5 ont le polynôme caractéristique

$$A(s) = s^2 + Ks + \omega_s^2. \quad (12.30)$$

On pose généralement

$$K = 2\zeta\omega_s, \quad (12.31)$$

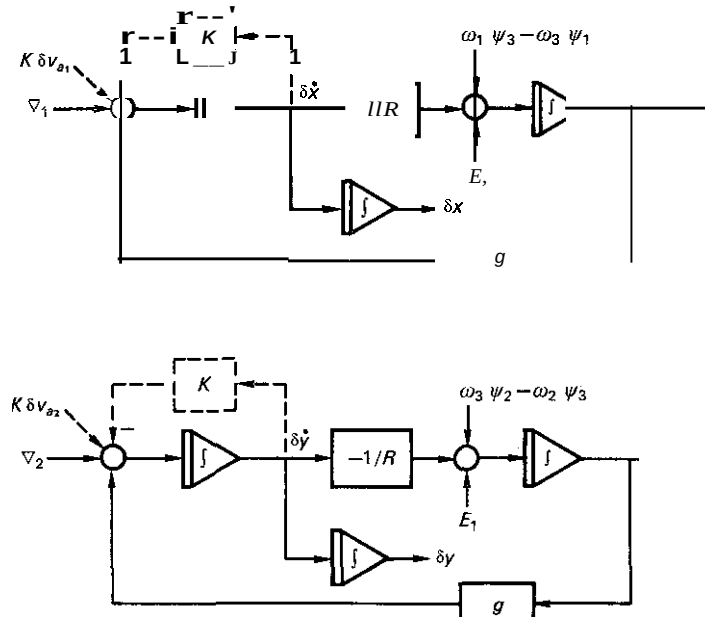


Figure 12-5. Diagrammes fonctionnels simplifiés des erreurs.

ζ étant alors appelé *coefficient d'amortissement*. On retrouve donc dans le cadre de cette analyse simplifiée l'équation du système inertie-Doppler à un axe du chapitre 2. On se reportera donc aux expressions (2.30) à (2.34) qui donnent les différentes erreurs.

La dernière remarque qui sera faite au sujet d'un tel couplage est la suivante:

- les boucles de la figure 12-5 étant amorties, il s'ensuit que les erreurs de **verticale φ_1 et φ_2 restent faibles comparativement au système non amorti**; cette conclusion ressort de la considération des fonctions de transfert

$$\frac{\varphi}{V/g} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_s s + \omega_s^2} \quad (12.32)$$

$$\frac{\varphi}{E} = \frac{s + 2\zeta\omega_s}{s^2 + 2\zeta\omega_s s + \omega_s^2} \quad (12.33)$$

12.3.2 COUPLAGES INERTIE-DOPPLER PLUS COMPLEXES

On peut imaginer des couplages inertie-Doppler plus complexes. Par exemple un couplage dit du troisième ordre consiste à agir (voir figure 12-2)

en (1) avec le signal $K_1 \Delta v$,

en (6) avec le signal $\left(\frac{K_2}{R} + \frac{K_3}{Rs}\right) \Delta v$.

Le diagramme d'erreurs correspondant est alors représenté sur la figure 12-6 (on n'a représenté qu'un axe).

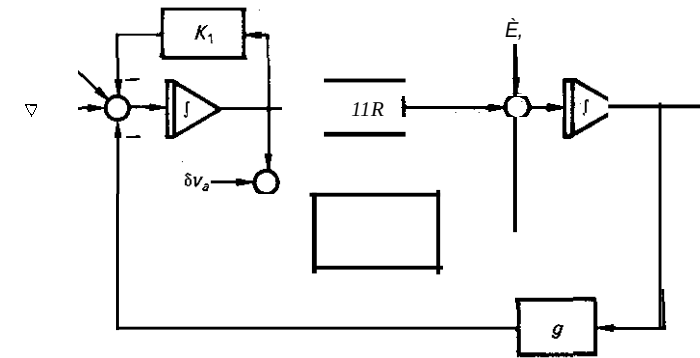


Figure 12-6. Diagramme des erreurs pour un couplage inertie-Doppler du troisième ordre.

On peut alors calculer la transformée de Laplace de l'erreur de vitesse $\delta \dot{x}$:

$$\delta \dot{x}(s) = \frac{1}{\Delta} \{S^2 V(s) - g s \tilde{E}_2(s) + (K_1 s^2 + \omega_s^2 (K_2 s + K_3) (H K_s)) \delta v_a(s)\} \quad (12.34)$$

avec

$$\Delta(s) = s^3 + K_1 s^2 + \omega_s^2 (1 + K_2) s + \omega_s^2 K_3. \quad (12.35)$$

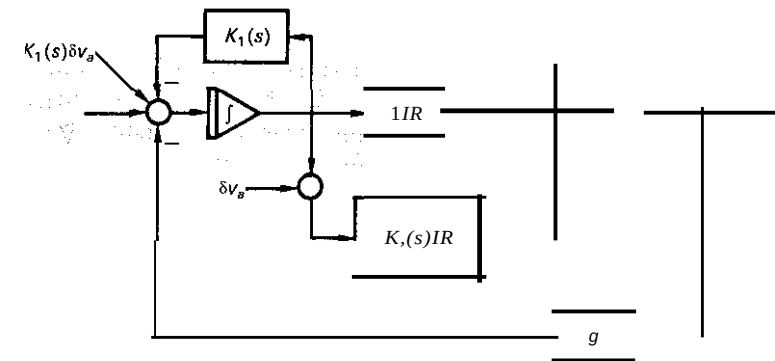


Figure 12-7. Couplage inertie-Doppler élaboré.

Il s'agit alors d'optimiser les valeurs de KI , K , et K_3 : cela ne peut être fait **qu'en faisant des hypothèses sur les caractéristiques statistiques des erreurs** 17, δv_a et $\tilde{E}_2$.

On va considérer le cas plus élaboré où K est remplacé par une fonction de transfert (réalisable) $K_1(s)$ et $(K_2 + (K_3 s))JR$ par $K_2(s)JR$. Le diagramme d'erreur est alors celui de la figure 12-7.

On peut écrire

$$\delta \dot{x}(s) = H_1(s)V(s) + H_2(s)E_2(s) + H_3(s)\omega''(s) \quad (12.36)$$

avec

$$H_1(s) = \frac{s}{\Delta} \quad (12.37)$$

$$H_2(s) = \frac{-g}{\Delta} \quad (12.38)$$

$$H_3(s) = \frac{1}{\Delta} \{sK_1(s) + \omega_s^2 K_2(s)\} \quad (12.39)$$

et

$$\Delta = s^2 + K_1(s)s + \omega_s^2 K_2(s). \quad (12.40)$$

Si l'on connaît les spectres $S_v(s)$, $SE_s(s)$ et $S_{\delta v_a}(s)$ des erreurs instrumentales 17, **E_z et δv_a supposées indépendantes, on peut écrire l'expression donnant le spectre de l'erreur de vitesse $S_{\delta \dot{x}}(s)$**

$$S_{\delta \dot{x}}(s) = H_1(s)S_v(s)H_1(-s) + H_2(s)SE_s(s)H_2(-s) + H_3(s)S_{\delta v_a}(s)H_3(-s) \quad (12.41)$$

et l'on sait que (voir (4.17))

$$E\{\delta \dot{x}^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\delta \dot{x}}(j\omega) d\omega. \quad (12.42)$$

Si l'on a fixé la structure de $KI(s)$ et de $K_2(s)$, on peut alors chercher les valeurs optimales des paramètres en intégrant (12.42) (ou plutôt en utilisant des **tables d'intégrales**) et en cherchant le minimum, ou, si l'on a laissé la structure de $KI(s)$ et de $K_2(s)$ libre, il convient d'utiliser des méthodes de factorisation spectrale de Wiener (voir chapitre 4).

12.3.3. COUPLAGE INERTIE-TÉLESCOPE

Ainsi qu'on l'a vu plus haut, deux mesures astrales sur des astres différents fournissent une estimation $\tilde{\Psi}$ de l'erreur d'orientation $\tilde{\psi}$ de la plate-forme

$$\tilde{\Psi} = \tilde{\psi} + \tilde{\eta}. \quad (12.43)$$

Si l'on applique alors à la plate-forme (point d'intervention (6) de la figure 12-1) **un taux de précession supplémentaire - $K\tilde{\Psi}$, l'équation en $\tilde{\psi}$ devient**

$$\dot{\tilde{\psi}} = -K\tilde{\Psi} + \tilde{E}. \quad (12.44)$$

Si l'on suppose que le gain K est suffisamment grand, on a sensiblement

$$-K\tilde{\Psi} + \tilde{E} = 0 \quad (12.45)$$

soit

$$\tilde{\psi} = -\tilde{\eta} + \frac{\tilde{E}}{K} \simeq -\tilde{\eta}. \quad (12.46)$$

L'équation des erreurs de position devient (avec l'hypothèse] = $-\tilde{g}$)

$$\delta \ddot{\mathbf{r}} + \omega_s^2 (\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \delta \mathbf{r} = -\tilde{\boldsymbol{\eta}} \times \tilde{\mathbf{g}} + \tilde{\mathbf{v}}. \quad (12.47)$$

Prenant la forme simplifiée (ou encore l'approximation à un seul axe) des **équations d'erreurs, on obtient**

$$\delta \ddot{x} + \omega_s^2 \delta x = \eta_y g + \mathcal{V}_x \quad (12.48)$$

$$\delta \ddot{y} + \omega_s^2 \delta y = -\eta_x g + \mathcal{V}_y \quad (12.49)$$

Avec l'hypothèse d'erreurs de pointage η_x et η_y constantes, on obtient par intégration

$$\delta x = \left(\eta_y + \frac{\mathcal{V}_x}{g} \right) R(I - \cos \omega_s t) \quad (12.50)$$

$$\delta y = \left(-\eta_x + \frac{\mathcal{V}_y}{g} \right) R(I - \cos \omega_s t). \quad (12.51)$$

Les erreurs de position resteraient donc bornées sous ces hypothèses. Cependant l'erreur $\tilde{\eta}$ est en pratique mieux représentée par un bruit blanc que par une constante. Il s'ensuit que les erreurs de position croissent en fait en $\sqrt{t}$ (voir le paragraphe 10.12.1 et la figure 10-16). On peut considérer qu'un tel couplage <<amortit la période de 24 heures>>.

12.4 Système hybride optimal

12.4.1 DESCRIPTION D'UN SYSTÈME HYBRIDE OPTIMAL

Afin de fixer les idées, on va considérer dans ce paragraphe un système hybride optimal particulier composé

- d'une plate-forme à inertie,
- d'un radar Doppler donnant la vitesse relative au sol,

d'un baro donnant l'altitude,

— d'un instrument donnant la position à des instants discrets (supposer par exemple que le navigateur ou des appareils autonomes fournissent de temps à autre des points de précision variable).

On a porté sur la figure 12-8 l'organisation d'un tel système hybride optimal. Les diverses variables E représentent l'entrée et les variables S la sortie du filtre de Kalman. Ce diagramme suppose un fonctionnement en boucle fermée (figure 12-4b).

Afin de simplifier l'exposé, on ne s'attachera dans la suite qu'à la navigation horizontale et au système hybride correspondant.

12.4.2 MODÈLE MARKOVIAN DU SYSTÈME

La description du modèle markovien représentant les erreurs du système à inertie a été donnée au paragraphe 10.12 et on retiendra les mêmes erreurs instrumentales qu'au paragraphe 10.12.3 (dérive de jour à jour, aërive aléatoire

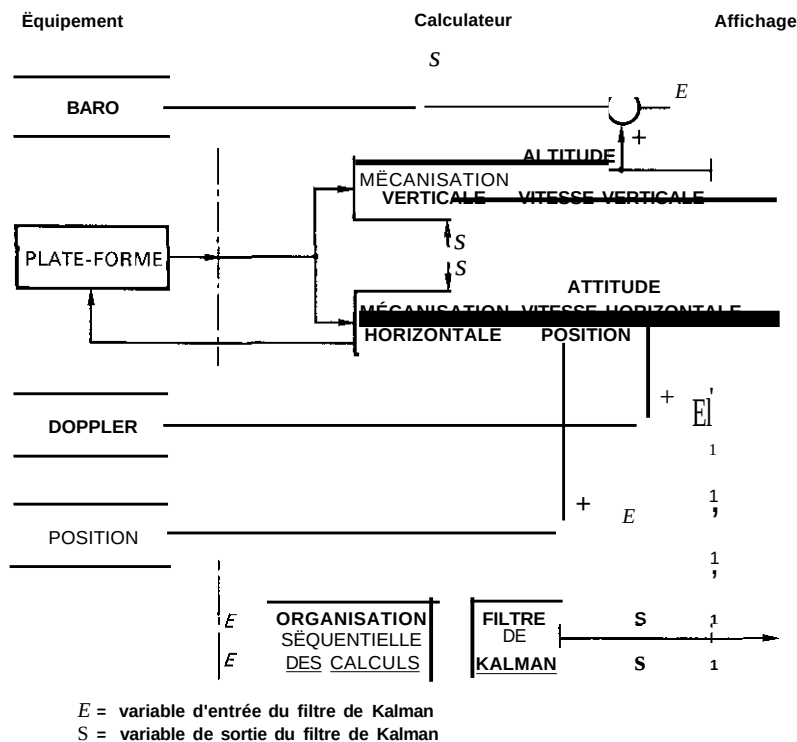


Figure 12-8. Organisation du système hybride optimal.

et erreur de facteur d'échelle pour les gyros, erreur d'alignement initial) avec les valeurs numériques du tableau 10-4.

Il convient d'ajouter dans ce modèle l'erreur de vitesse δv_a du Doppler qu'on représente sur les axes avions X et Y par un biais augmenté d'un bruit blanc

$$\delta v_{aX} = b_d X + w_X \quad (12.52)$$

$$\delta v_{aY} = b_d Y + w_Y. \quad (12.53)$$

Les biais sont supposés constants (et aléatoires) et représentés par

$$b_{dX} = 0 \quad (12.54)$$

$$b_{dY} = 0 \quad (12.55)$$

$$E\{b_{dX}^2\} = \sigma_{10}^2 \quad (12.56)$$

$$E\{b_{dY}^2\} = \sigma_{20}^2. \quad (12.57)$$

Les bruits blancs continus w_X et w_Y ont les covariances $r_3 \delta(t - \tau)$ et $r_4 \delta(t - \tau)$.

La position est mesurée à des instants discrets par divers moyens. On considère que

- les erreurs sont indépendantes d'une mesure à l'autre.
- l'erreur est caractérisée par son C.E.P.

On peut à présent écrire le modèle markovien global du système hybride considéré. Notant x_i le vecteur des erreurs dynamiques du système à inertie, et x le vecteur global des erreurs dynamiques et instrumentales, on a

$$x_i = [\psi_1 \psi_2 \psi_3 \delta x \delta y \delta \dot{x} \delta \dot{y}]' \quad (12.58)$$

$$x = [x_i' \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 K_g, K_{gz} K_{g3} b_d X b_d Y]' \quad (12.59)$$

et le modèle markovien est

$$\dot{x} = Fx + v \quad (12.60)$$

avec

$$F = \begin{bmatrix} F_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.61)$$

$$F_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$Fi \begin{vmatrix} 0 & \omega_3 - \omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_2 - \omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_1 & J_2 & a_{12} & 0 & 2\omega_3 \\ J_1 & 0 & -J_2 & a_{21} & a_{22} & -2W_3 \end{vmatrix} \quad (12.62)$$

avec

$$a_{11} = \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_s^2 \quad (12.63)$$

$$a_{12} = -\omega_1 \omega_2 + \omega_2 \Omega \cos L \quad (12.64)$$

$$a_{21} = -\omega_2 \omega_1 - \omega_2 \Omega \cos L \quad (12.65)$$

$$a_{22} = \omega_1^2 + \omega_3^2 - \omega_s^2 \quad (12.66)$$

$$\omega_s^2 = g f R. \quad (12.67)$$

Le bruit blanc V a la covariance $QO(t-T)$ avec

$$Q = \text{Diag}\{0000000 \text{ q1 } q, q, 000000\}. \quad (12.68)$$

La matrice de covariance initiale

$$E\{x(t_0)x'(t_0)\} = A_0 \quad (12.69)$$

(non écrite ici en détail) contient des termes provenant des modèles statistiques des erreurs instrumentales d'une part, des erreurs de l'alignement initial du système d'autre part (voir chapitre II).

Considérons à présent les informations fournies par le Doppler et les mesures de position auxiliaires.

i) Mesure de position

La différence entre la position donnée par le système à inertie et celle donnée par le moyen auxiliaire de mesure équivaut aux observations

$$Y_i = \delta x + w_1 \quad (12.70)$$

$$Y_2 = \delta y + w_2 \quad (12.71)$$

Où w_1 et w_2 sont des bruits blancs de covariance '1 et '2 (correspondant aux caractéristiques du moyen utilisé).

ii) Vitesse Doppler

Si le cap avion est α , et si l'on forme la différence entre les vitesses du système à inertie et les vitesses Doppler, on obtient (voir expression (12.5))

$$y_3 = -v, \sin \alpha \psi_1 + v_3 \cos \alpha \psi_2 - v_Y \psi_3 + (\omega_3 - \Omega \sin L) \sin \alpha \delta x - (m, -Q \sin L) \cos \alpha \delta Y + \cos \alpha \delta \dot{x} + \sin \alpha \delta \dot{y} - b_{dX} - W_X \quad (12.72)$$

$$Y_4 = -V_3 \cos \alpha \psi_1 - v, \sin \alpha \psi_2 + v_X \psi_3 + (m_3 - Q \sin L) \cos \alpha \delta x + (m, -Q \sin L) \sin \alpha \delta y - \sin \alpha \delta \dot{x} + \cos \alpha \delta \dot{y} - b_{dY} - w_Y \quad (12.73)$$

où v_X et v_Y représentent les composantes de la vitesse sur les axes avions X et Y .

Ainsi toutes les informations extérieures équivalent à des observations linéaires bruitées sur le vecteur d'état x :

$$y_i = h_i x + w_i \quad (12.74)$$

avec

$$h_1 = \{0001000000000000\} \quad (12.75)$$

$$h_2 = \{0000100000000000\} \quad (12.76)$$

$$h_3 = \{-v_3 \sin \alpha, v_3 \cos \alpha, -V_Y, (\omega_3 - \Omega \sin L) \sin \alpha, - (m, -Q \sin L) \cos \alpha, \cos \alpha, \sin \alpha, 0 \ 0 \ 0 \ 000 \ -1 \ 0\} \quad (12.77)$$

$$h_4 = \{-v_3 \cos \alpha, -v_3 \sin \alpha, v_X, (\omega_3 - \Omega \sin L) \cos \alpha, (m_3 - Q \sin L) \sin \alpha, -\sin \alpha, \cos \alpha, 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 00 \ -1\}. \quad (12.78)$$

Le système hybride est ainsi mis sous la forme canonique des équations d'un filtre de Kalman (équations (4.89) à (4.95)).

12.4.3 PERFORMANCES DU SYSTÈME HYBRIDE OPTIMAL

Le calcul des performances du système hybride optimal est aisé. Il suffit d'intégrer numériquement sur ordinateur les équations (4.102) à (4.122) donnant la covariance $\Sigma(t)$ de l'erreur du filtre de Kalman qui utilise les mesures auxiliaires pour former la meilleure estimée $\hat{x}$ du vecteur d'état.

Les caractéristiques numériques des divers instruments que l'on a utilisées figurent sur le tableau 10-4 et le tableau 12-1. L'alignement initial est supposé réalisé par un gyrocompas classique, les caractéristiques figurant sur le tableau 10-4. La trajectoire utilisée est une trajectoire d'avion d'une durée de 4 heures.

On a représenté les résultats (écart-type des quantités) sur les figures 12-9 à 12-12 pour les différents modes: inertie pure, inertie+Doppler, inertie+recalage, inertie+Doppler+recalage.

TABLEAU 12-1

Valeurs numériques des erreurs instrumentales de système hybride

Doppler:

$$\text{Biais: } \begin{cases} l_{lx} = 0,5 \text{ mis} \\ l_{ly} = 0,5 \text{ mis} \end{cases}$$

$$\text{Bruit blanc: } \begin{cases} \sqrt{r_3} = 0,5 \text{ msl/100 s} \\ \sqrt{r_4} = 0,5 \text{ msl/100 s} \end{cases}$$

$$\text{Mesure de position: c.E.P.} = 1200 \text{ m}$$

On voit se dégager des courbes - pour le système considéré - les conclusions suivantes:

- les performances du système optimal avec Doppler sont améliorées d'un facteur 3 par rapport à celles du système à inertie pure,
- avec un couplage Doppler et des recalages de position optimaux, le C.E.P. reste toujours inférieur à 2 km.

D'autre part le mode inertie-Doppler optimal est capable de réaliser l'alignement en vol: on a représenté sur les figures 12-13 et 12-14 l'évolution du C.E.P. et de l'erreur de cap (à 1σ) lorsqu'on emploie ce mode inertie-Doppler optimal après avoir introduit la position avec un C.E.P. de 600 m et un alignement grossier (erreur de cap de 6° à 1σ). On peut comparer les courbes correspondant à cet alignement en vol avec les performances du système optimal initialement bien aligné; en 20 minutes on a pratiquement retrouvé les performances du système optimal bien aligné.

12.4.4 MÉCANISATION DU FILTRE DE KALMAN

La mécanisation effective du filtre est schématisée sur la figure 12-14. On présente ci-après des équations précises où l'on a choisi d'utiliser la technique de l'épsilon pour insensibiliser le filtre (paragraphe 4C3.4) et d'intégrer l'équation différentielle donnant Φ et Σ par une méthode de Runge-Kutta d'ordre deux (voir l'annexe 6).

i) Entre deux observations

Les éléments entrant dans la matrice $F(t)$ proviennent du programme de mécanisation. On les utilise pour calculer Φ à l'aide des formules:

$$\Phi(t+h, t) = I + \frac{h}{4} F(t) + \frac{h^2}{4} F'(t + \frac{2}{3}h) + \frac{h^3}{2} F''(t + \frac{2}{3}h) F(t) \quad (12.79)$$

$$\Sigma_-(t+h) = \Phi \Sigma_+(t) \Phi' + hQ + \frac{h^2}{2} \left\{ F \left(t + \frac{2}{3}h \right) Q + Q F' \left(t + \frac{2}{3}h \right) \right\}. \quad (12.80)$$

ii) A l'instant d'une ou de plusieurs observations

On traite séquentiellement (après test) les observations présentes Y_i par

$$\hat{x}_+ = \hat{x}_- + K[y_i - h_i \hat{x}_-] \quad (12.81)$$

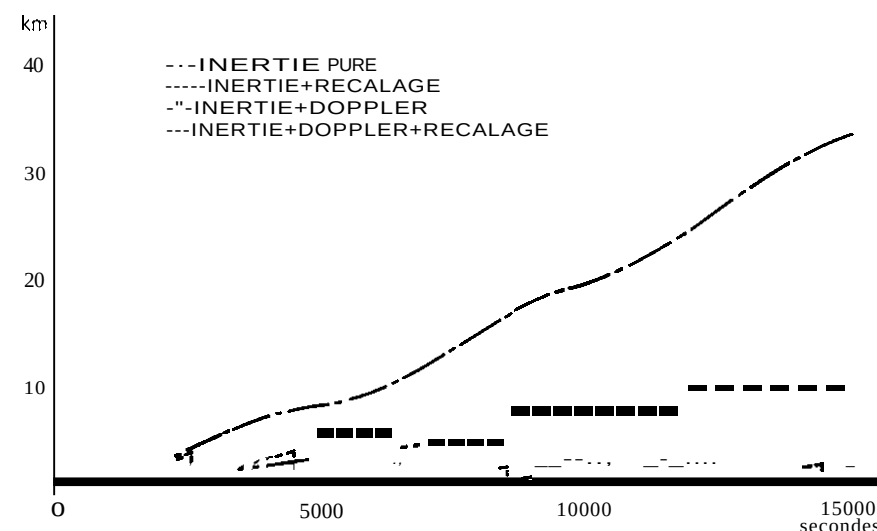
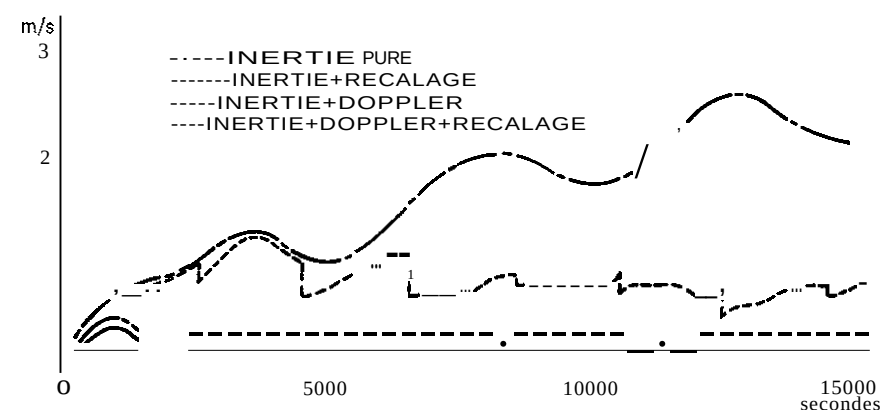
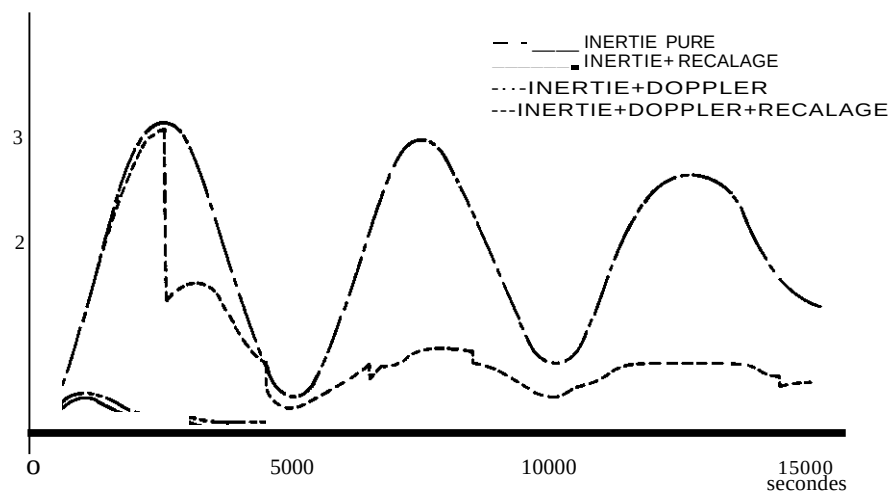
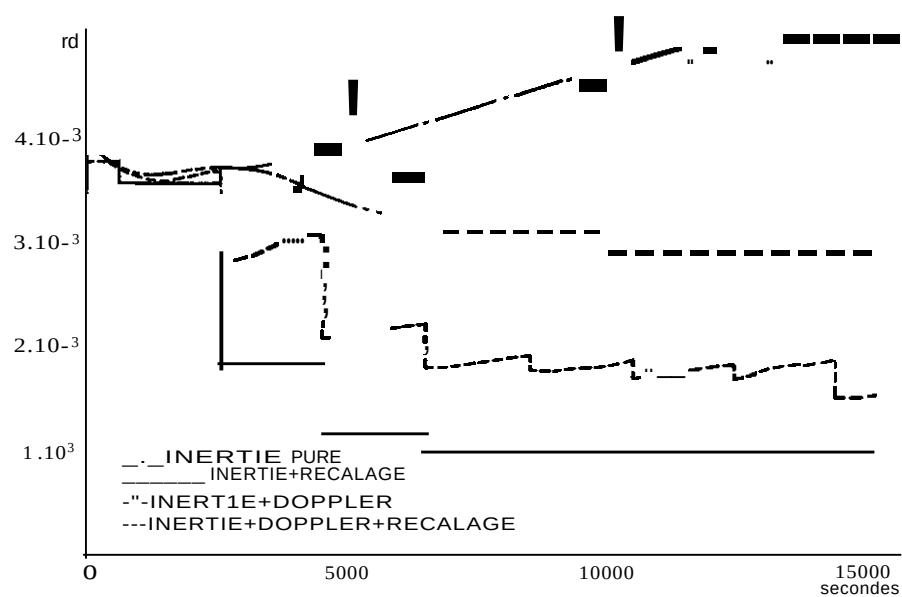


Figure 12-9. C.E.P. (erreur de position).

Figure 12.10. ΔV_x (erreur de vitesse).

Figure 12-11. ΔV_Y (erreur de vitesse).Figure 12-12. PHI_Z (erreur de cap).

avec (voir expressions (4.322) à (4.327) :

$$K = \mu^{-1} q + \varepsilon(\rho^{-1} p - \mu^{-1} q) \quad (12.82)$$

$$\Sigma_- h'_i = p \quad X h'_i = q \quad (12.83)$$

$$h_i \Sigma_- h'_i + r_i = p \quad h_i X h'_i = I \quad (12.84)$$

et

$$\Sigma_+ = \Sigma_- - \rho[(\rho^{-1} p)(\rho^{-1} p)' - \varepsilon^2(\mu^{-1} q - \rho^{-1} p)(\mu^{-1} q - \rho^{-1} p)'] \quad (12.85)$$

CEP
(km)

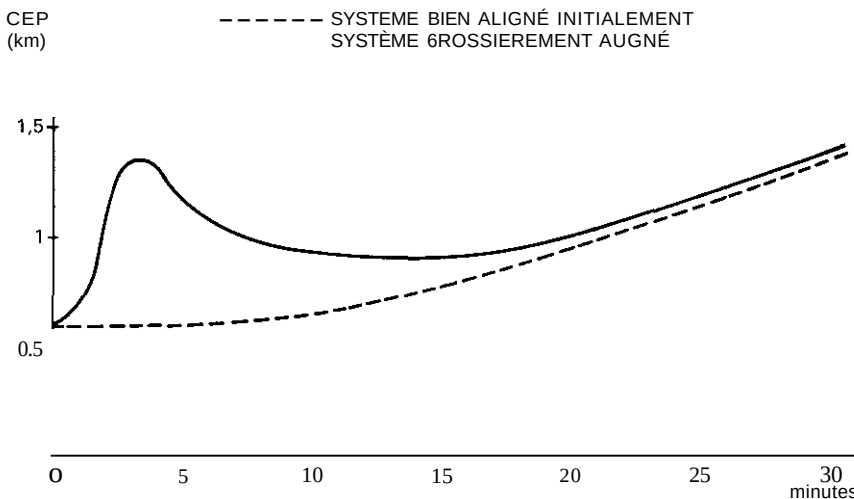
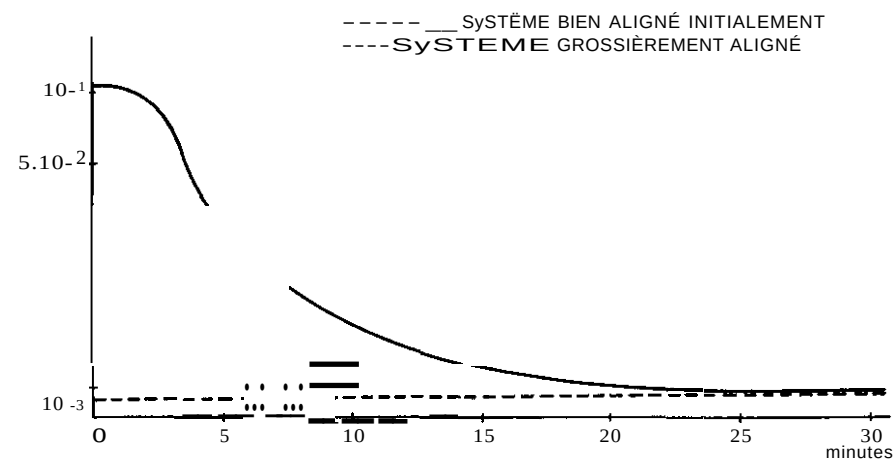


Figure 12-13. Alignement en vol (évolution du c.E.P.).

Figure 12-14. Alignement en vol (évolution du PHI_Z).

iii) Recalage (éventuel)

Après avoir mis à jour l'estimée $\hat{x}$, on peut éventuellement utiliser certaines composantes (erreurs de position et de vitesse par exemple) pour recalibrer les paramètres correspondants du programme mécanisant la navigation inertielle. Dans ce cas il convient bien sûr d'annuler les composantes de $\hat{x}$ qui ont été recalées.

Bien entendu il convient d'initialiser correctement le processus (introduction de $\Sigma(t_0) = A_0$ à l'instant de commutation en mode optimal après l'alignement initial). Du fait de grandes variations au cours du temps de certains éléments de la matrice Σ , il convient de faire au moins les calculs relatifs à Σ en virgule flottante. Le pas d'intégration h du filtre varie typiquement de quelques secondes à quelques minutes suivant les applications.

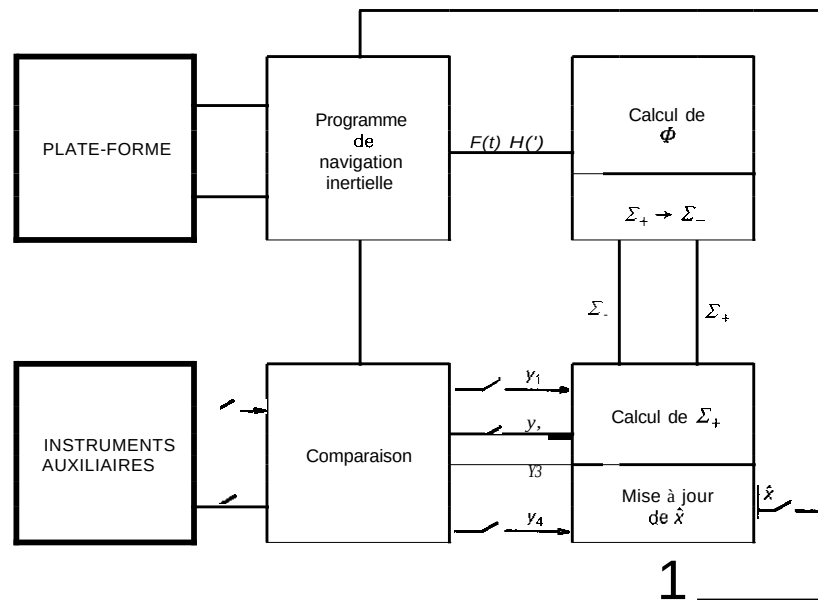


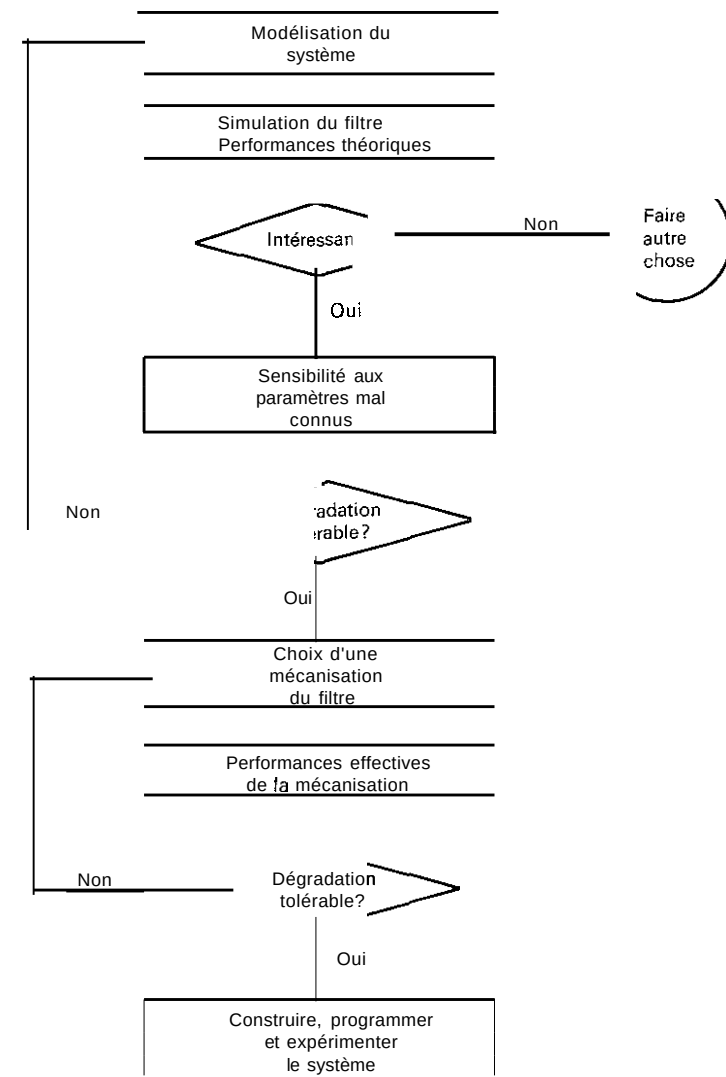
Figure 12-15. Mécanisation du filtre de Kalman.

12.5 Méthodologie pour la synthèse d'un système optimal

La synthèse d'un filtre de Kalman, tel celui présenté au paragraphe précédent, est un problème délicat: dans la plupart des cas, les modèles markoviens sont connus avec peu de précision du fait du manque d'expérimentation statistique, et l'effet de telles imprécisions sur les performances finales n'est pas clair. D'autre part le choix du pas d'intégration du filtre ou du type d'arithmétique (flottante ou fixe) et de la longueur des mots à utiliser n'est pas évident très souvent.

Il convient donc au cours de l'étude préliminaire d'utiliser un programme donnant la sensibilité du filtre à ces paramètres. On a présenté dans le complément 3 du chapitre 4 diverses méthodes permettant de calculer cette sensibilité.

La méthodologie à suivre pour la synthèse du filtre est alors schématisée par l'organigramme suivant



Afin d'illustrer ces considérations, on a représenté ci-après la courbe de sensibilité sur le C.E.P. du système précédent du fait qu'un biais d'accéléromètre de $2 \cdot 10^{-4}$ g (à 1 σ) a été négligé (figure 12-16). Cette courbe correspond au mode inertie + Doppler.

% Dégradation

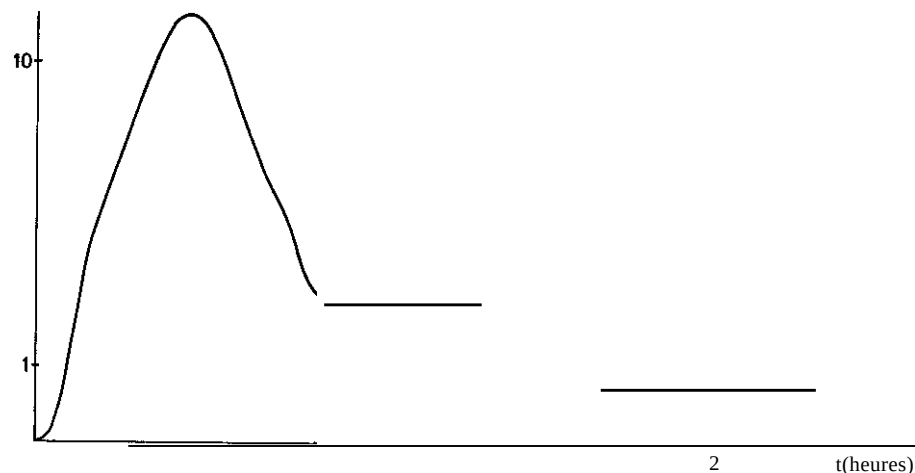


Figure 12-16. Dégradation de performance sur le c.E.P.

CHAPITRE 13

SYSTÈME DE NAVIGATION À INERTIE NAVIGATEUR SAGEM INERTIEL (NSI)

L. CAMBERLEIN

La navigation par inertie est une technique encore très jeune puisque les premiers systèmes expérimentaux ne datent que d'une quinzaine d'années. Comme beaucoup d'autres techniques appliquées à l'aéronautique, elle a été défrichée et explorée pour des applications militaires. L'ensemble des possibilités potentielles étonnantes de la navigation inertielle avait de quoi séduire les états-majors et leurs pilotes; la position géographique, la verticale vraie, le cap vrai, la vitesse sol, la route vraie, tout cela quelles que soient les évolutions de l'avion et son facteur de charge, sans interruption ni passage en mémoire, sans limitation géographique, sur terre, sur mer, sans possibilité de brouillage et, ce qui est encore plus attrayant, de façon parfaitement autonome et discrète.

Les débuts furent difficiles car si les principes à mettre en œuvre sont relativement simples, le niveau de technologie nécessaire est très élevé et la complexité de l'ensemble d'un système inertielle assez grande. Les premiers systèmes opérationnels étaient peu fiables, de performances médiocres, lourds et volumineux. Malgré tout ils furent utilisés sur les avions militaires pour leurs avantages.

Les technologies se sont améliorées et avec elles la précision, la fiabilité et l'encombrement. Le prix également a diminué. En 1969, l'aviation commerciale a commencé à se servir de système de navigation par inertie. Les besoins en précision de navigation et de verticale y sont importants à cause de l'augmentation du trafic aérien et de l'apparition des avions supersoniques commerciaux.

On voit ainsi peu à peu se généraliser l'utilisation de la technique de navigation par inertie dans l'aéronautique militaire et commerciale. Mais si la technique inertielle se généralise, la définition des systèmes et leur technologie dans l'un et l'autre cas restent assez différentes. L'aviation commerciale a pu déjà se donner une norme internationale, la norme ARINC-56J. Par contre en matière militaire la variété des applications et de leurs spécifications est grande. Les conditions d'environnement, le domaine dynamique de fonctionnement, la définition des signaux de sortie, les modes et les procédures d'utilisation opérationnelle, les contraintes de packaging sont autant de rubriques pour lesquelles il peut exister des différences notoires dans chaque cas d'application. On trouve par exemple presque un ordre de grandeur entre les conditions

vibratoires ou le facteur de charge admissible d'un avion militaire très rapide et celui d'un transport ou d'un avion de ligne commerciale.

En outre, les systèmes militaires sont souvent intégrés dans d'importants systèmes d'arme et de navigation. La visualisation et les commandes sont centralisées avec celles d'autres équipements, les signaux de sortie sont largement distribués aux radars, viseurs, pilote automatique, calculateurs spécialisés ou central. Cependant l'autonomie du système à inertie est impérative car il en va de la sécurité de l'avion pour la verticale et du retour à la base pour la navigation.

La recherche de grandes performances de navigation conduit généralement à combiner les informations de l'inertie avec celles d'autres équipements donnant soit la vitesse (radar Doppler), soit la position (radar, télémètre-laser, Loran, Tacan, sextant). Ainsi le couplage inertie-Doppler classique a permis d'améliorer la précision médiocre donnée par les premiers systèmes à inertie. Aujourd'hui des techniques plus élaborées, comme le filtrage de Kalman, servies à point nommé par le développement de calculateurs embarqués miniatures puissants, permettent d'espérer pouvoir mieux tirer parti de l'amélioration des systèmes à inertie comme de celle des autres équipements de navigation. Des possibilités et des performances remarquables sont ainsi ouvertes: des informations de navigation très précises — position, vitesse, cap — pour des vols de courte et aussi de longue durée, la possibilité d'alignement en vol ou sur plate-forme mobile (porte-avion), d'alignement autonome rapide au sol, etc.

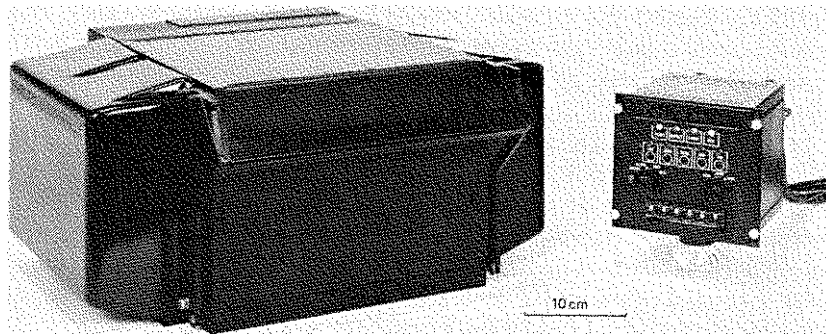


Figure 13-1. Navigateur SAGEM Inertiel (NSI). Unité Inertielle (VI) et Unité de Commande et de Visualisation (VCV).

13.1 Définition du navigateur SAGEM inertiel (NSI)

Le NSI est un système de navigation par inertie compact et léger qui correspond aux besoins des avions militaires modernes. Il comprend deux unités: l'unité inertielle (UI) et l'unité de commande et de visualisation (UCY) (figure 13-1). Sa technologie a été étudiée pour supporter les environnements vibratoires, thermiques et atmosphériques sévères qui caractérisent tous les équipements de cette catégorie. Les informations de sortie fournies sont essentiellement la position présente en latitude et en longitude, la vitesse par ses composantes nord et est et les angles de cap, roulis et tangage. L'alignement de la plate-forme est automatique, autonome et dure une quinzaine de minutes. Un mode d'alignement plus rapide est possible si une référence de cap extérieure est disponible. Cette caractéristique peut être indispensable dans certaines utilisations opérationnelles où le temps de réaction a une grande importance.

L'élément de calcul nécessaire à la mécanisation des équations de fonctionnement d'alignement et de navigation est un analyseur différentiel numérique (DDA). Cette technique est rendue possible par les développements électroniques récents (LSI) et permet d'atteindre les précisions numériques nécessaires tout en conduisant à un volume relativement réduit.

Un mode de fonctionnement secours autonome est prévu en cas de panne de l'analyseur différentiel ou de ses interfaces avec la plate-forme. Dans ce mode le système inertiel ne fournit plus d'information de navigation mais des informations de verticale et de cap directionnel comme une centrale gyroscopique conventionnelle mais avec la qualité permise par des gyroscopes et des accéléromètres de classe inertielle.

Le NSI est conçu pour être intégré à un système de navigation complexe auquel il transmet ses informations de sortie et dont il peut éventuellement recevoir en retour des informations de correction et de recalage.

La conception modulaire de l'unité inertielle NSI permet de l'adapter à des applications et à des conditions opérationnelles variées. En effet la fonction détection de position, de vitesse et d'attitude forme un tout qui peut être séparé de l'adaptation - au sens large du terme - à l'utilisation qui en est faite dans chaque application. Cette adaptation concerne non seulement les caractéristiques électriques des signaux échangés mais également les besoins opérationnels de navigation et de guidage qui sont différents selon qu'il s'agit d'avions d'assaut, de patrouilleur ASM, de transport, etc. Le navigateur inertiel NSI correspond à cette fonction de détecteur standard de grande performance, les adaptations nécessaires sont laissées à des équipements spécialisés, étudiés pour chaque application.

13.2 Organisation fonctionnelle. Signaux d'entrée/sortie

Le synoptique de la figure 13-2 décrit schématiquement l'organisation fonctionnelle et les signaux d'entrée/sortie du NSI. Les accéléromètres de la

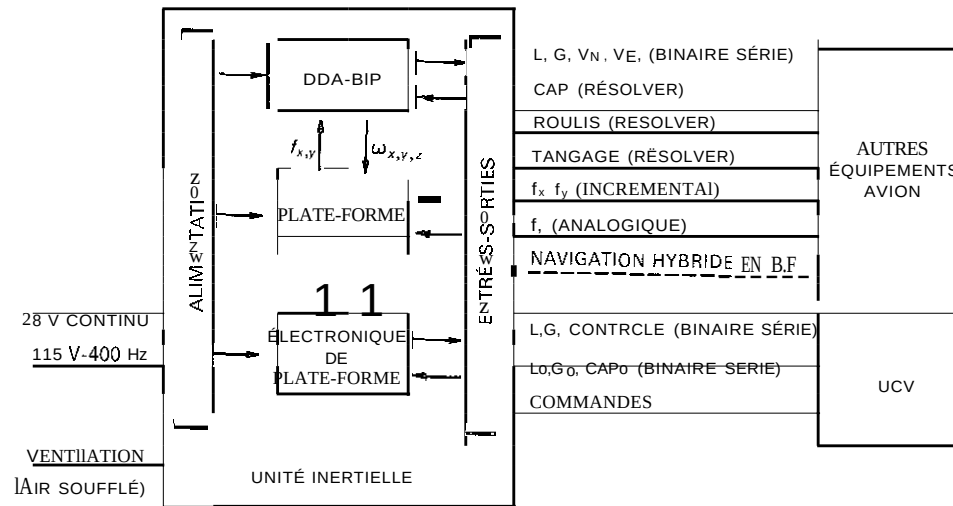


Figure 13-2. Synoptique. Signaux d'entrée/sortie.

plate-forme mesurent les composantes de force spécifique f_x , f_y et f_z dans le trièdre plate-forme; les signaux analogiques correspondants sont transformés en un débit d'impulsions par des convertisseurs tension-fréquence appelés intégrateurs digitaux analogiques (IDA). Les signaux sont transmis au DDA

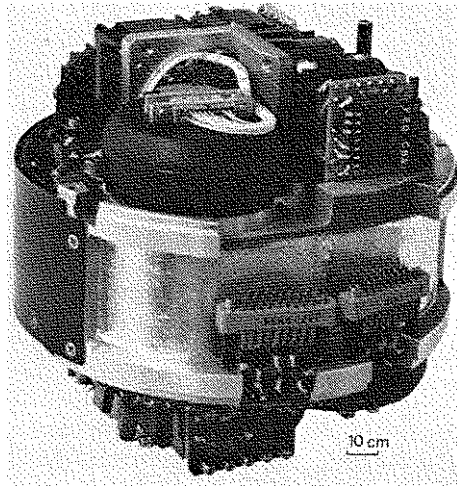


Figure 13-3. Cœur de la plate-forme NS/.

qui en assure le traitement numérique correct et retourne vers la plate-forme sous forme incrémentale les commandes de vitesse angulaire ω_x , ω_y , ω_z destinées aux gyroscopes.

Les informations de position initiale, de cap approché initial et de sélection de mode proviennent de l'unité de commande et de visualisation (UeV). Elles sont transmises par une liaison binaire-série. Une liaison spéciale est prévue en option pour le couplage ou fonctionnement hybride en boucle fermée.

Les informations de sortie sont de deux types. D'une part des informations de navigation, position présente en latitude et longitude et composantes nord et est de la vitesse, en mots pleins binaires sur une ligne série. Sur cette ligne on transmet aussi, groupés en un mot de contrôle, des signaux discrets décrivant les états de fonctionnement et de panne, d'autre part des informations d'attitude, en roulis tangage, et de cap sous forme résoudre. Par ailleurs l'unité inertielle fournit également les forces spécifiques f_x , f_y sous forme incrémentale et f_z sous forme analogique.

13.3 Unité inertielle (UI)

Elle est contenue dans un boîtier dont les dimensions et le format sont imposés par l'utilisation (figure 13-1). Son volume et sa masse sont respectivement d'environ 25 litres et 20 kilogrammes.

L'unité inertielle peut être décomposée en sous-ensembles dont les principaux sont les suivants: la plate-forme qui contient les éléments sensibles, gyroscopes et accéléromètres, l'électronique de plate-forme, le bouclage incrémental de plate-forme, la batterie et l'alimentation. Ces sous-ensembles sont répartis dans les différents compartiments du boîtier. Le compartiment plate-forme est particulier, il est étanche, pour permettre le fonctionnement en soute non pressurisée, et de plus régulé en température constituant le premier étage du système de contrôle thermique nécessaire au bon fonctionnement des gyroscopes.

Le boîtier possède trois alésages qui servent de références d'orientation par rapport au trièdre avion. Sa structure est suffisamment rigide pour assurer ce calage de façon précise et fidèle et soutenir les contraintes mécaniques et thermiques auxquelles il est exposé.

13.3.1 PLATE-FORME

La plate-forme a quatre cardans, en partant du centre l'azimut, le roulis intérieur, le tangage et le roulis extérieur. Les gyroscopes et accéléromètres sont montés sur le cardan d'azimut, l'ensemble ainsi constitué est appelé cœur (figure 13-3). Les cardans sont commandés par des moteurs couples de façon à asservir le cœur aux précessions des gyroscopes en dépit des couples parasites de frottement pratiquement inévitables. Cet arrangement mécanique classique permet d'isoler complètement le cœur de la structure avion et autorise ainsi n'importe quelle évolution (voir chapitre 7).

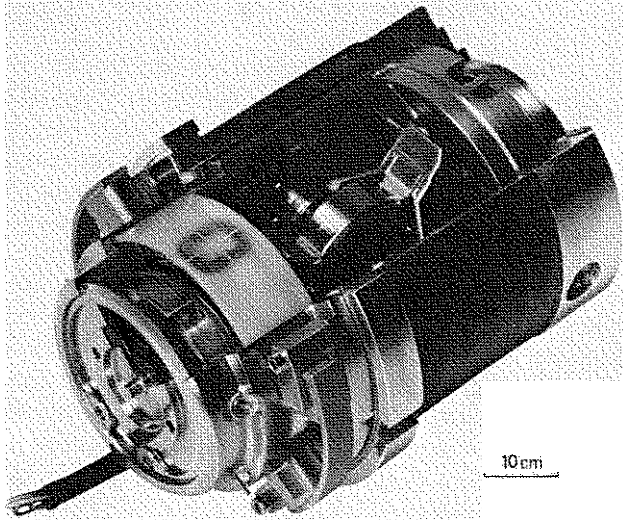


Figure 13-4. Gyroscopie intégrateur flotté à un degré de liberté (SAGEM).

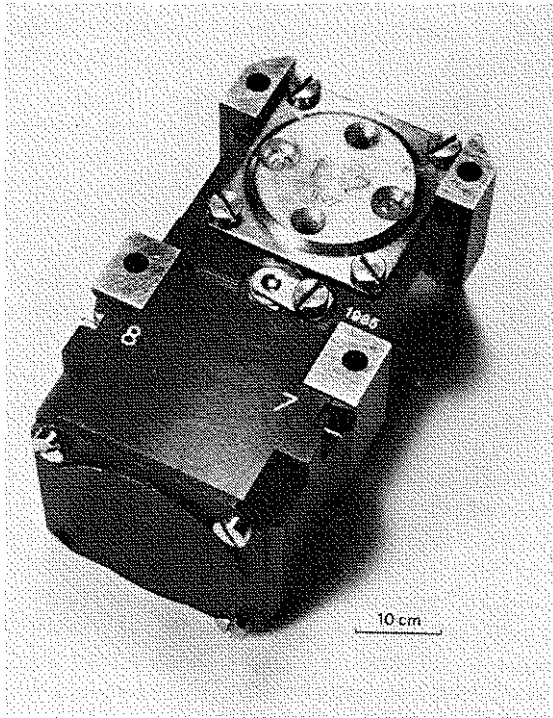


Figure 13-5. Accéléromètre pendulaire à un axe (SAGEM).

Les angles d'attitude, roulis et tangage, sont directement les angles du cardan de roulis extérieur par rapport à l'avion et du cardan de tangage par rapport au cardan de roulis extérieur. Le cap est directement l'angle du cardan d'azimut par rapport au cardan de roulis intérieur car la mécanisation choisie pour le système est du type asservi au nord. Tous ces angles sont transmis par des résolveurs.

La plate-forme est fixée dans le boîtier de plate-forme par l'intermédiaire de bagues antivibratoires, en élastomère, situées aux deux extrémités du cardan de roulis extérieur.

Les trois gyroscopes SAGEM sont du type flotté à un degré de liberté, leurs dérives sont faibles, qu'il s'agisse des dérives aléatoire ou de jour à jour (figure 13-4).

Les trois accéléromètres SAGEM sont du type pendulaire-asservi à un axe de sensibilité. Leurs caractéristiques principales sont d'avoir un faux zéro appelé biais et une erreur de facteur d'échelle petits et stables (figure 13-5).

13.3.2 ELECTRONIQUE DE PLATE-FORME

Une unité inertielle moderne est un ensemble électromécanique de grande précision dont la mise en œuvre fait appel à des circuits électroniques de fonction, de technique, de technologie variées et de performances élevées.

Parmi les fonctions les plus importantes on peut citer: les asservissements de cardan, les asservissements des pendules des accéléromètres, les convertisseurs courant-fréquences (IDA) des signaux accélérométriques, les circuits de calibration des commandes digitales incrémentales des moteurs couples des gyroscopes (CDG), le standard de fréquence, les alimentations régulées des moteurs de toupie des gyroscopes, les excitations des détecteurs des gyroscopes et des accéléromètres, les régulations de température des gyroscopes, du cœur,

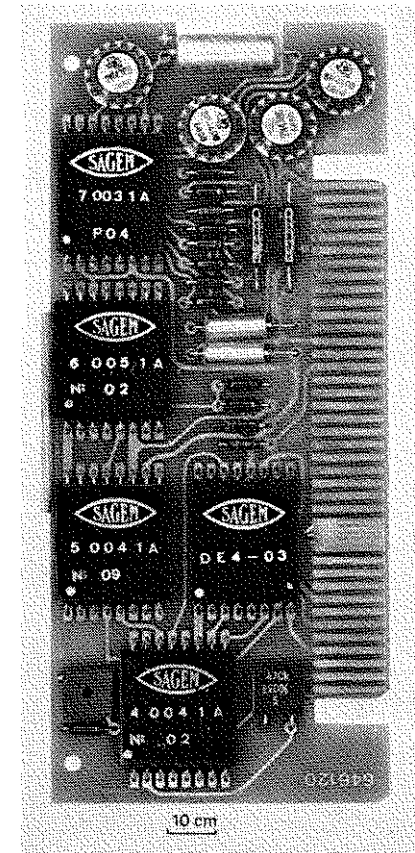


Figure 13-6. Module analogique de l'unité inertielle. Circuit imprimé double-face et microélectronique hybride.

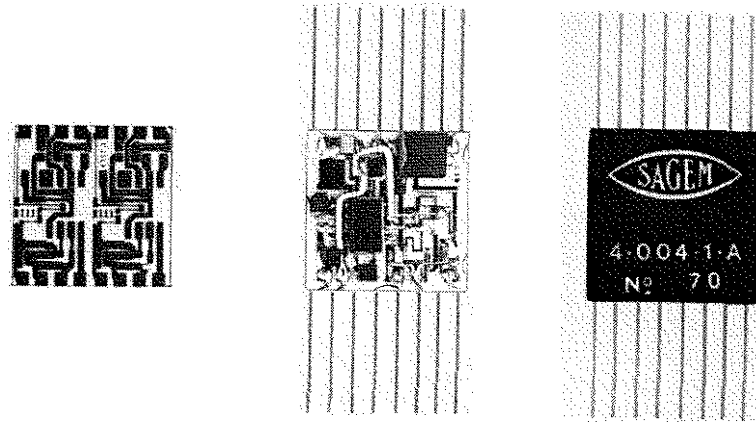


Figure 13-7. Micromodules hybrides à couches mince.
 a) Avant dépôt des éléments rapportés.
 b) Avant enrobage.
 c) Après enrobage.

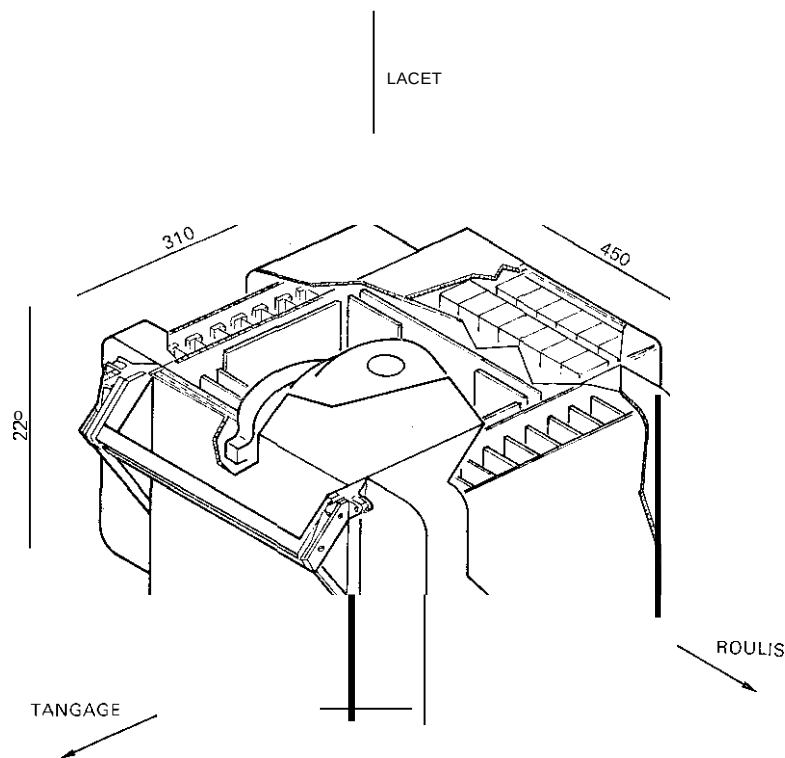


Figure 13-8. Bottier de l'unité inertielle NSf.

des dômes et du boîtier, les circuits de détection de panne, les logiques de contrôle.

La réalisation de ces fonctions utilise des techniques et technologies analogiques et digitales récentes : de la microélectronique analogique hybride pour les circuits les plus répétitifs tels que pré-ampli, démodulateur, comparateur — la technologie employée est celle des couches minces, c'est-à-dire dépôt métallique des interconnexions et des résistances sur substrat céramique, par évaporation sous vide à travers différents masques; les capacités, transistors et circuits intégrés en microboîtier sont rapportés par soudure (figures 13-6 et 13-7) — ; des circuits intégrés analogiques, par exemple des ampli-opérationnels j1A 709 et j1A 727 qui constituent les éléments de base d'un grand nombre de fonctions; des composants discrets conventionnels résistances, capacités, diodes, transistors... pour les circuits de puissance; des circuits intégrés digitaux portes multiples, bascules, registres à décalage pour les divisions de fréquences et les logiques de contrôle. Ces composants sont assemblés en module sur des cartes de circuits imprimés enfichables. Les circuits imprimés sont pour quelques-uns simple-face, plus généralement double-face et multi-couche quand la densité est particulièrement grande comme c'est le cas par exemple pour les circuits de conversions IDA et CDG,

Précision, fiabilité, aptitude à la maintenance - maintenabilité —, miniaturisation sont les caractéristiques que l'on demande à cette électronique. Pour la précision, par exemple, les ordres de grandeur de 5.10^{-4} à 10^{-5} sont des spécifications fréquentes qui correspondent aux précisions des gyroscopes et des accéléromètres.

La répartition de ces circuits est faite entre le compartiment plate-forme, qui est régulé en température pour les circuits de précision et les compartiments extérieurs pour le reste de l'électronique (figure 13-8).

13.3.3 ANALYSEUR DIFFÉRENTIEL NUMÉRIQUE DDA-BIP (figure 8-51)

Le DDA-BIP est un élément de calcul spécialisé de la famille des analyseurs différentiels numériques (DDA) qui opère sur des incréments plutôt que sur des mots pleins binaires (voir paragraphe 8.14). Ses principales caractéristiques sont un volume réduit, une grande simplicité fonctionnelle, une utilisation systématique de composants électroniques à haut niveau d'intégration de technologie MûS (Métal-ûxyde-Silicium) qui lui assure de surcroît une grande fiabilité.

Le composant de base est un opérateur DDA qui réalise en un seul boîtier l'équivalent d'une fois et demie la fonction intégration DDA classique. Ce circuit LSI représente environ 850 transistors MûS. Il possède plusieurs modes de fonctionnement, qui sont choisis par câblage, intégrateur-simple, intégrateur-double, comparateur, extenseur d'entrée. Les échelles sont mémorisées au cours de l'initialisation. La programmation d'une fonction de calcul DDA s'obtient par câblage de la chaîne d'opérateurs nécessaires et son initialisation

par mise en série de tous les registres puis chargement à partir d'une mémoire d'initialisation (figure 8-50).

Le DDA-BIP, mécanise les équations d'alignement et de navigation de façon incrémentale, d'où son nom de bouclage incrémental de plate-forme (BIP). Il reçoit les incréments de forces spécifiques $x' f_y$, émet les taux de commande des gyroscopes $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, sous forme d'incrément de rotation; il élabore sous forme de mots pleins binaires, en mode navigation, la position en latitude et longitude et la vitesse par ses composantes nord et est. Son organisation est du type parallèle pour l'ensemble des opérateurs et série au niveau de chacun d'eux. Les fréquences horloge et mot sont respectivement de 125 et 5 kHz. Les 4096 bits de mémoire nécessaires à son initialisation sont fournis par des composants de mémoire morte très intégrés, également de technologie MaS.

13.3.4 ALIMENTATION

L'alimentation est chargée des commutations de puissance et de la distribution des tensions régulées nécessaires à partir du 115 volts-400 hertz et du

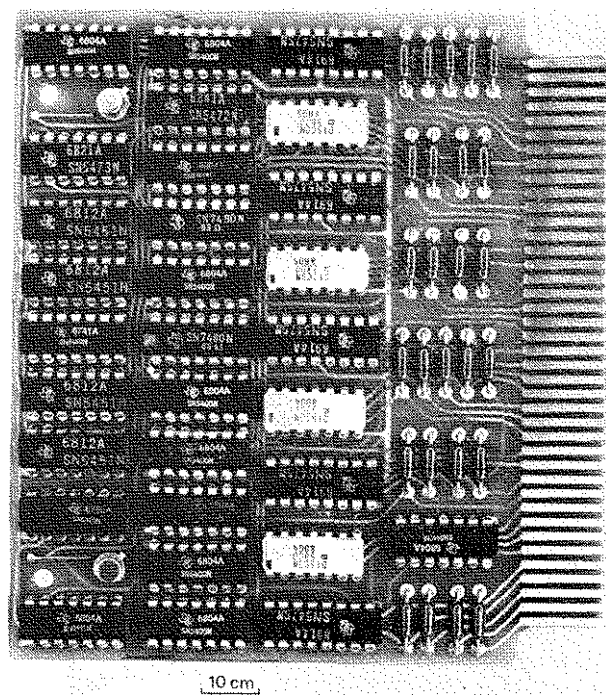


Figure 13-9. Module logique de l'VCV. Circuit imprimé multicouche et circuits intégrés TTL.

28 volts continu de l'avion. La régulation est indispensable pour absorber les transitoires d'alimentation primaires qui sont sévères sur avion; ainsi, en fonctionnement normal, des chutes de tension de 28 V à 5 ou 10 V pendant 10 ms sont possibles. Une commutation automatique sur batterie est prévue si l'alimentation primaire tombe en dessous de certaines valeurs, en particulier lors des commutations du groupe de park sur l'alimentation de bord.

Le fonctionnement de l'alimentation est contrôlé par des thermostats qui surveillent la température des points critiques et entraînent la disjonction de l'unité inertielle en cas de température excessive.

13.4 Unité de commande et de visualisation (UCY)

L'UCV (figure 13-1) groupe tous les éléments de commande de mode de fonctionnement, de visualisation et de contrôle de l'unité inertielle. C'est à partir de l'VCV que l'on initialise la position et le cap par un affichage numérique à molettes et par des voyants-poussoirs.

La latitude et la longitude de la position présente sont visualisées, en permanence, par des indicateurs lumineux où chaque chiffre est reproduit par un jeu de sept segments éclairés par des lampes incandescentes miniatures. Les gravures sont elles-mêmes éclairées, par la tranche, pour permettre une lecture aisée dans la pénombre du cockpit avion. Pour éviter les fausses manœuvres en vol, la position navigation du sélecteur de mode est muni d'un verrouillage mécanique.

Le boîtier de l'UCV contient tous les circuits électroniques nécessaires aux divers codages, décodages et traitements digitaux ainsi qu'à la commande de toutes les visualisations. La masse de l'ensemble est d'environ 2,5 kilogrammes (figure 13-1).

13.5 Définition des modes de fonctionnement

Les modes de fonctionnement sont choisis par le sélecteur de mode de l'UVC; ils sont au nombre de six: Arrêt, Veille, Alignement, Navigation, Couplage et Secours. Deux d'entre eux, Veille et Couplage, sont imposés par les conditions opérationnelles particulières d'emploi; les autres sont classiques pour un système inertielle.

En mode Arrêt, toutes les alimentations sont coupées.

En mode Veille seuls sont sous tension les circuits de chauffage et de régulation thermique de l'unité inertielle.

Le mode Alignement est le mode préparatoire à la navigation. On peut y venir soit directement, soit après un mode Veille. Il doit être effectué l'avion à l'arrêt et dure entre 10 et 15 minutes, suivant l'état thermique initial. Il est entièrement autonome et automatique, excepté l'introduction du cap et de la position qui est faite par le pilote à partir de l'VCV. Ce mode réalise la mise en condition thermique et électrique de l'unité inertielle et procède à l'orien-

tation du cœur de la plate-forme de manière à faire coïncider son trièdre avec le trièdre de calcul qui coïncide lui-même avec le trièdre géographique local, après introduction de la position présente. Cette orientation est faite en plusieurs étapes de calage horizontal et de gyrocompas. La fin de l'alignement est détectée de façon automatique et signalée par le clignotement du voyant alignement de l'UCV, ce qui autorise le passage en navigation.

En mode Navigation, la plate-forme est commandée de façon à rester horizontale et orientée vers le nord. La position présente, en latitude et longitude et les composantes nord et est de la vitesse sont calculées et disponibles en permanence.

Le mode Couplage met hors circuit le bouclage incrémental et permet de commander la plate-forme par un élément de calcul extérieur. De cette façon peut être réalisé n'importe quel type de couplage ou de mode de fonctionnement hybride. Une liaison spéciale est prévue pour tenir à jour le DDA-BIP, et permettre ainsi, à tout moment, le retour du système en mode Navigation autonome.

Le mode Secours est utilisé lorsque le DDA-BIP, ou les circuits de conversion IDA et CDG, ou leurs liaisons, sont en panne, ou bien lorsque l'alignement au sol n'a pas été effectué. L'unité inertielle fonctionne alors comme une centrale d'attitude et de cap. Des bouclages non linéaires sont réalisés entre les accéléromètres et les gyroscopes pour limiter les erreurs de verticale en évolutions. En cap la plate-forme est laissée en dérive libre.

13.6 Alignement

13.6.1 PRINCIPE

L'enchaînement des différentes phases de l'alignement et leurs durées moyennes sont données par la figure 13-10. Le contrôle de l'ensemble est assuré par des circuits logiques électroniques.

Après un très court délai, nécessaire à l'établissement des tensions et à l'initialisation de l'électronique, le chauffage rapide commence si l'équilibre thermique n'est pas déjà atteint comme à la suite d'un mode Veille par exemple. Dès 20°C et dès que le cap est introduit, les gyroscopes sont lancés en même temps que les différents cardans de la plate-forme sont asservis au zéro de leurs résolveurs. Pour l'azimut, une logique choisit, en fonction de l'affichage du cap sur l'UCV, parmi les gisements 0, 90, 180 et 270 celui le plus voisin du nord. De cette manière, la consigne d'asservissement sur le résolveur d'azimut est définie à 45 degrés près. Le but de ces divers asservissements est de dégrossir l'orientation du cœur. On appelle souvent cette phase le caging.

Pendant le caging certaines précautions sont prises à l'égard des gyroscopes. Il faut en effet éviter de leur faire subir des vitesses angulaires élevées lorsqu'ils sont à pleine vitesse, au maximum quelques radians par secondes, car les couples gyroscopiques peuvent dans ce cas être suffisants pour détériorer les pivots du

corps flottant et leurs paliers. Pendant les quelques secondes du transitoire de caging, les moments cinétiques des gyroscopes sont trop faibles pour entraîner de tels incidents. Mais en cas de coupure du système et de remise en route immédiate on pourrait craindre des difficultés, c'est pourquoi on prévoit une temporisation de 2 minutes après coupure pour laisser aux toupies le temps de s'arrêter.

Ensuite se déroulent les phases d'alignement proprement dit qui consistent en bouclages accéléros-gyros AX-GY-GZ et AY-GX dont la dynamique est choisie pour assurer le meilleur compromis filtrage-temps de réponse (figure 13-11). La mécanisation de ces bouclages est faite dans le BIP. Trois combinaisons de gains s'enchaînent au fur et à mesure que les erreurs d'attitude et de cap diminuent. On appelle ces trois étapes alignement horizontal gros, gyrocompas gros et gyrocompas fin. Les erreurs initiales, de l'ordre de quelques degrés en attitude et de quelques dizaines de degrés en cap, se réduisent, en fin d'alignement, à quelques secondes et quelques minutes d'arc.

Comme on peut voir sur la figure 13-10, l'introduction de la latitude conditionne le gyrocompas, alors que celle de la longitude n'interdit que le passage en mode Navigation. L'autorisation de passage en mode Navigation dépend également d'un test, sur l'équilibre des bouclages d'alignement et de gyrocompas, qui fait clignoter un voyant de l'VCV quand il est réalisé.

13.6.2 MÉCANISATION

Pendant les phases d'alignement horizontal, le DDA-BIP mécanise les relations suivantes:

$$\dot{v}_x = f_x - K_1 v_x, \quad v_x(0) = 0 \quad (13.1)$$

$$\dot{v}_y = f_y - K_1 v_y, \quad v_y(0) = 0 \quad (13.2)$$

$$\omega_x = -K_1 v_y + O_x \quad (13.3)$$

$$\omega_y = K_2 v_x + Q_y \quad (13.4)$$

$$\omega_z = \Omega_z \quad (13.5)$$

où

$$\Omega_x = Q \cos L \quad (13.6)$$

$$\Omega_y = 0 \quad (13.7)$$

$$\Omega_z = O \sin L. \quad (13.8)$$

Pendant les phases de gyrocompas, le DDA-BIP continue à calculer les relations (13.1), (13.2), (13.3) et (13.4) seul change l'ordre de précession appli-

Les figures 13-11 a et b, décrivent, pour de petits angles, le fonctionnement de la plate-forme mécanisé par les relations (13.1) à (13.10). On a supposé, pour simplifier, que les boucles AX-GY-GZ et AY-GX étaient découplées, ce qui n'est pas exact, en toute rigueur, mais c'est une approximation justifiée dans le cas d'un alignement conventionnel (voir l'expression (11.67) du chapitre 11). Les saturations des commandes de gyroscopes ne sont également pas représentées. Les lignes continues figurent des liaisons réelles du système et les pointillés des liaisons cinématiques.

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ sont les dérives non compensées des gyroscopes.

a_x, a_y sont les accélérations parasites correspondant aux mouvements de l'avion, ce qui entraîne pour les composantes f_x et f_y

$$I_x = -g\varphi_y + a_x \quad (13.11)$$

$$I_y = g\varphi_x + a_y. \quad (13.12)$$

b_x, b_y sont les biais des accéléromètres.

K_1, K_2, K_3 sont des gains qui prennent les valeurs données figure 13-12.

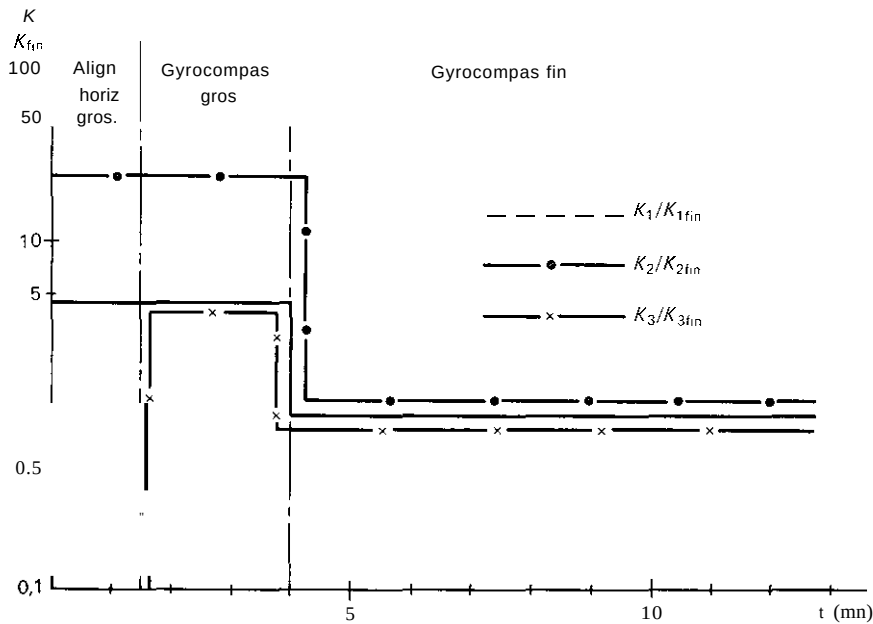


Figure 13-12. Variations des gains pendant l'alignement.

Le système d'équations différentielles linéaires qui décrit la dynamique d'alignement avec gyrocompas des figures 13-11 a et b est :

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_x \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{\varphi}_z \\ \dot{v}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -K_2 & 0 & 0 & 0 \\ g & -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_2 & \Omega_x \\ 0 & 0 & -g & -K_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_2 K_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ a_y + h_y \\ \varepsilon_y \\ a_x + b_x \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (13.13)$$

Il est simple d'en déduire les matrices de transfert et les relations d'entrée/sortie correspondant aux deux systèmes découplés :

$$\begin{bmatrix} \varphi_x \\ v_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_1} \begin{bmatrix} s+K_1 & -K_2 \\ g & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ a_y + b_y \end{bmatrix} \quad (13.14)$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_y \\ v_x \\ \varphi_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_2} \begin{bmatrix} s(s+K_1) & K_2 s + K_2 K_3 \Omega_x & (s+K_1) \Omega_x \\ -gs & s^2 & -g \Omega_x \\ -g K_2 K_3 & K_2 K_3 s & s(s+K_1) + g K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_y \\ a_x + b_x \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (13.15)$$

où Δ_1 et Δ_2 sont les polynômes caractéristiques des boucles d'alignement horizontal et de gyrocompas :

$$\Delta_1 = s(s+K_1) + gK_2 \quad (13.16)$$

$$\Delta_2 = s^2(s+K_1) + gK_2 s + gK_2 K_3 \Omega_x \quad (13.17)$$

Le choix des gains K_1, K_2, K_3 est le résultat d'un compromis temps de réponse-filtrage, compte-tenu des perturbations à prévoir. Ces dernières dépendent de l'avion, de sa bande passante au parking c'est-à-dire de sa taille, de sa masse, et des conditions opérationnelles d'utilisation.

13,7 Navigation

13,7.1 PRINCIPE

Les équations de navigation mécanisées dans le DDA-BIP sont du type asservie au nord. L'avantage de cette mécanisation est double : d'une part, les équations sont particulièrement simples et la technique DDA tire tout le profit de cette simplicité, car le volume d'un DDA est directement proportionnel à celui des calculs à traiter ; d'autre part, la plate-forme étant asservie au nord géographique, le résolver du cardan d'azimut donne directement le cap géo-

graphique, sans calcul. Cette mécanisation est cependant limitée en latitude à environ 75 degrés. Les pôles nord et sud, points singuliers de cette mécanisation, sont la cause de cette limitation (voir chapitre 9). Ce domaine en latitude est suffisant dans la majorité des applications. Cependant une mécanisation toute latitude est possible en augmentant le volume du DDA.

13.7.2 MÉCANISATION

Les équations de navigation asservie au nord traitées dans le DDA-BIP sont;

$$\dot{V}_N = !x + (G + 2Q) V_E \sin L, \quad V_N(0) = 0 \quad (13.18)$$

$$\dot{V}_E = !y - (G + 2Q) V_N \sin L, \quad V_E(0) = 0 \quad (13.19)$$

$$L = \frac{V_N}{R_p}, \quad L(0) = L_0 \quad (13.20)$$

$$\frac{V_E}{R_q \cos L} \quad G(0) = G_0 \quad (13.21)$$

$$1 - \frac{1 + \varepsilon_p \cos 2L}{R_p} \quad (13.22)$$

$$\frac{1}{R_q} = \frac{1 + \varepsilon_q \cos 2L}{R_q} \quad (13.23)$$

où R_p , R_q sont les rayons de courbures suivant le méridien et le parallèle, ε_p , ε_q sont les coefficients d'ellipticité, H est l'altitude moyenne de vol.

Les commandes des gyroscopes sont données par les relations :

$$\omega_x = \dot{G} \cos L + Q \cos L \quad (13.24)$$

$$\omega_y = \dot{L} \quad (13.25)$$

$$\omega_z = \dot{G} \sin L + Q \sin L. \quad (13.26)$$

La forme explicite des relations (13.22) et (13.23) se prête mal au traitement DDA, aussi sont-elles exprimées en pratique sous forme différentielle:

$$d\left(\frac{1}{R_p}\right) = \frac{4\varepsilon_p}{R_{p0} + H} \cos L \, d(\cos L) \quad (13.27)$$

$$d\left(\frac{1}{R_q}\right) = \frac{4\varepsilon_q}{R_{q0} + H} \cos L \, d(\cos L) \quad (13.28)$$

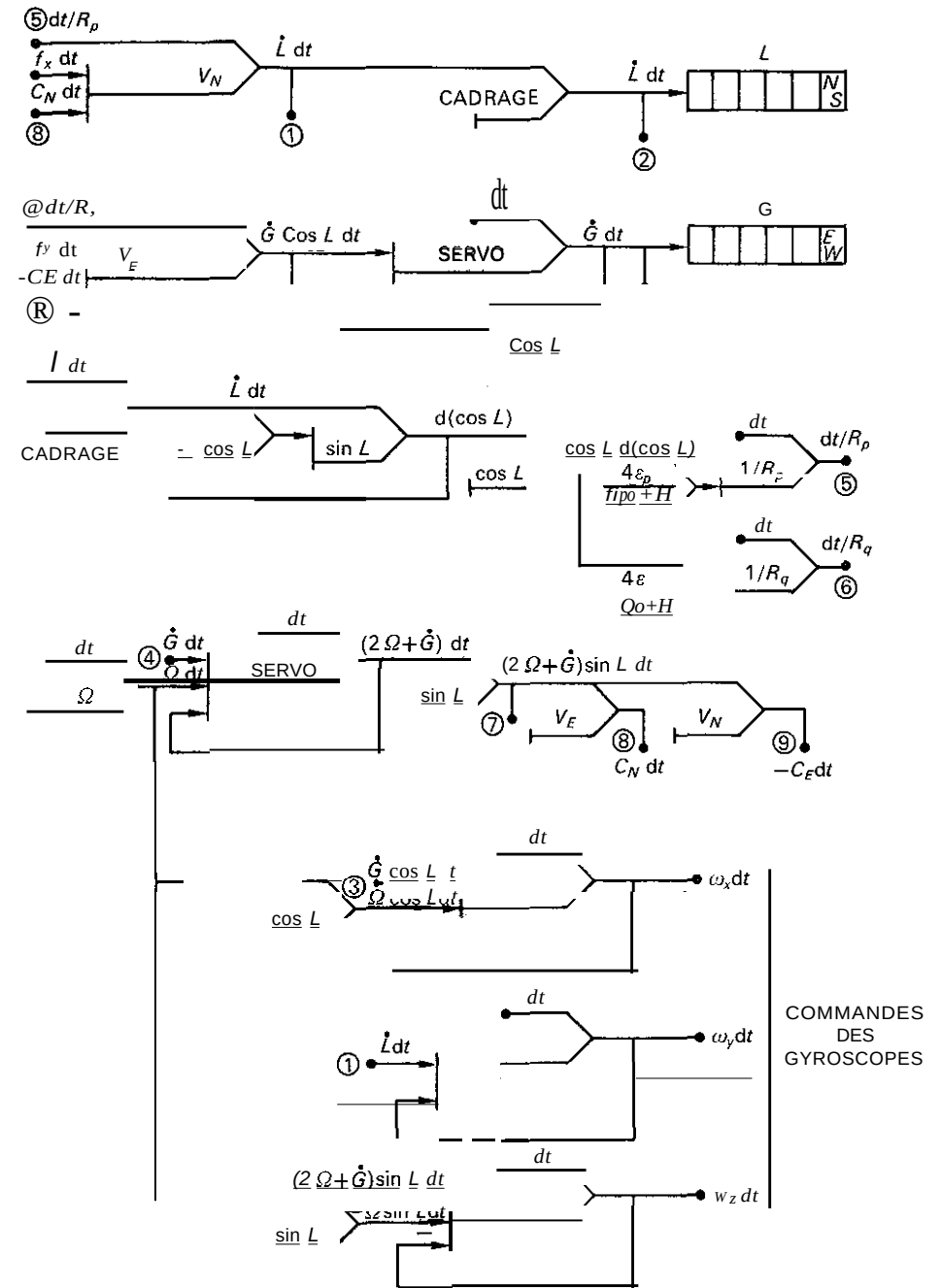


Figure 13-13. Mécanisation des équations de navigation asservie au Nord dans le DDA-BIP.

avec

$$\left(\frac{1}{R_p}\right)_0 = \frac{1 + \varepsilon_p}{R_{p0} + H} \quad (13.29)$$

$$\left(\frac{1}{R_q}\right)_0 = \frac{1 + \varepsilon_q}{R_{q0} + H}. \quad (13.30)$$

De même pour les fonctions trigonométriques de la latitude qui sont calculées à partir des équations différentielles:

$$d(\sin L) = \cos L dL, \quad (\sin L)_0 = 0 \quad (13.31)$$

$$d(\cos L) = -\sin L dL, \quad (\cos L)_0 = 1. \quad (13.32)$$

Les conditions initiales des équations différentielles (13.27), (13.28), (13.31), (13.32) correspondent à $L = 0$. Lors de l'introduction de la latitude initiale L **une logique les incrémente** rapidement jusqu'à cette valeur. o'

Le chaînage des intégrateurs qui mécanisent les relations (13.18) à (13.21) et (13.24) à (13.32) est donné par la figure 13-13.

CHAPITRE 14

LA NAVIGATION INERTIELLE DANS L'AÉRONAUTIQUE CIVILE

P. LLÜRET

14.1 Introduction

La navigation inertielle appliquée aux avions commerciaux est une «retombée» des programmes militaires. Mais la transposition du domaine militaire au domaine civil a demandé des efforts considérables, qui ont même dépassé parfois les possibilités de certains «géants» de l'industrie américaine.

La navigation inertielle pour avions commerciaux n'a été rendue possible que par les progrès réalisés dans les domaines suivants.

1° La fiabilité

Les centrales inertielles sont utilisées dans les avions comme instruments de navigation mais aussi comme références d'attitude et de cap. Cette fonction, qui conditionne directement le pilotage, donc la sécurité du vol, doit être remplie avec un taux de défaillances très faible.

Les centrales actuelles ont des temps moyens de bon fonctionnement supérieurs à 1000 heures, nettement plus élevés que ceux des centrales militaires de la génération précédente, pourtant considérées comme opérationnelles. Cette fiabilité élevée est indispensable pour répondre aux besoins des compagnies aériennes.

2° La facilité de maintenance

Les centrales inertielles étaient considérées, il y a peu de temps encore, comme des équipements trop raffinés, demandant des calibrations délicates et des interventions fréquentes.

L'expérience montre aujourd'hui que les systèmes «civils» sont capables de fonctionner plusieurs mois de suite sans intervention. Quand une intervention est nécessaire, elle n'est pas plus délicate que pour un autre équipement de bord comparable.

Tout ceci est évidemment le résultat d'un effort général sur la qualité des fabrications, et représente un progrès considérable par rapport à la génération précédente d'équipements.

3° La précision

Les systèmes inertiels sont utilisés principalement aujourd'hui Sur les vols de longue durée au-dessus des océans. C'est pour ce type de vols qu'ils rendent le plus de services, les vols sur les continents bénéficiant généralement de l'aide de stations au sol d'usage commode.

Où, **obtenir** une précision acceptable pour un fonctionnement de longue durée (8 à 10 heures par exemple) est une exigence sévère pour les systèmes inertiels, dont les erreurs croissent avec le temps.

Les systèmes modernes ont couramment des erreurs qui n'excèdent pas 1,5 mille nautique par heure. Ils permettent d'arriver en vue directe de l'aéroport de destination, après une traversée transatlantique. Ceci est obtenu «en inertie pure», la philosophie et les intérêts des compagnies aériennes conduisant jusqu'ici à éviter les systèmes hybrides (inertie-Doppler par exemple) si fréquents dans les applications militaires.

De plus, les temps de mise en œuvre doivent être courts: 15 minutes environ pour l'alignement d'une centrale. Réaliser des précisions de l'ordre de 1 mille nautique par heure compte tenu de toutes ces contraintes est une performance comparable à celles des meilleures centrales de guidage d'engins balistiques ou de sous-marins nucléaires.

4° La souplesse d'emploi

Les premières centrales inertielles comportaient un calculateur analogique. Cette solution, offrant peu de souplesse pour la visualisation des données et l'exécution des choix de la navigation (par exemple évaluation des possibilités de **déroutement**) aurait entravé durablement l'implantation des systèmes à inertie dans l'aviation commerciale.

Les progrès réalisés dans le domaine des calculateurs numériques embarqués ont permis de les incorporer dans les systèmes inertiels à peu de frais. Le système inertiel devient alors un équipement avec lequel l'équipage peut «dialoguer».

Il est possible de visualiser tous les paramètres concernant la navigation (position, vitesse en grandeur et direction, etc.), d'introduire dans le calculateur les données définissant la trajectoire désirée et d'obtenir en retour les informations de guidage permettant de maintenir l'avion sur cette trajectoire.

Les manipulations deviennent suffisamment faciles pour ne plus exiger la présence d'un navigateur. Le pilotage automatique est possible pendant tout le vol «en route», le pilote n'intervenant éventuellement que pour modifier le plan de vol en fonction d'une situation nouvelle.

5° Le prix

Une centrale inertielle standard pour l'aviation commerciale coûtait en 1970 un peu plus de 100000 \$. C'est un prix qui aurait semblé étonnamment faible quelques années auparavant. D'équipement «de luxe» destiné à voler sur des avions «de luxe» (avions de transport supersoniques principalement), le

système inertiel est devenu un moyen de navigation «standard» applicable à tous les avions longs-courriers, et même aux avions d'affaires privés les mieux équipés.

Tous ces perfectionnements ont permis d'emporter en peu de temps (entre 1967 et 1969) l'adhésion des compagnies aériennes et des constructeurs d'avions. Les longs courriers modernes sont conçus dès le départ avec un système de navigation fondé sur deux, sinon trois, centrales inertielles. Le marché qui s'ouvre pour cet équipement est considérable: il est évalué à un minimum de 5000 appareils pour les dix années à venir.

Le chiffre de 10000 ne semble pas impossible à atteindre. A la fin de 1970, près d'un millier d'équipements fonctionnait déjà sur des longs-courriers du type Boeing 707, DC 8 ou Boeing 747.

14.2 Historique

Les premières approches des constructeurs de système inertiels en direction de l'aviation commerciale remontent à 1963. La firme américaine Litton, forte de son expérience dans le domaine militaire, essaie son système LN3 sur les avions de la compagnie Pan American Airways. Ces essais, effectués pour le compte des services officiels américains (Federal Aviation Agency), comportent plusieurs dizaines de vols transatlantiques. La précision obtenue est acceptable (de l'ordre de 3 milles nautiques par heure) mais de nombreux problèmes d'intégration dans l'avion apparaissent.

En 1963 également, Sud-Aviation et British Aircraft Corporation lancent, au titre du programme Concorde, un appel d'offres pour une centrale de cap et de verticale associée à un calculateur de navigation. Cette solution est la plus perfectionnée parmi les solutions classiques de l'époque. Il suffit d'un pas encore pour arriver aux systèmes inertiels. Ce pas est franchi par plusieurs constructeurs d'équipements qui proposent pour Concorde une centrale inertielle.

Après une période d'hésitation, c'est cette solution qui prévaudra. Les avions supersoniques ont en effet besoin de références de verticale précises et insensibles aux accélérations. Seules les centrales inertielles répondent au problème, tout en apportant beaucoup de commodités supplémentaires. Le programme Concorde et l'avion de transport supersonique américain deviennent alors les principaux stimulants pour le développement de la navigation inertielle dans l'aviation commerciale.

Parallèlement, des efforts se développent en direction de l'aviation subsonique. En 1965, la firme américaine Sperry propose son système SGN 10 à la Pan American World Airways. Un contrat sans précédent est signé: il porte sur 150 systèmes. Les délais de livraison sont courts, les conditions acceptées par Sperry (performances, fiabilité, prix) sont sévères. Presque simultanément, en Europe, SAGEM (France) et Ferranti (Grande Bretagne) se voient confier conjointement la réalisation de dix systèmes destinés à équiper les Concorde prototypes (système SF 500-AE 51).

En 1966, les systèmes Sperry livrés à Pan American World Airways donnent des résultats décevants. La technologie utilisée, qui est l'extrapolation des techniques appliquées aux centrales de cap et de verticale, est à la limite de ses possibilités. En 1967, le contrat sera résilié par Pan American World Airways.

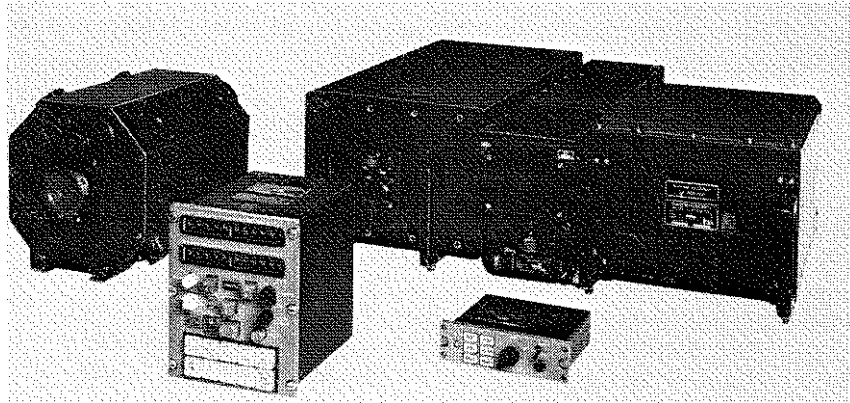


Figure 14-1. Système inertiel SF SOO-AE 51 des avions Concorde prototypes.

Cependant, les compagnies aériennes, qui sentent que l'heure de la navigation inertielle approche, éprouvent le besoin de définir un standard de système inertiel. Il s'agit d'assurer l'interchangeabilité, de faciliter la maintenance, et de donner un cadre à la concurrence des fabricants d'équipements. Deux d'entre eux sont déjà sur les rangs, malgré les déboires de Sperry. Ils sont tous deux américains. Le premier est la firme Litton, riche d'une longue expérience de la navigation inertielle pour avions. Le deuxième est la firme AC Electronics, filiale de la General Motors qui met tout son poids dans la balance pour conquérir un marché nouveau. L'enjeu est considérable: il s'agit d'équiper des flottes entières d'avions subsoniques déjà en service, puis les futurs arrivants: avions «gros porteurs» comme le Boeing 747, avions supersoniques, et éventuellement avions de la catégorie des «Airbus» américains.

En décembre 1966, l'organe délibératif des compagnies aériennes, l'Arinc (Aeronautical Radio Inc.), adopte la norme Arinc 561 définissant le système inertiel standard de l'aviation commerciale. Quelques mois plus tard, les deux concurrents (Litton et AC Electronics) sont déjà en mesure de proposer ce type de matériel aux compagnies aériennes et aux constructeurs d'avions.

En février 1967, AC Electronics est choisi par Boeing pour fournir les systèmes inertiels de l'avion gros porteur B 747. Le système Litton (LTN 51) est

commandé par American Airlines pour ses Boeing 707 volant au-dessus du Pacifique, puis par Air France, après qu'un accord ait été signé entre Litton et la société française SAGEM.

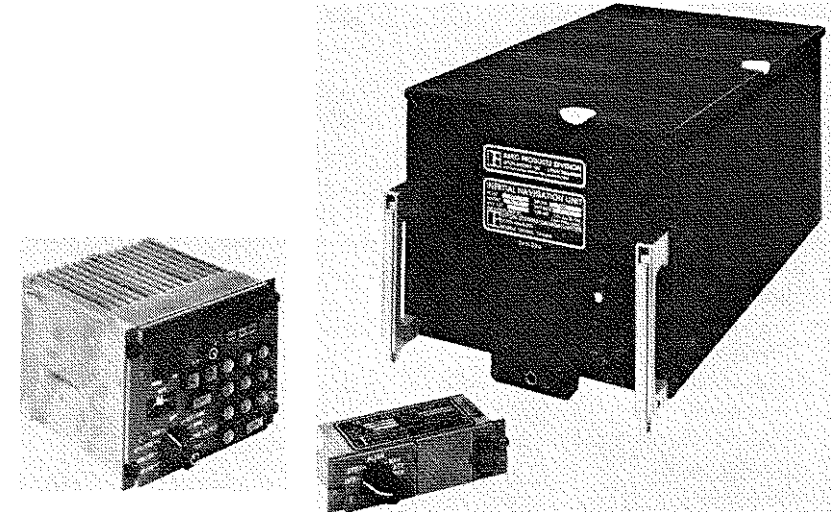


Figure 14-2. Système inertiel LTN 51, conforme à la norme ARINC 561.

En 1968, Litton obtient pour son système la certification des services officiels américains (Federal Aviation Agency) qui lui ouvre la porte des flottes commerciales. En 1969, ce système obtient la certification des autorités françaises (Secrétariat Général à l'Aviation Civile) et entre en service opérationnel sur les avions d'Air France. Aux États Unis, plusieurs compagnies aériennes intérieures mettent en œuvre le système Litton.

En 1970, AC Electronics obtient à son tour la certification des services officiels américains, qui permet à ce système d'équiper comme prévu l'avion géant Boeing 747.

14.3 Le système inertiel ARINC 561

14.3.1 CONSTITUTION ET CARACTÉRISTIQUES PHYSIQUES

Le système ARINC 561 tel qu'il est monté aujourd'hui sur les avions se compose d'un boîtier principal (LN.U. = Inertial Navigation Unit), d'une boîte de mise en œuvre (M.S.U. = Mode Selector Unit) et d'une boîte d'affichage et de dialogue avec le calculateur (C.D.U. = Control Display Unit).

La norme offre la possibilité d'ajouter un boîtier supplémentaire, mais aucun des constructeurs n'a jugé utile d'y avoir recours. On mesure là les progrès réalisés par rapport à la génération précédente d'équipements (le SGN 10 de Sperry par exemple qui mettait en œuvre cinq boîtiers). Le tableau 14-3 permet la comparaison.

	Boîtier	Dimensions (en pouces)	Masse (lbs)	Consommation		Ventilation (lb/hr)
				DC28V	IAC115V	
Système SGN 1° (1965)	Plate-forme	9x 10x 12	20	155	-	240
	Electronique de plate-forme	20 x 10 x 7,6	25		—	45
	Calculateur et entrées-sorties	20 x 7,5 x 7,6	17	180	-	15
	Mémoire du calculateur	12,6 x 7,5 x 7,6	28		-	30
	Boîte de commande	6 x 5,75 x 5,5	4,5	15	—	0
	TOTAL		94,5	350	0	330
Système ARINC 561 (1967)	INU	20 x 10 x 8,6	47	-	410	240
	MSU	5,75 x 1,5 x 2	0,8	—	ε	0
	CDU	5,75 x 4,5 x 6,25	5	-	60	0
	TOTAL		52,8	470 en secours	470	240

Figure 14-3. Comparaison de deux générations de systèmes inertiels (système SGN 1a de 1965 et système LTN 51 de 1967).

Il faut ajouter à l'ensemble inertiel proprement dit une batterie de secours. Celle-ci permet le fonctionnement du système pendant plus de 10 minutes en cas de coupure accidentelle de l'alimentation de bord. La navigation inertielle, comme tout procédé de navigation à l'estime, ne peut en effet s'accommoder d'une interruption du fonctionnement.

14.3.2 DESCRIPTION FONCTIONNELLE

Les descriptions qui suivent correspondent au système ARINC 561 de Litton (système LTN 51). Elles sont cependant valables, dans une large mesure, pour tout autre système du type ARINC 561, et notamment quand il s'agit des interfaces entre le système inertiel et le reste de l'avion, qui sont absolument normalisés.

14.3.2.1 Boîtier principal (I.N. U.)

Le boîtier principal du système ARINC 561 (Unité Inertielle) est composé des quatre sous-ensembles suivants (voir figure 14-4).

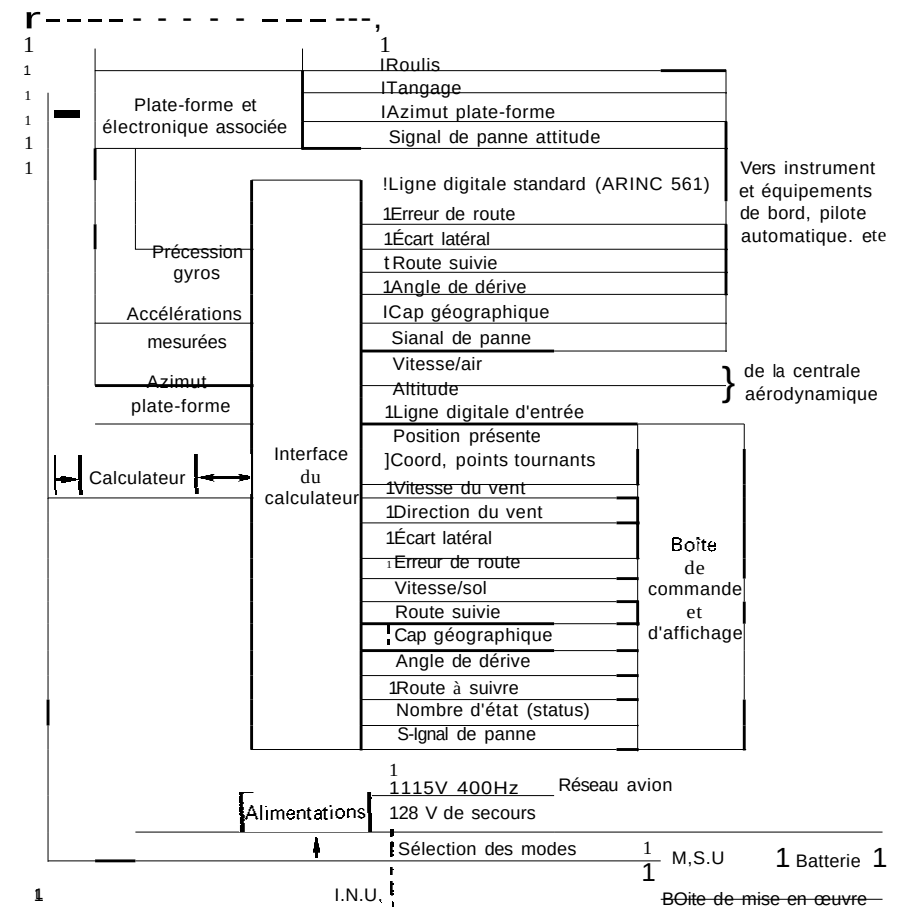


Figure 14-4. Schéma fonctionnel du système LTN 51.

1° Alimentations

A partir de la tension alternative du réseau avion (115 V, 400 Hz) sont produites les diverses tensions continues et alternatives utilisées dans le système. On trouve dans ce sous-ensemble un transformateur redresseur fournissant un 28 volts continu à partir duquel sont obtenues les autres tensions au moyen de convertisseurs statiques. En cas de panne de secteur, c'est la batterie qui fournit le 28 volts continu destiné aux convertisseurs. A la mise sous tension comme à la coupure, des temporisations et des circuits logiques assurent l'apparition ou la coupure de certaines des tensions du système dans un ordre déterminé.

Ceci est particulièrement important pour les tensions d'alimentation du calculateur, dont l'apparition désordonnée pourrait provoquer des effacements de mémoire.

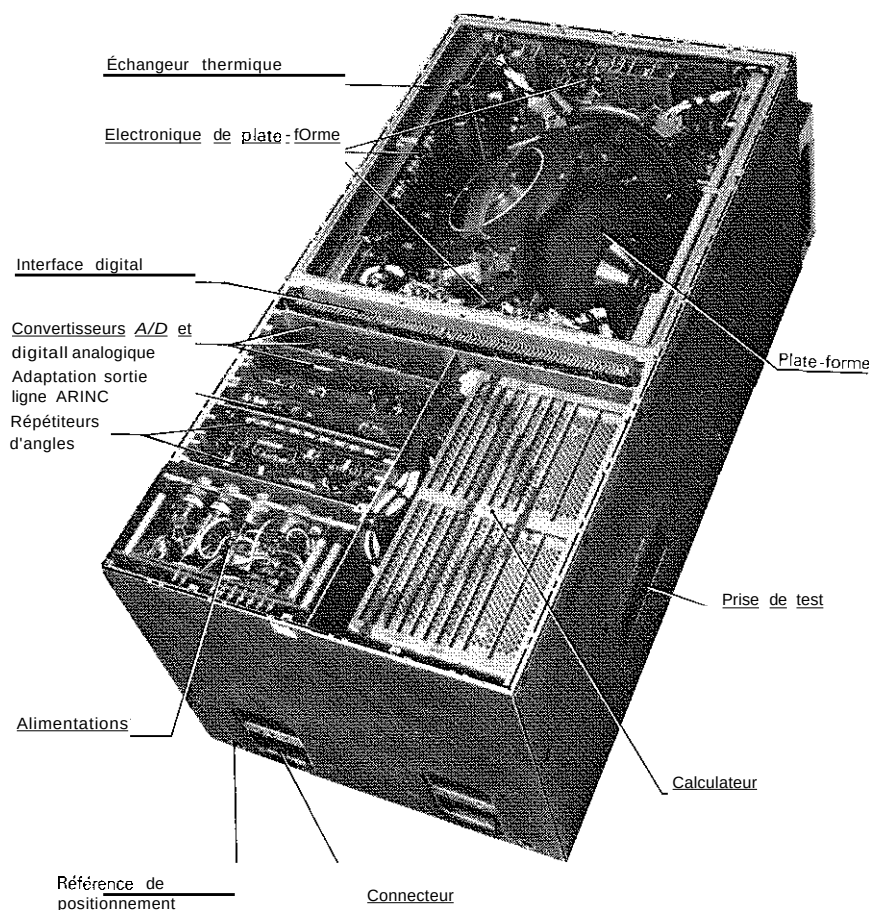


Figure 14-5. Disposition du boîtier principal du système LTN 51 (J.N.V.).

2° Plate-forme et électronique associée

Ce sous-ensemble constitue la partie proprement «inertielle» du système, assurant la mesure des accélérations dans les directions connues définies par les gyroscopes. Il est constitué par une plate-forme à quatre axes de cardan qui permet de suspendre en équilibre indifférent l'ensemble des senseurs inertiels (gyroscopes et accéléromètres) montés sur un même support: le cœur. Celui-ci se trouve donc isolé des mouvements angulaires de l'avion, et conserve dans l'espace une direction sensiblement constante.

Pour parfaire l'isolement du cœur, des chaînes électroniques d'asservissement commandent en permanence la position des cardans de manière à maintenir constamment nul le signal des détecteurs angulaires des gyroscopes.

On trouve par ailleurs dans ce sous-ensemble le générateur de tension triphasée commandant la vitesse de rotation précise des moteurs de gyroscopes, l'électronique associée aux accéléromètres à pendule asservi, l'électronique assurant une régulation de température précise autour des gyroscopes, et un certain nombre de circuits logiques permettant le déroulement de la séquence de mise en route du sous-ensemble. La plate-forme fournit les indications d'assiette et de cap utilisables à l'extérieur du système.

Ces indications prennent la forme de signaux de synchro-transmetteurs montés sur chaque axe de cardan (roulis, tangage, azimuth). Une amplification de puissance est intercalée entre les synchro-transmetteurs de plate-forme et l'utilisation extérieure.

3° Calculateur

Le calculateur numérique universel a deux fonctions principales:

- Il exécute en temps réelles calculs correspondant à la mécanisation de la navigation : intégration des accélérations par rapport au temps, calcul des termes d'accélération complémentaire, calcul des taux de précession à appliquer aux gyroscopes, calcul de la position présente et de la vitesse, etc. Il exécute de la même façon les calculs assurant le guidage de l'avion en fonction d'un plan de vol préalablement défini : évaluation de l'écart latéral par rapport à la route à suivre, de l'erreur de route, du temps restant avant l'arrivée à un point de report, etc.
- Il assure la gestion de tous les échanges avec l'extérieur: lecture des accélérations, commande des précessions sur les gyroscopes, émission de données sur deux lignes digitales à destination des autres utilisateurs, prise en compte du plan de vol introduit au moyen de la boîte d'affichage, émission Vers cette même boîte des données demandées par le pilote, etc.

4° Interface du calculateur

Ce sous-ensemble est la plaque tournante des communications du calculateur avec l'extérieur. Il assure les fonctions logiques permettant l'affichage ou la

prise en compte de données en provenance ou à destination de la boîte d'affichage. Il assure la conversion des signaux analogiques d'accéléromètres en impulsions représentant des accroissements de vitesse.

Il élabore les impulsions calibrées qui constituent la commande effective de précession des gyroscopes. Il effectue les conversions de grandeurs numériques en signaux du type synchro-transmetteur, ou tension continue (exemple: cap vrai, erreur de route, écart latéral, et autres signaux à destination du pilote automatique). Il met dans le format convenable les données digitales transmises sous forme série par les lignes «bus» standard à destination des autres usagers.

14.3.2.2 Boîte de mise en œuvre (M.S.U.)

Cette boîte permet la sélection des modes de fonctionnement du système. Ceux-ci sont au nombre de cinq:

- Arrêt.

- «Stand-by», qui est un mode «veille».

Le système est mis sous tension, les cardans de plateforme sont calés par les chaînes d'asservissement au zéro de leur synchrotransmetteur (cœur approximativement horizontal), la plateforme est mise en température, les gyroscopes sont lancés, le calculateur est en mesure de recevoir des informations par l'intermédiaire de la boîte d'affichage dont il assure la gestion.

C'est en particulier au cours du mode «Stand-by» que sont introduites la latitude et la longitude du point de départ, au moyen de la boîte de commande et d'affichage (C.D.V.).

- «Alignement»

La sélection de ce mode commande la succession automatique d'opérations

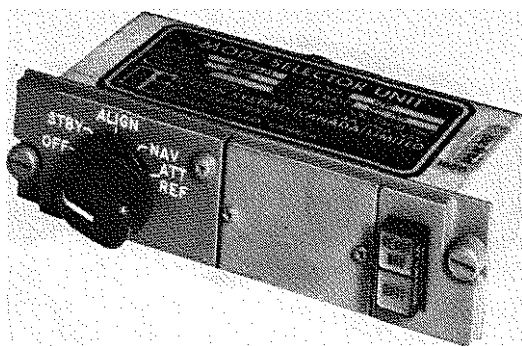


Figure 14-6. Boîte de mise en œuvre du système LTN 51 (M.S.U.),

qui ont pour effet d'amener la plate-forme en position horizontale précise, et qui permettent au calculateur de déterminer l'orientation de la plate-forme par rapport à la direction du nord géographique.

La succession des bouclages mis en jeu (bouclage analogique grossier de verticale, bouclage de verticale «digital», gyrocompas fin digital) est décrite plus en détail dans le paragraphe 14.3.3. La durée totale de l'alignement est de l'ordre de 15 minutes.

- «Navigation»

C'est le mode normal d'utilisation du système en vol. La centrale est alors en mesure de délivrer toutes les sorties figurant sur le bloc diagramme 14.4.

- «Référence d'attitude»

C'est un mode de secours utilisable en vol. La plate-forme se comporte alors comme une référence d'attitude comparable à une centrale de verticale (bouclage analogique du premier ordre des accéléromètres sur les gyroscopes). L'indication de cap, analogue à celle que peut fournir un gyroscope directionnel, est utilisable pour filtrer l'information de cap magnétique.

14.3.2.3 Boîte de commande et d'affichage (C.D.U.)

Cette boîte permet le «dialogue» du pilote avec le calculateur de navigation (voir figure 14-9). Deux fenêtres d'affichage numérique assurent la visualisation des données demandées par le pilote à l'aide d'un commutateur de sélection. Le tableau 14-7 récapitule les paramètres visualisés en fonction de la position du commutateur. La fenêtre de gauche donne cinq chiffres significatifs plus un signe de polarité (Nord ou Sud, par exemple). La fenêtre de droite donne six chiffres significatifs et un signe de polarité. Les chiffres sont formés par allumage sélectif de bâtonnets incandescents (7 au maximum pour chaque chiffre).

L'introduction de données dans le calculateur se fait à l'aide d'un clavier numérique à 10 boutons poussoirs (type «standard téléphonique») moyennant diverses manipulations qui font intervenir le commutateur de sélection d'affichage, une molette de codage du numéro des points tournants et des boutons poussoirs «de fonction». Les principales opérations sont décrites aux paragraphes 14.3.3.1 et 14.3.3.2.

14.3.3 MISE EN ŒUVRE

14.3.3.1 Mise en œuvre au sol

1^o Séquence d'alignement

La séquence d'alignement débute toujours par le calage des cardans de plateforme au zéro de leurs synchros, ce qui correspond au début du mode «Stand-by» (moteurs de toupies en cours de lancement). Dès que les toupies ont atteint la vitesse de synchronisme, les entrées des boucles d'asservissement de cardans sont commutées sur les détecteurs de gyroscopes: les cardans resteront asservis sur gyroscopes pour la suite du fonctionnement,

Position du commutateur	Fenêtre de gauche	Fenêtre de droite
TK/GS («Track/Ground Speed»)	Route suivie par l'avion, exprimée en degrés et dixièmes de degré	Vitesse par rapport au sol exprimée en nœuds
HDG/DA («Heading/Drift Angle»)	Cap vrai de l'avion, exprimé en degrés et dixièmes de degré	Angle de dérive, exprimé en degrés et dixièmes de degré
XTK/TKE («Distance across Track/Track error»)	Écart latéral par rapport à la route à suivre, exprimé en milles nautiques et dixièmes de mille à droite ou à gauche	Erreur de route par rapport à la route à suivre, exprimée en degrés et dixièmes de degré à droite ou à gauche
POS («Position»)	Latitude de la position présente de l'avion, exprimée en degrés, minutes et dixièmes de minute Nord ou Sud	Longitude de la position présente de l'avion, exprimée en degrés, minutes et dixièmes de minute Est ou Ouest
WPT («Waypoint»)	Latitude du «point tournant» dont le numéro de code apparaît sur la molette repérée «WPT»	Longitude du point tournant dont le numéro de code apparaît sur la molette repérée «WPT»
DIS/TIME («Distance/Time to go»)	Distance restant à parcourir jusqu'au prochain «point tournant», exprimée en milles nautiques	Temps restant pour arriver au prochain «point tournant» exprimé en minutes et dixièmes de minute
WIND	Vitesse du vent exprimée en nœuds	Direction du vent exprimée en degrés
DSRTK/STS («Desired Track/Status»)	Route à suivre résultant du calcul de guidage, exprimée en degrés et dixièmes de degré	Nombre conventionnel rendant compte de l'état d'avancement de l'alignement du système (en mode «Alignement» seulement)
TEST	Tous les bâtonnets de la fenêtre sont allumés	Tous les bâtonnets de la fenêtre sont allumés

Figure 14-7. Affichages numériques d'un système inertiel type ARINe 561.

Le mode Stand-by se poursuit par un bouclage analogique de verticale qui est en fait déjà un début d'alignement: les accéléromètres *X* et *Y* sont utilisés comme senseurs de verticale dans une boucle du premier ordre qui commande la précession des gyroscopes autour des axes *Yet X*. Il s'agit d'un bouclage rapide donc peu précis. Si le commutateur de modes de la boîte de mise en œuvre (M.S.V.) est laissé en position «Stand-by» pendant plus de trois minutes, l'excédent de temps disponible est mis à profit en exécutant un bouclage analogique fin pour parfaire l'acquisition de la verticale.

Avant de passer en mode «Alignement», on introduit dans le calculateur les coordonnées géographiques du point où a lieu l'alignement. L'opération qui se fait par l'intermédiaire de la boîte d'affichage (C.D.V.) est décrite ci-après.

L'alignement proprement dit commence par un bouclage rapide de verticale faisant intervenir le calculateur. Celui-ci commande en effet le taux de précession des gyroscopes *X* et *Y* à partir des incréments de vitesse délivrés par les accéléromètres *Yet X* et leurs intégrateurs digitaux associés.

Le bouclage, qui est du second ordre, est pratiquement stabilisé en 100 secondes. La moyenne des valeurs des vitesses sur les voies *X* et *Y* (pour plus de détails sur la mécanisation, on se reportera au chapitre] 1) est alors mesurée sur une durée de 25 secondes. Ceci permet de faire une première estimation des cosinus directeurs de l'axe *X* de la plate-forme, qui se trouve sensiblement dans la direction de l'axe de l'avion, et dont l'orientation par rapport du Nord géographique est par conséquent quelconque.

A partir de ces cosinus directeurs, on calcule les taux de précession destinés à compenser la dérive apparente des gyroscopes (composantes de la rotation de la Terre sur leurs axes d'entrée). L'application de cette compensation provoque dans la boucle un transitoire auquel on laisse un temps de 80 secondes pour s'amortir. Les conditions initiales sont alors réunies pour commencer l'alignement fin.

Celui-ci consiste en un bouclage de verticale du second ordre semblable à celui de l'alignement digital rapide, mais de période plus longue (meilleur filtrage des perturbations). L'orientation de la plate-forme par rapport au Nord géographique est déterminée avec précision par une méthode de gyrocompas calculé, qui est valable quelle que soit l'orientation initiale de la plate-forme.

La durée de ce gyrocompas est d'environ 8 minutes. Le voyant «READY NAV» de la boîte de mise en œuvre s'allume lorsque les oscillations résiduelles des boucles de verticale, mesurées par le calculateur, deviennent inférieures à un seuil donné (l'alignement peut se faire sur un support animé de mouvements de plusieurs centimètres d'amplitude). Quoiqu'il soit possible de passer en mode Navigation avant l'apparition du voyant «READY NAV», il est préférable d'attendre l'allumage de ce voyant pour obtenir de meilleures performances.

La boîte de commande et d'affichage (C.D.V.), lorsque son commutateur est placé sur la position DSRT/STS, affiche dans sa fenêtre de droite un nombre qui décroît de 90 à 0 à mesure que l'alignement progresse. A chaque étape

principale de la mise en œuvre correspond une valeur de ce nombre (le nombre d'Etat, ou «Status»), comme indiqué sur la figure 14-8.

20 Introduction de la position initiale et du plan du vol

La position initiale doit être introduite avant le passage en mode « Alignement », L'opération s'effectue par la boîte de commande et d'affichage (C.D.U.). Le commutateur de celle-ci est placé sur la position « POS ». On introduit la latitude et la longitude dans un ordre arbitraire. Pour introduire la latitude, par exemple, on appuie sur le poussoir $\frac{N}{2}$ du clavier numérique (s'il s'agit d'une latitude Nord), ce qui a pour effet d'allumer le voyant INSER, annonçant que le calculateur est prêt à recevoir la valeur qu'on veut introduire.

On procède alors à la «frappe» du nombre à insérer: le clavier numérique permet d'introduire les chiffres successifs, poids forts en tête, comme pour une machine de bureau. Les chiffres apparaissent dans la fenêtre de gauche (pour l'affichage de la latitude), l'ensemble déjà composé se décalant d'un pas vers la gauche à chaque nouveau chiffre introduit. Quand le nombre voulu est ainsi composé, on le fait prendre en compte par le calculateur en appuyant sur le poussoir INSER, qui s'éteint. La même procédure est valable pour introduire

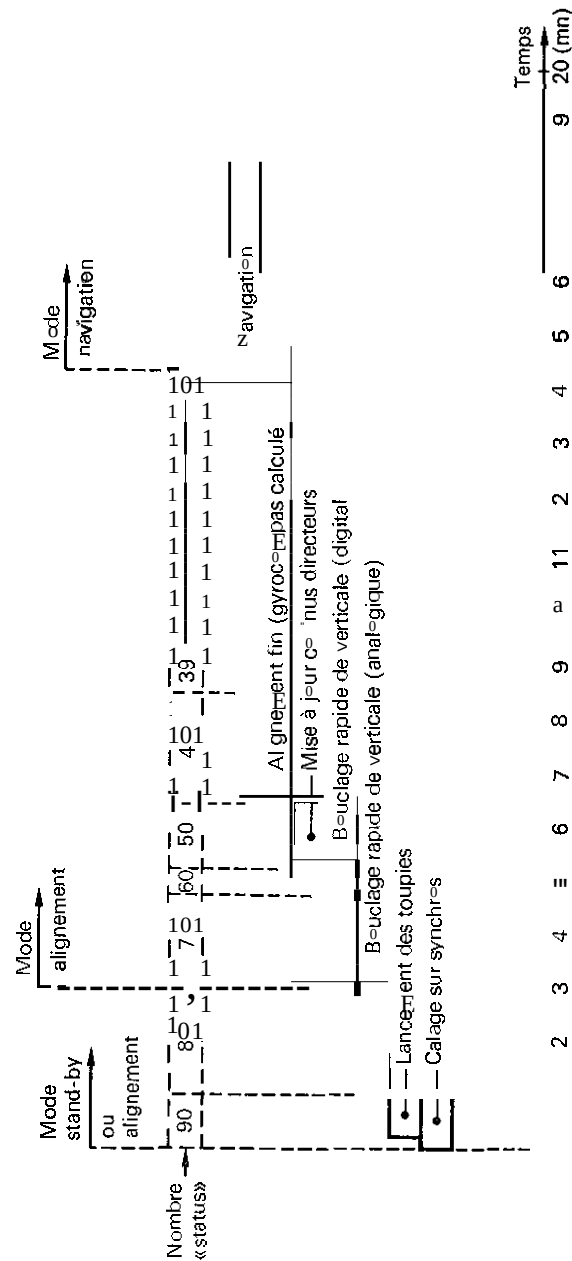


Figure 14-8. Séquence d'alignement du système inertiel LTN 51.



Figure 14-9. Boîte de commande et d'affichage du système LTN 51 (C.D.V.).

la longitude initiale, mais on commence par appuyer sur le poussoir $\frac{W}{4}$ ou $\frac{E}{6}$ suivant que la longitude est Ouest ou Est. Le nombre qui suit s'affiche dans la fenêtre de droite.

Le plan de vol est généralement introduit au sol pendant l'alignement. Mais il peut être introduit, ou modifié, en vol. Il consiste en une succession de points de report ou «points tournants» que l'avion doit rallier dans l'ordre croissant d'un numéro de code (compris entre 1 et 9) affecté à chacun d'eux.

L'introduction d'un plan de vol en mémoire du calculateur se traduit donc par l'insertion des coordonnées géographiques d'un certain nombre de points, repérés par un numéro de code.

Les manipulations effectuées sont les suivantes: le commutateur de la C.D.U. est placé sur la position WPT. Le nombre du code sous lequel on veut introduire les coordonnées du point tournant est affiché sur la molette repérée «WPT». On voit alors apparaître dans les fenêtres les coordonnées du point tournant existant actuellement dans le calculateur. Pour changer ces coordonnées, on procède comme pour l'insertion de la position initiale: l'insertion de la latitude est précédée d'une pression sur le poussoir $\frac{N}{2}$ ou $\frac{S}{8}$, suivant l'hémisphère, etc.

L'introduction manuelle de la position initiale et du plan de vol pouvant donner lieu à des erreurs, une facilité supplémentaire a été introduite: la possibilité d'automatiser ces insertions. En plaçant sur position «REMOTE» le commutateur AUTO-MAN-REMOTE, on met le système en état de recevoir les divers paramètres par une ligne digitale d'entrée. Cette ligne véhicule les données provenant soit d'un autre système inertiel, soit par exemple d'un lecteur de carte magnétique. Le plan de vol est alors introduit en une seule fois à l'aide de la carte magnétique sur laquelle on l'a inscrit.

3° Autosurveillance du système

Le système comporte des circuits qui surveillent le bon déroulement des fonctions principales. Une panne détectée en cours d'alignement provoque l'illumination d'un voyant repéré WARN de la boîte de commande et d'affichage (C.D.U.). L'alignement met en œuvre toutes les fonctions du système avec des exigences à certains égards plus sévères que celles du mode «Navigation». L'autosurveillance du système en mode «Alignement» constitue donc un très bon test avant vol du système.

L'expérience confirme que lorsqu'un système franchit avec succès le stade de l'alignement, il donne généralement entière satisfaction en navigation.

Les dispositifs de détection de pannes font l'objet du paragraphe 14.3.5.5. Ces dispositifs sont efficaces en mode Alignement et en mode Navigation, mais sont généralement inhibés en mode Standby. Le mode Alignement dispose de deux tests de bon fonctionnement qui lui sont propres.

- A la fin du bouclage rapide de verticale (bouclage «digital») le calculateur fait une première évaluation des cosinus directeurs des axes X et Y de la plateforme. Un test de vraisemblance est effectué par le calculateur: il permet de

vérifier que les deux cosinus directeurs sont bien ceux de deux axes orthogonaux. Trois échecs consécutifs dans la vérification de ce test déclenchent une alarme (voyant «WARN»).

— L'alignement fin est supposé durer 8 minutes. Si, après 10 minutes d'alignement fin, la stabilisation indiquée par le voyant READY NAV (de la MSU) n'est pas acquise, l'alarme est donnée par le voyant WARN.

14.3.3.2 Utilisation en vol

1° Lecture des données

Par sélection au moyen du commutateur de la boîte d'affichage (C.D.V.) on fait apparaître dans les fenêtres les paramètres tels qu'ils sont définis tableau 14-7.

Certains de ces paramètres sont de source purement inertielle: position présente, vitesse sol, route suivie, cap, angle de dérive. D'autres sont des paramètres de guidage, résultant de la comparaison de la position inertielle avec le plan de vol: écart latéral par rapport à la route à suivre (c'est-à-dire par rapport au segment reliant les deux points tournants entre lesquels on navigue), erreur de route, distance et temps jusqu'au prochain point tournant, route à suivre.

D'autres enfin font appel à des sources d'information extérieures au système: vitesse et direction du vent. Le système inertiel reçoit en effet l'information de vitesse air, provenant sous forme analogique de la centrale anémométrique. Cette information est codée sous forme binaire, et utilisée dans le calcul du vent.

2° Fonctions du guidage

Le plan de vol est inséré en cours d'alignement (voir 14.3.3.1) mais ce n'est que quelque temps après le décollage que le pilote automatique de l'avion sera couplé au système inertiel. Auparavant, (au sol ou peu de temps après le décollage), il faudra avoir désigné au calculateur le premier tronçon sur lequel on veut voir naviguer l'avion. Ce n'est qu'après l'introduction de cette information que le système pourra faire les calculs d'écartométrie ayant pour but d'élaborer les commandes du pilote automatique.

Le tronçon sur lequel on veut naviguer est défini par le numéro de code du point tournant origine et le numéro de code du point tournant extrémité. Supposons qu'on veuille désigner le tronçon 1-2 comme parcours à suivre. On procède comme suit (voir figure 14-9): on appuie sur le poussoir TK CHG («Track Change») qui annonce au calculateur qu'on va lui désigner une nouvelle (ou la première) route à suivre. Le voyant de ce poussoir s'allume, ainsi que celui du poussoir INSERT. On compose alors sur le clavier numérique le nombre 1 puis le nombre 2. Ces chiffres apparaissent dans la fenêtre repérée FROM-Ta («DE-VERS»). Ils sont pris en compte par le calculateur dès qu'on appuie sur le poussoir INSERT ce qui, par ailleurs, provoque l'extinction de son voyant et de celui du poussoir TK CHG.

Dès lors, le calculateur effectuera les calculs de guidage par rapport à cette

route (on n'a pas oublié que les coordonnées géographiques des points 1 et 2 auront été introduites auparavant, comme indiqué en 14.3.3.1).

Le pilote peut ainsi désigner à tout instant une nouvelle route à suivre. C'est la procédure dite «manuelle» qui n'a lieu que si le commutateur repéré AUTO-MAN-REMOTE est sur la position MAN. Cette procédure peut être utilisée par exemple lorsque, ayant presque entièrement parcouru le tronçon désigné (quelques minutes avant le point extrémité) on veut désigner le nouveau tronçon. A cet effet, un voyant ALERT se met à clignoter en temps utile, prévenant le pilote qu'il va bientôt devoir annoncer le tronçon suivant.

Mais il existe une procédure plus automatisée encore. Elle a lieu lorsque le commutateur «AUTO-MAN-REMOTE») est sur position «AUTO». Dans ce cas, le système désigne de lui-même le nouveau tronçon lorsqu'il arrive à l'extrémité du tronçon en cours. Ceci se traduit par la modification du contenu de la fenêtre FROM-TO, dont les deux nombres progressent d'une unité. Ainsi, à l'extrémité du tronçon 1-2, s'affichera automatiquement le tronçon 2-3, etc. Le guidage devient donc totalement automatique, pourvu qu'on l'ait initialisé en désignant une fois (par la procédure manuelle) un premier tronçon.

14.3.4 PERFORMANCES

La précision minimale d'un système inertiel pour l'aviation commerciale est définie dans la norme AR1NC 561 de la façon suivante: soit un parcours A B dont la longueur est celle du parcours opérationnel envisagé (aussi court ou aussi long soit-il). En prenant pour centre le point de destination E, on trace un rectangle dont deux des côtés sont parallèles à la route AB. La longueur de ces côtés est de 50 milles nautiques. La longueur des deux autres côtés est de 40 milles. Ce rectangle est connu sous le nom de «rectangle F.A.A.» (de «Federal Aviation Agency», service officiel américain de l'aéronautique). A l'arrivée au point E, le système inertiel doit indiquer, dans 95% des cas, une position située dans le «rectangle F.A.A.».

Comme on le voit, la spécification laisse le libre choix de la longueur du parcours AB. Mais ce choix est en fait imposé par les considérations opérationnelles. Les systèmes inertiels étant surtout utilisés pour les vols transocéaniques, la distance à parcourir est de 3000 milles nautiques et plus, les temps de vol variant de 7 à 10 heures.

Comme pour ces durées de fonctionnement, les erreurs des systèmes inertiels croissent, en gros, proportionnellement au temps, un calcul rapide montre que ces erreurs doivent être en moyenne inférieures à 4 milles nautiques par heure (erreur radiale) dans 95% des cas.

Le système LTN 51 de Litton fait en pratique deux fois mieux (résultats découlant de plus de 60000 heures de vol). La distribution des erreurs correspond sensiblement à la loi normale, du moins si on s'en tient à des écarts courants (jusqu'à 2σ). Au delà («queues de distribution») il est difficile d'établir des statistiques, les très grands écarts étant très peu fréquents.

14.3.5 PRINCIPAUX ASPECTS TECHNOLOGIQUES

14.3.5.1 La plate-forme

Comme dans toutes les plate-formes pour avions, on utilise un montage à quatre axes de cardan (voir chapitre 7). La plate-forme LTN 51 présente la particularité d'avoir des anneaux de cardan dont chacun est formé par l'assemblage de quatre segments.

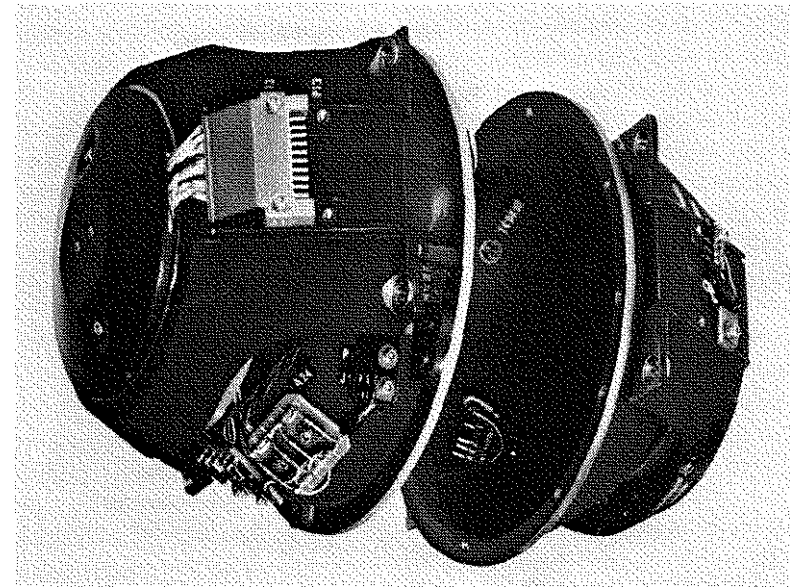


Figure 14-10. Anneaux de cardans segmentés de la plate-forme inertielle LTN 51.

Les transmissions électriques se font, soit par contacts tournants, pour les axes de cardan demandant une liberté angulaire totale (axes d'azimut et de roulis extérieur), soit par conducteurs souples pour les axes à liberté angulaire limitée (roulis intérieur et tangage).

Le cœur contient deux gyroscopes flottants à deux degrés de liberté, dont la toupie tourne sur deux paliers à gaz autoporteurs. Le flotteur est tenu par deux pivots sphériques en carbure de tungstène ajustés dans deux saphirs à alésage cylindrique.

On trouve également sur le cœur trois accéléromètres dont l'un, d'axe sensible vertical, n'intervient pas dans la mécanisation de la navigation (il délivre une information de pilotage automatique). Les accéléromètres sont du type pendulaire asservi. Leur pendule, flotté, est supporté par un jeu de pivots et de saphirs. Les pivots sont vibrés à l'aide d'un montage à diapason, afin de réduire le frottement sec.

La plate-forme est logée dans un compartiment étanche formant une enceinte régulée thermiquement. Chacun des deux gyroscopes possède par ailleurs une régulation thermique individuelle qui assure une stabilité de température meilleure que $0,2^{\circ}\text{C}$ dans toutes les ambiances de fonctionnement (jusqu'à 45°C). La mise à température homogène (à $0,2^{\circ}\text{C}$ près sur le cœur) se fait en moins de 10 minutes pour une température initiale de 10°C .

14.3.5.2 Electronique de plate-forme

Les circuits électroniques sont très classiques et réalisés en composants discrets. Ils sont disposés dans le même compartiment que la plate-forme, et bénéficient donc d'une ambiance thermique stable. On peut y distinguer les circuits de servitude de plate-forme (asservissements de cardans, asservissements de pendules d'accéléromètres, etc...), de performances moyennes du point de vue de la précision, et les circuits électroniques de précision assurant la mesure, l'intégration et la conversion incrémentale des signaux accélérométriques (Intégrateurs Digitaux d'Accélérations) ou la génération de commandes de précession précises destinées aux gyroscopes (Commandes Digitales de Gyroscopes).

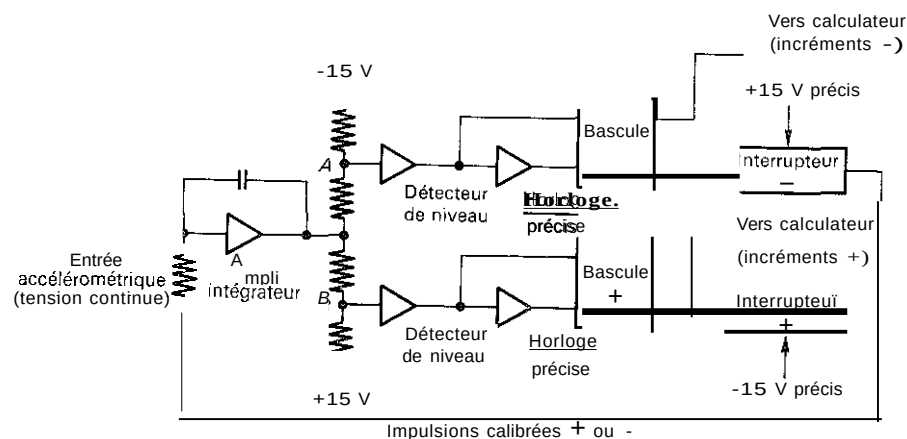


Figure 14-11. Schéma de principe d'un «Intégrateur Digital d'Accélération».

Le principe de fonctionnement des intégrateurs digitaux d'accélérations est indiqué par la figure 14-11. L'entrée accélérométrique (tension continue) est intégrée dans un amplificateur intégrateur à la sortie duquel sont placés deux détecteurs de niveau. Une entrée constante provoque une tension croissante ou décroissante en sortie de l'amplificateur intégrateur. Ceci amènera plus ou moins rapidement la tension au point A à devenir positive (ou la tension en B à devenir négative) et provoquera le changement d'état de la commande de la bascule correspondante. Mais le changement d'état ne surviendra qu'à l'arrivée

d'une impulsion d'horloge très précise. Une impulsion représentant un accroissement de vitesse est alors émise vers le calculateur, en même temps qu'est commandée l'ouverture d'un interrupteur qui applique une tension précise en contre-réaction sur l'ampli intégrateur. La tension n'est appliquée que pendant une période d'horloge mais ceci est suffisant pour ramener la tension du point A (ou B) au-dessous (ou au-dessus) du seuil de 0 volt qu'elle avait précédemment franchi. Ce cycle peut alors recommencer, chaque franchissement de seuil s'accompagnant de l'émission d'un incrément (positif ou négatif) vers le calculateur, et de la génération d'une impulsion calibrée de contre-réaction. Le «poids» de l'incrément est de l'ordre de quelques centimètres par seconde, et la précision de ce «codage incrémental» est de l'ordre de 10^{-4} .

Cette précision se retrouve dans les commandes digitales de gyroscopes dont le principe de fonctionnement est beaucoup plus simple. Leur rôle est en effet de produire une impulsion calibrée en tension et en durée qui sera appliquée au gyroscope chaque fois que le calculateur commandera une précession élémentaire (petit accroissement d'angle de l'ordre de quelques dixièmes de seconde d'arc).

14.3.5.3 Calculateur

Le calculateur universel à programme mémorisé exécute des instructions comportant une seule adresse de mémoire. Celle-ci est à accès aléatoire (tores de ferrite). Sa capacité est de 4.096 mots de 18 bits. Il y a un répertoire de 18 instructions mettant en jeu la mémoire (appel d'opérande, ou *IOscnptlOn*) plus un certain nombre d'instructions qui n'y font pas appel.

Les calculs se font en série, à la fréquence d'horloge de 1,5 mégahertz. Le temps pour une opération (addition, décalage, inscription en mémoire, etc...) est de $18\ \mu\text{s}$. Le temps d'une multiplication est $342\ \mu\text{s}$.

Le poids est de 2,5 kg environ et la consommation de 40 W. Les Circuits sont des circuits intégrés TTL (Transistor Transistor Logic) (voir figure 8-31).

14.3.5.4 Entrées-sorties et boîte d'affichage

Les circuits d'entrées-sorties constituent une part importante du système ARINC 561 : le volume des échanges entre le calculateur et l'extérieur, précisé par la norme, est en effet considérable.

a) Les sorties

Parmi les sorties, on trouve :

- cinq sorties analogiques résultant d'une conversion digitale/analogique dans l'entrée-sortie; quatre des sorties sont du type «synchro-transmetteur» (ce sont les sorties «erreur de route», «cap géographique», «angle de dérive» et «route suivie»), la cinquième est une tension continue (sortie «écart latéral»). Ces sorties permettent de conduire des instruments de bord, ou le pilote automatique;

figuration habituelle des avions commerciaux (trois systèmes inertiels par avion). C'est en particulier ce qui permet d'économiser la répétition de l'opération d'introduction de la position initiale et du plan de vol pour les trois systèmes: la position introduite sur l'un d'eux peut être communiquée aux deux autres, comme on l'a vu en 14.3.3.1.

14.3.5.5 Détection de pannes

Les systèmes inertiels sont couplés au pilote automatique de l'avion. Leur sécurité de fonctionnement a donc une grande importance. En particulier, il est indispensable que la grande majorité des pannes qui peuvent se produire dans un système soient détectées «à la source», dans le système inertiel lui-même, qui doit alors annoncer sa panne au pilote automatique et aux instruments de bord qu'il alimente, dans les plus brefs délais (0,2 à 0,3 seconde).

La probabilité de panne non détectée doit rester de l'ordre de 10^{-9} par minute. Des dispositifs de détection de pannes très évolués sont donc nécessaires. Ils doivent pouvoir détecter le plus grand nombre de pannes possible, tout en restant d'une complexité raisonnable (sinon, les risques de détecter de fausses pannes s'accroissent). Leur nature dépend étroitement de la fonction qu'ils surveillent. Ainsi, dans un asservissement de cardan, on surveille que le signal d'erreur en entrée de chaîne reste inférieur à un seuil faible, ou bien que la commande sur les moteurs de cardan ne reste pas saturée ou bloquée pendant plus de 0,1 à 0,2 seconde. Dans la transmission des signaux de roulis et tangage vers le pilote automatique, on vérifie l'intégrité de la liaison électrique et la «vraisemblance» du signal émis (test consistant à vérifier que le sinus et le cosinus de l'angle transmis sont bien liés par une certaine relation).

On effectue de même un test de vraisemblance sur les accélérations transmises au calculateur par les intégrateurs digitaux d'accélérations (l'accélération d'un avion ne peut rester ni très forte, ni très faible pendant très longtemps).

D'autres dispositifs surveillent la température de la plate-forme, celle de l'ensemble des alimentations du système, etc. Enfin, l'auto-test du calculateur se fait simplement par «software»: résolution de problèmes-tests faisant intervenir autant de périphériques que possible (codage et décodage analogique-digital, etc.).

14.3.6 CONCLUSIONS

De toutes les normes qui régissent les équipements de bord pour l'aéronautique civile, celle qui se rapporte aux systèmes inertiels (la norme ARINC 561) est probablement la plus importante pour plusieurs raisons:

- d'une part, le système inertiel est au cœur même de l'ensemble de pilotage et de guidage de l'avion. La définition d'un système inertiel standard implique donc des choix fondamentaux en matière d'«avionique» (organisation des équipements de bord et articulation de leurs fonctions respectives pour assurer le pilotage et le guidage de l'avion). Ainsi, on peut dire que le système

de pilotage et de navigation d'avions modernes, comme les «gros-porteurs» (Boeing 747, Lockheed L 1011, Douglas DC 10) ou les supersomiques, est construit autour des systèmes inertiels;

- d'autre part, les systèmes inertiels sont historiquement les premiers équipements comportant un calculateur numérique universel. Cela a des répercussions importantes par les possibilités nouvelles de dialogue homme-machine (introduction d'une boîte de commande et d'affichage numérique avec clavier) ainsi que par la facilité des échanges d'informations entre équipements... à condition qu'ils soient tous «digitalisés». La norme ARINC 561 a donc posé un jalon dont tous les équipements en voie de «digitalisation» (c'est la tendance générale) doivent tenir compte. Dans ce sens, elle conditionne largement la notion de «système intégré» qui se fait jour progressivement dans l'aéronautique civile.

Il est certain que la norme ARINC 561, par l'importance de ses répercussions, suscite des controverses et n'apparaît pas toujours à tous comme le meilleur compromis possible. Elle n'en marquera pas moins l'évolution des équipements de bord à court et moyen terme. Solution pragmatique typiquement américaine, elle a le mérite de résoudre les problèmes du présent (plusieurs centaines de systèmes inertiels fonctionnent aujourd'hui sur les longs-courriers du monde entier) en préparant autant qu'il est possible les développements à venir.

14.4 Tendances de la navigation inertielle pour avions commerciaux

14.4.1 GÉNÉRALITÉS

Les systèmes inertiels d'aujourd'hui (systèmes type ARINC 561) ont été conçus pour répondre aux besoins de la navigation transocéanique (Atlantique Nord et dans une moindre mesure Océan Pacifique). La navigation dans les zones terminales (zones continentales de départ et d'arrivée) se fait surtout à l'aide de moyens radio-électriques de faible portée mettant en œuvre des stations au sol (système en coordonnées polaires type VOR-DME, ou système hyperbolique Decca). Ce qu'on demandait initialement aux systèmes inertiels, c'était de combler le fossé qui existait entre le réseau radio-électrique du continent de départ et celui du continent d'arrivée.

De la sorte, l'avion emprunte au départ des routes balisées jusqu'à la côte, puis fait une traversée à l'estime (navigation inertielle) avec une précision telle qu'il atteigne l'autre côte à portée d'une station connue et qu'il entre sans problèmes dans les couloirs aériens aménagés.

Le système inertiel est ainsi le concurrent direct du système radio-électrique à longue portée (système LORAN par exemple) dont les inconvénients n'ont pas permis l'adoption généralisée pour la navigation transocéanique.

Or l'acuité accrue des problèmes de la circulation aérienne tend à promouvoir l'emploi des systèmes inertiels dans le domaine de la navigation continen-

tale, en même temps qu'elle confirme leur intérêt dans la navigation transocéanique. Nous essaierons de dégager les tendances qui se manifestent dans ces deux domaines.

14.4.2 NAVIGATION TRANSOCÉANIQUE

A l'heure actuelle, une centaine d'avions survolent simultanément l'Atlantique Nord aux heures de pointe. Le total pourrait atteindre 200 dans les années à venir. La circulation se fait sur des routes parallèles. Les espacements en vigueur sont:

- latéralement 120 milles nautiques (220 km) pour deux routes situées au même niveau de vol;
- verticalement 2000 pieds (600 mètres);
- horizontalement, distance équivalente à 15 minutes de vol pour deux avions qui se suivent sur la même route.

Ces espacements sont destinés à garantir un risque de collision inférieur à un pour dix-millions d'heures de vol, compte-tenu de la précision connue des moyens actuels de navigation. De tels espacements seraient surabondants si on supposait tous les avions équipés de deux ou trois systèmes inertiels de type ARINC 561 (voir performances, paragraphe 14.3.4). Or, le problème se pose précisément de les réduire pour faire face à l'encombrement aérien des années à venir.

Des espacements latéraux de 90 milles nautiques seraient certainement réalisables en supposant chaque avion équipé de trois systèmes inertiels (ce sera le cas pour les BOEING 747 de 350 places). Il serait même possible d'envisager des séparations de 60 milles nautiques, s'il était prouvé que les systèmes inertiels sont exempts de ces «erreurs aberrantes» dont la fréquence, bien que faible, pourrait être supérieure à ce que laisse prévoir la loi normale. Mais la preuve serait longue et coûteuse à établir. Aussi est-il possible que pour descendre à des espacements de 60 milles nautiques ou moins, on aura recours à des systèmes hybrides faisant intervenir les satellites de navigation. Mais ceux-ci, pour des raisons d'économie, n'auraient qu'un rôle de surveillance.

Ils vérifieraient périodiquement les écarts des avions par rapport à leur route nominale. Tout écart excessif se traduirait par un «rappel à l'ordre» vers l'avion fautif (communication téléphonique ou transmission digitale automatique du type «datalink»). On évalue que pour une population de 200 avions équipés de systèmes inertiels, le nombre des appels ne devrait pas dépasser un par heure et par avion, pour maintenir la sécurité actuelle avec des espacements ramenés à 60 milles nautiques.

Le système inertiel tendrait donc à s'intégrer dans un système «hybride» dont il resterait la partie fondamentale. Il pourrait devenir l'«interlocuteur» d'un calculateur de bord relativement puissant qui recevrait les informations provenant des satellites en assurant en quelque sorte la «gestion» du vol (synthèse des informations, recalages, déclenchement éventuel des alarmes, etc.).

Il faut toutefois souligner que la notion de «système hybride», pour les utilisateurs civils, n'est pas la même que pour les militaires. Il s'agit moins en effet de rechercher de bonnes performances de navigation que de garantir la plus grande sécurité possible: les divers systèmes qui coopèrent à une même tâche doivent donc rester suffisamment cloisonnés pour que des pannes partielles ne compromettent pas trop le fonctionnement global et, en dernier lieu, la sécurité des passagers.

14.4.3 NAVIGATION SUR LES CONTINENTS

Les systèmes inertiels n'ont pas encore pénétré dans le domaine de la navigation continentale. Celle-ci se fait surtout au moyen des balises radio du type VOR, ou VOR et DME. Les routes continentales sont des lignes brisées dont les sommets sont des balises VOR.

Un tel système est commode et économique, mais il interdit d'établir des routes parallèles ou des routes «arbitraires», comme on a vu que c'était le cas pour le système inertiel ARINC 561 (introduction d'un plan de vol quelconque, paragraphe 14.3.3.1).

Or, l'accroissement de la densité du trafic aérien sur les continents exige précisément l'établissement de routes parallèles ou arbitraires, puisqu'il n'est pas question de multiplier les stations au sol dont le nombre de fréquences allouées est limité. Il s'agit en somme de pouvoir s'écarter en toute sécurité des «sentiers battus»: c'est le concept d'«area navigation» (navigation «en surface» ou «à couverture de zone») qui devient de plus en plus actuel aux États-Unis et en Europe.

On peut, en toute rigueur, faire de la «navigation en surface» en utilisant seulement les aides radio-électriques du type VOR-DME ou Decca. Il suffit pour cela de faire des calculs de conversion de coordonnées ou de triangulation qui, à partir de la position des stations au sol, permettent de connaître la position de l'avion. De là, et encore par le calcul, on peut déduire les ordres de guidage nécessaires pour maintenir l'avion sur une route quelconque jalonnée par des balises fictives («balises fantômes») inscrites en mémoire du calculateur. Mais, il s'agit d'un procédé essentiellement discontinu car il faut bien, au cours d'un vol d'une certaine longueur, changer plusieurs fois de station radio (la portée n'est que de 200 ou 300 km).

Cela entraîne des commutations qui se prêtent mal aux nécessités du pilotage automatique. En outre, la réception des signaux radio-électriques n'est pas assurée en toutes circonstances (zones non couvertes, défaillances passagères, etc.) et il peut arriver qu'on reste pendant plusieurs minutes sans signal utilisable. Il est donc prudent, de toute façon, d'effectuer des calculs de navigation à l'estime, qui, par définition, évaluent le point de façon continue;

Les systèmes inertiels sont les équipements les plus perfectionnés de navigation à l'estime, et il est normal qu'on pense à eux lorsqu'on envisage les diverses solutions de «navigation en surface». Un système inertiel du type

ARINC 561 est même à lui seul un système complet de navigation en surface puisqu'il permet de programmer et de parcourir une route quelconque. Il ne lui manque, pour le vol sur les continents, qu'un peu plus de précision, notamment dans les zones terminales précédant l'atterrissage, où les évolutions de l'avion doivent être très précises par suite de la densité du trafic. Mais cette précision peut être obtenue par recalage périodique du système inertiel à l'aide du point fourni par les aides radio-électriques.

On voit donc, ici aussi, apparaître la notion de «système hybride», construit autour d'un système inertiel, et utilisant les aides radio-électriques au sol (pour la navigation sur les océans, le même rôle était joué par les satellites de navigation).

Deux solutions au moins sont alors possibles. Dans la première la synthèse des informations radio et des calculs d'estime est faite dans le système inertiel lui-même, moyennant une augmentation de la capacité de son calculateur. Dans la seconde, c'est un calculateur extérieur qui fait ces opérations et peut en outre assurer la «gestion» du vol, comme c'était aussi le cas dans la navigation transocéanique. Dans tous les cas, des dispositifs annexes (projecteurs de cartes, lecteurs de cartes magnétiques pour insertion de plan de vol, etc.) peuvent être ajoutés pour rendre plus commode l'utilisation de l'ensemble. Enfin, il n'est pas exclu que les systèmes inertiels aident un jour à améliorer les performances et la sécurité des atterrissages automatiques. Ils permettraient alors de «lisser» les informations provenant des dispositifs radio-électriques de guidage (LL.S.), et de distinguer les écarts réels de l'avion (dus par exemple à la turbulence atmosphérique) des écarts fictifs dus à la distorsion des faisceaux radio-électriques.

14.4.4 CONCLUSION

Les besoins de la navigation transocéanique comme ceux de la navigation continentale (moyens longs-courriers, et même avions à décollage et atterrissage court) semblent conduire vers des solutions «hybrides» mettant en œuvre des systèmes inertiels dont la position indiquée est recalée au moyen des aides radio-électriques. L'organisation pratique d'un tel ensemble, qui implique une certaine puissance de calcul, n'apparaît pas encore clairement.

Une forte tendance existe pour conserver l'acquis de la norme ARINC 561 sur les systèmes inertiels, ainsi que pour «digitaliser» les équipements de bord qui ne le sont pas encore.

Le système «hybride» de l'avenir sera donc vraisemblablement, soit un système inertiel ARINC 561 peu modifié (augmentation de la capacité de calcul et extension du programme), soit un système à «calculateur de gestion de vol» relativement puissant recevant ses informations des systèmes inertiels et des aides radio-électriques à la navigation. Ce calculateur a d'ailleurs déjà fait l'objet d'une recommandation de l'ARINC (sous la référence ARINC 582) et plusieurs constructeurs proposent des matériels de ce type en 1971.

ANNEXES

P. FAURRE

ANNEXE 1

NOTATIONS VECTORIELLES ET MATRICIELLES

Le lecteur est supposé familiarisé avec la notion de vecteur et la géométrie euclidienne (à trois dimensions), ainsi qu'avec les opérations matricielles élémentaires. Cette annexe a pour but d'expliquer les notations de l'ouvrage qui ne sont pas toujours classiques.

A1,1 Vecteurs

On représente les *vecteurs* par des lettres (minuscules ou majuscules, latines ou grecques) surmontées d'une flèche:

$$\vec{r}, \vec{V}, \vec{\phi}, \vec{Q}.$$

A1,2 Repères orthonormés

Les *repères orthonormés* sont notés par des lettres minuscules encadrées ou non de crochets :

	ou	$li]$	repère inertiel,
	ou	$ft]$	repère <i>terrestre</i> ,
p	ou	$[pl$	repère plate-forme,
c	ou	$[cl$	repère calculateur.

A1,3 Dérivées

Les *dérivées* temporelles (vitesse, accélération, etc.) prises par rapport à un repère $[x]$ sont désignées par

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_x \quad \text{ou} \quad \overset{x}{\vec{r}}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\dots \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_x \right)_{\dots t} \quad \text{ou} \quad \overset{x..}{\vec{r}}$$

A1.4 Composantes d'un vecteur

Les composantes d'un vecteur $\vec{r}$ dans un repère $[x]$ forment une matrice colonne de dimension 3 notée r . Dans le cas d'une dérivée $\frac{d\vec{r}}{dt}$, on note $\dot{r}$.

A1.5 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{v}$ dont les composantes sur un repère orthonormé sont $[r_1, r_2, r_3]$ et $[v_1, v_2, v_3]$ est défini par la relation

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = (r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3). \quad (\text{AU})$$

A1.6 Produit vectoriel

On sait que le produit vectoriel $\vec{r} \times \vec{v}$ est défini en repère orthonormé (direct) comme le vecteur de composantes

$$(\vec{r} \times \vec{v})_1 = r_2 v_3 - r_3 v_2 \quad (\text{A1.2})$$

$$(\vec{r} \times \vec{v})_2 = r_3 v_1 - r_1 v_3, \quad (\text{AU})$$

$$(\vec{r} \times \vec{v})_3 = r_1 v_2 - r_2 v_1. \quad (\text{A1.3})$$

Il peut se représenter encore par $A(\psi)v$, où v est la matrice colonne $[v_1, v_2, v_3]^T$ et $A(\psi)$ est la matrice antisymétrique associée à la matrice colonne ψ par la relation suivante:

$$A(\psi) = \begin{bmatrix} 0 & -\psi_3 & \psi_2 \\ \psi_3 & 0 & -\psi_1 \\ -\psi_2 & \psi_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{AU})$$

Inversement, à la matrice antisymétrique

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A1.6})$$

on peut faire correspondre la matrice colonne

$$V(A) = \begin{bmatrix} -a \\ b \\ -c \end{bmatrix}. \quad (\text{A1.7})$$

A1.7 Tenseurs et matrices

On appelle tenseur un opérateur linéaire $\vec{A}$ qui à un vecteur $\vec{v}$ fait correspondre un autre vecteur $\vec{V}$. On notera

$$\vec{V} = \vec{A}\vec{v}. \quad (\text{A1.8})$$

Dans un repère quelconque où les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{V}$ sont représentés par leurs composantes, le tenseur $\vec{A}$ est représenté par une matrice $A = [A_{ij}]$ telle que

$$V_1 = A_{11}v_1 + A_{12}v_2 + A_{13}v_3 \quad (\text{A1.9})$$

$$V_2 = A_{21}v_1 + A_{22}v_2 + A_{23}v_3, \quad (\text{A1.10})$$

$$V_3 = A_{31}v_1 + A_{32}v_2 + A_{33}v_3. \quad (\text{A1.11})$$

CHANGEMENT DE REPÈRE

A2.1 Changement de repère orthonormé

A2.1.1 On considère à présent deux repères orthonormés $[a]$ et $[b]$, sur lesquels le vecteur $\vec{r}$ a pour composantes respectivement r et r' . Ces composantes sont liées par les matrices de changement de coordonnées $T_{b/a}$ et $T_{a/b}$:

$$r = T_{b/a} r' \quad (\text{A2.1})$$

$$r' = T_{a/b} r \quad (\text{A2.2})$$

avec, évidemment

$$T_{a/b} = (T_{b/a})^{-1}. \quad (\text{A2.3})$$

Les repères $[a]$ et $[b]$ étant orthonormés, $T_{a/b}$ est une matrice orthogonale, c'est-à-dire que

$$(T_{a/b})^{-1} = (T_{a/b})' \quad (*) \quad (\text{A2.4})$$

ou

$$T_{a/b} (T_{a/b})' = (T_{a/b})' T_{a/b} = I \quad (\text{A2.5})$$

ou encore

$$T_{b/a} = (T_{a/b})'. \quad (\text{A2.6})$$

A2.1.2 Une autre façon d'introduire la matrice $T_{a/b}$ est la suivante. Si $(\vec{i}_a, \vec{j}_a, \vec{k}_a)$ et $(\vec{i}_b, \vec{j}_b, \vec{k}_b)$ représentent les vecteurs unitaires portés par les axes des trièdres $[a]$ et $[b]$, alors

$$\begin{bmatrix} \vec{i}_a \\ \vec{j}_a \\ \vec{k}_a \end{bmatrix} = (T_{b/a}) \begin{bmatrix} \vec{i}_b \\ \vec{j}_b \\ \vec{k}_b \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.7})$$

(*) Le symbole ' représente l'opération de transposition matricielle.

L'identité vectorielle

$$\vec{r} = r'_a \begin{bmatrix} \vec{i}_a \\ \vec{j}_a \\ \vec{k}_a \end{bmatrix} = r'_b \begin{bmatrix} \vec{i}_b \\ \vec{j}_b \\ \vec{k}_b \end{bmatrix} \quad (\text{A2.8})$$

donne bien

$$r'_b = T_{b/a} r'_a \quad (\text{A2.9})$$

soit

$$r'_b = T_{b/a} r'_a \quad (\text{A2.10})$$

A2.1.3 Exemple

ROTATION AUTOUR d'UN AXE DE COORDONNÉE

Pour une rotation d'angle α autour de l'axe z (voir figure A1-I), on a

$$r'_a = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} \quad r'_b = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \quad (\text{A2.11})$$

avec

$$\begin{cases} x_a = \cos \alpha x_b - \sin \alpha y_b \\ y_a = \sin \alpha x_b + \cos \alpha y_b \\ z_a = z_b \end{cases} \quad (\text{A2.12})$$

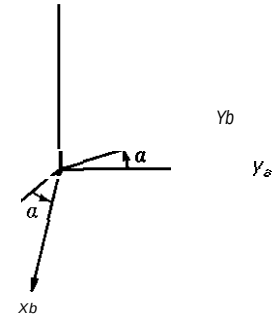


Figure A2-1. Rotation autour de l'axe z d'un angle α .

On désigne par Z_α la matrice de changement de coordonnées correspondante, pour faire ressortir qu'il s'agit d'une rotation d'angle α autour de l'axe z . Donc

$$T_{a/b} = Z_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A2.13})$$

On établit de même

$$X_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos G & -\sin G \\ 0 & \sin G & \cos G \end{bmatrix} \quad (\text{A2.14})$$

$$\begin{bmatrix} \cos L & 0 & -\sin L \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin L & 0 & \cos L \end{bmatrix} \quad (A2.15)$$

A2.1.4 Exemple

ROTATION FAISANT PASSER D'UN REPÈRE HORIZONTAL AU REPÈRE TERRESTRE

La matrice représentant les trois rotations successives (voir figure A2-2)

G = longitude,
L = latitude,
 α = angle d'azimut,

faisant passer du repère terrestre $[t]$ au repère horizontal local ou repère «vrai» $[v]$ est

$$T_{t/v} = X_G \cdot Y_L \cdot Z_\alpha \quad (A2.16)$$

$$\begin{bmatrix} \cos L \cos \alpha & -\cos L \sin \alpha & \sin L \\ \sin G \sin L \cos \alpha + \cos G \sin \alpha & -\sin G \sin L \sin \alpha + \cos G \cos \alpha & -\sin G \cos L \\ -\cos G \sin L \cos \alpha + \sin G \sin \alpha & \cos G \sin L \sin \alpha + \sin G \cos \alpha & \cos G \cos L \end{bmatrix} \quad (A2.17)$$

A2.2 Rotation instantanée

Si les repères $[a]$ et $[b]$ sont mobiles l'un par rapport à l'autre, on peut considérer la dérivée temporelle $\dot{T}_{a/b}$. Dérivant l'identité

$$T_{a/b} T_{b/a} = I, \quad (A2.18)$$

il vient

$$\dot{T}_{a/b} T_{a/b} + T_{a/b} \dot{T}_{a/b} = 0. \quad (A2.19)$$

En d'autres termes ($T_{a/b} \dot{t}_{/b}$) est une matrice antisymétrique. Désignant par $\omega_{a/b}$ le vecteur colonne associé (voir (A1.6) et (A1.7)), il vient

$$T_{a/b} \dot{t}_{/b} = A_{a/b}^{(\omega_{a/b})}, \quad (A2.20)$$

ou encore

$$\dot{T}_{a/b} = -A_{a/b}^{(\omega_{a/b})} T_{a/b}. \quad (A2.21)$$

Le vecteur $\vec{\omega}_{a/b}$ de composantes $m_{a/b}$ sur $[a]$ est appelé usuellement *vecteur rotation instantanée* de $[a]$ par rapport à $[b]$.

Dérivant

$$\dot{r}_b = T_{b/a} \dot{r}_a, \quad (A2.22)$$

on obtient

$$\dot{r}_b = T_{b/a} \dot{r}_a + \dot{T}_{b/a} r_a \quad (A2.23)$$

soit

$$T_{a/b} \dot{r}_b = \dot{r}_a + T_{a/b} \dot{T}_{b/a} r_a \quad (A2.24)$$

ou encore

$$T_{a/b} \dot{r}_b = \dot{r}_a + A_{a/b}^{(\omega_{a/b})} r_a \quad (A2.25)$$

On reconnaît ici la loi de dérivation bien connue qui s'exprime en notation vectorielle par

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega}_{a/b} \times \vec{r}. \quad (A2.26)$$

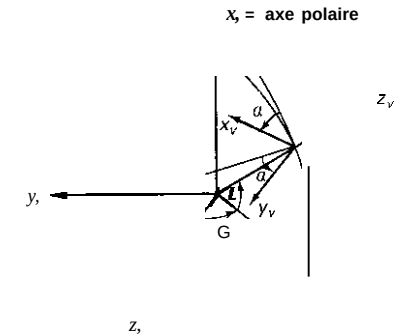


Figure A2-2. Repère vrai par rapport au repère terrestre.

A2.3 Rotation instantanée pour deux repères voisins

Soient deux repères voisins $[c]$ et $[p]$ tels que l'on passe de $[c]$ à $[p]$ par une rotation infinitésimale $\vec{\psi}$ (d'angle $|\psi|$) autour de la direction du vecteur ψ . On a donc au premier ordre

$$\psi_p = \psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = \psi \quad (A2.27)$$

et

$$T_{p/c} = I - A(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & \psi_3 & -\psi_2 \\ -\psi_3 & 1 & \psi_1 \\ \psi_2 & -\psi_1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (A2.28)$$

Afin de déterminer les composantes du vecteur rotation instantanée, on calcule au premier ordre

$$T_{p/c} \dot{T}_{p/c} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi}_3 & \dot{\psi}_2 \\ \dot{\psi}_3 & 0 & -\dot{\psi}_1 \\ -\dot{\psi}_2 & \dot{\psi}_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (A2.29)$$

On déduit alors de la relation (A1.20) l'expression suivante

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{\psi}_3 \end{bmatrix} = \dot{\psi}^P = \dot{\psi} \quad (\text{A2.30})$$

ou encore vectoriellement

$$\vec{\omega}_{p/c} = \dot{\psi}^P = \dot{\psi}^c. \quad (\text{A2.31})$$

ANNEXE 3

REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES D'UNE ROTATION

Il est fondamental en navigation par inertie de savoir déterminer l'orientation relative de plusieurs repères. Ce calcul s'effectue en intégrant l'histoire du vecteur rotation instantanée. C'est pourquoi on énumère ci-dessous les diverses représentations possibles d'un changement de repère, et les équations d'intégration correspondantes.

A3.1 Matrice orthogonale (neuf paramètres)

C'est la matrice $T_{a/b}$ dont il a été question plus haut. C'est donc une représentation à neuf paramètres (liés en fait par six relations car il n'y a en réalité que trois paramètres indépendants). Le vecteur rotation instantanée est défini à partir de $\dot{T}_{a/b}$ par

$$\omega_{a/b} = V(T^T \dot{T}_{a/b}). \quad (\text{A3.1})$$

Inversement $T_{a/b}$ est calculé par intégration de l'équation différentielle

$$\dot{T}_{a/b} = -A(\omega) T_{a/b} \quad (\text{A3.2})$$

que l'on peut développer en neuf équations différentielles ou, comme ci-dessous, en six équations différentielles et trois relations algébriques (venant du caractère orthogonal de $T_{a/b}$) :

$$\dot{t}_{11} = \omega_3 t_{21} - \omega_2 t_{31} \quad (\text{A3.3})$$

$$\dot{t}_{21} = -\omega_3 t_{11} + \omega_1 t_{31} \quad (\text{A3.4})$$

$$\dot{t}_{31} = \omega_2 t_{11} - \omega_1 t_{21} \quad (\text{A3.5})$$

$$\dot{t}_{12} = \omega_3 t_{22} - \omega_2 t_{32} \quad (\text{A3.6})$$

$$\dot{t}_{22} = -\omega_3 t_{12} + \omega_1 t_{32} \quad (\text{A3.7})$$

$$\dot{t}_{32} = \omega_2 t_{12} - \omega_1 t_{22} \quad (\text{A3.8})$$

$$\mathbf{J}_{/1'} = /'1/32 - /22/'1 \quad (\text{A3.9})$$

$$\mathbf{J}_{123} = 131t12 - t11f32 \quad (\text{A3.10})$$

$$\mathbf{J}_{133} = t11t22 - t21t12' \quad (\text{A3.11})$$

A3.2 Angles d'Euler (trois paramètres)

Cette représentation utilise trois paramètres indépendants G, L, α , correspondant à des rotations successives (figure A2-2). On a déjà vu que

$$\begin{bmatrix} \cos L \cos \alpha & -\cos L \sin \alpha & \sin L \\ \sin G \sin L \cos \alpha + \cos G \sin \alpha & -\sin G \sin L \sin \alpha + \cos G \cos \alpha & -\sin G \cos L \\ -\cos G \sin L \cos \alpha + \sin G \sin \alpha & \cos G \sin L \sin \alpha + \sin G \cos \alpha & \cos G \cos L \end{bmatrix} \quad (\text{A3.12})$$

La rotation instantanée w_{alb} est alors donnée en fonction de $\dot{G}, L, \dot{\alpha}$, par

$$\omega_1 = \dot{G} \cos L \cos \alpha + \dot{L} \sin \alpha \quad (\text{A3.13})$$

$$\omega_2 = \dot{G} \cos L \sin \alpha + \dot{L} \cos \alpha \quad (\text{A3.14})$$

$$\omega_3 = \dot{G} \sin L + \dot{\alpha} \quad (\text{A3.15})$$

Inversement, les équations différentielles générant G, L et α à partir de w_1, w_2 et w_3 sont

$$\mathbf{J} \dot{\mathbf{G}} = (\omega_1 \cos \alpha - \omega_2 \sin \alpha) / \cos L \quad (\text{A3.16})$$

$$\dot{L} = \omega_1 \sin \alpha + \omega_2 \cos \alpha \quad (\text{A3.17})$$

$$\dot{\alpha} = \omega_3 - (\omega_1 \cos \alpha - \omega_2 \sin \alpha) \tan L \quad (\text{A3.18})$$

On voit l'inconvénient de cette représentation où les points $L = \pm \pi/2$ sont des *pôles*: le système différentiel (A3.16) à (A3.18) présente une singularité dans ce cas ($1/\cos L$ ou $\tan L = \infty$).

A3.3 Représentation spectrale (quatre paramètres)

Dans ce cas on représente la rotation d'angle φ ayant pour axe le vecteur unitaire (e_1, e_2, e_3) , faisant passer de $[a]$ à $[b]$, par les quatre paramètres $(e'' = e_2, e_3, \varphi)$.

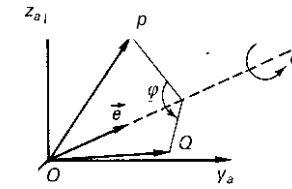


Figure A3-1. Rotation d'angle φ autour de l'axe $\vec{e}$.

On peut voir que (figure A3-1 et renvoi (*))

$$T_{alb} = \cos \varphi I + (1 - \cos \varphi) \frac{e_a e_a'}{e_a e_a'} + \sin \varphi A(e) \quad (\text{A3.19})$$

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi + (1 - \cos \varphi) e_1^2 & (1 - \cos \varphi) e_1 e_2 & -\sin \varphi e_3 & (1 - \cos \varphi) e_1 e_3 + \sin \varphi e_1' \\ (1 - \cos \varphi) e_2 e_1 + \sin \varphi e_3 & \cos \varphi + (1 - \cos \varphi) e_2^2 & (1 - \cos \varphi) e_2 e_3 - \sin \varphi e_1 \\ (1 - \cos \varphi) e_3 e_1 - \sin \varphi e_3 & (1 - \cos \varphi) e_3 e_2 + \sin \varphi e_1 & \cos \varphi + (1 - \cos \varphi) e_3^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A3.20})$$

A3.4 Représentation par quaternion ou paramètres d'Euler (quatre paramètres)

A3A.1 Si l'on définit quatre nouveaux paramètres à partir de ceux correspondant à la représentation spectrale par les relations

$$\begin{cases} P_1 = e_1 \sin(\varphi/2) \\ P_2 = e_2 \sin(\varphi/2) \\ P_3 = e_3 \sin(\varphi/2) \\ P_4 = \cos(\varphi/2) \end{cases} \quad (\text{A3.21})$$

(remarquer que $\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2 = 1$), on peut alors exprimer T_{alb} de façon

(*) Ce résultat découle de la formule vectorielle

$$\vec{OQ} = \cos \varphi \vec{OP} + (1 - \cos \varphi) (\vec{e} \cdot \vec{OP}) \vec{e} + \sin \varphi \vec{e} \times \vec{OP}$$

représentant le transformé $\vec{OQ}$ de $\vec{OP}$ par la rotation considérée.

entière en fonction de $P1'$, $P2$, $P3$ et $P4$:

$$T_{a/b} = \begin{bmatrix} P, -P2-P, +P4 & 2(\rho_1\rho_2 - \rho_3\rho_4) & 2(P, P1 + \rho_2\rho_4) \\ 2(P, P2+P, P.) & P^2 + P2^2 - P^2 + P^2 & 2(P2P, -P, P.) \\ 2(P, P1 - \rho_2\rho_4) & 2(P2P, +P, \rho_4) & \rho_1^2 - \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2 \end{bmatrix} \quad (A3.22)$$

A3.4.2 Une autre façon d'obtenir cette représentation consiste à utiliser l'isomorphisme existant entre le groupe multiplicatif des quaternions de module unité et le groupe des rotations d'un solide. Le vecteur de composantes $r_a = [X_a, Y_a, Z_a]$ est représenté par le quaternion

$$x_a = xai + YaJ + zak \quad (A3.23)$$

et la rotation $(e_a'', e_a'', e_a'' \varphi)$ par le quaternion

$$Q_{a/b} = P_i i + p_j j + p_k k + P4' \quad (A3.24)$$

On rappelle que la multiplication (non commutative) des quaternions est définie par les règles suivantes:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad (A3.25)$$

$$ij = -ji = k \quad jk = -kj = i \quad ki = -ik = j. \quad (A3.26)$$

Le quaternion $Q_{u/b}$ a module unité. En effet si $Q_{a/b}^*$ représente le quaternion conjugué de $Q_{a/b}$

$$Q_{a/b}^* = -\rho_1 i - \rho_2 j - \rho_3 k + \rho_4, \quad (A3.27)$$

on a

$$\begin{aligned} Q_{a/b} Q_{a/b}^* &= (p, i + P2j + p, k + P.)(-p, i - P2j - p, k + P.) \\ &= P^2 + P2^2 + P^2 + P4^2 = 1. \end{aligned} \quad (A3.28)$$

Donc

$$Q_{a/b}^* = Q_{a/b}^* \quad (A3.29)$$

Avec la notation quaternionnienne, l'expression matricielle de changement de base

$$r_a = T_{a/b} r_b \quad (A3.30)$$

s'écrit

$$X_a = Q^T I X_b Q : lb' \quad (A3.31)$$

Si l'on développe cette expression en utilisant les règles (A3.25) et (A3.26), on retrouve bien la matrice $T_{a/b}$ (A3.22). Dérivant l'expression (A3.31), il vient

$$Q_{a/b} \dot{X}_b Q_{a/b}^* = \dot{X}_a + (Q_{a/b} \dot{Q}_{b/a}) X_a + X_a (Q_{a/b} \dot{Q}_{b/a})^*, \quad (A3.32)$$

écriture en quaternion de la règle de composition de dérivation vectorielle (A2.26).

Si l'on développe l'expression (A3.32), on voit que

$$Q_{a/b} \dot{Q}_{b/a} = \Omega_a / 2 \quad (A3.33)$$

où l'on a posé

$$\Omega_a = w_a i + W2j + w_a k. \quad (A3.34)$$

L'équation différentielle vérifiée par $Q_{a/b}$ est donc

$$\dot{Q}_{a/b} = -\Omega_a Q_{a/b} / 2. \quad (A3.35)$$

Développée en équations différentielles scalaires, elle devient

$$\dot{\rho}_1 = -\frac{1}{2}(-W, P2 + w, p, + W, P4) \quad (A3.36)$$

$$\dot{\rho}_2 = -HW, P, -W, P, + w, P.) \quad (A3.37)$$

$$\dot{\rho}_3 = -\frac{1}{2}(-W, P, + w, p, + w, P.) \quad (A3.38)$$

$$\dot{\rho}_4 = HW, P, + W, P, + w, p,.) \quad (A3.39)$$

ANNEXE 4

TRANSFORMATION DE LAPLACE

A4.1 Définition élémentaire des transformations de Laplace et de Fourier

Soit une fonction réelle $f(t)$ de la variable réelle $t \in (-\infty, +\infty)$. Si la fonction f n'est définie que sur une demi-droite ($t \in [0, +\infty)$ par exemple), on la pose par convention égale à 0 pour les autres valeurs de t .

On introduit alors la fonction complexe $F(s)$ de la variable complexe $s = \sigma + j\omega$ (appelée *fréquence complexe*)

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (M.1)$$

pour les valeurs de s telles que l'intégrale converge.

Étant donné que le module de e^{-st} vérifie

$$|e^{-st}| = e^{-\sigma t}, \quad (A4.2)$$

on peut montrer aisément que si l'intégrale (A4.1) converge, alors la convergence a lieu dans une bande du plan complexe s définie par

$$\sigma_1 < \sigma = \text{Re}(s) < \sigma_2, \quad (A4.3)$$

et appelée *bande de convergence* (voir figure A4-1).

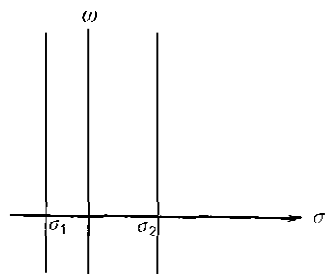


Figure A4-1. Bande de convergence.

De façon précise, on appelle *Transformée de Laplace* (si elle existe) d'une fonction $f(t)$ l'ensemble de la fonction $F(s)$ et de la bande de convergence (σ_1, σ_2) de l'intégrale (A4.1) (*). On note ceci par

$$f(t) \rightarrow \{F(s), (\sigma_1, \sigma_2)\}. \quad (MA)$$

Si la bande de convergence (σ_1, σ_2) contient le point zéro, on dit alors que $F(j\omega)$ est la *transformée de Fourier* de $f(t)$.

Le critère suivant permet de déterminer en pratique si une fonction a une transformée de Laplace.

(*) Pour de nombreuses applications, il est suffisant de connaître une valeur $\sigma_0 \in (\sigma_1, \sigma_2)$ sans connaître de façon précise σ_1 et σ_2 .

A4.2 Critère d'existence d'une transformée de Laplace

$f(t)$ est localement intégrable (*) et si

$$|f(t)| < M e^{c_1 t} \quad \text{lorsque } t \rightarrow +\infty, \quad (A4.5)$$

$$|f(t)| < M e^{c_2 t} \quad \text{lorsque } t \rightarrow -\infty, \quad (A4.6)$$

avec

$$c_1 < c_2, \quad (M.?)$$

la transformée $F(s)$ existe et la bande de convergence contient l'intervalle (c_1, c_2) .

A4.3 Exemples

$f(t)$	$F(s), (\sigma_1, \sigma_2)$
$\begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-at} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s+a}, (-a, \infty)$
$\begin{cases} e^{-at} & \text{si } t \leq 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s+a}, (-\infty, -a)$
$\begin{cases} e^{-\beta t} & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s+\alpha} + \frac{1}{s+\beta}, (-\alpha, -\beta)$
avec $\beta < \alpha$	
$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-t^2/2\sigma^2}$	$e^{\sigma^2 s^2/2}, (-\infty, +\infty)$

A4.4 Inversion de la transformation de Laplace

Le résultat fondamental est qu'il est possible de remonter à la fonction $f(t)$ (ou presque) à partir de $F(s)$ par l'opération appelée *transformation inverse de Laplace*. Le résultat précis est que $f(t)$ est localement à variation bornée, alors

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2} (f(t+0) + f(t-0))^{(**)} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad (A4.8)$$

(*) On entend par là que $\int_a^b |f(t)| dt$ existe pour toutes valeurs de a et b finies.

(**) Quantité égale à $f(t)$ en tous les points de continuité de $f(t)$.

l'intégrale notée $\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}$ étant prise le long d'un chemin quelconque joignant $-j\infty$ à $+j\infty$ à l'intérieur de la bande de convergence.

En pratique, on utilise rarement ce résultat pour calculer des transformées inverses, mais on décompose plutôt $F(s)$ en somme d'éléments

$$F(s) = F_1(s) + \dots + F_k(s) \quad (\text{A4.9})$$

de façon à trouver les valeurs des transformées inverses $\mathcal{L}^{-1}\{F_i(s)\}$ dans un tableau comme celui présenté à la fin de ce complément (Tableau A4.1).

A4.5 Transformation d'une intégrale de convolution

Soient les fonctions/Ct) et $g(t)$ ayant des transformées $F(s)$ et $G(s)$ dont les bandes de convergence ont en commun au moins une valeur σ , alors l'intégrale de convolution

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \\ &= g * f = f * g \end{aligned} \quad (\text{A4.10})$$

est bien définie (convergente) et sa transformée de Laplace est

$$H(s) = \mathcal{L}\{g \text{ of}\} = G(s)F(s), \quad (\text{A4.11})$$

la bande de convergence contenant σ .

En effet, pour $s = \sigma + j\omega$, on a

$$\begin{aligned} G(s)F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} g(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sy} f(y) dy \\ &= \iint e^{-(x+y)s} g(x) f(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\sigma} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) dx \end{aligned}$$

avec le changement de variable $y = t-x$.

A4.6 Théorème de Parseval

Si f et g sont des fonctions à carrés intégrables, alors l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt$$

est bien définie, et σ désignant un point commun des intervalles de convergence de $F(s)$ et $G(s)$, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \frac{i}{2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)G(-s)ds. \quad (\text{A4.12})$$

A4.7 Divers théorèmes de calcul

On énonce ci-après divers théorèmes fondamentaux pour l'utilisation de la transformation de Laplace. On suppose que

$$f(t) \supset \{F(s), (\sigma_1, \sigma_2)\}. \quad (\text{A4.13})$$

i) *Changement d'échelle*

$$fU/a \supset \{aF(as), (a\sigma_1, a\sigma_2)\}. \quad (\text{M.14})$$

ii) *Translation temporelle*

$$f(t-T) \supset \{e^{-sT}F(s), (\sigma_1, \sigma_2)\}. \quad (\text{A4.15})$$

iii) *Translation fréquentielle*

$$e^{s_0 t} f(t) \supset \{F(s-s_0), (\sigma_1-\sigma_0, \sigma_2-\sigma_0)\} \quad (\text{M.16})$$

où σ_0 désigne la partie réelle de s_0 .

iv) *Valeur finale et valeur initiale*

Si/Ct) est nulle pour $t < 0$ et si $F(s)$ est définie pour tout σ positif, on a

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} sF(s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t). \quad (\text{M.17})$$

Si/Ct) est nulle pour $t < 0$, on a

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t). \quad (\text{A4.18})$$

v) *Dérivation et intégration*

Si/Ct) est nulle pour $t < 0$, localement intégrable et si

$$f(t) \supset \{F(s), (\sigma_1, \sigma_2)\},$$

la fonction

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \int_0^t f(\tau) d\tau + g_0 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (\text{A4.19})$$

a la transformée $G(s)$, (σ_2, ∞) avec

$$G(s) = \frac{1}{s} F(s) + \frac{g_0}{s} \quad (\text{A4.20})$$

et

$$\sigma_2 = \max(0, \sigma_1).$$

Si $f(t)$ est nulle pour $t < 0$, si elle a une dérivée localement intégrable pour tout $t > 0$ et si elle a une limite $f(0^+)$, on a

$$j'(\cdot) \supset \{f(t), (\sigma_1, \infty)\},$$

avec

$$F_1(s) = sF(s) - f(0^+). \quad (\text{A4.21})$$

TABLEAU A4-1
Transformées de Laplace

$f(t)$	$F(s)$	(σ_1, σ_2)
$\delta(t)$	1	
$\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} u(t)$	1	$(0, \infty)$
$\frac{e^{-\alpha t} t^{m-1}}{(m-1)!} u(t)$	$(s+\alpha)^m$	$(-IX, \infty)$
$\sin \beta t u(t)$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$(0, \infty)$
$\cos \beta t u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$	$(0, \infty)$
$(1 - \cos \beta t) u(t)$	$\frac{\beta^2}{s(s^2 + \beta^2)}$	$(0, \infty)$

$f(t)$	$F(s)$	(σ_1, σ_2)
$\left(t - \frac{\sin \beta t}{\beta}\right) u(t)$	$\frac{\beta^3}{s^3(s^2 + \beta^2)}$	$(0, \infty)$
$\left(\frac{t^2}{2} - \frac{(1 - \cos \beta t)}{\beta^3} u(t)\right)$	$\frac{\beta^2}{s^3(s^2 + \beta^2)}$	$(0, \infty)$
$e^{-\alpha t} \sin \beta t u(t)$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$	$(-IX, \infty)$
$e^{-\alpha t} \cos \beta t u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$	$(-IX, \infty)$
$[1 - e^{-\alpha t} (\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t)] u(t)$	$\frac{\beta^2}{s[(s+\alpha)^2 + \beta^2]}$	$(0, \infty)$
$\left[t - \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} (2\alpha \cos \beta t + (1X^2 - \beta^2) \sin \beta t)\right] u(t)$	$\frac{\beta^2}{s^2[(s+\alpha)^2 + \beta^2]}$	$(0, \infty)$

NOTE: $u(t)$ désigne l'échelon de Heaviside:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

ANNEXE 5

TRANSFORMATION EN Z

A5.1 Définition de la transformation en Z

Pour les suites discrètes $f(k)$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) il existe une transformation analogue à la transformation de Laplace appelée *transformation en Z* et définie par

$$F(z) = Z\{f(k)\} = \sum_k f(k) z^{-k}. \quad (\text{A5.1})$$

On définit pour la série (A5.1) un *anneau de convergence* (figure A5-1)

$$r_1 < |z| < r_2, \quad (\text{A5.2})$$

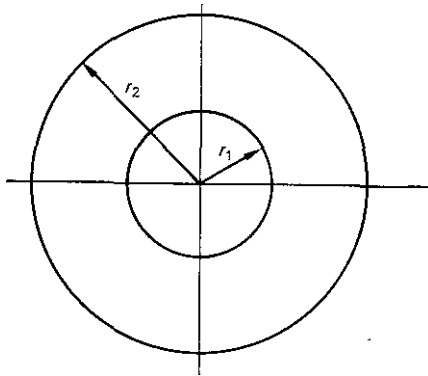


Figure A5-1. Anneau de convergence.

Si $f(k)$ est telle que

$$|f(k)| < Mr_1^n \quad \text{si} \quad k \rightarrow +\infty$$

et

$$|f(k)| < Mr_2^k \quad \text{si} \quad k \rightarrow -\infty,$$

avec $r_1 < r_2$,

$F(z)$ existe et l'anneau de convergence contient l'anneau $r_1 < |z| < r_2$.

A5.2 Théorèmes sur la transformation en Z

i) Inversion

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C+} z^{k-1} F(z) dz, \quad (\text{A5.3})$$

l'intégrale étant étendue à un contour fermé direct $C+$ entourant l'origine et situé à l'intérieur de l'anneau de convergence.

ii) Convolution

Définissant

$$h(n) = \sum_k f(k) g(n-k) \quad (\text{A5.4})$$

alors

$$H(z) = F(z) G(z) \quad (\text{A5.5})$$

pour un point commun des anneaux de convergence.

iii) Théorème de Parseval

$$\sum_k f(k) g(k) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C+} F(z) G(z^{-1}) z^{-1} dz. \quad (\text{A5.6})$$

iv) Translation temporelle

$$f(n-k) : J \{z^{-k} F(z), (r_1^{-k}, r_2^{-k})\}. \quad (\text{A5.7})$$

v) Translation fréquentielle

$$a^n f(n) \supset \left\{ F\left(\frac{z}{a}\right), \left(\frac{r_1}{a}, \frac{r_2}{a}\right) \right\}. \quad (\text{A5.8})$$

vi) Valeur finale et initiale

Si $f(n)$ est nulle pour $n < 0$, et si $F(z)$ est définie pour $z \in (1, \infty)$,

$$\lim_{z \rightarrow 1+} (1-z^{-1}) F(z) = \text{Hm } f(n). \quad (\text{A5.9})$$

Si $f(n)$ est nulle pour $n < 0$,

$$\text{Hm } F(z) = f(0). \quad (\text{A5.10})$$

TABLEAU A5-1
Transformées en z

$f(n)$	$F(z)$	(r_1, r_2)
	1	$(0, \infty)$
	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$(1, \infty)$
	$\frac{1}{(1-z^{-1})'}$	$(1, \infty)$
	$\frac{1}{1-\rho z^{-1}}$	(ρ, ∞)
$u_n \sin \beta n$	$\frac{(\sin \beta) z^{-1}}{1-(2 \cos \beta) z^{-1}+z^{-2}}$	$(1, \infty)$
$u_n \cos \beta n$	$\frac{1-(\cos \beta) z^{-1}}{1-(2 \cos \beta) z^{-1}+z^{-2}}$	$(1, \infty)$
$u_n \rho^n \sin \beta n$	$\frac{(\sin \beta) \rho z^{-1}}{1-(2 \cos \beta) \rho z^{-1}+\rho^2 z^{-2}}$	(ρ, ∞)
$u_n \rho^n \cos \beta n$	$\frac{1-(\cos \beta) \rho z^{-1}}{1-(2 \cos \beta) \rho z^{-1}+\rho^2 z^{-2}}$	(ρ, ∞)

NOTE: u_n représente la suite

$$u_n = \begin{cases} +1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

ANNEXE 6

INTÉGRATIONS NUMÉRIQUES
D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

A6.I Introduction

On voit se développer aujourd'hui un intérêt grandissant pour les équations différentielles et les méthodes numériques d'intégration.

A6.1.I SIMULATION NUMÉRIQUE

En effet la puissance actuelle des ordinateurs utilisés pour le calcul scientifique entraîne la possibilité de simuler des systèmes complexes: l'expérimentation se fait sur ordinateur au lieu de se faire sur une maquette ou un prototype. L'utilisation de telles méthodes numériques suppose bien entendu que l'on ait un *modèle mathématique* du système considéré. Les lois fondamentales de la physique étant énoncées sous forme d'équations différentielles, il n'est pas étonnant que, très souvent, un tel modèle *soit* exprimé sous forme de telles équations. En ce *qui* concerne les systèmes de navigation, aussi bien pour le cas simple du chapitre 2 que pour le cas général envisagé par la suite (chapitres 9 et 12) le comportement d'un système et de ses erreurs s'exprime par des équations différentielles.

A6.1.2 MÉCANISATION DE SYSTÈMES COMPLEXES

D'autre part, très souvent, le traitement que le système à réaliser doit faire subir aux différentes grandeurs considérées s'exprime sous forme d'équations différentielles. Ainsi l'exploitation des signaux d'une plate-forme à inertie en vue d'obtenir la position et la vitesse s'exprime sous forme d'équations différentielles à intégrer en temps réel (voir chapitre 9). De même le traitement optimal des informations de provenance de divers instruments de navigation est mis au chapitre 12 sous la même forme en utilisant des méthodes récursives de filtrage statistique.

Lorsque les systèmes étaient réalisés par des organes analogiques, il convenait de transformer ces équations différentielles en une forme plus proche de la réalisation physique envisageable, par exemple en fonctions de transfert. Par contre lorsque l'on réalise le système à l'aide d'un calculateur alors dit « cal-

culateur temps réel », la voie la plus directe consiste à utiliser les méthodes d'intégration numérique développées ci-après.

A6.1.3 RÉSUMÉ DE L'ANNEXE

Après une description de quelques-unes des méthodes les plus courantes d'intégration numérique d'équation différentielle, on analyse les deux classes d'erreurs apparaissant dans tous les cas: les erreurs de troncature (encore appelées erreurs de discrétisation) intrinsèques aux méthodes utilisées et les erreurs d'arrondi venant de l'utilisation d'une représentation des nombres de taille finie. On mène cette analyse en utilisant la théorie des systèmes linéaires exposée au chapitre 3 et celle des systèmes linéaires perturbés par des bruits aléatoires exposée au chapitre 4.

A6.2 Intégration numérique d'équations différentielles

A6.2.1 DÉFINITION DU PROBLÈME

Rappelons qu'une équation différentielle (vectorielle) se présente comme une relation

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (\text{A6.1})$$

où x = vecteur d'état de dimension n ,
 t = temps,
 $\dot{x} = dx/dt$,

avec une condition initiale

$$x(t_0) = \xi. \quad (\text{A6.2})$$

Intégrer l'équation différentielle, c'est alors trouver une fonction $x(t)$ dérivable vérifiant à chaque instant la relation (A6.1) et satisfaisant la condition initiale (A6.2).

A vrai dire, on considère une suite discrète de points sur l'axe des temps

$$t_k = t_0 + kh \quad (\text{A6.3})$$

(h est appelé *pas d'intégration*) et on limite le problème à la recherche des valeurs de la solution de (A6.1) et (A6.2) aux instants t_k . On désigne par x_k les valeurs calculées approchant la valeur exacte $x(t_k)$ de la solution et on note

$$\dot{x}_k = f(x_k, t_k). \quad (\text{A6.4})$$

Une méthode d'intégration numérique est alors un algorithme permettant de générer la suite x_k , à partir de ξ d'une part, et d'un algorithme définissant la fonction $f(x, t)$ ou d'un tableau des valeurs numériques de cette fonction d'autre part.

On est assuré de l'existence et de l'unicité de la solution de (A6.1) au cas où f est continue et globalement Lipschitzienne, i.e. pour tout x, x' et t on a

$$\|f(x, t) - f(x', t)\| \leq A\|x - x'\|. \quad (\text{A6.5})$$

On est assuré d'une solution locale lorsque cette condition est vérifiée localement.

A6.2.2 QUELQUES MÉTHODES D'INTÉGRATION

10 Méthode d'Euler

Supposons que la solution $x(t)$ existe. Il est alors clair que plus h est petit, meilleure est l'égale approchée

$$\frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{h} \simeq f(x(t_k), t_k). \quad (\text{A6.6})$$

Cette remarque donne l'idée de la méthode d'intégration suivante dite *méthode d'Euler* :

$$x_0 = \xi \quad (\text{A6.7})$$

$$x_{k+1} = x_k + hf(x_k, t_k), k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A6.8})$$

En quelque sorte cette méthode est fondée sur l'idée que la pente de la solution varie peu entre les instants t_k et t_{k+1} et qu'on peut la considérer comme constante et égale à $\dot{x}_k$. On verra plus loin que cette méthode est d'ordre un.

20 Méthode prédictor d'Adams-Bashforth

Il est possible d'améliorer la méthode très simple d'Euler en utilisant non seulement x_k et $\dot{x}_k$, mais aussi des valeurs passées déjà calculées $x_{k-1}, \dot{x}_{k-1}, \dots$ afin de chercher à mieux atteindre la «courbure» de la solution.

Par exemple, pour calculer x_{k+1} essayons d'approximer la solution par un polynôme du second degré passant par (x_k, t_k) avec la pente $\dot{x}_k$ et ayant la pente $\dot{x}_{k-1}$ à l'instant t_{k-1} . Posant $\tau = t - t_k$, il vient

$$x(\tau) = x_k + \dot{x}_k \tau + (\dot{x}_k - \dot{x}_{k-1}) \frac{\tau^2}{2h}. \quad (\text{A6.9})$$

Ceci conduit à la méthode (d'ordre deux)

$$x_{k+1} = x_k + h \left(\frac{3}{2} f(x_k, t_k) - \frac{1}{2} f(x_{k-1}, t_{k-1}) \right). \quad (\text{A6.10})$$

Une telle méthode donnant x_{k+1} en fonction de $x_k, \dot{x}_k$ et des pentes passées $\dot{x}_{k-1}, \dot{x}_{k-2}, \dots$ est dite *d'Adams-Bashforth*. On qualifie cette méthode de

méthode à pas multiples car il faut utiliser des valeurs calculées au point k , $k-1$, ..., pour obtenir la valeur x_{k+1} . Un inconvénient de telles méthodes est donc qu'elles ne démarrent pas seules à partir de la valeur initiale $x = \xi$. La méthode d'Euler par contre est une méthode à pas unique.

La version d'ordre quatre de la méthode d'Adams-Bashforth est

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{24} (55\dot{x}_k - 59\dot{x}_{k-1} + 37\dot{x}_{k-2} - 9\dot{x}_{k-3}) \quad (\text{A6.11})$$

3° Méthode prédictor-correcteur d'Adams-Moulton

On peut imaginer d'approximer encore mieux la courbure de la solution en faisant intervenir non seulement les pentes aux points k , $k-1$, ..., mais aussi la pente au point $k+1$. Les formules correspondantes d'ordre deux et d'ordre quatre sont

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2} (\dot{x}_{k+1} + \dot{x}_k) \quad (\text{A6.12})$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{24} (9\dot{x}_{k+1} + 19\dot{x}_k - 5\dot{x}_{k-1} + \dot{x}_{k-2}). \quad (\text{A6.13})$$

Une telle méthode est dite *implicite* car l'inconnue x_{k+1} apparaît à la fois au premier et au second membre de façon implicite dans $\dot{x}_{k+1} = f(x_{k+1}, t_{k+1})$.

Une formule telle que (A6.12) ou (A6.13) faisant intervenir la dernière valeur calculée x_k ainsi que les pentes aux points $k+1$, k , $k-1$, ... est dite d'Adams-Moulton.

En général, l'équation (A6.12) est résolue par itération; on prend une valeur initiale approchée x_{k+1}^p (pour prédire) en utilisant une formule explicite du même ordre (d'Adams-Bashforth par exemple). Cette valeur permet alors de calculer

$$\dot{x}_{k+1}^p = f(x_{k+1}^p, t_{k+1}),$$

puis d'utiliser la formule d'Adams-Moulton pour «corriger». On s'arrête en général à cette étape, c'est-à-dire après une seule itération. Pour résumer dans le cas de la méthode d'ordre quatre l'algorithme d'intégration se compose des formules suivantes.

$$\begin{aligned} x_{k+1}^p &= x_k + \frac{h}{24} (55\dot{x}_k - 59\dot{x}_{k-1} + 37\dot{x}_{k-2} - 9\dot{x}_{k-3}) \\ \dot{x}_{k+1}^p &= f(x_{k+1}^p, t_{k+1}) \\ &= x_k + \frac{h}{24} (9\dot{x}_{k+1}^p + 19\dot{x}_k - 5\dot{x}_{k-1} + \dot{x}_{k-2}). \end{aligned} \quad (\text{A6.14})$$

Cette méthode n'est pas une méthode à démarrage automatique (car elle est à pas multiples).

40 Méthodes à un pas de Runge-Kutta

Les méthodes à un pas sont très populaires car elles démarrent seules. Les méthodes dites de Runge-Kutta sont de cette classe.

L'idée (pour la méthode du deuxième ordre) est d'utiliser une formule du type

$$x_{k+1} = x_k + h \{ a_1 f(x_k, t_k) + a_2 f(x_k + p_2 f(x_k, t_k), t_k + p_1 h) \} \quad (\text{A6.15})$$

en choisissant convenablement les constantes a_1 , a_2 , p_1 et p_2 de façon à approximer au mieux la «courbure» de la solution, ou encore à faire coïncider la formule (A6.15) avec un développement de Taylor de la solution autour du point (x_k, t_k) , développement d'ordre aussi élevé que possible. Dans le cas de la formule (A6.15), ceci conduit à

$$a_1 + a_2 = 1 \quad \text{et} \quad p_1 a_2 = \frac{1}{2}.$$

Par exemple en choisissant $a_2 = 1/2$, on obtient la méthode d'Euler améliorée

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{2} h \{ f(x_k, t_k) + f(x_k + hf(x_k, t_k), t_k + h) \}. \quad (\text{A6.16})$$

En choisissant $a_2 = 1$, on obtient la méthode d'Euler modifiée

$$x_{k+1} = x_k + hf(x_k, t_k) + \frac{1}{2} hf(x_k + hf(x_k, t_k), t_k + \frac{1}{2}h). \quad (\text{A6.17})$$

La méthode de Runge-Kutta la plus courante est une méthode d'ordre quatre définie par

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, t_k) \\ k_2 &= f(x_k + \frac{1}{2}hk_1, t_k + \frac{1}{2}h) \\ k_3 &= f(x_k + \frac{1}{2}hk_2, t_k + \frac{1}{2}h) \\ k_4 &= f(x_k + hk_3, t_k + h) \\ x_{k+1} &= x_k + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned} \quad (\text{A6.18})$$

A6.2.3 CARACTÉRISTIQUES GÉNÉRALES DES MÉTHODES D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE

10 Erreurs de discrétisation et erreurs d'arrondi

Lorsque l'on utilise l'une quelconque des méthodes décrites plus haut, la valeur calculée diffère de la valeur exacte de la solution pour deux raisons.

a) D'abord les valeurs x_k données par l'algorithme d'intégration utilisé, même lorsque les calculs sont supposés être effectués de façon parfaite (taille infinie des mots du calculateur représentant les nombres, algorithme générant f de façon parfaite, etc.), ne coïncident pas avec les valeurs exactes $x(t)$, du fait du pas fini d'intégration h et de la méthode choisie qui utilise nécessairement un nombre fini d'opérations (série de Taylor tronquée par exemple). Cette erreur

$$D_k = x_k - x(t_k) \quad (\text{A6.19})$$

est appelée *erreur de discrétisation* (i.e. venant de la «discrétisation») de l'équation différentielle) ou encore *erreur de troncature* (i.e. venant de la troncature à un nombre fini d'étapes d'un processus infini: dérivation ou développement en série de Taylor).

b) Ensuite on génère en réalité non pas les valeurs x_k vérifiant l'algorithme, mais des valeurs approchées $\tilde{x}_k$ du fait de la précision limitée des calculs effectués. On appelle l'erreur correspondante

$$A_k = \tilde{x}_k - x_k \quad (\text{A6.20})$$

l'erreur d'arrondi accumulée de la méthode.

2° Méthodes à un pas

La forme la plus générale d'une méthode d'intégration à un pas est:

$$x_{k+1} = x_k + h\Phi(x_k, t_k; h) \quad (\text{A6.21})$$

où Φ est appelée *fonction d'incrément* et dépend bien entendu du point initial (x_k, t_k) , du pas h et de la fonction $f(\cdot, \cdot)$. Par exemple pour la méthode d'Euler

$$\Phi(x, t; h) = f(x, t).$$

On définit la *fonction d'incrément exacte* Δ en introduisant la solution vraie $x(t; x_k, t_k)$ de l'équation différentielle passant par le point (x_k, t_k) , et en posant

$$\Delta(x_k, t_k; h) = \frac{x(t+h; x_k, t_k) - x_k}{h}. \quad (\text{A6.22})$$

On est ainsi en mesure de définir l'*erreur de discrétisation locale* de la méthode (A6.21)

$$d(x, t) = h(\Phi(x, t; h) - \Delta(x, t; h)). \quad (\text{A6.23})$$

Si cette erreur est de l'ordre de h^{p+1} , on dit que la méthode (A6.21) est une *méthode d'ordre* p .

Une méthode d'intégration numérique est dite *convergente* si, lorsque h tend vers zéro, x_k tend vers la valeur vraie $x(t_k)$ de la solution pour tout instant $t_k = t$ fixé. On peut alors montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode (A6.21) soit convergente est qu'elle soit d'ordre supérieur ou égal à un, ou en d'autres termes que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Phi(x, t; h) = f(x, t). \quad (\text{A6.24})$$

30 Méthode à pas multiples

La méthode (linéaire) à pas multiples (n pas) la plus générale est de la forme

$$x_{k+1} = a_1 x_k + a_2 x_{k-1} + \dots + a_n x_{k-(n-1)} + h(b_0 \dot{x}_k + b_1 \dot{x}_{k-1} + \dots + b_n \dot{x}_{k-(n-1)}). \quad (\text{A6.25})$$

Si $b_0 \neq 0$, la méthode est dite *prédicteur-correcteur* à n pas. Si $b_0 = 0$ n'est pas nul, il convient d'observer, (A6.25) en x_{k+1} par itération et la méthode correspondante porte le nom de *prédicteur-correcteur* (si h est suffisamment petit, on peut garantir la convergence de cette itération).

Le polynôme caractéristique associé à la méthode (A6.25) est défini comme

$$p(z) = z^n - a_1 z^{n-1} - \dots - a_n \quad (\text{A6.26})$$

et la méthode est dite *stable* si $p(z)$ est stable (i.e. toutes ses racines sont à l'intérieur du cercle unité ou bien si certaines sont situées sur ce cercle elles sont

simples). D'autre part, on dit que la méthode est d'ordre p si l'expression suivante est d'ordre h^{p+1} .

$$\begin{aligned} d(x(t), t) &= x(t+h) - a_1 x(t) - a_2 x(t-h) - \dots - a_n x(t-(n-1)h) \\ &\quad - h(b_0 \dot{x}(t+h) + b_1 \dot{x}(t) + \dots + b_n \dot{x}(t-(n-1)h)) \\ &= h^{p+1} \varphi(x(t), t) + O(h^{p+2}). \end{aligned} \quad (\text{A6.27})$$

On démontre qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode (A6.25) soit convergente est qu'elle soit stable et d'ordre supérieur ou égal à un. Cette dernière condition équivaut à

$$\begin{aligned} \sum_i a_i &= 1 \\ - \sum_i i a_i + \sum_j b_j &= 1. \end{aligned} \quad (\text{A6.28})$$

A6.3 Erreurs de discrétisation

A6.3.1 CAS DES MÉTHODES À UN PAS

Pour une méthode à un pas d'ordre p , on a vu que l'erreur de discrétisation locale est définie par l'expression (A6.23) qui prend la forme

$$\begin{aligned} d_k &= d(x_k, t_k) \\ &= h^{p+1} \varphi(x_k, t_k) + O(h^{p+2}). \end{aligned} \quad (\text{A6.29})$$

On pose les définitions suivantes où $x(t)$ désigne la solution vraie:

$$\varphi(t) = \varphi(x(t), t) \quad (\text{A6.30})$$

$$F(t) = \text{grad}_x f(x, t)|_{x=x(t)}. \quad (\text{A6.31})$$

L'erreur de discrétisation locale (A6.29) peut être considérée comme une perturbation locale à l'équation différentielle. La valeur intégrée de cette perturbation sur un pas (de longueur h) étant $h^{p+1}\varphi(t)$, on peut considérer la **perturbation instantanée correspondante comme étant**

$$h^{p+1} \varphi(t)/h = h^p \varphi(t).$$

La théorie classique des perturbations d'équations différentielles entraîne que le terme principal $D(t)$ de l'erreur de discrétisation à l'instant t est donné par

$$\begin{cases} D(t_0) = 0 \\ \dot{D} = F(t)D + h^p \varphi(t) \end{cases} \quad (\text{A6.32})$$

$$\dot{D} = F(t)D + h^p \varphi(t) \quad (\text{A6.33})$$

d'où

$$D(t) = h^p \int_{t_0}^t \Phi(t, \alpha) \varphi(\alpha) d\alpha, \quad (\text{A6.34})$$

Φ étant la matrice de transition associée à F .

Ceci justifie le qualificatif de *méthode d'ordre p* que nous avons attribué à la **méthode considérée: le terme principal de l'erreur de discrétisation à l'instant t fixé est d'ordre h^p .**

A6.3.2 CAS DES MÉTHODES À PAS MULTIPLES

L'erreur de discrétisation locale est donnée dans ce cas par (voir (A6.27))

$$d_k = h^{p+1} \varphi(x_k, t_k) = h^{p+1} \varphi_k. \quad (\text{A6.35})$$

Utilisant la définition (A6.31) et soustrayant (A6.27) à (A6.25), il vient

$$\begin{aligned} D_{k+1} - h b_0 F_k D_k + h^2 b_1 F_k D_k - \dots + h^p b_{p-1} F_k D_k &= h^{p+1} \varphi_k \\ \sim h(b_1 F_k D_k + b_2 F_k D_k - \dots + b_p F_k D_k) + h^{p+1} \varphi_k. \end{aligned} \quad (\text{A6.36})$$

On peut mettre l'équation aux différences précédentes sous forme canonique en posant

$$\mathcal{D}_k = [D'_k, D'_{k-1}, \dots, D'_{k-n+1}]'. \quad (\text{A6.37})$$

L'équation (A6.36) s'écrit alors

$$\mathcal{D}_{k+1} = \begin{bmatrix} a_1 I + h A_1 & \dots & a_n I + h A_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{D}_k + h^{p+1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A6.38})$$

avec

$$A_1 = a_1 b_0 F_{k+1} + b_1 F_k$$

$$A_n = a_n b_0 F_{k+1} + b_n F_{k-n+1}. \quad (\text{A6.39})$$

À l'instant fixé $t = t/h$ appartenant à la suite $\{t_i\}$ (t/h est un entier),

$$\mathcal{D}(t) = \Phi(t/h, n-1) \mathcal{D}_{n-1}$$

$$+ h^{p+1} \sum_{k=n-1}^{(t/h)-1} \Phi(t/h, k) \begin{bmatrix} \varphi_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{M.40})$$

où Φ désigne la matrice de transition du système discret (A6.38).

On voit que l'erreur de discrétisation comporte deux termes correspondant d'une part à la propagation des erreurs initiales $\mathcal{D}_{n-1}$, d'autre part à la propagation des erreurs de discrétisation locale d'ordre $O(h/h) = O(h^p)$ car la somme de l'expression (A6.40) comprend approximativement $O(1/h)$ termes. On voit encore la justification du qualificatif «d'ordre p » donné à la méthode considérée.

REMARQUES

1° On est conduit à démarrer une méthode à pas multiples d'ordre p par une méthode à un pas d'ordre p , pour avoir le même ordre de grandeur pour les deux termes de l'expression (A6.40).

2° C'est la stabilité du polynôme caractéristique $p(z)$ qui permet de considérer comme bornées les matrices de transition Φ introduites dans la formule (A6.40).

A6.4 Erreurs d'arrondi

A6.4.1 A chaque pas d'intégration on commet une erreur d'arrondi locale que l'on note

$$a_k = a(x_k, t_k). \quad (\text{A6.41})$$

Afin d'évaluer a_k , il convient d'analyser en détail la mécanisation des formules d'intégration. Très souvent cependant, l'approximation suivante est valable:

- si les calculs sont effectués en virgule fixe (mots de N bits)

$$|a_k| \leq 2^{-N}, \quad (\text{A6.42})$$

- si les calculs sont effectués en virgule flottante (caractéristique de N bits)

$$a_k \leq 2^{-N} x_k. \quad (\text{A6.43})$$

Un autre point de vue consiste à considérer l'erreur locale d'arrondi a_k comme une variable aléatoire de moyenne

$$E\{a_k\} = \bar{a}_k \quad (\text{A6.44})$$

et de covariance

$$\text{cov}\{a_k a'_j\} = Q_k \delta_{kj}. \quad (\text{A6.45})$$

L'erreur d'arrondi se propage de la même façon que l'erreur de discrétisation, c'est-à-dire suivant un modèle linéaire. On peut donc considérer que l'erreur d'arrondi accumulée $A(t)$ est une variable aléatoire caractérisée de la façon suivante:

i) pour les méthodes à un pas (voir (A6.34))

- la moyenne de $A(t)$ est

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{h} \int_{t_0}^t \Phi(t, \alpha) \bar{a}(\alpha) d\alpha \quad (\text{A6.46})$$

- la variance $I(t)$ de $A(t)$ est donnée par

$$\begin{cases} \Sigma(t_0) = 0 \\ \dot{\Sigma} = F\Sigma + \Sigma F' + \frac{1}{h} Q, \end{cases} \quad (\text{A6.47})$$

$$\dot{\Sigma} = F\Sigma + \Sigma F' + \frac{1}{h} Q, \quad (\text{A6.48})$$

ii) pour les méthodes à pas multiples, nous définissons un vecteur $a(t)$ analogue à $\mathcal{D}(t)$ (voir (A6.37) et (A6.40))

sa moyenne $\bar{a}(t)$ est donnée par

$$\bar{a}(t) = \Phi(t/h, n-1) \bar{a}_{n-1} + \frac{1}{h} \left\{ h \sum_{n=1}^{(t/h)-1} \Phi(t/h, k) \begin{bmatrix} \bar{a}_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{A6.49})$$

- la variance $I(t)$ de $a(t)$ est donnée par

$$I(t) = \Phi(t/h, n-1) \Pi_{n-1} \Phi' + \frac{1}{h} \left\{ h \sum_{n=1}^{(t/h)-1} \Phi(t/h, k) \begin{pmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi' \right\}. \quad (\text{A6.50})$$

On peut donc conclure:

- i) l'espérance de l'erreur d'arrondi accumulée est nulle ou d'ordre $O(1/h)$ suivant que l'erreur locale d'arrondi a une moyenne nulle ou non,
- ii) la variance de l'erreur d'arrondi accumulée est d'ordre $O(1/h)$ (donc l'écart type d'ordre $O(1/\sqrt{h})$).

A6.4.2 Sur la figure A6-1 on a schématisé l'erreur totale d'une méthode d'intégration en fonction du pas d'intégration h , toutes choses égales par ailleurs: cette erreur est la somme de l'erreur de discrétisation et de l'erreur

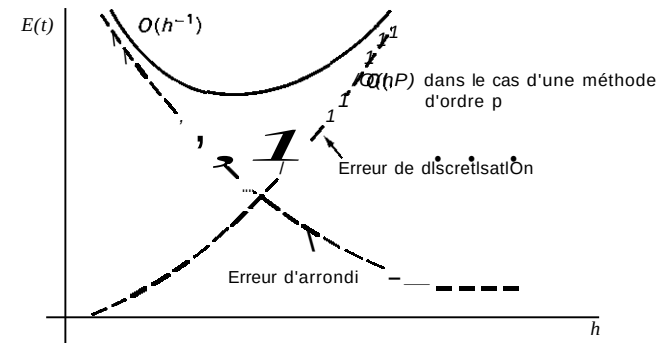


Figure A6-1. Erreur totale à l'instant t en fonction du pas d'intégration h .

d'arrondi. On voit que lorsque le pas est petit (resp. grand) c'est l'erreur d'arrondi (resp. de discrétisation) qui est dominante. On voit aussi clairement l'existence d'un pas optimal.

A6.S Intégration en temps réel

Lorsque l'on utilise une méthode numérique d'intégration pour obtenir des résultats en temps réel, plusieurs points sont à considérer.

1° Retard dans l'obtention du résultat

Il est en général nécessaire d'obtenir la valeur X_k avant l'instant $t_k + \Delta t$, Δt étant le retard admissible plus ou moins grand suivant l'application. Si Δt est nul, il est nécessaire d'utiliser des méthodes qui ne font intervenir $f(x, t)$ que pour des valeurs t strictement antérieures à t_k . La méthode d'Euler (A6.8) et la méthode d'Euler modifiée (A6.17) sont deux exemples de méthodes pouvant convenir dans ce cas.

2° Volume des calculs

Il est nécessaire de toutes façons de disposer de suffisamment de temps de l'unité de traitement du calculateur pendant chaque pas d'intégration h afin d'effectuer complètement les calculs relatifs à l'algorithme envisagé. Ceci peut être critique à un point tel que, dans le cas d'applications spécifiques, on peut être amené à repenser complètement l'architecture du calculateur et l'algorithme lui-même. Ainsi on peut être conduit à utiliser une structure parallèle de plusieurs unités de traitement calculant simultanément (figure A6-2).

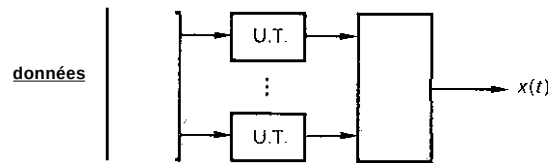


Figure A6-2. Architecture parallèle de calculateurs.

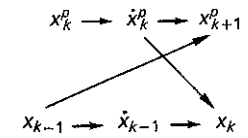
Par exemple, les formules prédicteurs-correcteurs d'ordre deux (A6.10) et (A6.12) ne se prêtent pas à une parallélisation. Par contre les formules

$$x_{k+1}^p = x_{k-1} + 2h\dot{x}_k^p \quad (\text{A6.51})$$

$$x_k = x_{k-1} + \frac{h}{2}(\dot{x}_k^p + \dot{x}_{k-1}) \quad (\text{A6.52})$$

permettent une conduite parallèle des calculs sur deux unités de traitement effectuant respectivement les calculs des lignes supérieure et inférieure du schéma suivant.

Une autre façon de résoudre le problème de la vitesse des calculs est de construire un ordinateur spécialisé dont l'architecture est adaptée à l'équation que l'on cherche à intégrer. Ainsi un DDA (*) est composé d'un grand nombre d'unités de traitement très simples (du genre d'un intégrateur) connectées entre elles de façon à mécaniser un algorithme d'intégration de l'équation différentielle considérée (voir chapitre 8).



Il est à prévoir qu'au cours des prochaines années, on verra se développer des architectures de calculateurs dont l'élément de base sera intermédiaire entre les deux extrêmes envisagées ci-dessus (unité centrale universelle, et simple intégrateur) afin de résoudre de façon très efficace un type d'équations donné.

(*) Digital Differential Analyzer: analyseur différentiel numérique.

BIBLIOGRAPHIE

La présente bibliographie ne prétend pas être exhaustive. En effet il existe un nombre considérable de publications traitant de la navigation par inertie ou du filtrage statistique. On a cherché ci-après à classer par sujets une faible partie de la littérature en insistant davantage sur les articles originaux et les livres.

La classification adoptée correspondant approximativement au plan du livre est la suivante:

1. Références générales sur la navigation par inertie
2. Systèmes linéaires, filtrage statistique et simulation numérique
3. Gyroscopes, accéléromètres et plates-formes asservies
4. Calculateurs numériques et DDA
5. Mécanisation et erreurs des systèmes de navigation par inertie
6. Alignements classiques et optimaux
7. Systèmes hybrides classiques et optimaux.

1. Références générales sur la navigation par inertie

- C. BROXMEYER, *Inertial Navigation Systems*, McGraw Hill, 1964.
- J. CARPENTIER, J. C. RADIX, J. BOUVET, G. BONNEVALLE, *Navigation par inertie*, Dunod, 1962.
- J. CARPENTIER, Nouveaux développements de la navigation par inertie, *Navigation*, n° 60, octobre 1967.
- B. de CRÉMIERS, La navigation maritime par inertie, *Navigation*, n° 27, pp. 258-263, juillet 1959.
- C. S. DRAPER, W. WRLGLEY, J. HOVORKA, *Inertial Guidance*, Pergamon Press, 1960.
- R.C. DUNCAN, Inertial Navigation, *Navigation*, Vol. 15, n° 1, pp. 39-52, Spring 1968.
- M. FERNANDEZ, G. R. MACOMBER, *Inertial Guidance Engineering*, Prentice Hall, 1962.
- E.I. FREY, P. SARDA, *Initiation à la navigation par inertie*, R-625, Instrumentation Laboratory, M.I.T.
- E. T. LEONDES (editor), *Guidance and Control of Aerospace Vehicles*, McGraw Hill, 1963.
- E. T. LEONDES, Inertial Navigation for Aircraft, *Scientific American*, pp. 80-84, March 1970.
- R. H. PARVIN, *Inertial Navigation*, Van Nostrand, 1962.
- G.R. PITMAN (editor), *Inertial Guidance*, Wiley, 1962.
- E. F. O'DONNELL (editor), *Inertial Navigation Analysis and Design*, McGraw Hill, 1964.
- J.E. RADIX, *La navigation par inertie*, Collection « Que sais-je? », P.U.F., 1967.
- C.J. SAVANT, R.C. HOWARD, E.B. SOLLOWAY, C.A. SAVANT, *Principles of Inertial Navigation*, McGraw Hill, 1961

2. Systèmes linéaires, filtrage statistique et simulation numérique

M. AOKI, *Optimization of Stochastic Systems*, Academie Press, 1967.

A. V. BALAKRISHNAN, *Communication Theory*, McGraw Hill, 1968.

R. H. BATTLIN, *Astronautical Guidance*, McGraw Hill, 1964.

Richard HELLMAN, *Introduction to the Mathematical Theory of Control Processes*, Academie Press, 1967.

A. BENSOUSSAN, Identification et filtrage, Cahier n° 1, IRIA, février 1969.

A. BENSOUSSAN, *Filtrage optimal des systèmes linéaires*, Dunod, 1971.

R. BOUDAREL, J. DELMAS, P. GUICHET, *Commande optimale des processus* (4 volumes), Dunod, 1967 à 1969.

W. M. BROWN, *Analysis of Linear Time-Invariant Systems*, McGraw Hill, 1963.

A. E. BRYSON, Y. C. Ho, *Applied Optimal Control*, Blaisdell Publishing Co., 1969.

R. S. Bucy, P. D. JOSEPH, *Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance*, Interscience, Wiley, 1968.

Ralph DEUTSCH, *Estimation Theory*, Prentice Hall, 1965.

R. C. DORF, *Les variables d'état dans l'analyse et la synthèse des systèmes de commande*, Dunod, 1967.

P. FAURRE, Representation of Stochastic Processes, *Ph.D. Dissertation*, Stanford, 1967.

T. L. GUNCKEL, Parametric Analysis of Optimal Estimation, Autonetics.

J.-C. GILLE, P. DECAULNE, M. PELEGRIN, *Dynamique de la commande linéaire*, Dunod, 1967.

P. HENRICT, *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, Wiley, 1962.

R. E. KALMAN, A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *J. of Basic Engineering*, pp. 35-45, March 1960.

R. E. KALMAN, R. S. Bucy, New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, *J. of Basic Engineering*, pp. 95-108, March 1961.

R. E. KALMAN, New Methods in Wiener Filtering Theory, Proc. of the First Symposium on Engineering Applications of Random Functions, Wiley, 1963.

R. E. KALMAN, P. L. FALB, M. A. ARBIB, *Topics in Mathematical System Theory*, McGraw Hill, 1969.

J. H. LANING, R. H. BATTLIN, *Processus aléatoires et systèmes asservis*, Dunod, 1959.

R. C. K. LEE, *Optimal Estimation, Identification and Control*, The M.I.T. Press, 1964.

C. T. LEONDES (Editor), *Advances in Control Systems*, Vol. 3, Academie Press, 1966.

C. T. LEONDES (Editor), *Theory and Applications of Kalman Filtering*, AGARDograph 139, 1970.

A. LICHNEROWICZ, *Algèbre et analyse linéaires*, Masson, 1960.

P. B. LIEBELT, *An Introduction to Optimal Estimation*, Addison-Wesley, 1967.

J. L. LIONS, Cours d'Analyse Numérique, École Polytechnique.

J. S. MEDITCH, *Stochastic Optimal Linear Estimation and Control*, McGraw Hill, 1969.

N. E. NAHI, *Estimation Theory and Applications*, Wiley, 1969.

J. C. RADIX, *Introduction ou filtrage numérique*, Eyrolles, 1970.

A. RALSTON, *A First Course in Numerical Analysis*, McGraw Hill, 1965.

A. RALSTON, H. S. WILF, *Méthodes mathématiques pour calculateurs arithmétiques*, Dunod, 1965.

Norbert WIENER, *Time Series*, The M.I.T. Press, 1949.

L. A. ZADEH, C. A. DESOER, *Linear System Theory*, McGraw Hill, 1963.

3. Gyroscopes, accéléromètres et plates-formes asservies

AGARD Conference Proceeding No. 43, *Inertial Navigation - Systems and Components*, May 1968.

R. N. ARNOLD, L. MAUNDER, *Gyrodynamics*, Academie Press, 1961.

R. H. CANNON, D. P. CHANDLER, Stable Platforms for High-Performance Aircraft, *Aeronautical Engineering Review*, pp. 42-47, December 1957.

R. H. CANNON, Kinematic Drift of Single-Axis Gyroscopes, *J. of Applied Mechanics*, pp. 357-360, September 1958.

C. S. DRAPER, W. WRIGLEY, L. R. GROHE, The Floating Integrating Gyro, *Aero. Eng. Rev.*, Vol. 15, n° 6, June 1956.

A. DUSHMAN, On Gyro Drift Models and their Evaluation, *IRE Trans in Aerospace and Navigational Electronics*, pp. 230-234, December 1962.

L. E. GOODMAN, A. R. ROBINSON, Effect of Finite Rotations on Gyroscopic Sensing Devices, *J. of Applied Mechanics*, pp. 210-213, June 1958.

R. L. HAMMON, An Application of Random Process Theory to Gyro Drift Analysis, *IRE Trans on Aeronautical and Navigational Electronics*, pp. 84-91, September 1960.

R. C. LANGFORD, Unconventional Inertial Sensors, *Astronautica Acta*, Vol. 12, No. 4, pp. 294-314, 1966.

T. MITSUTOMI, Free-Rotor Gyro-Stabilized Inertial Reference Platform, *IRE National Convention Record*, Pt. 5, pp. 74-87, 1959.

J. C. RADIX, Distribution des ordres dans une stabilisation «3 axes» en configuration non canonique, *Doc-Air-Espace*, n° 110, pp. 21-32, mai 1968.

J. C. RADIX, *Le gyroscope*, Collection «Que sais-je?» P. V.F., 1969.

A. S. RAVETZ, H. J. SANDBERG, Stationary and Nonstationary Characteristics of Gyro Drift Rate, *AIAA Guidance, Control and Flight Mechanics Conference*, Princeton, New Jersey, August 1969.

H. B. SABIN, 17 Ways to Measure Acceleration, *Control Engineering*, pp. 106-109.

P. H. SAVET, *Gyroscopes; Theory and Design with Applications to Instrumentation Guidance and Control*, McGraw Hill, 1961.

P. H. SAVET, Dynamics of Ideal Suspensions Applied to Rotating Bodies in Space, *AIAA Second Annual Meeting*, San Francisco, California, July 1965.

J. M. SLATER, *Inertial Guidance Sensors*, Reinhold Publishing Corporation, 1964.

A. J. VAN DIERENDONCK, R. G. BROWN, Modeling Nonstationary Random Processes with an Application to Gyro Drift Rate, *IEEE Trans on AES*, Vol. 5, No. 3, pp. 423-428, May 1969.

W. WRIGLEY, W. M. HOLLISTER, W. G. DENHARD, *Gyroscope Theory Design and Instrumentation*, The M.I.T. Press, 1969.
4. Calculateurs numériques et DDA

O. AMBLE, On the Principle of Connexion for Bush Integrators, *J. Sci. Instr.*, pp. 284-287, December 1946.

T. C. BARTEE, L. L. LEBOW, L. S. REED, *Theory and Design of Digital Machines*, McGraw Hill, 1962.

G. BOULAYE, *Logique et organes de calculatrices numériques*, Dunod, 1970.

H. BOUCHER, *Organisation et fonctionnement des machines arithmétiques*, Masson, 1960.

- V. BUSH, The Differential Analyser, *J. Franklin Institute*, Vol. 212, No. 4, pp. 447-448, October 1931.
- J. CHINAL, *Techniques booléennes et calculateurs*, Dunod, 1968.
- Y. CHU, *Digital Computers Design Fundamentals*, McGraw Hill, 1962.
1. FLORES, *Computer Organization*, Prentice Hall, 1969.
- R.L. HOOPER, L.D. AMDAHL, Trends in Aerospace Computers, *Datamation*, pp. 22-26, November 1967.
- D. E. KNUTH, *The Art of Computer Programming*, Vol. 1 et 2, Addison Wesley, 1968 et 1969.
- P. NASLIN, *Principes des calculateurs numériques automatiques*, Dunod, 1960.
- M. PELEGRIN, *Machines à calculer électroniques*, Dunod, 1963.
- T.R.H. SIZER (editor), *The Digital Differential Analyser*, Chapman and Hall, 1968.
- P. WEGNER, *Programming Languages, Information Structures and Machine Organization*, McGraw Hill, 1968.
5. Mécanisation et erreurs des systèmes de navigation par inertie
- B. de CRÉMIERS, Navigation par inertie sur de longues distances, *Symposium AGARD* Oxford, 21-22 septembre 1967.
- S.L. FAGIN, A Unified Approach to the Error Analysis of Augmented Dynamically Exact Inertial Navigation Systems, *IEEE Trans on Aerospace and Navigational Electronics*, pp. 234-248, December 1964.
- E. S. GELLER, Inertial System Platform Rotation, *IEEE Trans on Aerospace Electronics*, Vol. 4, No. 4, pp. 557-568, July 1968.
- R.J. HOLM, Relation of Azimuth and Position Errors in a Long-Range Aircraft Inertial System, *Navigation*, Vol. 15, No. 3, pp. 274-279, Fall 1968.
- D. KING-HELE, The Shape of the Earth, *Scientific American*.
- B.O. LANGE, B. W. PARKINSON, Error Equations for Inertial Navigation with Special Application to Orbital Determination and Guidance, *Progress in Astronautics and Aeronautics*, Vol. 17, pp. 209-246, 1966.
- S. A. LEVINE, A. GELB, Geodetic and Geophysical Uncertainties — Fundamental Limitations on Terrestrial Inertial Navigation, *AIAA Guidance, Control and Flight Dynamics Conference*, Pasadena, August 12-18, 1968.
- J. C. PINSON, Inertial Guidance for Cruise Vehicles, ch. 4, dans C. T. LEONDES, *Guidance and Control*.
6. Alignements classiques et optimaux
- R. B. CANNON, Alignment of Inertial Guidance Systems by Gyrocompassing-Linear Theory, *Journal of the Aerospace Sciences*, pp. 885-895, November 1961.
- S.L. FAGIN, E. GRINCH, A. GRAEFE, Continuous Time-Varying Optimal Feedback Applied to the Augmentation and Rapid Alignment of Inertial Systems, *IEEE Trans on AES*, Vol. 2, No. 4, pp. 661-678, July 1966 and Vol. 3, No. 3, pp. 555-560, May 1967.
- J. A. BAND, Computer-Aided Inertial Platform Realignment in Manned Space Flight, *AIAA Guidance, Control and Flight Dynamics Conference*, Pasadena, California, August 1968.
- F. D. JURENKA, C. T. LEONDES, Optimum Alignment of an Inertial Autonav, *IEEE Trans on AES*, Vol. 3, No. 6, pp. 880-888, November 1967.

- E. H. THOMPSON, J. L. FARRELL, J. W. KNIGHT, Alignment Methods for Strapdown Inertial Systems, *Journal of Spacecraft and Rockets*, pp. 1432-1434, September 1966.
7. Systèmes hybrides classiques et optimaux
- K. J. ASTROM, Some Problems of Optimal Control in Inertial Guidance, *IBM Research Paper*, RJ-229, November 15, 1962.
- V. A. BLUMHAGEN, Stellar Inertial Navigation Applied to Cruise Vehicles, *IEEE Trans. on Aerospace and Navigational Electronics*, pp. 235-246, September 1963.
- R. E. BONA, C. E. HUTCHINSON, An Optimum Stellar-Inertial Navigation System, *Navigation*, Vol. 12, No. 2, June 1965.
- B. E. BONA, R. J. SMAY, Optimum Reset of Ship's Inertial Navigation System, *IEEE Trans. on AES*, Vol. 2, No. 4, pp. 409-414, July 66.
- L. P. BROCK, The Impact of Statistical Estimation on Inertial Navigation, *AGARD Symposium on Inertia/Navigation*, Oxford, September 21-22, 1967.
- R. G. BROWN, D. T. PRIEST, Optimization of a Hybrid Inertial Solar-Tracker Navigation System, *IEEE International Convention Record*, Vol. 12, Pt. 7, 1964.
- H. ERZBERGER, Application of Kalman Filtering to Error Correction of Inertial Navigators, NASA TN D-3874, 1967.
- P. FAURRE, F. GREZ, Application du filtrage de Kalman au recalage d'un navigateur par inertie, *Automatisme*, tome 14, n° 6, pp. 229-234, juin 1969.
- P. FAURRE, Système de navigation à inertie hybride optimisé, *AGARD Symposium on Hybrid Navigation Systems*, Delft, September 1969.
- P. FAURRE, Système de navigation à inertie hybride optimisé, *Navigation*, n° 70, pp. 135-145, avril 1970.
- A. GELB, Synthesis of a Very Accurate Inertial Navigation System, *IEEE Trans. on Aerospace and Navigational Electronics*, pp. 119-128, June 1965.
- M. KAYTON, W. R. FRIED (Editors), *Avionics Navigation Systems*, Wiley, 1969.
- P. POLACK, Exemples d'applications de procédés de navigation récursive, 16^e Congrès international d'astronautique, Athènes, 1965.
- W. A. PORTER, L. F. KAZDA, Optimization of a Generalized Velocity Inertial System, *IRE Trans. on Aerospace and Navigational Electronics*, pp. 72-77, June 1961.
- S. F. SCHMIDT, J. D. WEINBERG, J. S. LUKESH, Case study of Kalman Filtering in the C-5 Aircraft Navigation System, JACC-68, University of Michigan, July 1968.
- H. W. SORENSON, On the Treatment of Inertial Measurement Unit Data in Optimal Linear Navigation Policies, *IEEE Trans. on AES*, Vol. 5, No. 3, pp. 429-440, May 1969.

INDEX

A

accéléromètre 5, 136
(bouclage et codage), 146
à corde vibrante 146
(erreurs) 149
gyroscopique 138
(mesures) 151
pendulaire 137, 141
à quartz 139
Adams-Bashforth (méthode d'), 427
Adams-Moulton (méthode d'), 428
alignement initial 16, 306
 du premier ordre 310
 du deuxième ordre 313
 optimal 308, 319, 320
 sous-optimal 328
altitude (instabilité du calcul d') 15, 277
amortissement des erreurs 17, 282, 336
analyseur différentiel numérique 222, 361
analyse statistique des erreurs 296
ARINC 561 (normes) 377

B

bruit blanc 20, 22, 63

C

cadrage 236
calculateurs universels 188
calibration initiale 308
centrage magnétique 113
CEP 296
changement de repère 406
circuits intégrés 202
commandabilité 41
composants 101
convolution 418

D

description externe 32, 55
interne 32, 57
discretisation (voir erreurs de troncature)

E

ellipse à 50 % 296
à 90 % 296
équations différentielles 33, 425
d'erreurs 13, 270
d'erreurs de position 274
d'erreurs (covariance) 298
en ϕ 310
en ψ 272
de Wiener-Hopf 58
erreurs d'arrondi 434
d'un système de navigation 269
de troncature 228, 432
état 32
Euler (angles d') 412
(méthode d') 427
(paramètres d') 413

F

factorisation 60, 81
fiabilité 214
filtre statistique 20, 48, 56
 de Kalman-Bucy 24, 68, 72
 singulier 75
 de Wiener 58
fonction aléatoire 54
d'entrée-sortie 32
d'erreur 290
gaussienne 55
de transfert 35
de transition 32
force spécifique 4
Foucault (effet) 280

G

guidage 255

gyromètre 109

gyroscope 9, 103

 (commande digitale de) 122

 à deux degrés de liberté 109

 (erreurs) 127

 intégrateur 106

 (mesures) 129

 (performances) 135

1

intégrateur DDAS 238

intégration numérique 425

L

lemme de Yakubovich-Popov-Kalman 68

loi gyroscopique 7, 104

LTN 51, 377

M

matrice 405

 orthogonale 411

 de transition 37

mécanisation 243

mémoires 197

 à tores 208

N

Navigateur SAGEM Inertiel (NSI) 353

navigation 3, 255

nutaton 104

O

observabilité 45

p

palliers 110

période de Schuler 13, 280

 de 24 heures 284

pesanteur vulgaire 247

plate-forme 8, 158, 357

 (asservissements) 171, 173

 (passage de la boucle) 181

 (thermique de) 168

précession 104

produit scalaire 404

 vectoriel 404

Q

quaternion 413

R

recalage 25, 341

relativité (principe de) 4

repère 403, 406

réponse impulsionnelle 34

représentation markovienne 67

 spectrale 57

rotation 411

 instantanée 408

Runge-Kutta (méthode de) 429

S

Schuler (voir: periode de Schuler)

sensibilité 88

simulation 99

stabilité 86

stabilité 86

strapdown 8, 158, 260

systèmes dynamiques 31

 hybrides 17, 330

 optimaux 20, 341

 linéaires 33, 34

T

technique de l'e 97

temps réel 188, 436

tenseurs 405

terre 266

transformation de Fourier 416

 de Laplace 416

 (tableau) 420

 en 2422

 (tableau) 424

trièdre calculateur 272

plate-forme 270

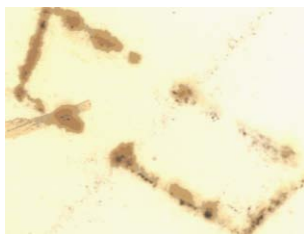
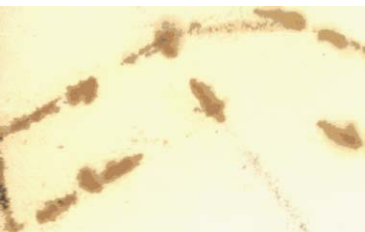
U

unité d'entrée-sortie 198

 de traitement 189

V

vecteur 403



Suite du premier rabot

plus soucieux de l'aspect opérationnel. Les composants inertiels (gyroscopes, accéléromètres et plates-formes) sont envisagés en détail dans des chapitres différents et un chapitre important présente les calculateurs embarqués universels et spécialisés (D.D.A.).

Une synthèse aussi large n'existe pas à ce jour dans la littérature. Elle doit intéresser aussi bien les chercheurs en mathématiques appliquées, statistique, automatique et informatique, que les élèves-ingénieurs des grandes écoles, ainsi que les ingénieurs ou utilisateurs de systèmes de navigation.

*

Sorti en 1962 de l'École polytechnique comme ingénieur au Corps des Mines, après un stage au C.E.R.A., Pierre FAURRE part aux U.S.A. pour étudier la théorie des systèmes à l'Université de Stanford ; il Y reçoit le titre de Ph. D. au début de l'année 1967. Il retournera d'ailleurs à Stanford comme Visiting Associate Professor, au premier trimestre 1970. Dès son retour en France, il organise un centre de recherches à l'École des mines de Paris, le Centre d'automatique dont il est directeur-adjoint, et, professeur à l'École, il y met en place un enseignement concrétisé par l'optique automatique. Nommé en 1969 directeur de recherches à l'I.R.I.A., il Y constitue un groupe de recherches sur le temps réel. Dans le cadre de son travail pour la SAGEM, il a l'occasion d'appliquer les techniques du filtrage de Kalman à divers problèmes de navigation, avec de nombreux ingénieurs de la société dont, en particulier, les co-auteurs du livre.

Méthodes Mathématiques de l'Informatique

COLLECTION SOUS LA DIRECTION DE J. L. LIONS

J. CEA

OPTIMISATION THÉORIE ET ALGORITHMES

A PARAÎTRE

A. BENSOUSSAN

FILTRAGE OPTIMAL DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Ph. CIARLET, D. FEINGOLD, P.A. RAVIART

MÉTHODES NUMÉRIQUES DE RÉOLUTION DES SYSTÈMES LINÉAIRES

P. J. LAURENT

APPROXIMATION ET OPTIMISATION

DU NOD, 92. RUE BONAPARTE - PARIS-6e